УДК 519.21

М.А. Леонова, Л.А. Нежельская

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В ОБОБЩЕННОМ АСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ[1]

Изучается обобщенный асинхронный поток событий, являющийся одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок в цифровых сетях интегрального обслуживания (ЦСИО). Поток функционирует в условиях непродлевающегося мертвого времени, когда длительность мертвого времени – неизвестная фиксированная величина. Решается методом максимального правдоподобия задача об оценивании длительности мертвого времени по наблюдениям за моментами наступления событий потока.

Ключевые слова: *обобщенный асинхронный поток событий, непродлевающееся мертвое время, функция правдоподобия, оценка максимального правдоподобия, длительность мертвого времени.*

Настоящая статья является непосредственным продолжением исследований обобщенного асинхронного потока событий (далее – поток), начатых в статьях [1–4]. Изучаемый поток относится к классу дважды стохастических потоков событий и является одной из адекватных математических моделей информационных потоков сообщений, функционирующих в ЦСИО [5]. Подчеркнем, что в последнее время дважды стохастические потоки используют при построении моделей входящих потоков – клиентов в страховых компаниях и банках [6]. Дважды стохастические потоки делятся на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; ко второму классу относятся потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Второй класс потоков в настоящее время принято называть МС-потоками либо МАР-потоками событий. В [7] приведена классификация МС-потоков событий и установлена связь между МС-потоками и МАР-потоками событий. Наиболее полная литература по изучаемым типам МС-потоков приведена в [8].

В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо (что ещё более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. В подобных ситуациях наиболее рациональным является применение адаптивных систем массового обслуживания, которые в процессе функционирования оценивают неизвестные параметры либо состояния входящих потоков событий и изменяют дисциплины обслуживания в соответствии с полученными оценками [9]. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [10, 11]; 2) оценки параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [12].

---

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012–2014 годы, задание 8.4055.2011.

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [13], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, не продляют его периода и недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). Подобные ситуации возникают в компьютерных сетях, например, при использовании протокола случайного множественного доступа с обнаружением конфликта (протокол CSMA/CD). Для того чтобы оценить потери сообщений потока, возникающие из-за эффекта мертвого времени, необходимо оценить его длительность.

В настоящей статье для решения задачи оценивания длительности мертвого времени применяется метод максимального правдоподобия [14], так как оценки, построенные на основе этого метода, как правило, обладают привлекательными свойствами.

1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный асинхронный дважды стохастический поток событий, интенсивность которого есть кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i, i=1,2. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе (из второго в первое) может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i-ом состоянии распределена по экспоненцильному закону с параметром α_i, i=1,2. При переходе процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе инициируется с вероятностью p ($0 \le p \le 1$) дополнительное событие во втором состоянии (т.е. сначала осуществляется переход, а затем инициируется дополнительное событие). Наоборот, при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью q ($0 \le q \le 1$) дополнительное событие в первом состоянии. При этом блочная матрица инфинитезимальных коэффициентов примет вид

$$D = \left\| \begin{matrix} -(\lambda_1+\alpha_1) & (1-p)\alpha_1 \\ (1-q)\alpha_2 & -(\lambda_2+\alpha_2) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \lambda_1 & p\alpha_1 \\ q\alpha_2 & \lambda_2 \end{matrix} \right\| = \left\| D_0 \middle| D_1 \right\|.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс. После каждого зарегистрированного в момент времени t_i события наступает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению. События, наступившие в течение мертвого времени, не вызывают продления его периода (непродлевающееся мертвое время). По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени T и т.д. Вариант возникающей ситуации показан на рис. 1, где 1, 2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; дополнительные события, которые могут наступать в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние, помечены буквами p либо q; штриховка – периоды мертвого времени длительности T; $t_1, t_2,\ldots$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков и дополнительные события) являются принципиально ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий $t_1, t_2, \ldots$ наблюдаемого потока. Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t), где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений, пренебрегаем. Необходимо в момент окончания наблюдений (в момент времени t) осуществить методом максимального правдоподобия оценку $\hat{T}$ длительности мертвого времени.

2. Построение функции правдоподобия

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ $(k = 1,2,\ldots)$ – значение длительности k-го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k > 0$). Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k-го интервала $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент t_k без потери общности можно положить равным нулю или, что то же самое, момент наступления события наблюдаемого потока есть $\tau = 0$. Тогда [3] плотность вероятностей примет вид

$$p_T(\tau) = 0,\ 0 \leq \tau < T;\ p_T(\tau) = \frac{z_1}{z_2 - z_1}\left[z_2 - \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2} f(T)\right] e^{-z_1(\tau - T)} -$$

$$-\frac{z_2}{z_2 - z_1}\left[z_1 - \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2} f(T)\right] e^{-z_2(\tau - T)},\ \tau \geq T,$$

$$f(T) = \alpha + \lambda\psi(T)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T},\ \psi(T) = 1\Big/\left[z_1 z_2 - \left(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2\right)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right],$$

$$\lambda = \alpha_1\alpha_2\left(\lambda_1 + p\alpha_1 - \lambda_2 - q\alpha_2\right)\left(\lambda_1 + q\alpha_1 - \lambda_2 - p\alpha_2\right),\ \alpha = \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1 + (p+q)\alpha_1\alpha_2,$$

$$z_{1,2} = \left[\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2 \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}\right]\Big/2;$$

$$0 < z_1 < z_2. \qquad (1)$$

В (1) принимается, что $\lambda \neq 0, (\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2) \neq 0.$ Подчеркнем, что (1) – одномерная плотность вероятностей.

Пусть $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$, … , $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ – последовательность измеренных (в результате наблюдения за потоком в течение интервала наблюдения $(0, t)$) значений длительностей интервалов между соседними событиями потока. Упорядочим величины τ_1, … , τ_k по возрастанию: $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \ldots < \tau^{(k)}$. В силу предпосылок последовательность моментов наступления событий $t_1, t_2, \ldots, t_k$, … образует вложенную цепь Маркова, т.е. наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k, $k = 1,2,\ldots$. Тогда [14] функция правдоподобия, с учетом (1), запишется в виде

$$L(\lambda_i, \alpha_i, p, q, T \mid \tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(k)}) = 0, \ \ 0 \le \tau_{\min} < T;$$

$$L(\lambda_i, \alpha_i, p, q, T \mid \tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^{k} p_T(\tau^{(j)}), \ \ \tau_{\min} \ge T.$$

Так как поставленная задача заключается в построении оценки $\hat{T}$ длительности мертвого времени (в предположении, что остальные параметры потока λ_i, α_i, $i = 1,2$, p, q известны), то, согласно методу максимального правдоподобия, ее реализация есть решение оптимизационной задачи:

$$L(T \mid \tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^{k} p_T(\tau^{(j)}) = \prod_{j=1}^{k} \left\{ \frac{z_1}{z_2 - z_1} \left[z_2 - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} f(T) \right] e^{-z_1(\tau^{(j)} - T)} - \right.$$

$$\left. - \frac{z_2}{z_2 - z_1} \left[z_1 - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} f(T) \right] e^{-z_2(\tau^{(j)} - T)} \right\} \Rightarrow \max_{T}, \quad 0 \le T < \tau_{\min}, \tag{2}$$

где $z_1, z_2, f(T)$ определены в (1).

Значение T, при котором (2) достигает своего глобального максимума, есть оценка $\hat{T}$ длительности мертвого времени.

3. Решение оптимизационной задачи (2)

Произведем переобозначение: $\tau_m = \tau_{\min}$. В силу того, что функция правдоподобия (2) отличается от нуля при $0 \le T \le \tau_m$, то положим $p_T(\tau^{(j)}) = 0$, $j = \overline{2,k}$, при $T > \tau_m$ $(\tau_m > 0)$. Изучим поведение функции $p_T(\tau_m)$, $0 \le T \le \tau_m$ как функции переменной T. В дальнейшем изложении ситуация, когда принимается $\tau_m = 0$, означает доопределение изучаемых функций в граничной точке. Исследуем производную $p'_T(\tau_m)$ по T функции $p_T(\tau_m)$. Имеем

$$p'_T(\tau_m) = \frac{\left[F_1(T) z_1 e^{-z_1(\tau_m - T)} - F_2(T) z_2 e^{-z_2(\tau_m - T)} \right]}{(\alpha_1 + \alpha_2)(z_2 - z_1)},$$

$$F_1(T) = (\alpha_1 + \alpha_2) z_1 z_2 - z_1 f(T) - f'(T), \ F_2(T) = (\alpha_1 + \alpha_2) z_1 z_2 - z_2 f(T) - f'(T),$$

$$f'(T) = -\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) z_1 z_2 \psi^2(T) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T}; \ 0 \le T \le \tau_m, \tau_m \ge 0, \tag{3}$$

где z_1, z_2, λ, $\psi(T)$, $f(T)$ определены в (1); $f'(T)$ – производная функции $f(T)$.

Лемма 1. Производная $p'_T(\tau_m)$ – неотрицательная функция переменной τ_m при $T = 0$ и $\lambda > 0$ $(p'_0(\tau_m) \ge 0)$.

Доказательство. Так как τ_m – любое неотрицательное число ($\tau_m \geq 0$), то $p'_0(\tau_m)$ можно рассматривать как функцию переменной τ_m. Подставляя $T = 0$ в (3), получаем

$$p_0'(\tau_m) = C\left[z_2(C-\alpha z_1)e^{-z_2\tau_m} - z_1(C-\alpha z_2)e^{-z_1\tau_m}\right]\Big/\alpha^2(z_2-z_1),$$

$$C = \lambda_1^2\alpha_2 + \lambda_2^2\alpha_1 + pq\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2) + (p+q)(\lambda_1+\lambda_2)\alpha_1\alpha_2. \tag{4}$$

Рассмотрим (на предмет существования корней) уравнение $p'_0(\tau_m) = 0$, которое, с учетом (4), преобразуется к виду

$$B = e^{-(z_2-z_1)\tau_m},\ \ B = -(1/4\lambda)\left(z_1 z_+/z_2\right)^2,$$

$$z_+ = b + (\alpha_1+\alpha_2)\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)},$$

$$b = (\lambda_1-\lambda_2)(\alpha_1-\alpha_2) + (\alpha_1+\alpha_2)^2 - 2(p+q)\alpha_1\alpha_2. \tag{5}$$

В (5) знак B определяется знаком λ. Так как $\lambda > 0$, то $B < 0$, и поэтому уравнение (5) корней не имеет.

Производная $[p'_0(\tau_m)]'$ функции (4) по переменной τ_m примет вид

$$[p_0'(\tau_m)]' = C\left[z_1^2(C-\alpha z_2)e^{-z_1\tau_m} - z_2^2(C-\alpha z_1)e^{-z_2\tau_m}\right]\Big/\alpha^2(z_2-z_1). \tag{6}$$

Рассмотрим (на предмет существования экстремума функции $p'_0(\tau_m)$) уравнение $[p'_0(\tau_m)]' = 0$, которое, с учетом (6), преобразуется к виду

$$e^{-(z_2-z_1)\tau_m} = (z_1/z_2)B, \tag{7}$$

где B определена в (5). Так как для рассматриваемого случая ($\lambda > 0$) имеет место $B < 0$, то уравнение (7) решения не имеет, т. е. функция $p'_0(\tau_m)$ – безэкстремальная. Кроме того, из (4) следует $p'_0(0) = (C/\alpha)^2$, $p'_0(\infty) = \lim p'_0(\tau_m) = 0$ при $\tau_m \to \infty$. Тогда $p'_0(\tau_m)$ – убывающая функция переменной τ_m ($\tau_m \geq 0$), не имеющая нулей. *Лемма 1 доказана.*

Лемма 2. Производная $p'_0(\tau_m)$ – неотрицательная функция переменной τ_m при $\lambda < 0$, $b > 0$ ($p'_0(\tau_m) \geq 0$).

Доказательство. Так как $\lambda < 0$, то в (5) $B > 0$. Величина B в (5) представима в виде

$$B = \left(z_1/z_2\right)^2\left(z_+/z_-\right),$$

$$z_- = b - (\alpha_1+\alpha_2)\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}, \tag{8}$$

где b определена в (5). Тогда $B > 1$ и уравнение (5) корней не имеет. 1) Если величина $(z_1 + z_2)C > \alpha z_1 z_2$, то $(z_1 / z_2)B > 1$, и поэтому уравнение (7) корней не имеет. Тогда $p'_0(\tau_m)$ убывает от $(C/\alpha)^2$ до нуля ($\tau_m \to \infty$) и при этом не имеет корней, т. е. в этом случае $p'_0(\tau_m)$ – неотрицательная функция ($\tau_m \geq 0$). 2) Если величина $(z_1 + z_2)C < \alpha z_1 z_2$, то $(z_1 / z_2)B < 1$, и тогда уравнение (7) имеет единственный корень $\tau^0 = -[1/(z_2 - z_1)]\ln[(z_1 / z_2)B]$. При этом в точке τ^0 реализуется единственный максимум функции $p'_0(\tau_m)$. Тогда производная $p'_0(\tau_m)$ сначала возрастает от $p'_0(0) = (C/\alpha)^2$ до $p'_0(\tau^0)$, затем убывает до нуля ($\tau_m \to \infty$), так что и во втором случае $p'_0(\tau_m)$ – неотрицательная функция ($\tau_m \geq 0$). *Лемма 2 доказана.*

Лемма 3. Неравенства $\lambda < 0$, $b < 0$ несовместны.

Доказательство. Обозначим

$$x = \lambda_1 - \lambda_2,\ x_1 = \left[1/(\alpha_2-\alpha_1)\right]\left[(\alpha_1+\alpha_2)^2 - 2(p+q)\alpha_1\alpha_2\right].$$

Если $b < 0$, то $\alpha_1 < \alpha_2$, $x_1 > 0$ и $x > x_1$. Если $\lambda < 0$, то имеет место либо а) $\lambda_1 + p\alpha_1 - \lambda_2 - q\alpha_2 < 0$, $\lambda_1 + q\alpha_1 - \lambda_2 - p\alpha_2 > 0$, либо б) $\lambda_1 + p\alpha_1 - \lambda_2 - q\alpha_2 > 0$, $\lambda_1 + q\alpha_1 - \lambda_2 - p\alpha_2 < 0$. Пусть выполняется а). Тогда $p < q$ и $p\alpha_2 - q\alpha_1 < x < q\alpha_2 - p\alpha_1$ ($q\alpha_2 > p\alpha_1$). Обозначим $x_2 = q\alpha_2 - p\alpha_1$ ($x_2 > 0$). Тогда

$$x_2 - x_1 = -\left[1/(\alpha_2 - \alpha_1)\right]\left[(1-p)\alpha_1^2 + (1-q)\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_2(2-p-q)\right] < 0.$$

Таким образом, $x_2 < x_1$ и неравенства $\lambda < 0$, $b < 0$ несовместны. Аналогично доказывается случай б). Тем самым *лемма 3 доказана.*

Лемма 4. Производная $p'_T(\tau_m)$ при $T = \tau_m$ ($\tau_m \geq 0$) строго больше нуля ($p'(\tau_m) > 0$).

Доказательство. Подставляя $T = \tau_m$ в (3), получаем

$$p'(\tau_m) = \frac{\left\{C + \lambda\psi^2(\tau_m)\left[(\lambda_1+\lambda_2)z_1z_2 + (z_1+z_2)(\alpha - z_1z_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau_m}\right]e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau_m}\right\}}{(\alpha_1+\alpha_2)}, \tau_m \geq 0, \quad (9)$$

где z_1, z_2, α, λ, $\psi(\tau_m)$ определены в (1). Рассмотрим (9) как функцию τ_m. Имеем $p'(0) = (C/\alpha)^2$, $p'(\infty) = C/(\alpha_1 + \alpha_2)$. Знак разности $p'(0) - p'(\infty) = \lambda C / (\alpha_1 + \alpha_2)\,\alpha^2$ определяется знаком λ: если $\lambda > 0$, то $p'(0) > p'(\infty)$; если $\lambda < 0$, то $p'(0) < p'(\infty)$. Исследуем производную $p''(\tau_m)$ функции $p'(\tau_m)$. Производная $p''(\tau_m)$, с учетом (9), примет вид

$$p''(\tau_m) = -\lambda z_1 z_2 \psi^3(\tau_m) y(\tau_m) e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau_m},$$

$$y(\tau_m) = (\lambda_1+\lambda_2)z_1z_2 - (\lambda_1+\lambda_2+2\alpha_1+2\alpha_2)(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau_m}, \quad \tau_m \geq 0.$$

Функция $\psi(\tau_m) > 0$ при любых значениях $(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2) \neq 0$, так что знак $p''(\tau)$ определяется знаками λ и $y(\tau_m)$.

Пусть $\lambda > 0$: 1.1) $(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2) < 0$. Тогда $y(\tau_m) > 0$, так что $p''(\tau_m) < 0$. Отсюда следует, что $p'(\tau_m)$ убывает от $p'(0)$ до $p'(\infty)$, оставаясь при этом строго больше нуля ($p'(\tau_m) > 0$); 1.2) $(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2) > 0$, $C \geq (\alpha_1+\alpha_2)(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2)$. Тогда $y(\tau_m) \geq 0$, причем $y(\tau_m) = 0$ возможно только в точке $\tau_m = 0$ при выполнении равенства $C = (\alpha_1+\alpha_2)(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2)$, так что $p''(\tau_m) \leq 0$. Результат идентичен результату предыдущего пункта; 1.3) $(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2) > 0$, $C < (\alpha_1+\alpha_2)(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2)$. Тогда $y(\tau_m) < 0$, $0 \leq \tau_m < \tau_0$; $y(\tau_m) = 0$, $\tau_m = \tau_0$; $y(\tau_m) > 0$, $\tau_m > \tau_0$, где

$$\tau_0 = -\left[\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)}\right]\ln\left\{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)\left[\alpha + (\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2)\right]}{(\lambda_1+\lambda_2+2\alpha_1+2\alpha_2)(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2)}\right\}.$$

В точке τ_0 достигается единственный максимум функции $p'(\tau_m)$. Тогда $p'(\tau_m) > 0$.

Пусть $\lambda < 0$: 2.1) $(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2) < 0$. Тогда $y(\tau_m) > 0$, так что $p''(\tau_m) > 0$. Отсюда следует, что $p'(\tau_m)$ возрастает от $p'(0)$ до $p'(\infty)$, поэтому $p'(\tau_m) > 0$; 2.2) $(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2) > 0$, $C \geq (\alpha_1+\alpha_2)(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2)$. Тогда $y(\tau_m) \geq 0$, так что $p''(\tau_m) \geq 0$. Выполнение равенства $y(\tau_m) = 0$ аналогично пункту 1.2. Результат идентичен результату предыдущего пункта; 2.3) $(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2) > 0$, $C < (\alpha_1+\alpha_2)(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2)$. Тогда поведение $y(\tau_m)$ идентично поведению $y(\tau_m)$ в пункте 1.3. В точке τ_0 при этом имеет место единственный минимум функции $p'(\tau_m)$, причем $p'(\tau_0) > 0$, и тогда $p'(\tau_m) > 0$. Суммируя результаты пунктов 1.1–1.3, 2.1–2.3, получаем *утверждение леммы 4*.

Изучим поведение производной $p'_T(\tau_m)$ как функции T на отрезке $[0, \tau_m]$. Рассмотрим (на предмет существования корней) уравнение $p'_T(\tau_m) = 0$, которое, с учетом (3), приводится к виду

$$e^{-(z_2-z_1)T}=\varphi(T),\quad \varphi(T)=(z_2/z_1)[F_2(T)/F_1(T)]e^{-(z_2-z_1)\tau_m},\quad 0\le T\le\tau_m, \tag{10}$$

где $F_1(T)$, $F_2(T)$ определены в (3). Так как, в принципе, τ_m может быть сколь угодно большим числом, то сначала изучим функцию $\varphi(T)$ при $T\ge 0$. Имеем

$$\varphi(0)=(1/B)e^{-(z_2-z_1)\tau_m};\quad \varphi(\infty)=\lim\varphi(T)=\varphi(0)\ \text{при}\ T\to\infty;$$

$$\varphi'(T)=\lambda(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)z_2^2(z_2-z_1)(\alpha_1+\alpha_2)^2\psi^4(T)\times$$
$$\times\left\{(z_1z_2)^2\left[1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]^2-C(\alpha_1+\alpha_2)e^{-2(\alpha_1+\alpha_2)T}\right\}\frac{e^{-(z_2-z_1)\tau_m}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}}{F_1^2(T)};$$

$$\varphi'(0)=-\lambda(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)z_2^2(\alpha_1+\alpha_2)(z_2-z_1)e^{-(z_2-z_1)\tau_m}/C(C-\alpha z_2)^2, \tag{11}$$

где λ, α, $\psi(T)$ определены в (1); $F_1(T)$ – в (3); C – в (4); B – в (5). Решение уравнения $\varphi'(T)=0$, вид $\varphi'(T)$ приведен в (11), определяет единственную точку экстремума $T^*=-[1/(a_1+a_2)]\ln\left[z_1z_2/\left(z_1z_2+\sqrt{(a_1+a_2)C}\right)\right]$ функции $\varphi(T)$. Если функции $F_1(T)$ и $F_2(T)$ не имеют нулей, то тогда и функция $\varphi(T)$ не будет иметь нулей и особых точек. Обозначим $\beta_1=-z_1z_2(\alpha_1+\alpha_2-z_1)/(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2+z_1)$, $\beta_2=-z_1z_2(\alpha_1+\alpha_2-z_2)/(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2+z_2)$.

Утверждение. 1) Для $\lambda>0$, $(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)>0$ существуют совместные системы ограничений: а) $(\alpha_1+\alpha_2-z_1)>0$, $(\alpha_1+\alpha_2-z_2)<0$, $\beta_2>0$; б) $(\alpha_1+\alpha_2-z_1)<0$, $(\alpha_1+\alpha_2-z_2)<0$, $0<\beta_1<1$, $\beta_2>0$;

2) для $\lambda>0$, $(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)<0$ существуют совместные системы ограничений: а) $(\alpha_1+\alpha_2-z_1)>0$, $(\alpha_1+\alpha_2-z_2)<0$, $\beta_1>0$; б) $(\alpha_1+\alpha_2-z_1)>0$, $(\alpha_1+\alpha_2-z_2)>0$, $\beta_1>0$, $0<\beta_2<1$;

3) для $\lambda<0$, $b>0$, $(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)<0$ существует совместная система ограничений: $(\alpha_1+\alpha_2-z_1)>0$, $(\alpha_1+\alpha_2-z_2)>0$, $\beta_1>0$, $\beta_2>0$;

4) для $\lambda<0$, $b>0$, $(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)>0$ существуют совместные системы ограничений: а) $(\alpha_1+\alpha_2-z_1)>0$, $(\alpha_1+\alpha_2-z_2)>0$; б) $(\alpha_1+\alpha_2-z_1)<0$, $(\alpha_1+\alpha_2-z_2)>0$, $0<\beta_1<1$; в) $(\alpha_1+\alpha_2-z_1)>0$, $(\alpha_1+\alpha_2-z_2)<0$, $0<\beta_2<1$; г) $(\alpha_1+\alpha_2-z_1)<0$, $(\alpha_1+\alpha_2-z_2)<0$, $0<\beta_1<1$, $0<\beta_2<1$,

при которых имеют место реализуемые варианты поведения функций $F_1(T)$ и $F_2(T)$ и при которых $F_1(T)$, $F_2(T)$ не имеют нулей ($T\ge 0$).

Таким образом, функция $\varphi(T)$, определенная в (10), не имеет нулей и особых точек.

Лемма 5. Уравнение (10) либо не имеет корней, либо имеет один корень, либо – два корня.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (10), которое преобразуется к виду

$$(b_1-a_1u)v^2+(b_2-a_2u)v+(b_3-a_3u)=0,\ v=e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T},\ u=e^{-(z_2-z_1)T},\ 0\le T\le\tau_m,$$

$$\begin{aligned}
&a_1=z_1^2(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)(\lambda+(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)[(\alpha_1+\alpha_2)z_2-\alpha]);\\
&a_2=z_1^2z_2(\lambda(\alpha_1+\alpha_2-z_1)-2z_1(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)[(\alpha_1+\alpha_2)z_2-\alpha]);\\
&a_3=z_1^2(z_1z_2)^2[(\alpha_1+\alpha_2)z_2-\alpha];\\
&b_1=z_2^2(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)(\lambda+(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)[(\alpha_1+\alpha_2)z_1-\alpha])e^{-(z_2-z_1)\tau_m};\\
&b_2=z_1z_2^2(\lambda(\alpha_1+\alpha_2-z_2)-2z_2(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)[(\alpha_1+\alpha_2)z_1-\alpha])e^{-(z_2-z_1)\tau_m};\\
&b_3=z_2^2(z_1z_2)^2[(\alpha_1+\alpha_2)z_1-\alpha]e^{-(z_2-z_1)\tau_m}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Выражение (12) есть квадратное уравнение относительно переменной v. Тогда уравнение (10) либо не имеет корней, либо имеет один корень, либо – два корня. *Лемма 5 доказана.*

Лемма 6. При $\lambda > 0$ уравнение (10) корней не имеет.

Доказательство. Из (11) следует $\varphi(0) < 0$. Пусть $(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2) > 0$, тогда из (11) вытекает $\varphi'(0) < 0$, то есть в точке T^* реализуется минимум функции $\varphi(T)$, и тогда $\varphi(T) < 0$, $T \geq 0$. Пусть $(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2) < 0$, тогда из (11) вытекает $\varphi'(0) > 0$, т.е. в точке T^* реализуется максимум функции $\varphi(T)$. В силу пунктов 1, 2 *утверждения*, $\varphi(T)$ нулей не имеет, поэтому $\varphi(T) < 0$, $T \geq 0$. С учетом *леммы 5*, *лемма 6 доказана.*

Лемма 7. При $\lambda < 0$, $(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2) < 0$, $b > 0$ уравнение (10) корней не имеет.

Доказательство. Ограничения *леммы 7* соответствуют пункту 3 *утверждения*. Из (5), (11) следует $\varphi(0) > 0$, $\varphi'(0) < 0$, т. е. в точке T^* реализуется минимум функции $\varphi(T)$. Тогда, в силу пункта 3 *утверждения*, $\varphi(T) > 0$, $T \geq 0$. Из (5) вытекает $B > 0$, из (8) следует $B > 1$. Тогда учитывая (11), получаем $\varphi(0) < 1$, и (с учетом *леммы 5*) получаем *утверждение леммы 7.*

Лемма 8. При $\lambda < 0$, $(\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2) > 0$, $b > 0$ уравнение (10) корней не имеет.

Доказательство. Ограничения *леммы 8* соответствуют пункту 4 *утверждения*. Рассмотрим вариант а). Из (5), (11) следует $\varphi(0) > 0$, $\varphi'(0) > 0$, так что в точке T^* реализуется максимум функции $\varphi(T)$. Тогда, в силу пункта 4 *утверждения*, $\varphi(T) > 0$, $T \geq 0$. Из (5) вытекает $B > 0$, из (8) следует $B > 1$. Тогда $\varphi(0) < 1$, и уравнение (10) (с учетом *леммы 5*) корней не имеет. Аналогичный результат устанавливается для вариантов б), в), г). *Лемма 8 доказана.*

Лемма 9. При $\lambda > 0$, производная $p'_T(\tau_m)$ – положительная функция переменной T, $0 \leq T \leq \tau_m$, $0 < \tau_m < \infty$ $(p'_T(\tau_m) > 0)$.

Доказывается последовательным применением *лемм 1*, *4*, *6*.

Лемма 10. При $\lambda < 0$, $b > 0$ производная $p'_T(\tau_m)$ – положительная функция переменной T, $0 \leq T \leq \tau_m$, $0 < \tau_m < \infty$ $(p'_T(\tau_m) > 0)$.

Доказывается последовательным применением *лемм 2*, *4*, *7*, *8*.

Леммы 9, 10 позволяют сформулировать и доказать следующие теоремы.

Теорема 1. При: 1) $\lambda > 0$, $0 < \tau_m < \infty$; 2) $\lambda < 0$, $b > 0$, $0 < \tau_m < \infty$, функция $p_T(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной T, $0 < T \leq \tau_m$.

Доказывается для варианта 1 применением *леммы 9*; для варианта 2 применением *леммы 10*.

Теорема 2. При любых значениях параметров p $(0 \leq p \leq 1)$, q $(0 \leq q \leq 1)$, $\lambda_i > 0$ $(\lambda_1 > \lambda_2)$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$, функция $p_T(\tau_m)$ переменной T $(0 < T \leq \tau_m)$ достигает своего максимального значения в точке $T = \tau_m$, $0 < \tau_m < \infty$.

Доказательство вытекает из результата *теоремы 1*.

Следствие 1. Из *теоремы 1* вытекает, что функции $p_T(\tau^{(j)})$, $j = \overline{2,k}$, являются возрастающими функциями переменной T $(0 < T \leq \tau_m)$.

Следствие 2. Из *теоремы 2* вытекает, что функция правдоподобия $L(T \mid \tau^{(1)},...,\tau^{(k)})$ достигает своего глобального максимума в точке $\hat{T} = \tau_m$, то есть решением оптимизационной задачи (2) является оценка длительности мертвого времени $\hat{T} = \tau_m$.

Заключение

Полученный результат делает возможным решение задачи оценки длительности мертвого времени без привлечения численных методов: в процессе наблюдения (в течение временного интервала (t_0, t)) потока событий вычисляются величины τ_k, $k = \overline{1, n}$, после чего находится $\tau_m = \min \tau_k$ ($k = \overline{1, n}$) и полагается $\hat{T} = \tau_m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Асинхронный дважды стохастический поток с инициированием лишних событий // Дискретная математика. 2011. Т. 23. Вып. 2. С. 59–65.
2. *Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A.* An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21. Issue 3 (Jul). P. 283–290.
3. *Горцев А.М., Леонова М.А., Нежельская Л.А.* Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4(21). С. 14–25.
4. *Горцев А.М., Леонова М.А., Нежельская Л.А.* Условия рекуррентности обобщенного асинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Queues: flows, systems, networks: proceedings of the international conference "Modern Probabilistic Methods for Analysis, Design and Optimization of Information and Telecommunication Networks". Minsk: BSU, 2013. P. 32–38.
5. *Дудин А.Н., Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
6. *Лившиц К.И., Бублик Я.С.* Распределение условного времени до разорения страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1(18). С. 91–101.
7. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
8. *Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А.* Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66–81.
9. *Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Управление и адаптация в системах массового обслуживания. Томск: Изд-во ТГУ, 1978. 208 с.
10. *Горцев А.М., Нежельская Л.А, Соловьев А.А.* Оптимальная оценка состояний МАР-потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Автоматика и телемеханика. 2012. № 8. С. 49–63.
11. *Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A., Soloviev A.A.* Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable dead time // Automation and Remote Control. 2012. V.73. No. 8. P. 1316–1326.
12. *Бушланов И.В., Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 76–93.
13. *Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф.* Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск: Изд-во "Университетское", 1988. 254 с.
14. *Шуленин В.П.* Математическая статистика. Часть 1. Томск: Изд-во НТЛ, 2012. 540 с.

Леонова Мария Алексеевна
Нежельская Людмила Алексеевна
Томский государственный университет
E-mail: mleonova86@mail.ru, ludne@mail.ru

Поступила в редакцию 2 марта 2013 г.

Leonova Maria A., *Nezhelskaya Lyudmila A.* (Tomsk State University). **Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events.**

Keywords: generalized asynchronous flow of events, unprolonging dead time, likelihood function, maximum likelihood estimation, dead time value.

Generalized asynchronous flow of events which intensity is piecewise constant stochastic process $\lambda(t)$ with two states λ_1 and λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) at unprolonging dead time is considered. During the time interval when $\lambda(t) = \lambda_i$, Poisson flow of events takes place with the intensity λ_i , i=1,2. Transition from the first state of process $\lambda(t)$ into the second one (from the second state into the first one) is carried out at any moment of time. The sojourn time in the i-th state is exponentially distributed with parameter α_i , i=1,2. The process of transition $\lambda(t)$ from the first state into the second one initiates with probability p ($0 \le p \le 1$) extra event in the second state. Also the process of transition $\lambda(t)$ from the second state into the first one initiates with probability вероятностью q ($0 \le q \le 1$) extra event in the second state.

The flow is functioning in conditions of unprolonging dead time (the value of dead time is fixed). We solve the problem of estimation of dead time using the likelihood function.