На правах рукописи

Байгонакова Галия Аманболдыновна

Аналитические методы в теории объемов многогранников в неевклидовой геометрии

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск — 2013

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Горно-Алтайский государственный университет», на кафедре математического анализа

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Медных Александр Дмитриевич

Официальные оппоненты:

Родионов Евгений Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Алтайский государственный университет», кафедра математического анализа, профессор
Гулько Сергей Порфирьевич, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», кафедра теории функций, заведующий кафедрой

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Сибирский федеральный университет», г. Красноярск

Защита состоится 28 ноября 2013 года в 16.30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.267.21, созданного на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, II уч. корпус, ауд. 304.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан «___» октября 2013 года.

Ученый секретарь диссертационного совета — Малютина Александра Николаевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Римановы поверхности и их геометрические инварианты играют важную роль в современном комплексном анализе. Естественными трехмерными аналогами римановых поверхностей служат многообразия, моделируемые в неевклидовых геометриях. Важнейшим инвариантом указанных многообразий служит их объем. Для его нахождения каждое многообразие каноническим образом разбивается на многогранники. Вычисление объема многогранника – это классическая задача, известная со времен Евклида, не потерявшая актуальность в настоящее время.

Одним из актуальных направлений современного комплексного анализа является изучение пространства Тейхмюллера, образованного геометрическими структурами на заданной римановой поверхности. Это пространство зависит от конечного числа параметров и представляет собой многообразие с особенностями, которое в настоящее время принято называть коническим многообразием или орбифолдом. При этом, риманова поверхность разрезается на многоугольники с геодезической границей, длины сторон которых образуют в пространстве Тейхмюллера систему координат Фенхеля-Нильсена. Во многих случаях строение орбифолда описывается средствами элементарной евклидовой или неевклидовой геометрий, что и приводит к необходимости использования классических теорем в этой области. Доказательства многих из этих теорем в современной литературе отсутствуют. Восполнению указанных пробелов в диссертации отводится особое внимание.

Диссертационная работа посвящена развитию новых аналитических методов для вычисления объемов неевклидовых многогранников.

Отметим, что указанное направление активно развивается новосибирской геометрической школой ([1], [18], [1*] и т.д.). Изложенные ниже результаты могут быть также использованы и для вычисления объемов многогранников в пространствах постоянной кривизны ([1], [1*], [2*]). Существенную роль в вычислении объемов евклидовых многогранников сыграли работы И. Х. Сабитова [7] и А. А. Гайфуллина [13]. В 1996 году И. Х. Сабитов [7] доказал, что объем трехмерного евклидова симплициального многогранника есть корень алгебраического уравнения, коэффициентами которого являются многочлены, зависящие только от комбинаторного типа многогранника и длин его ребер. В 2011 году четырехмерный аналог этой теоремы был получен в работе А. А. Гайфуллина [13].

В гиперболическом и сферическом случаях ситуация является более сложной, формула объема для бипрямоугольного тетраэдра была известна со времен Н. И. Лобачевского [16]. Объемы куба Ламберта и некоторых других неевклидовых многогранников вычислены Э. Б. Винбергом [2], Р. Келлерхальц [14], Я. З. Моханти [21], Д. А. Деревниным, А. Д. Медных [12], А. Ю. Весниным [18], Дж. Паркером [19], М. Г. Пашкевич [5] и другими авторами. Объемы гиперболических многогранников, имеющих хотя бы одну вершину на бесконечности, найдены Э. Б. Винбергом [2].

До последнего времени оставалась нерешенной классическая задача о вычислении объема произвольного тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах. В 1999 году в работе Ю. Чо и Х. Кима [11] была получена формула объема произвольного тетраэдра в виде суммы шестнадцати дилогарифмических функций. Позже в 2005 году Дж. Мураками и У. Яно [22] также получили достаточно сложную формулу для вычисления объема произвольного тетраэдра. Более простое доказательство этой формулы, которое включает также объемы усеченных тетраэдров, было найдено А. Ушиджимой [24] в 2006 году. Элементарную интегральную формулу объема гиперболического тетраэдра в 2004 году предложили Д. А. Деревнин, А. Д. Медных [4].

Известно, что если многогранник обладает симметрией, то формула его объема существенно упрощается. Впервые этот замечательный факт был установлен самим Лобачевским [16] для идеального гиперболического тетраэдра. Дж. Милнор [20] в 1982 году представил соответствующий результат в весьма простой форме. В общем случае объем симметричного тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах найден в работе Д. А. Деревнина, А. Д. Медных и М. Г. Пашкевич [5] в 2005 году. Объемы октаэдров, обладающих различными симметриями, и двойственных к ним гексаэдров в сферическом пространстве найдены Н. В. Абросимовым, М. Годой Молиной и А. Д. Медных [1].

Цель работы заключается в получении аналога формулы Милнора для случая идеального симметричного октаэдра в гиперболическом пространстве; вычислении объема гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией; нахождении площади трапеции в сферическом случае; получении аналогов формулы Бретшнайдера в гиперболическом и сферическом случаях.

Методы исследований. Полученные основные результаты опираются на идеи и методы вещественного, комплексного и функционального анализа.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем: 1) доказан аналог формулы Милнора для идеального гиперболического октаэдра; 2) получены формулы объемов гиперболического октаэдра, обладающего mmm- симметрией; 3) найдена формула площади сферической трапеции через длины ее сторон; 4) получено новое доказательство формулы Бретшнайдера для площади неевклидова четырехугольника.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Результаты диссертационного исследования носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами из области геометрии и комплексного анализа. Материалы диссертации могут быть применены при организации спецкурсов по дополнительным вопросам вещественного, комплексного и функционального анализа, предназначенных для магистрантов и аспирантов высших учебных заведений.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на следующих российских и международных конференциях: летних школах по геометрическому анализу (г. Горно-Алтайск, 2009, 2 – 8 августа 2010 г., 13 – 19 августа 2011 г., 11 – 19 августа 2012 г.); XLIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 16 – 20 апреля 2011 г.); Международной школе-конференции по геометрии и анализу (г. Кемерово, 19 – 26 июня 2011 г.); X Международной Казанской летней научной школе-конференции (г. Казань, 1 – 7 июля 2011 г.); X молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения» (г. Казань, 31 октября – 4 ноября 2011 г.); L юбилейной международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 13 – 19 апреля 2012 г.); Международной конференции «Дни геометрии в Новосибирске» (г. Новосибирск, 30 августа – 1 сентября 2012 г.); Международной школе-семинаре «Ломоносовские чтения на Алтае» (г. Барнаул, 20 – 23 ноября 2012 г.).

Результаты диссертации обсуждались на семинарах ведущих научно-исследовательских институтов и университетов: кафедры математического анализа Горно-Алтайского государственного университета под руководством д.ф.-м.н. А. В. Тетенова; отдела анализа и геометрии Института математики СО РАН под руководством академика Ю. Г. Решетняка; «Геометрия и топология и их приложения» Института математики СО РАН под руководством чл.-корр. А. Ю. Веснина; «Геометрическая теория функций» Института математики СО РАН под руководством чл.-корр. А. Ю. Веснина, проф. А. Д. Медных и проф. В. В. Асеева; кафедры математического анализа Алтайского государственного университета под руководством проф. Е. Д. Родионова.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 статьях журналов перечня ВАК и 10 тезисах международных и российских научных конференций. Вклад авторов в совместные работы ([1*]-[5*], [8*], [10*],

[14*]) равноценный.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 52 источников. Общий объем диссертации – 85 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, дается обзор научной литературы по изучаемой проблеме, излагается краткое содержание работы, формулируются основные результаты.

Первая глава диссертации посвящена вычислению объема идеального симметричного октаэдра в гиперболическом пространстве.

В параграфе 1.1 изложена история данного вопроса из работы Дж. Милнора [20], где доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1.1. *Объем V идеального гиперболического тетраэдра $T = T(A, B, C)$ с двугранными углами A, B, C, $\quad (A + B + C = \pi)$ вычисляется по формуле:*

$$V(T) = \Lambda(A) + \Lambda(B) + \Lambda(C),$$

где $\Lambda(x) = -\int_0^x \log|2\sin\xi|d\xi$ – функция Лобачевского.

Сформулируем следствие из данной теоремы.

Следствие 1.1.1. *Максимальный объем V идеального гиперболического тетраэдра достигается при $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$ и равен:*

$$V(T) = 3\Lambda\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 1.01494\ldots.$$

Целью первой главы является перенесение результатов работы [20] на случай идеального симметричного гиперболического октаэдра.

Пусть O – идеальный симметричный октаэдр в пространстве H^3 с попарно равными двугранными углами при противоположных ребрах, обозначим его двугранные углы через A, B, C, D, E и F, тогда объем октаэдра O определяется следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1.2.1. *Объем V гиперболического идеального симметричного октаэдра O с двугранными углами A, B, C, D, E и F равен:*

$$V(O) = 2\left(\Lambda(\frac{\pi + A + B + E}{2}) + \Lambda(\frac{\pi - A - B + E}{2})\right) +$$

$$+2\left(\Lambda(\frac{\pi+A-B-E}{2})+\Lambda(\frac{\pi-A+B-E}{2})\right),$$

где $0 < A, B, C, D, E, F < \pi$.

Сформулируем полученное следствие из доказанной теоремы.

Следствие 1.2.1. *Максимальный объем V идеального симметричного октаэдра достигается при* $A = B = C = D = E = F = \dfrac{\pi}{2}$ *и равен:*

$$V(O) = 4\Lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 3.66386\ldots.$$

Вторая глава диссертации посвящена вычислению объема октаэдра с mmm-симметрией в гиперболическом пространстве.

Рассмотрим гиперболический октаэдр $O = O(A, B, C)$, обладающий mmm-симметрией, то есть зеркальной симметрией относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей, проходящих вдоль его реберных циклов, где A, B, C его двугранные углы. Обозначим через a, b, c соответствующие длины его ребер.

Отметим, что объем mmm-симметричного октаэдра в евклидовом и сферическом случаях был вычислен ранее. Далее приведем эти результаты. Так, в евклидовом случае известна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.2.1. (Р. В. Галиулин, С. Н. Михалев, И. Х. Сабитов) [3]. *Пусть V – объем евклидова октаэдра $O(A, B, C)$, обладающего mmm- симметрией, с длинами ребер a, b, c, тогда величина V может быть найдена как положительный корень уравнения:*

$$9V^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2).$$

В сферическом случае известна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.2.2. (Н. В. Абросимов, А. Д. Медных и М. Годой Молина) [1]. *Пусть $O = O(A, B, C)$ – сферический октаэдр, обладающий mmm-симметрией, тогда объем $V = V(O)$ задается выражением:*

$$2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\left(\operatorname{arctanh}(X\cos\tau)\right)\frac{d\tau}{\cos\tau}+$$

$$+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\left(\operatorname{arctanh}(Y\cos\tau)+\operatorname{arctanh}(Z\cos\tau)+\operatorname{arctanh}(\cos\tau)\right)\frac{d\tau}{\cos\tau},$$

где $X = \cos A,\quad Y = \cos B,\quad Z = \cos C$ и $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ *– корень уравнения:*

$$\tan^2\theta + \frac{(1+X)(1+Y)(1+Z)}{1+X+Y+Z} = 0.$$

В данной главе эти результаты распространяются на гиперболический случай. В параграфе 2.1 доказывается утверждение существования гиперболического октаэдра $O(A, B, C)$, обладающего mmm-симметрией.

Утверждение 2.1.1. *Пусть имеется набор чисел* $0 < A, B, C < \pi$. *Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*

(i) *Существует компактный гиперболический октаэдр* $\mathcal{O}(A, B, C)$ *с двугранными углами* A, B, C, *обладающий* mmm*-симметрией.*

(ii) *Выполнены неравенства:*

$$1 + \cos A + \cos B + \cos C > 0$$
$$A + B > \pi,\ A + C > \pi,\ B + C > \pi$$

Для того, чтобы вычислить объем mmm-симметричного гиперболического октаэдра, нам нужны будут следующие тригонометрические соотношения, связывающие длины ребер и двугранные углы указанного многогранника. В частности, это дает возможность выразить длины ребер через двугранные углы.

ТЕОРЕМА 2.2.3 (Правило синусов-тангенсов). *Пусть* $O(A, B, C)$ *– гиперболический октаэдр, обладающий* mmm*-симметрией, с двугранными углами* A, B, C *и соответствующими длинами ребер* a, b, c, *тогда выполняются следующие тригонометрические соотношения:*

$$\frac{\sin A}{\tanh a} = \frac{\sin B}{\tanh b} = \frac{\sin C}{\tanh c} = T,$$

где T *положительный корень уравнения:*

$$T^2 = \frac{(1 + X)(1 + Y)(1 + Z)}{1 + X + Y + Z},$$

$X = \cos A,\ Y = \cos B,\ Z = \cos C.$

Отметим, что если гиперболический октаэдр O существует, то имеет место неравенство:

$$\frac{(1 + X)(1 + Y)(1 + Z)}{1 + X + Y + Z} > 0.$$

Основной результат данной главы приведен в параграфе 2.3 в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.3.2. *Пусть $O(A,B,C)$ – гиперболический октаэдр, обладающий mmm-симметрией. Положим $X=\cos A$, $Y=\cos B$, $Z=\cos C$ и обозначим через T положительный корень уравнения:*

$$T^2=\frac{(1+X)(1+Y)(1+Z)}{1+X+Y+Z},$$

тогда объем $V=V(O)$ находится по следующим формулам:

(i) *Если $0\le T<1$, то объем V равен:*

$$V=-\int_0^{\tau}\log\left|\frac{(1-\cos t)(\cos A-\cos t)(\cos B-\cos t)(\cos C-\cos t)}{(1+\cos t)(\cos A+\cos t)(\cos B+\cos t)(\cos C+\cos t)}\right|dt,$$

где величина τ, $\quad 0<\tau<\dfrac{\pi}{2}$, находится из уравнения $\sin\tau=T$.

(ii) *Если $T=1$, то при $a\le b\le c$ объем V равен:*

$$V=2\left(\int_0^a\frac{x\,dx}{\cosh x}+\int_0^b\frac{x\,dx}{\cosh x}-\int_0^c\frac{x\,dx}{\cosh x}\right),$$

где a,b,c – длины соответствующих ребер.

(iii) *Если $T>1$, то объем V равен:*

$$V=2\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\tan\eta}\right)+\arctan\left(\frac{X}{\tan\eta}\right)\right)\frac{d\eta}{\cos\eta}+$$

$$+2\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\left(\arctan\left(\frac{Y}{\tan\eta}\right)+\arctan\left(\frac{Z}{\tan\eta}\right)\right)\frac{d\eta}{\cos\eta},$$

при этом θ, $\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$, находится из уравнения: $\dfrac{1}{\cos\theta}=T$.

В качестве следствия из данной теоремы получим следующий результат.

Рассмотрим прямоугольный тетраэдр T, имеющий три прямых угла при вершине, с длинами существенных сторон a,b,c.

ТЕОРЕМА 2.4.2. *Пусть существенные стороны прямоугольного тетраэдра T связаны соотношением $\cosh c=\cosh a+\cosh b-1$. Тогда объем тетраэдра $V(T)$ вычисляется по следующей формуле:*

$$V(T)=\frac{1}{2}\left(\int_0^a\frac{x}{\cosh x}\,dx+\int_0^b\frac{x}{\cosh x}\,dx-\int_0^c\frac{x}{\cosh x}\,dx\right).$$

Третья глава посвящена вычислению площадей неевклидовых четырехугольников. В данной главе нами вычислена площадь сферической трапеции через длины ее сторон и получены сферическая и гиперболическая версии теоремы Бретшнайдера.

Из элементарной геометрии нам известна формула площади треугольника S через длины его сторон a, b и c, которая может быть представлена в следующем виде:

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)p,$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр треугольника. Данная формула известна как формула Герона, названной так по имени Герона Александрийского, выдающегося древнегреческого математика, жившего в I в.н.э.

Формула Герона выражает площадь треугольника через длины его сторон, а для многоугольников с большим количеством сторон формулы такого типа не существует, так как площадь многоугольника может меняться при его изгибании с сохранением длин сторон.

Площадь четырёхугольника, вообще говоря, не определяется через длины его сторон. Однако, это справедливо в некоторых частных случаях, например, когда четырёхугольник является вписанным, либо когда он представляет собой трапецию. В первом случае нам известна теорема Брахмагупты, а именно, площадь S вписанного в окружность четырёхугольника со сторонами a, b, c, d и полупериметром $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ равна:

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

Формула Брахмагупты является обобщением формулы Герона. Формулировку и доказательство данной теоремы можно найти в книге ([6], с. 90).

Немецкий математик Карл Бретшнайдер в 1842 году нашел площадь произвольного евклидова четырехугольника. Классическая теорема Бретшнайдера [10] утверждает, что площадь S евклидова четырехугольника со сторонами a, b, c, d и противолежащими углами A и C находится по формуле:

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{A+C}{2},$$

где $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ – полупериметр четырехугольника ([6], с. 89).

Отметим, что для сферического четырёхугольника формула площади через длины его сторон и диагонали была получена в монографии W. J. M'Clelland, T. Preston 1886 г. ([23], с. 165). В гиперболическом случае варианты формулы

Брахмагупты для вписанного четырехугольника найдены в работе А. Д. Медных [17]. Формула площади трапеции на гиперболической плоскости через длины её сторон получена в работе Д. Ю. Соколовой [8].

Целью параграфа 3.1 является перенос результата работы [8] на сферический случай.

Определение 3.1.1. *Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ называется трапецией, если для его внутренних углов справедливо соотношение:*

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D.$$

В этом случае стороны AD и BC называются основаниями трапеции $ABCD$, а AB и CD – её боковыми сторонами, a, b, c, d – соответствующие длины сторон трапеции, e и f – длины диагоналей AC и BD. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $b \neq d$.

Сформулируем основную теорему данного параграфа.

ТЕОРЕМА 3.1.2. *Площадь S сферической трапеции $ABCD$ со сторонами a, b, c, d находится из соотношения:*

$$\tan^2 \frac{S}{4} = \frac{\sin^2 \frac{b+d}{2} \sin \frac{a+b-c-d}{4} \sin \frac{a+b+c-d}{4}}{\sin^2 \frac{b-d}{2} \cos \frac{a-b-c-d}{4} \cos \frac{a-b+c-d}{4}}.$$

$$\cdot \frac{\sin \frac{-a+b+c-d}{4} \sin \frac{a-b+c+d}{4}}{\cos \frac{a+b-c+d}{4} \cos \frac{a+b+c+d}{4}}.$$

Замечание 3.1.2. Площадь S_E евклидовой трапеции со сторонами a, b, c, d вычисляется по формуле:

$$S_E^2 = \frac{(b+d)^2(a+b-c-d)(a+b+c-d)(-a+b+c-d)(a-b+c+d)}{16(b-d)^2}.$$

Отметим, что $\tan^2 \frac{S}{4} \approx (\frac{S_E}{4})^2$ при достаточно малых величинах a, b, c, d.

В параграфе 3.2 получен аналог теоремы Бретшнайдера в сферической геометрии. Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 3.2.1. *Площадь S сферического четырехугольника со сторонами $a, b, c, d,$ углами A, B, C, D и полупериметром $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ на-*

ходится по формуле:

$$\sin^2\frac{S}{4}=\frac{\sin\dfrac{p-a}{2}\sin\dfrac{p-b}{2}\sin\dfrac{p-c}{2}\sin\dfrac{p-d}{2}}{\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{c}{2}\cos\dfrac{d}{2}}-\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\tan\frac{c}{2}\tan\frac{d}{2}\sin^2\frac{K}{4},$$

где $K=A-B+C-D$.

После завершения работы над диссертацией ее автору стало известно, что формулировка теоремы 3.2.1 встречалась ранее в работе С. В. Брауэра, написанной в начале прошлого века. Однако, доказательство этой теоремы, предложенное в диссертации, основано на совершенно иных идеях и представляется более простым. Напомним, что сферический четырёхугольник с углами A, B, C и D является вписанным в окружность тогда и только тогда, когда выполнено равенство: $A+C=B+D$ [15].

Следствие 3.2.1. *Площадь S вписанного сферического четырехугольника со сторонами a, b, c, d находится по формуле:*

$$\sin^2\frac{S}{4}=\frac{\sin\dfrac{p-a}{2}\sin\dfrac{p-b}{2}\sin\dfrac{p-c}{2}\sin\dfrac{p-d}{2}}{\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{c}{2}\cos\dfrac{d}{2}},$$

где $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$.

Замечание 3.2.1. Данный результат является сферическим аналогом формулы Брахмагупты, полученным в монографии ([23], с. 164).

Следствие 3.2.2. *Если сферический четырёхугольник со сторонами a, b, c и d вписан в одну окружность и описан около другой, то его площадь S находится по формуле:*

$$\sin^2\frac{S}{4}=\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\tan\frac{c}{2}\tan\frac{d}{2}.$$

Следствие 3.2.3. *Сферический четырёхугольник со сторонами a, b, c и d имеет максимальную площадь S тогда и только тогда, когда он вписан в окружность.*

Замечание 3.2.2. Данный результат известен из работы [15].

Аналог теоремы Бретшнайдера в гиперболической геометрии со следствиями получены в параграфе 3.3. Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 3.3.1. *Площадь S гиперболического четырехугольника со сторонами a, b, c, d, углами A, B, C, D находится по формуле:*

$$\sin^2\frac{S}{4} = \frac{\sinh\frac{p-a}{2}\sinh\frac{p-b}{2}\sinh\frac{p-c}{2}\sinh\frac{p-d}{2}}{\cosh\frac{a}{2}\cosh\frac{b}{2}\cosh\frac{c}{2}\cosh\frac{d}{2}} -$$

$$-\tanh\frac{a}{2}\tanh\frac{b}{2}\tanh\frac{c}{2}\tanh\frac{d}{2}\sin^2\frac{K}{4},$$

где $K = A - B + C - D$, $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ – полупериметр.

Следствие 3.3.1. *Площадь S вписанного гиперболического четырехугольника со сторонами a, b, c, d находится по формуле:*

$$\sin^2\frac{S}{4} = \frac{\sinh\frac{p-a}{2}\,\sinh\frac{p-b}{2}\,\sinh\frac{p-c}{2}\,\sinh\frac{p-d}{2}}{\cosh\frac{a}{2}\,\cosh\frac{b}{2}\,\cosh\frac{c}{2}\,\cosh\frac{d}{2}},$$

где $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$.

Замечание 3.3.1. Данный результат является гиперболическим аналогом формулы Брахмагупты, полученным в работе [17].

Следующее следствие выражает площадь описанного четырехугольника через стороны и сумму противолежащих углов. В этом случае выполняется равенство: $a + c = b + d$.

Следствие 3.3.2. *Площадь S описанного гиперболического четырехугольника со сторонами a, b, c, d и углами A, B, C, D находится по формуле:*

$$\sin^2\frac{S}{4} = \tanh\frac{a}{2}\;\tanh\frac{b}{2}\;\tanh\frac{c}{2}\;\tanh\frac{d}{2}\cos^2\frac{A-B+C-D}{4}.$$

Следствие 3.3.3. *Если гиперболический четырёхугольник со сторонами a, b, c и d вписан в одну окружность и описан около другой, то его площадь S находится по формуле:*

$$\sin^2\frac{S}{4} = \tanh\frac{a}{2}\tanh\frac{b}{2}\tanh\frac{c}{2}\tanh\frac{d}{2}.$$

Следствие 3.3.4. *Гиперболический четырёхугольник со сторонами a, b, c и d имеет максимальную площадь S тогда и только тогда, когда он вписан в окружность, орицикл или в одну ветвь эквидистанты.*

Замечание 3.3.2. Данный результат хорошо известен из многих работ ([9], [15], [25]), однако в цитируемых работах он доказывается либо через изопериметрические неравенства, либо с помощью исследования функций от нескольких переменных на экстремум. В диссертации приводится его элементарное доказательство.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Александру Дмитриевичу Медных за постановку задач, постоянную поддержку и помощь в работе. Автор благодарит также профессора Виктора Алексеевича Александрова (Новосибирск) и профессора Петера Бузера (Швейцария) за большую работу по поиску работ, написанных немецкими математиками в начале прошлого века и непосредственно связанных с темой диссертации.

Используемая литература

[1] Абросимов, Н. В. Об объеме сферического октаэдра с симметриями / Н. В. Абросимов, М. Годой Молина, А. Д. Медных // Соврем. мат. и ее прил. – 2008. – Т. 60. – С. 3–12.

[2] Винберг, Э. Б. Геометрия 2. Современные проблемы математики / Э. Б. Винберг – М.: ВИНИТИ (Итоги науки и техники), 1988. Т. 29. – С. 1–146.

[3] Галиулин, Р. В. Некоторые приложения формулы для объема октаэдра / Р. В. Галиулин, С. Н. Михалев, И. Х. Сабитов // Мат. заметки. – 2004. – Т. 76, № 1. – С. 27–43.

[4] Деревнин, Д. А. О формуле объема гиперболического тетраэдра / Д. А. Деревнин, А. Д. Медных // Успехи мат. наук. – 2005. – Т. 60, № 2. – С. 159–160.

[5] Деревнин, Д. А. Объем симметричного тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах / Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, М. Г. Пашкевич // Сиб. мат. журн. – 2004. – Т. 45, № 5. – С. 1022–1031.

[6] Понарин, Я. П. Элементарная геометрия. Т.1. Планиметрия / Я. П. Понарин. – М.: МЦНМО. 2004. – С. 312.

[7] Сабитов, И. Х. Объем многогранника как функция длин его ребер / И. Х. Сабитов // Фундамент. и прикл. мат. – 1996. – Т. 2, № 4. – С. 305–307.

[8] Соколова, Д. Ю. О площади трапеции на плоскости Лобачевского / Д. Ю. Соколова // Сиб. электрон. матем. изв. – 2012. – Т. 9. – С. 256-260.

[9] Bezdek, K. Ein elementarer Beweis für die isoperimetrische Ungleichung in der euklidischen und hyperbolischen Ebene / K. Bezdek // Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eötvös, Sect. Math. – 1984. – V. 27 – P. 107–112.

[10] Bretschneider, C. A. Untersuchung der trigonometrischen Relationen des geradlinigen Viereckes / C. A. Bretschneider // Arch. Math. – 1842. – Bd. 2. – S. 225–261.

[11] Cho, Yu. On the volume formula for hyperbolic tetrahedra / Yu. Cho, H. Kim // Disc. and Comp. Geometry. – 1999. – V. 22. – P. 347–366.

[12] Derevnin, D. A. On the volume of spherical Lambert cube / D. A. Derevnin, A. D. Mednykh // Mat. Zametki. – 2009. – V. 86, № 2. – P. 190–201.

[13] Gaifullin, A. A. Sabitov polinomials for polyhedra in four dimensions / A. A. Gaifullin // arXiv: 1108.6014v1 [math.MG]. – 2011.

[14] Kellerhals, R. On the volume of hyperbolic polyhedra / R. Kellerhals // Math. Ann. – 1989. – V. 285. – P. 541–569.

[15] Lienhard, W. Cyclic polygons in non-Euclidean geometry / W. Lienhard // Elem. math. – 2011. – V. 66, №. 2. – P. 74–82.

[16] Lobachevsky, N. I. Imaginäre Geometrie und ihre Anwendung auf einige Integrale / N. I. Lobachevsky // Deutsche Übersetzung von H. Liebmann. Leipzig: Teubner. – 1904.

[17] Mednykh, A. D. Brahmahupta formula for cyclic quadrilaterals in the hyperbolic plane / A. D. Mednykh // Sib. Electron. Math. Reports. – 2012. – V. 9. P. 247–255.

[18] Mednykh, A. D. On the volume of hyperbolic Whitehead link cone-manifolds / A. D. Mednykh, A. Ya. Vesnin // SCIENTIA, Series A: Mathematical Sciences. – 2002. – V. 8. – P. 1–11.

[19] Mednykh, A. D. On hyperbolic polyhedra arising as convex cores of quasi-Fuchsian punctured torus groups / A. D. Mednykh, J. Parker, A. Yu. Vesnin // Bol. Soc. Mat. Mexicana. – 2004. – V. 10, № 3. – P. 357-381.

[20] Milnor, J. W. Hyperbolic geometry: the first 150 years / J. W. Milnor // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. – V. 6, № 1. – P. 9–24.

[21] Mohanty, Ya. Z. Hyperbolic polyhedra: volume and scissors congruence Ph. D. in Mathematics, UCSD. – 2002. – P. 123.

[22] Murakami, J. On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron / J. Murakami, M. Yano // Comm. Anal. Geom. – 2005. – V. 13. P. 379–200.

[23] M'Clelland, W. J. A treatise on spherical trigonometry with application to spherical geometry and numerous examples. P. II / W. J. M'Clelland, T. A. Preston // London: Macmillian and Co. – 1886. – P. 400.

[24] Ushijima, A. Volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra / A. Ushijima // In: Non-Euclidean Geometries. Math. and Its Appl. – 2006. – V. 581. – P. 249–265.

[25] Walter, R. Polygons in hyperbolic geometry 2: Maximality of area / R. Walter // arXiv:1008.3821v1 [math.MG]. – 2010.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах, которые включены в перечень российских рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертаций:

[1*] Байгонакова, Г. А. **О формуле Милнора для объема гиперболического октаэдра** / Г. А. Байгонакова, А. Д. Медных // Математические заметки ЯГУ. – 2010. – Т. 17, № 2. – С. 3–9. – 0,5/0,25 п.л.

[2*] Байгонакова, Г. А. **О геометрических свойствах гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией** / Г. А. Байгонакова, А. Д. Медных, М. Годой Молина // Вестник Кемеровского государственного университета. – 2011. – Т. 47, № 3/1 – С. 9–14. – 0,7/0,35 п.л.

[3*] Байгонакова, Г. А. **О формуле Бретшнайдера для сферического четырехугольника** / Г. А. Байгонакова, А. Д. Медных // Математические заметки ЯГУ. – 2012. Т. 19, № 2. – С. 3–12. – 0,69/0,35 п.л.

[4*] Байгонакова, Г. А. **О формуле Бретшнайдера для гиперболического четырехугольника** / Г. А. Байгонакова, А. Д. Медных // Математические заметки ЯГУ. – 2012. Т. 19, № 2. – С. 12–20. – 0,63/0,32 п.л.

[5*] Abrosimov, N. V. **Hyperbolic octahedron with mmm-symmetry** / N.V. Abrosimov, G.A. Baigonakova // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2013. – T.10. – C. 123–140. – 1,12/0,63 п.л.

Публикации в других научных изданиях:

[6*] Байгонакова, Г. А. Объем гиперболического тетраэдра с прямыми углами при вершине / Г. А. Байгонакова // Материалы школы конференции по геометрическому анализу (Горно-Алтайск, 19 – 25 августа 2010 г.). – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2010. – С. 5–6. – 0,06 п.л.

[7*] Байгонакова, Г. А. Об объеме гиперболического тетраэдра с прямыми углами при вершине / Г. А. Байгонакова // Сборник научных

трудов кафедры математического анализа № 2. – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2010. – С. 12–17. – 0,38 п.л.

[8*] Байгонакова, Г. А. Об объеме идеального симметрического октаэдра / Г. А. Байгонакова, А. Д. Медных // Сборник трудов кафедры математического анализа № 3. – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2010. – С. 57–62. – 0,5/0,25 п.л.

[9*] Байгонакова, Г. А. Вычисление объема идеального симметричного октаэдра / Г. А. Байгонакова // Материалы XLIX международной научной студенческой конференции: Математика (Новосибирск, 16 – 20 апреля 2011 г.). – Новосибирск: изд. Новосиб. гос. ун-та, 2011. – С. 73.– 0,06 п.л.

[10*] Байгонакова, Г. А. Вычисление объема mmm-симметричного октаэдра в гиперболическом пространстве / Г. А. Байгонакова, А. Д. Медных, М. Годой Молина // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Теория функции, ее приложения и смежные вопросы // Материалы Десятой международной Казанской летней научной школы-конференции (Казань, 1 – 7 июля 2011 г.). – Казань: изд. Казанского математического общества, изд. Казанского государственного университета, 2011. Т. 43. – С. 29–31. – 0,13/0,04 п.л.

[11*] Байгонакова, Г. А. Объем симметричного октаэдра в H^3 / Г. А. Байгонакова // Материалы школы конференции по геометрическому анализу (13–19 август, 2011 г.). – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2011. – С. 12–13. – 0,13 п.л.

[12*] Байгонакова, Г. А. Объем идеального октаэдра в гиперборлическом пространстве / Г. А. Байгонакова // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского / Материалы десятой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения» — 2011 (Казань, 31 октября – 4 ноября 2011 г.). Казань: изд. Казанского математического общества, 2011. Т.44. – С. 86–87. – 0,06 п.л.

[13*] Байгонакова, Г. А. Вычисление объема mmm - симметричного октаэдра в простейшей геометрической ситуации / Г. А. Байгонакова // 50-я юбилейная Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 13 – 19 апреля 2012 г.). – Новосибирск: изд. Новосиб. гос. ун-та, 2012. – С. 73–75. – 0,06 п.л.

[14*] Байгонакова, Г. А. Площадь трапеции в сферической геометрии / Г. А. Байгонакова, Д. Ю. Соколова // Материалы школы конференции по геометрическому анализу (Горно-Алтайск, 11 – 19 августа, 2012 г.). – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2012. – С. 12–13. – 0,13/0,07 п.л.

[15*] Байгонакова, Г. А. О формуле Бретшнайдера в гиперболическом и сферическом случаях / Г. А. Байгонакова // Сборник научных статей международной школы-семинара «Ломоносовские чтения на Алтае» (Барнаул, 20 – 23 ноября, 2012 г.). – Барнаул: АлтГПА, 2012. Ч.I. – С. 248–252. – 0,31 п.л.