

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.2

Г.Н. Решетникова, Е.М. Ющенко

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОСТАВКАМИ И РЕКЛАМОЙ

Приводится описание математической модели управления поставками, рекламой, хранением и сбытом товара. Формирование следящей системы адаптивного управления осуществляется на основе оптимизации локального квадратичного критерия и его модификации. Предлагается система ограничений на управление, где разделяются действия статической и динамической рекламы и учитываются продолжительности воздействий различных видов динамической рекламы на потребителя. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: модель поставок и рекламы, адаптивное управление, локальный квадратичный критерий, система ограничений.

В последнее время появилось новое научное направление – динамическая экономика, когда в качестве математических моделей используются системы дифференциальных или разностных уравнений. В этом случае методы теории управления в пространстве состояний, разработанные для технических систем, можно применить и для управления экономическими процессами.

Для процессов производства, хранения и сбыта товара достаточно удачной является нелинейная динамическая модель, предложенная в [1]. В [2, 3] приводятся обобщения этой модели и рассматриваются задачи оптимального управления. В [4 – 6] построены линейные динамические модели и предлагаются алгоритмы совмещенного синтеза темпом производства и поставками товара.

В настоящей работе построена линейная нестационарная стохастическая модель адаптивного управления поставками, рекламой, хранением и сбытом товара, в которой темп продаж линейно зависит от затрат на рекламу.

1. Описание математической модели

Пусть $U(t)$ – объем поставляемого товара в закупочных ценах в единицу времени, $z(t), v(t), Y(t)$ – объемы товара в ценах продажи, у потребителя и потенциальный спрос на поставляемый товар. По аналогии с [1] можно записать уравнения для скорости изменения объема товара на рынке и у потребителя в виде

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= k_3 U(t) - k_4 (Y(t) - v(t)) z(t) - k_1 z(t), \quad z(t_0) = z_0; \\ \dot{v}(t) &= k_4 (Y(t) - v(t)) z(t) - k_2 v(t), \quad v(t_0) = v_0,\end{aligned}\tag{1}$$

где k_1 – коэффициент, характеризующий порчу товара при хранении на рынке; k_2 – коэффициент скорости потребления; k_3 – коэффициент, характеризующий превышение цены продажи товара по сравнению с закупочной (накрутка постав-

щика); k_4 – коэффициент, характеризующий темп продаж. Выражение $k_4(Y(t) - v(t))z(t)$ задает объем проданного товара в единицу времени.

Коэффициент k_4 , характеризующий темп продаж, можно представить в виде

$$k_4 = k_4^{(0)} + k_4^{(1)} R(t), \quad (2)$$

где $k_4^{(0)}$ – коэффициент, задающий постоянный темп продаж, $R(t)$ – объем средств, используемых на рекламу товара, $k_4^{(1)}$ – коэффициент, характеризующий влияние рекламы на темп продаж (ускорение продаж за счет рекламы).

Доход поставщика складывается из разности от объема проданного товара по цене продажи, поставленного по цене закупки и затрат на хранение и рекламу товара. Тогда уравнение для дохода можно записать в виде

$$\dot{w}(t) = (k_4^{(0)} + k_4^{(1)} R(t))(Y(t) - v(t))z(t) - U(t) - k_5 z(t) - R(t), \quad w(t_0) = w_0, \quad (3)$$

где k_5 – коэффициент, характеризующий плату за хранение товара.

Запишем (1),(3) в виде системы обыкновенных дифференциальных стохастических уравнений вида

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(t)x(t) + \bar{B}(t)u(t) + \bar{F}(t)q(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (4)$$

где $x(t), u(t), q(t)$ – векторы состояния, управления и внешних возмущений, $\bar{A}(t), \bar{B}(t), \bar{F}(t)$ – матрицы динамических свойств, влияния управляющих воздействий и внешних возмущений.

Для процесса поставок, рекламы, сбыта и хранения товара вектор состояния $x(t) = (z(t), v(t), w(t))^T$ характеризует объемы товара на рынке, у потребителя и прибыль; вектор управления $u(t) = (u_1(t), u_2(t))^T$ задает объемы поставок и затрат на рекламу. Линеаризация системы (1),(3) осуществляется относительно функций $\varphi_r(t), \varphi_z(t), \varphi_v(t)$, которые описывают расчетные значения затрат на рекламу, объемы товара на рынке и у потребителя в момент t , функция $\varphi_y(t)$ описывает расчетные значения потенциального спроса. Тогда матрица динамических свойств $\bar{A}(t)$ будет иметь вид

$$\bar{A}(t) = \begin{pmatrix} -(k_4^{(0)} + k_4^{(1)} \varphi_r(t))(\varphi_y(t) - \varphi_v(t)) - k_1 & (k_4^{(0)} + k_4^{(1)} \varphi_r(t))\varphi_z(t) & 0 \\ (k_4^{(0)} + k_4^{(1)} \varphi_r(t))(\varphi_y(t) - \varphi_v(t)) & -(k_4^{(0)} + k_4^{(1)} \varphi_r(t))\varphi_z(t) - k_2 & 0 \\ (k_4^{(0)} + k_4^{(1)} \varphi_r(t))(\varphi_y(t) - \varphi_v(t)) - k_5 & -(k_4^{(0)} + k_4^{(1)} \varphi_r(t))\varphi_z(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

а матрица влияния управляющих воздействий –

$$\bar{B}(t) = \begin{pmatrix} k_3 & k_4^{(1)}(\varphi_y(t) - \varphi_v(t))\varphi_z(t) \\ 0 & -k_4^{(1)}(\varphi_y(t) - \varphi_v(t))\varphi_z(t) \\ -1 & k_4^{(1)}(\varphi_y(t) - \varphi_v(t))\varphi_z(t) - 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Внешние возмущения в (4), которые описывают действие случайных факторов, будем задавать вектором гауссовских случайных величин с характеристиками

$$M\{q(t)\} = \bar{q}(t), \quad M\{(q(t) - \bar{q}(t))(q(\tau) - \bar{q}(\tau))^T\} = Q(t)\delta(t - \tau);$$

матрица $\bar{F}(t)$, определяющая влияние случайных факторов в модели, задается конкретно для решаемой задачи.

Дискретную модель, соответствующую (4), зададим в виде

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + F(k)q(k), \quad x(0) = x_0, \quad (7)$$

где $A(k) = I_3 + \Delta t \bar{A}(t_k)$, $B(k) = \Delta t \bar{B}(t_k)$, $F(k) = \sqrt{\Delta t} \bar{F}(t_k)$, $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ – шаг дискретизации, I_3 – единичная матрица третьего порядка, $q(k)$ – последовательность гауссовских случайных величин с характеристиками

$$M\{q(k)\} = \bar{q}(k), \quad M\{(q(k) - \bar{q}(k))(q(j) - \bar{q}(j))^T\} = Q(k)\delta_{kj},$$

k соответствует моменту времени $t_k = t_0 + k\Delta t$, $k = \overline{0, N}$.

2. Синтез адаптивного управления

Для формирования объемов поставок товара и затрат на рекламу будем использовать следующую систему управления, где слежение выполняется за состоянием $x_z(k)$, которое соответствует желаемой прибыли на существующем рынке.

Если слежение в системе осуществляется на основе локального квадратичного критерия

$$J(k) = M\{(x(k+1) - x_z(k))^T C(x(k+1) - x_z(k)) + u(k)^T Du(k)\}, \quad (8)$$

то управление имеет вид

$$u(k) = -(B^T(k)CB(k) + D)^{-1} B^T(k)C(A(k)x(k) + F(k)\bar{q}(k) - x_z(k)), \quad (9)$$

где $C \geq 0$ и $D > 0$ – весовые матрицы.

Так как поставщика интересует в основном прибыль, то используется предложенная в [6] модификация локального критерия

$$J^{(S)}(k) = M\{(Sx(k+1) - w_z(k))^T C^{(S)}(Sx(k+1) - w_z(k)) + u(k)^T Du(k)\}. \quad (10)$$

Тогда управление при слежении только за прибылью $w_z(k)$, которую планирует получить поставщик, имеет вид

$$u(k) = -(B^T(k)S^T C^{(S)}SB(k) + D)^{-1} B^T(k)S^T C^{(S)}(SA(k)x(k) + SF(k)\bar{q}(k) - w_z(k)), \quad (11)$$

где вектор $S = (0, 0, 1)$, $C^{(S)} = SCS^T$ – весовой коэффициент, $Sx_z(k) = w_z(k)$.

Будем формировать управляющие воздействия по текущей информации, при этом предполагается, что математическую модель информационной системы можно представить как

$$y(k) = Hx(k) + r(k), \quad (12)$$

где $y(k)$ – вектор, содержащий информацию о состоянии модели, H – матрица, характеризующая полноту информации, $r(k)$ – вектор, описывающий погрешности информационной системы, которые будем задавать последовательностью гауссовских случайных величин с характеристиками

$$M\{r(k)\} = 0, \quad M\{r(k)r^T(j)\} = R\delta_{kj}, \quad M\{r(k)q^T(j)\} = 0.$$

При управлении для реальной ситуации необходимо учитывать, что информация о модели управления поступает с ошибками и может быть неполной, и в мо-

дели есть параметры $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{N_\theta})^T$, которые невозможно задать точно. При этом будем предполагать, что априорные распределения векторов x_0, θ_0 являются гауссовскими:

$$M\{x_0\} = \bar{x}_0, M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T\} = P_{x_0},$$

$$M\{\theta_0\} = \bar{\theta}_0, M\{(\theta_0 - \bar{\theta}_0)(\theta_0 - \bar{\theta}_0)^T\} = P_{\theta_0}.$$

Тогда управление, полученное с помощью критерия (8), примет вид

$$u(k) = -(B^T(k, \hat{\theta}(k))CB(k, \hat{\theta}(k)) + D)^{-1} \times \\ \times B^T(k, \hat{\theta}(k))C(A(k, \hat{\theta}(k))\hat{x}(k) + F(k)\bar{q}(k) - x_z(k)), \quad (13)$$

а при использовании критерия (10) –

$$u(k) = -(B^T(k, \hat{\theta}(k))S^T C^{(S)}SB(k, \hat{\theta}(k)) + D)^{-1} \times \\ \times B^T(k, \hat{\theta}(k))S^T C^{(S)}(SA(k, \hat{\theta}(k))\hat{x}(k) + SF(k)\bar{q}(k) - w_z(k)). \quad (14)$$

где $\hat{x}(k), \hat{\theta}(k)$ – оценки векторов состояния и параметров, построенные с помощью двухэтапного алгоритма, который для модели (7) и информационного канала (12) приведен в [7]. Для оценивания состояния используются выражения

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \hat{x}(k+1/k) + K(k)[y(k+1) - H\hat{x}(k+1/k)], \\ \hat{x}(k+1/k) &= A(k, \hat{\theta}(k))\hat{x}(k) + B(k, \hat{\theta}(k))u(k) + F(k)\bar{q}(k), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \\ K(k) &= P_x(k+1/k)H^T[HP_x(k+1/k)H^T + R]^{-1}, \\ P_x(k+1/k) &= A(k, \hat{\theta}(k))P_x(k)A^T(k, \hat{\theta}(k)) + F(k)Q(k)F^T(k), \\ P_x(k+1) &= [I_n - K(k)H]P_x(k+1/k), \quad P_x(0) = P_{x_0}; \end{aligned} \quad (15)$$

а для оценивания параметров –

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) + L(k)[y(k+1) - H\Phi(\hat{x}(k), u(k))\hat{\theta}(k) - Hf(\hat{x}(k), u(k))], \quad \hat{\theta}(0) = \bar{\theta}_0, \\ L(k) &= P_\theta(k)\Phi^T(\hat{x}(k), u(k))H^T M(k)^{-1}, \\ M(k) &= H\Phi(\hat{x}(k), u(k))P_\theta(k)\Phi^T(\hat{x}(k), u(k))H^T + HF(k)Q(k)F^T(k)H^T + R, \\ P_\theta(k+1) &= [I_{N_\theta} - L(k)H\Phi(\hat{x}(k), u(k))]P_\theta(k), \quad P_\theta(0) = P_{\theta_0}. \end{aligned} \quad (16)$$

В (16) матрица $\Phi(\cdot)$ размерности $n \times N_\theta$ и вектор-столбец $f(\cdot)$ с n элементами получаются в результате представления системы (7) в виде

$$x(k+1) = \Phi(x(k), u(k))\theta(k) + f(x(k), u(k)) + F(k)q(k), \quad x(0) = x_0. \quad (17)$$

В (13) – (16) $A(k, \hat{\theta}(k)), B(k, \hat{\theta}(k))$ – матрицы дискретной модели (7), в которых точные значения параметров заменяются на их оценки и $n = 3$ для математической модели управления поставками и рекламой товара.

3. Формирование ограничений

Наличие ограничений является характерным свойством экономических систем. При этом различаются ограничения, налагаемые на компоненты векторов состояния и управления. Исходя из экономического смысла, на первые две компоненты вектора состояния, характеризующие объемы товара на рынке и у потреби-

теля, налагаются ограничения вида

$$\tilde{x}_i(k) = \begin{cases} x_i(k), & \text{если } x_i(k) \geq 0, \\ 0, & \text{если } x_i(k) < 0, i = 1, 2. \end{cases} \quad (18)$$

Вектор управления задает объемы поставок и затрат на рекламу. Ограничения на объем поставок $u_1(k)$ достаточно часто учитывают грузоподъемности транспортных средств, участвующих в поставках товара, и экономическую обоснованность поставки. В общем случае такие ограничения можно представить следующим образом:

$$\tilde{u}_1(k) = \begin{cases} u_1^-(k), & \text{если } u_1(k) < u_1^-(k), \\ u_1(k), & \text{если } u_1^-(k) \leq u_1(k) \leq u_1^+(k), \\ u_1^+(k), & \text{если } u_1(k) > u_1^+(k). \end{cases} \quad (19)$$

По характеру воздействия на человека можно разделить рекламу на статическую и динамическую. Статическая реклама представляет собой сочетание агитации в местах продаж (вывески, витрины магазинов, упаковка товара) и наружной рекламы (щиты на улицах, плакаты в метро, календари, сумки и т.д.). Эти виды рекламы отличаются гибкостью, высокой частотой повторных контактов, невысокой стоимостью и слабой конкуренцией. Содействуя реализации товара и управляя спросом, динамическая реклама появляется в прессе, на телевидении, на радио и т.д. Реклама в прессе отличается оперативностью, массовостью, гибкостью, широким признанием и высокой достоверностью, с одной стороны, и кратковременностью существования и малой аудиторией «вторичных» читателей – с другой. Основными преимуществами и недостатками рекламы на телевидении являются: воздействие на человека сочетанием изображения, звука, цвета, движения; массовость, высокая степень привлечения внимания; но высокая стоимость, перегруженность рекламой, мимолетность рекламного контакта и меньшая избирательность аудитории. Особенности рекламы на радио состоят в массовости, невысокой стоимости, воздействии только звуком, краткости рекламного контакта и более низкой, чем у телевидения, степенью привлечения внимания.

Объем средств, который использует поставщик на рекламу своего товара, зависит от вида поставляемого товара, конкуренции за потребителя, наличия средств на рекламу у поставщика и т.д. Таким образом, ограничение для затрат на рекламу зависит от многих факторов и формируется для конкретной задачи. Например, ограничения для затрат на рекламу можно сформировать следующим образом.

Пусть G_0 – затраты на статическую рекламу за время Δt и $G_i, i = \overline{1, N_R}$, – затраты на различные виды динамической рекламы, причем $G_0 < G_1 < \dots < G_{N_R}$, где N_R – число видов динамической рекламы, которые использует поставщик для рекламы своего товара. Кроме того, так как динамическая реклама различается продолжительностью воздействия, будем считать, что $T_i \Delta t$ – время воздействия динамической рекламы i -го вида, $i = \overline{1, N_R}$.

Предположим, что средства на рекламу выделяются в каждый момент времени $k \Delta t$, $k = \overline{0, N}$, и в каждый момент времени оплачивается только один вид рекламы. При этом средства за конкретный вид динамической рекламы выплачиваются пол-

ностью в начальный момент времени воздействия этой рекламы, а затем, до окончания времени ее воздействия, оплачивается только статическая реклама.

Тогда ограничения для затрат на рекламу можно задать следующим образом:

$$u_2(k+j) = \begin{cases} G_0, & \text{если } j=0 \text{ и } u_2(k+j) < 0,5(G_0 + G_1); \\ \begin{cases} G_i, & \text{если } j=0 \text{ и } u_2(k+j) \in [0,5(G_{i-1} + G_i); 0,5(G_i + G_{i+1}))], \\ G_0, & \text{при } j = \overline{1, T_i - 1}; \end{cases} \\ \begin{cases} G_{N_R}, & \text{если } j=0 \text{ и } u_2(k+j) \geq 0,5(G_{N_R-1} + G_{N_R}), \\ G_0, & \text{при } j = \overline{1, T_{N_R} - 1}. \end{cases} \end{cases} \quad (20)$$

4. Численное моделирование

Численное моделирование осуществлялось по данным поставок товара в продовольственный магазин. В качестве исходных данных использовались объемы поставок, затрат на рекламу и доход от реализации с дискретностью две недели.

Слежение при формировании объема поставок осуществлялось за вектором $x_z(k) = (\varphi_z(k); \varphi_v(k); 1,05\varphi_w(k))^T$, который задает увеличение расчетной прибыли на 5 %. Предполагалось, что отсутствует информация об объемах товара на рынке и у потребителя, а неизвестным является коэффициент $k_4^{(1)}$, характеризующий влияние рекламы на темп продаж.

Значение $u_1^-(k)$ для поставок задавалось исходя из рентабельности поставки, а $u_1^+(k)$ — определялось, во-первых, грузоподъемностью транспортных средств, участвующих в поставках, и, во-вторых, площадью складского помещения. Для статической рекламы полагалось $G_0 = 20$ [руб.]. Использовались два вида динамической рекламы: $G_1 = 80$ [руб.] и $G_2 = 2000$ [руб.], которые соответствуют затратам на рекламу в прессе (объявление в газете или журнале) и на телевидении («бегущая строка»). Предполагалось, что воспоминание о прочитанном объявлении остается в памяти около трех дней ($T_1 = 3$ [дня]), а длительность влияния рекламы в «бегущей строке» полагалась равной 10 дням ($T_2 = 10$ [дней]).

Моделирование осуществлялось при Δt , равном одному дню, для $k = \overline{0, 223}$. Результаты моделирования на основе локального критерия (8) представлены на рис. 1–3.

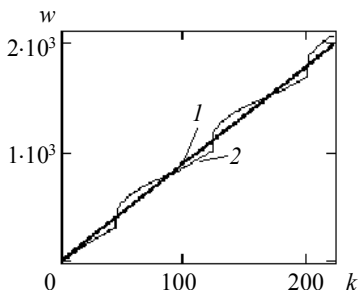


Рис. 1. Желаемая прибыль $w_z(k)$ – кр. 1, реализация прибыли $w(k)$ – кр. 2

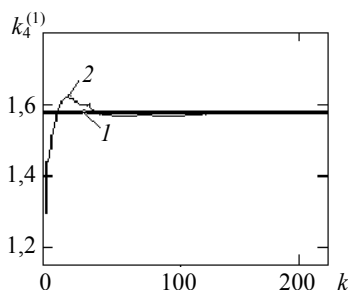


Рис. 2. Точное значение параметра $k_4^{(1)}$ – кр. 1, оценка $\hat{k}_4^{(1)}$ – кр. 2

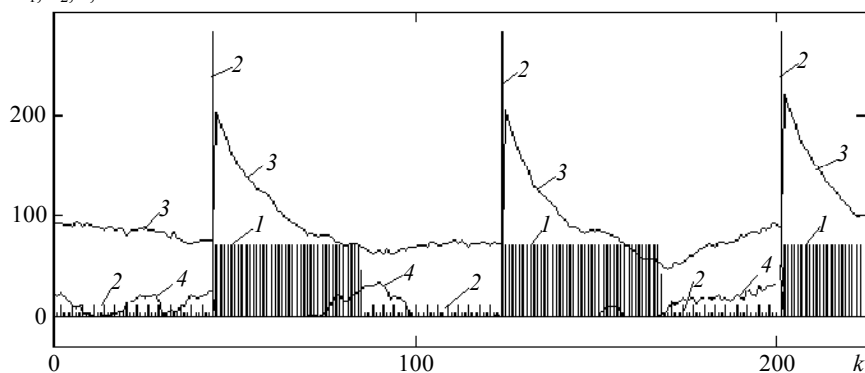
u_1, u_2, z, v 

Рис. 3. Объем поставок $u_1(k)$ – кр. 1, объем затрат на рекламу $u_2(k)$ – кр. 2, объем товара на рынке $z(k)$ – кр. 3, объем товара у потребителя $v(k)$ – кр. 4

Результаты моделирования на основе модификации локального критерия (10) представлены на рис. 4 – 6. На рис. 3 и рис. 6 объем затрат на рекламу представлен в масштабе 1:140.

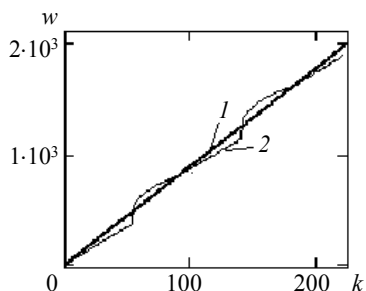


Рис. 4. Желаемая прибыль $w_z(k)$ – кр. 1, реализация прибыли $w(k)$ – кр. 2

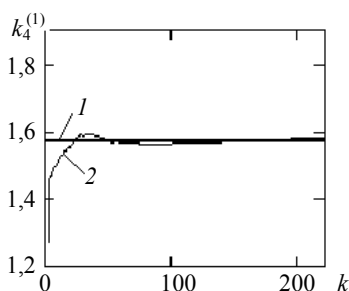


Рис. 5. Точное значение параметра $k_4^{(1)}$ – кр. 1, оценка $\hat{k}_4^{(1)}$ – кр. 2

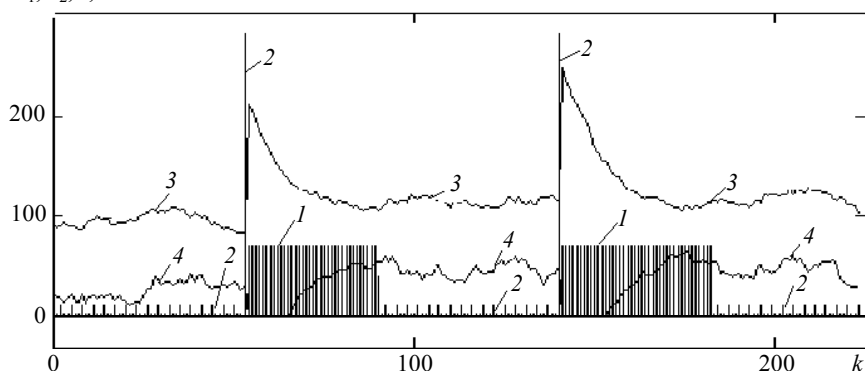
 u_1, u_2, z, v 

Рис. 6. Объем поставок $u_1(k)$ – кр. 1, объем затрат на рекламу $u_2(k)$ – кр. 2, объем товара на рынке $z(k)$ – кр. 3, объем товара у потребителя $v(k)$ – кр. 4

Приведенные результаты показывают, что при использовании построенной модели одновременно начинается рекламная компания и поставки товара. При этом за счет поставок увеличивается объем товара на рынке. Использование модификации локального критерия практически не ухудшает результатов моделирования, так как процент отклонения прибыли, полученной моделированием, от желаемого значения составил соответственно 2,622 и 2,652 по 30 прогонам имитационной модели. При этом значительно упрощается процесс достижения требуемого качества функционирования системы управления, так как для локального критерия это обеспечивается заданием весовой матрицы, а для его модификации – заданием весового коэффициента.

Заключение

Построена математическая модель для адаптивного управления поставками, рекламой, сбытом и хранением товара, когда затраты на рекламу берутся из прибыли. Предложена система ограничений для затрат на рекламу, где разделяются действия статической и динамической рекламы и учитываются продолжительности воздействий различных видов динамической рекламы на потребителя. Проведено численное моделирование, результаты которого показывают, что предложенные алгоритмы можно применять для управления поставками и рекламой товара.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горский А.А., Колтакова И.Г., Локишин Б.Я. Динамическая модель процесса производства, хранения и сбыта товара повседневного спроса // Изв. РАН. ТиСУ. 1998. № 1. С. 144 – 148.
2. Параев Ю.И. Решение задачи об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара // Изв. РАН. ТиСУ. 2000. № 2. С. 103 – 107.
3. Параев Ю.И. Оптимальное управление рекламой в задаче производства и сбыта товара // Вестник ТГУ. 2003. № 280. С. 162 – 169.
4. Решетникова Г.Н. Синтез следящей системы адаптивного управления темпом производства по локальному критерию // Вестник ТГУ. 2004. № 284. С. 166 – 168.
5. Решетникова Г.Н. Следящая система адаптивного управления с прогнозирующей моделью пониженного порядка // Вестник ТГУ. 2006. № 290. С. 237 – 240.
6. Решетникова Г.Н. Синтез и моделирование системы управления поставками // Вестник ТГУ. 2006. № 293. С. 59 – 62.
7. Решетникова Г.Н. Моделирование систем: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. Томск: Томский гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2007. 441 с.

Решетникова Галина Николаевна
Ющенко Екатерина Михайловна
Томский государственный университет
E-mail: tomrgn@ngs.ru; ushenkok@vtomske.ru

Поступила в редакцию 26 июня 2009 г.