УДК 512.541

С.Я. Гриншпон, М.М. Никольская

ПРИМАРНЫЕ IF -ГРУППЫ^{1,2}

В статье исследуются примарные группы, содержащие собственные вполне характеристические подгруппы, изоморфные самой группе, так называемые IF -группы. Вводится понятие допустимой последовательности инвариантов Ульма – Капланского для примарных групп, с помощью которого получено описание IF -групп в некоторых важных классах p -групп.

Ключевые слова: IF -группа, вполне характеристическая подгруппа, инварианты Ульма – Капланского, периодически полная группа, допустимая последовательность.

Одним из направлений исследований в теории абелевых групп является изучение групп, содержащих собственные подгруппы, изоморфные самой группе. Р. Бьюмонт и Р. Пирс в [1] рассматривали такие группы: I -группы – группы, изоморфные собственной подгруппе; IP -группы – группы, изоморфные собственной сервантной подгруппе; ID -группы – группы, изоморфные собственному прямому слагаемому. Г. Монк в [2] исследовал абелевы p -группы, не содержащие собственные сервантные плотные подгруппы, изоморфные самой группе. В [3] рассматриваются группы, изоморфные подгруппам той же мощности, что и сама группа.

В настоящей статье исследуются IF -группы, т.е. абелевы группы, изоморфные некоторой собственной вполне характеристической подгруппе.

Всюду далее в этой статье под словом «группа» будем понимать аддитивно записанную абелеву группу.

В [4] исследовались примарные группы с конечными инвариантами Ульма – Капланского. В настоящей статье рассматриваются примарные группы с произвольными инвариантами Ульма – Капланского.

Отметим некоторые результаты, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 1 [4]. Всякая ограниченная группа не является IF -группой.

Теорема 2 [4]. Периодическая группа является IF -группой тогда и только тогда, когда некоторая ее p -компонента является IF -группой.

Теорема 3 [4]. Делимая периодическая группа не является IF -группой.

Теорема 4 [4]. Для нередуцированной периодической группы A следующие условия эквивалентны:

- 1) A является IF -группой;
- 2) некоторая p -компонента группы A не является делимой группой и имеет редуцированную часть, которая является IF -группой;
- 3) редуцированная часть группы A является IF -группой.

¹ Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 – 2013 годы». Государственный контракт П937 от 20 августа 2009 года.

² Работа частично профинансирована Федеральным агентством по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238 от 7 июля 2009 года.

Теорема 5 [5, теорема 2.8]. Пусть $B = \bigoplus_{k \in \mathbf{N}} B_k$, где $B_k = \bigoplus \mathbf{Z}(p^k)$. L – вполне характеристическая подгруппа группы B тогда и только тогда, когда $L = \bigoplus_{k \in \mathbf{N}} p^{n_k} B_k$, где

- 1) $n_k \leq k$ для всех $k \in \mathbf{N}$;
- 2) $n_k \leq n_{k+r} \leq n_k + r$ для всех $k \in \mathbf{N}$, $r \in \mathbf{N}$.

Заметим, что теоремы 1 – 4 сводят исследование периодических IF -групп к исследованию редуцированных примарных IF -групп.

Начнем исследование с прямых сумм циклических p -групп. Обозначим через $\mathbf{N}_0$ множество всех целых неотрицательных чисел, а через $f_A(k)$ – k -й инвариант Ульма – Капланского p -группы A , то есть ранг факторгруппы $p^k A[p] / p^{k+1} A[p]$.

Рассмотрим сепарабельные p -группы.

Пусть B – p -группа, являющаяся прямой суммой циклических групп, т.е. $B = \bigoplus_{k \in \mathbf{N}} B_k$, где $B_k = \bigoplus \mathbf{Z}(p^k)$. Тогда для инвариантов Ульма – Капланского группы B справедливы равенства $f_B(m) = r(B_{m+1})$ для всякого $m \in \mathbf{N}_0$, где $r(B_{m+1})$ – ранг группы B_{m+1} .

Нам понадобится следующее определение.

Определение 1. Пусть A – сепарабельная p -группа. Строго возрастающую последовательность неотрицательных целых чисел $i_0, i_1, \dots, i_n, \dots$ назовем допустимой для группы A , если для инвариантов Ульма – Капланского этой группы выполняется система равенств

$$f_A(k) = \sum_{i=i_k}^{i_{k+1}-1} f_A(i), \quad k \in \mathbf{N}_0. \quad (1)$$

Теорема 6. Пусть B – неограниченная p -группа, являющаяся прямой суммой циклических групп. Группа B является IF -группой тогда и только тогда, когда для нее существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию.

Доказательство. Необходимость. Пусть группа B является IF -группой. Заметим, что последовательность всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию, является допустимой для любой сепарабельной p -группы, так как система равенств (1), определяющих допустимую последовательность, имеет в этом случае тривиальный вид $f_A(k) = f_A(k)$, $k \in \mathbf{N}_0$. Предположим, что последовательность всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию, является единственной допустимой последовательностью для группы B . Если L – вполне характеристическая подгруппа группы B , то согласно теореме 5 она имеет вид

$$L = \bigoplus_{k \in \mathbf{N}} p^{n_k} B_k,$$

где n_k удовлетворяет неравенствам 1) и 2) теоремы 5. Имеем

$$\begin{aligned} f_L(n) &= r\left(\bigoplus_{n \in \mathbf{N}} p^{n_k} B_k \mid p^{n_k} B_k = \bigoplus \mathbf{Z}(p^{n+1})\right) = r\left(\bigoplus_{n \in \mathbf{N}} p^{n_k} B_k \mid k - n_k = n + 1\right) = \\ &= \sum_{k \in \mathbf{N}} \left(r(p^{n_k} B_k) \mid k - n_k = n + 1\right) = \sum_{k \in \mathbf{N}} \left(r(B_k) \mid k - n_k - 1 = n\right) = \\ &= \sum_{k \in \mathbf{N}} \left(f_B(k-1) \mid k - n_k - 1 = n\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f_L(n) = \sum_{k \in N} (f_B(k-1) | k - n_k - 1 = n). \quad (2)$$

Из теоремы 5 следуют такие соотношения:

$$(k+1) - n_{k+1} - 1 \geq (k+1) - (n_{k+1}) - 1 = k - n_k - 1; \quad (3)$$

$$(k+1) - n_{k+1} - 1 \leq (k+1) - n_k - 1 = (k - n_k - 1) + 1. \quad (4)$$

Пусть $i_n = \min_{k \in N} \{k-1 | k - n_k - 1 = n\}$. Тогда из (2) – (4) получаем

$$f_L(n) = \sum_{i=i_n}^{i_{n+1}-1} f_B(i). \quad (5)$$

Среди сумм правой части равенств (5) могут быть и вырожденные, т.е. состоящие из одного слагаемого (это получается в случае, когда $i_{n+1} = i_n + 1$). Пусть $L \cong B$. Тогда с учетом равенства (5) для всякого целого неотрицательного числа n

$$f_B(n) = f_L(n) = \sum_{i=i_n}^{i_{n+1}-1} f_B(i).$$

Последовательность $i_0, i_1, \dots, i_n, \dots$ является допустимой для группы B , и поэтому в силу условия теоремы следует, что $i_n = n$ для всякого n . Учитывая, что $i_n = \min_{k \in N} \{k-1 | k - n_k - 1 = n\}$, получаем $n_k = 0$ для всякого k , т.е. $L = B$. Это противоречит тому, что B является IF-группой.

Достаточность. Запишем группу B в виде $B = \bigoplus_{k \in N} B_k$, где $B_k = \bigoplus \mathbf{Z}(p^k)$. Пусть

для группы B существует допустимая последовательность $r_0, r_1, r_2, \dots$, отличная от допустимой последовательности $0, 1, 2, \dots$. Тогда для всякого $m \in \mathbf{N}_0$ имеем

$$f_B(m) = \sum_{r=r_m}^{r_{m+1}-1} f_B(r). \quad (*)$$

Возможны два случая: 1) $r_0 \neq 0$, 2) $r_0 = 0$. Рассмотрим каждый из них.

1) Пусть $r_0 \neq 0$. Построим подгруппу L группы B следующим образом:

$$\begin{aligned} L = & pB_1 \oplus p^2B_2 \oplus \dots \oplus p^{r_0}B_{r_0} \oplus p^{r_0}B_{r_0+1} \oplus p^{r_0+1}B_{r_0+2} \oplus \dots \\ & \dots \oplus p^{r_1-1}B_{r_1} \oplus p^{r_1-1}B_{r_1+1} \oplus p^{r_1}B_{r_1+2} \oplus p^{r_1+1}B_{r_1+3} \oplus \dots \\ & \dots \oplus p^{r_2-2}B_{r_2} \oplus p^{r_2-2}B_{r_2+1} \oplus p^{r_2-1}B_{r_2+2} \oplus p^{r_2}B_{r_2+3} \oplus \dots \oplus p^{r_3-3}B_{r_3} \oplus \dots, \end{aligned}$$

то есть

$$L = \bigoplus p^{n_k} B_k,$$

где $n_{r_j} = n_{r_{j+1}} = r_j - j$ ($j \in \mathbf{N}_0$); $n_{r_j+k} = r_j - j + k - 1$ ($1 < k < r_{j+1} - r_j + 1$). L – собственная подгруппа группы B . Используя теорему 5, получаем, что L – вполне характеристическая подгруппа группы B . Более того, $L \cong B$ в силу равенства соответствующих инвариантов Ульма – Капланского. Действительно, из построения группы L и с учетом равенств (1) получаем для всякого $m \in \mathbf{N}_0$

$$f_L(m) = f_B(r_m) + f_B(r_{m+1}) + \dots + f_B(r_{m+1} - 1) = f_B(m).$$

Значит, $L \cong B$, но $L \neq B$. Следовательно, B является IF-группой.

2) Пусть $r_0 = 0$. Обозначим через $k + 1$ ($k \in \mathbf{N}_0$) наименьшее натуральное число, для которого $r_{k+1} > k + 1$. Тогда $r_0 = 0, r_1 = 1, \dots, r_k = k$, и допустимая последовательность имеет вид $0, 1, \dots, k, r_{k+1}, r_{k+2}, \dots$. Равенства (*) для такой последовательности запишутся так:

$$\begin{aligned} f_B(0) &= f_B(0), \\ f_B(1) &= f_B(1), \\ &\dots\dots\dots \\ f_B(k-1) &= f_B(k-1), \\ f_B(k) &= f_B(k) + f_B(k+1) + \dots + f_B(r_{k+1}-1), \\ f_B(q) &= f_B(r_q) + \dots + f_B(r_{q+1}-1), \text{ для всякого } q > k \ (q \in \mathbf{N}_0). \end{aligned} \tag{**}$$

Сумма, стоящая в правой части $(k + 1)$ -го равенства в (**), является первой невырожденной суммой в (**), т.е. суммой, состоящей из более чем одного слагаемого.

Рассмотрим следующую подгруппу L группы B :

$$\begin{aligned} L &= B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_k \oplus B_{k+1} \oplus pB_{k+2} \oplus \dots \\ &\dots \oplus p^{r_{k+1}-k-1} B_{r_{k+1}} \oplus p^{r_{k+1}-k-1} B_{r_{k+1}+1} \oplus p^{r_{k+1}-k} B_{r_{k+1}+2} \oplus \dots \\ &\dots \oplus p^{r_{k+2}-k-2} B_{r_{k+2}} \oplus p^{r_{k+2}-k-2} B_{r_{k+2}+1} \oplus p^{r_{k+2}-k-1} B_{r_{k+2}+2} \oplus \dots \\ &\dots \oplus p^{r_{k+3}-k-3} B_{r_{k+3}} \oplus \dots \end{aligned}$$

Используя теорему 5, получаем, что L – вполне характеристическая подгруппа группы B . Учитывая строение группы B , имеем

$$\begin{aligned} f_L(0) &= f_B(0), \\ f_L(1) &= f_B(1), \\ &\dots\dots\dots \\ f_L(k-1) &= f_B(k-1), \\ f_L(k) &= f_B(k) + f_B(k+1) + \dots + f_B(r_{k+1}-1), \\ f_L(q) &= f_B(r_q) + \dots + f_B(r_{q+1}-1), \text{ для всякого } q > k \ (q \in \mathbf{N}_0). \end{aligned} \tag{***}$$

Сравнивая (**) и (***), получаем, что $L \cong B$. Так как $L \neq B$, то B является IF -группой. ■

Перейдем теперь к рассмотрению произвольных сепарабельных p -групп.

Теорема 7. Сепарабельная p -группа не является IF -группой, если ее базисная подгруппа не является IF -группой.

Доказательство. Пусть A – сепарабельная p -группа, у которой базисная подгруппа B не является IF -группой. Не умаляя общности, можно считать, что A – редуцированная p -группа. Если A – ограниченная группа, то в силу теоремы 1 A не является IF -группой (заметим, что в этом случае базисная подгруппа группы A совпадает с A). Пусть A – неограниченная группа. Предположим, что A – IF -группа. Тогда существует собственная вполне характеристическая подгруппа S группы A , такая, что $S \cong A$. Так как A – редуцированная сепарабельная p -группа, то A не содержит элементов бесконечной высоты [6, с. 7]. S – неограниченная вполне характеристическая подгруппа группы A и поэтому S – широкая подгруппа группы A [5, с. 423]. Следовательно, $S \cap B$ – базисная подгруппа группы S [5, с. 422].

Если $S \cap B = 0$, то, учитывая, что факторгруппа любой p -группы по ее базисной подгруппе является делимой группой, получаем, что S – делимая группа, чего быть не может, так как A – редуцированная группа.

Если $S \cap B = B$, то S содержит базисную подгруппу B группы A . Имеем $S + B = A$, так как S – широкая подгруппа группы A ; а из того, что $B \subset S$, следует $S + B = S$, чего быть не может, так как S – собственная подгруппа группы A .

Итак, $S \cap B$ – собственная ненулевая подгруппа группы B . Так как $S \cong A$, то базисные подгруппы групп S и A также изоморфны, т.е. $S \cap B \cong B$. Так как S – широкая подгруппа группы A , то $S \cap B$ является широкой подгруппой группы B [7, следствие 2.8]. Итак, мы получили, что базисная подгруппа B группы A имеет собственную вполне характеристическую подгруппу $S \cap B$, изоморфную B . Противоречие. ■

Теорема 8. Если неограниченная сепарабельная p -группа является IF -группой, то для нее существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию.

Доказательство. Пусть A – неограниченная сепарабельная p -группа, являющаяся IF -группой и пусть B – ее базисная подгруппа. Тогда по теореме 7 B – IF -группа. Применяя теорему 6, получаем, что для группы B существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию. Так как $f_A(k) = f_B(k)$ для всякого $k \in \mathbb{N}_0$ [8, с. 186], то эта же последовательность будет допустимой и для группы A . ■

Важную роль в теории абелевых p -групп играют периодически полные группы. Периодически полной p -группой называется периодическая часть $T(\bar{B})$ p -адического пополнения $\bar{B}$ прямой суммы B циклических p -групп ([6], с. 22). Впервые эти группы стал изучать Л.Я. Куликов, он называл их замкнутыми группами [9].

Теорема 9. Для периодически полной p -группы A следующие условия эквивалентны:

- 1) A является IF -группой;
- 2) базисная подгруппа группы A является IF -группой;
- 3) A – неограниченная группа, для которой существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию.

Доказательство. 1) ~ 2) Учитывая теорему 7, нужно доказать, только 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть A – периодически полная p -группа и B – ее базисная подгруппа, являющаяся IF -группой. В силу теоремы 1 B – неограниченная группа, и поэтому A – также неограниченная группа. Так как B – IF -группа, то существует собственная вполне характеристическая подгруппа S группы B , такая, что $B \cong S$. Понятно, что S является собственной широкой подгруппой группы B . Существует собственная широкая подгруппа S^* группы A , такая, что $S^* \cap B = S$ [5, теорема 2.9], причем S – базисная подгруппа группы S^* [5, с. 422]. S^* как широкая подгруппа периодически полной группы является периодически полной группой [10]. Итак, получили, что в группе A есть собственная вполне характеристическая подгруппа S^* , такая, что базисная подгруппа B группы A изоморфна базисной подгруппе S группы S^* . Так как A и S^* – периодически полные группы, то $A \cong S^*$, то есть A является IF -группой.

2) $\Rightarrow$ 3) Пусть B – базисная подгруппа группы A , причем B является IF -группой. Если A – ограниченная группа, то $A = B$. Следовательно, B – ограниченная

IF -группа, что противоречит теореме 1. Если же A – неограниченная группа, то B – неограниченная группа. Учитывая теорему 6 и то, что для каждого $k \in \mathbf{N}_0$ $f_A(k) = f_B(k)$, получаем, что для группы A существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию.

3) $\Rightarrow$ 1) Пусть A – неограниченная группа, для которой существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию, то ее базисная подгруппа B обладает тем же свойством. Тогда по теореме 6 B является IF -группой, и с учетом эквивалентности 2) $\sim$ 1) группа A также является IF -группой. ■

Будем говорить, что последовательность инвариантов Ульма – Капланского неограниченной сепарабельной p -группы A является периодической, если существует такое $k \in \mathbf{N}$, что для всех $n \in \mathbf{N}_0$ выполняется равенство $f_A(n) = f_A(n + k)$.

Следствие 10. Пусть A – периодически полная p -группа. Если последовательность инвариантов Ульма – Капланского группы A является периодической, то A – IF -группа.

Доказательство. Пусть A – периодически полная p -группа и существует такое $k \in \mathbf{N}$, что для всех $n \in \mathbf{N}_0$ выполняется равенство $f_A(n) = f_A(n + k)$. Тогда для такой группы последовательность $k, k + 1, k + 2, \dots$ является допустимой, и поэтому по теореме 9 A является IF -группой. ■

Следствие 11. Если для периодически полной p -группы A существует такое кардинальное число γ , что $f_A(n) = \gamma$ для каждого $n \in \mathbf{N}_0$, то A является IF -группой.

Доказательство. Пусть A – периодически полная p -группа и пусть для каждого $n \in \mathbf{N}_0$ $f_A(n) = \gamma$, где γ – некоторое кардинальное число. Тогда такая последовательность инвариантов Ульма – Капланского является периодической, так как $f_A(n) = f_A(n + 1)$ для каждого $n \in \mathbf{N}_0$. Применяя следствие 10, получаем, что A является IF -группой. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Beaumont R.A., Pierce R.S. Isomorphic direct summands of abelian groups // Math. Annalen. 1964. V. 153. P. 21–37.
2. Monk G.S. Abelian p -groups without proper isomorphic pure dense subgroups // Ill. J. Math. 1970. V. 14. No. 1. P. 164–177.
3. Goldsmith B., Óhógáin S., Wallutis S. Quasi-minimal groups // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. V. 132. No. 8. P. 2185–2195.
4. Гриншпон С.Я., Никольская (Савинкова) М.М. IF -группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 1(9). С. 5–14.
5. Benabdallah K.M., Eisenstadt B.J., Irwin J.M. and Poluianov E.W. The structure of large subgroups of primary Abelian groups // Acta Math. Acad. Scient. Hung. 1970. V. 21. No. 3–4. P. 421–435.
6. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2. 416 с.
7. Pierce R.S. Homomorphisms of primary Abelian groups // Topics in Abelian Groups. Chicago, 1963. P. 215–310.
8. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1. 336 с.
9. Куликов Л.Я. К теории абелевых групп произвольной мощности. // Мат. сб. 1945. № 16. С. 129–162.
10. Гриншпон С.Я. О некоторых классах примарных абелевых групп почти изоморфных по вполне характеристическим подгруппам // Изв. вузов. Математика. 1976. № 2. С. 23–30.

Статья поступила 10.03.2011 г.

Grinshpon S.Ya., Nikolskaya M.M. PRIMARY IF -GROUPS. In this work, we study primary groups containing proper fully invariant subgroups isomorphic to the group, the so-called IF -groups. We define the admissible sequence of Ulm-Kaplansky invariants for primary groups. Using these sequences, IF -groups are described in some important classes of p -groups.

Keywords: IF -group, fully invariant subgroup, Ulm-Kaplansky invariants, torsion complete group, admissible sequence.

GRINSHPON Samuil Yakovlevich (Tomsk State University)

E-mail: grinshpon@math.tsu.ru

NIKOLSKAYA Maria Mikhailovna (Tomsk State University of Architecture and Building)

E-mail: mary_s83@mail.ru