НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.П. Романов

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Сборник трудов

Издательство Томского университета
2013

УДК 511.34:517.5
ББК 22.1
Р 69

Романов Н.П.
Р 69 Теория чисел и функциональный анализ: сборник трудов / Под общ. ред. В.Н. Чубарикова. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. – 478 с.

ISBN 978-57511-2168-6

В книгу вошли основные научные работы доктора физико-математических наук, профессора Н.П. Романова. Сборник содержит статью о жизненном и творческом пути Н.П. Романова и его работы по теории чисел и функциональному анализу.

Для студентов и аспирантов, изучающих аналитическую теорию чисел, специалистов и всех интересующихся развитием и достижениями математической науки.

УДК 511.34:517.5
ББК 22.1

Редколлегия благодарит за помощь в подготовке книги к печати А.В. Буданова, М.С. Бухтяка, Е.В. Кайгородова, А.В. Никольского, Т.А. Пушкарёву, М.И. Рогозинского, К.С. Сорокина, В.И. Токареву, О.А. Шамак, а также за перевод с немецого языка Л.С. Копаневу

ISBN 978-57511-2168-6

Николай Павлович Романов

(1907–1972)

Содержание

От редколлегии

Предлагаемая вниманию читателя книга выдающегося советского математика Николая Павловича Романова является сборником его избранных работ. Внутри книги работы расположены в хронологическом порядке. Текст почти нигде не изменён, редколлегия лишь исправила замеченные неточности. Одна из статей, опубликованная на немецком языке, переведена на русский. Все ссылки унифицированы. В конце книги дана полная библиография научных трудов Н. П. Романова.

Основную часть сборника составляют его исследования по аддитивной и аналитической теории чисел. Открывает этот цикл работ знаменитая задача Романова о представлении натурального числа в виде суммы простого числа и фиксированной степени натурального числа. Здесь им получено утверждение о положительной плотности чисел, представимых в таком виде. Далее следуют новые оригинальные оценки порядка базиса в проблеме Гольдбаха о представимости натуральных чисел суммой ограниченного числа простых чисел. Ряд работ посвящен асимптотическому закону распределения простых чисел и знаменитой гипотезе Римана о расположении нетривиальных нулей дзета-функции Римана. Большой интерес представляет взгляд автора на законы распределения общих последовательностей целых чисел в натуральном ряду чисел. Последние рассмотрения привели Н. П. Романова к интересным арифметическим задачам теории функций и функционального анализа. Несколько особняком стоят работы, посвящённые матричному методу и теории функций действительной и комплексной переменной.

Характерной чертой творчества Н. П. Романова является сочетание модельных специальных постановок задач и методов исследования проблем теории чисел с общими постановками, приведшими его к арифметическим задачам теории функций и функционального анализа. Последнее обстоятельство, сопряжённое с использованием оригинальных арифметических методов, дало автору возможность получить первые результаты в классических задачах теории чисел.

Следует отметить, что научные исследования Н. П. Романова служат мощным толчком для развития современной теории чисел. Книга Н. П. Романова будет полезна как специалистам, так и начинающим математикам.

Краткий очерк научной и педагогической деятельности профессора Н. П. Романова

Целые числа придумал Господь Бог,
а всё остальное — дело рук человеческих.
Леопольд Кронекер
(1823–1891)

Хорошо известно изречение, что теория чисел — это жемчужина математики. Каждый, кто хотя бы немного изучал математику, знает о бесконечности множества простых чисел (Евклид) и о знаменитой великой теореме Ферма. Особенно большое значение для теории чисел имели работы таких титанов математики, как Л. Эйлер (1707–1783) и К. Ф. Гаусс (1777–1855). На рубеже XIX–XX вв. в области теории чисел трудились такие выдающиеся математики, как Ж. Лагранж, А. Лежандр, П. Дирихле, П. Л. Чебышев, Ж. Лиувилль, Э. Куммер, Э. Артин, Р. Дедекинд, Д. Гильберт и др. С XIX в. и по настоящее время исследования по теории чисел приобретают все увеличивающийся размах, значительное место в них занимают работы отечественных математиков.

Николай Павлович Романов был первым заведующим кафедрой алгебры и теории чисел Томского государственного университета. Основные его научные работы посвящены теории чисел. В величественном здании математики есть кирпичи, заложенные его руками.

Н. П. Романов родился 19 февраля 1907 г. в селе Больше-Окинск Иркутской губернии. После окончания педагогического факультета Иркутского университета в 1929 г. поступил в аспирантуру при МГУ, где его руководителями были член-корреспондент АН СССР А. Я. Хинчин и академик О. Ю. Шмидт.

В 1932 г. Н. П. Романов начал работать на физико-математическом факультете (ФМФ) Томского университета. Он был зачислен и.о. профессора кафедры математики (приказ ректора №143 от 27.09.1932 г.; основание: командировка Наркомпроса за №426 от 10.09.1932 г.). Вместе с ним в Томск приехали его жена Сима Соломоновна и двухлетний сын Владимир.

В 1935 г. при защите кандидатской диссертации в Москве ему сразу была присуждена степень доктора физико-математических наук.

Дом, где жила семья Н. П. Романова, ул. Советская, 60

В Томске на рубеже конца XIX — начала XX в. был создан региональный научно-образовательный центр, базировавшийся на коллективах университета и технологического института.

В 1932 г. при Томском университете был основан НИИ математики и механики (затем он действовал в составе СФТИ до 1941 г.[1]). В 1935–1940 гг. в институте под редакцией профессора Ф. Э. Молина[2] издавался первый специальный журнал по математике и механике в Сибири «Известия НИИ математики и механики», Н. П. Романов был членом редколлегии этого журнала. Кроме работ сибирских ученых в журнале публиковались известные советские (А. Н. Колмогоров, С. Н. Бернштейн, Н. С. Кошляков, И. И. Привалов и др.) и иностранные ученые (Дж. Нейман, В. Серпинский, А. Эйнштейн, П. Эрдеш и др.). В Томск для работы в НИИ ММ были приглашены известные немецкие математики Стефан Бергман и Фриц Нётер, эмигрировавшие из Германии. Гостями томских математиков в эти годы были польский математик К. Заранкевич (1935) и французский математик Ж. Адамар (1936).

В 1938 г. в составе профессоров Ф. Э. Молина и Н. П. Романова была основана кафедра алгебры и теории чисел[3], Николай Павлович стал первым ее заведующим и был им до отъезда из Томска.

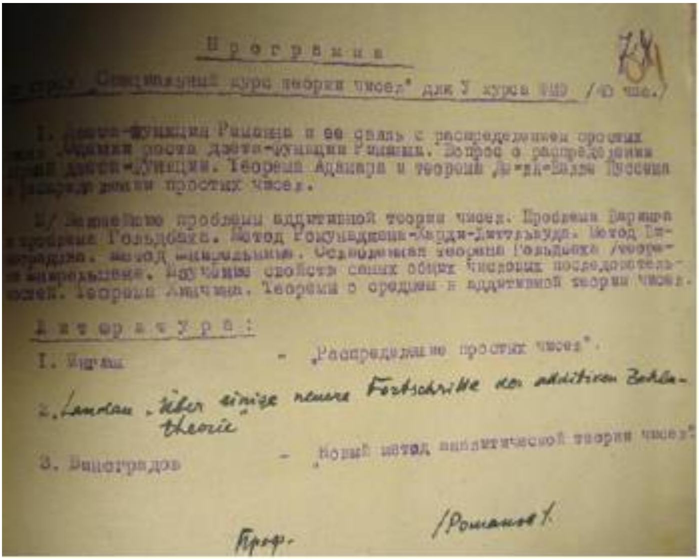
Н. П. Романов работал в ТГУ с 25.09.1932 по 01.10.1944 г. Читал лекции по разным вопросам математики. Так, в 1932–1937 гг. он прочитал следующие курсы: «Дополнительные главы высшей алгебры», «Теория чисел», «Эллиптические функции», «Специальные функции», «Теория конечных разностей» и «Топология». Кроме преподавания, он вел другую разнообразную работу. Занимался организацией математических олимпиад, был членом ГАК ФМФ, членом ученых советов ФМФ и ТГУ, председателем математической комиссии при ученом совете ТГУ, членом или председателем комиссий по приему кандидатского экзамена, предварительному рассмотрению дел соискателей степени доктора и звания профессора.

[1] В 1968 г. при ТГУ был основан НИИ прикладной математики и механики.

[2] Федор Эдуардович Молин (1861–1941) — заслуженный деятель науки РСФСР, первый профессор математики в Сибири, один из основоположников современной алгебры.

[3] С 1974 г. — кафедра алгебры.

Физико-математический факультет,
выпускники-математики 1941 г. с преподавателями
(19.05.1940 г.)
1-й (нижний) ряд: В. С. Федорова, Г. С. Аникина,
Н. К. Лесина, М. Я. Алимова;
2-й ряд: доц. П. П. Куфарев, доц. Е. Н. Аравийская,
проф. Н. П. Романов, проф. Н. Н. Горячев,
проф. Ф. Э. Молин,
проф. В. М. Кудрявцева, проф. В. Д. Кузнецов;
3-й ряд: Е. Н. Дехтярева, Р. Н. Щербаков, Б. В. Казачков,
доц. А. С. Джанумянц, доц. Е. Д. Томилов,
асс. Ю. В. Чистяков, В. Д. Чумак



Программа

[illegible] „Специальный курс теории чисел" для V курса [illegible] /40 час./

I. [illegible]-функция Римана и ее связь с распределением простых [illegible]. Оценки роста дзета-функции Римана. Вопрос о распределении [illegible] дзета-функции. Теорема Адамара и теорема [illegible] Пуссена [illegible] простых чисел.

II/ [illegible] проблемы аддитивной теории чисел. Проблема [illegible] Гольдбаха. Метод Рамануджана-Харди-Литтльвуда. Метод [illegible] метод [illegible]. [illegible] теорема Гольдбаха [illegible] свойств [illegible] общих числовых последователь[illegible]. Теорема [illegible]. Теоремы о средних в аддитивной теории чисел.

Литература:

I. [illegible] - „Распределение простых чисел".

2. Landau „Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie"

3. Виноградов - „Новый метод аналитической теории чисел".

Проф. /Романов/

Николай Павлович неоднократно получал благодарности в приказах ректора за хорошую работу. В 1941 г. был признан лучшим ударником университета, а его фотография была помещена на Доску почёта. Избирался членом горсовета.

Н. П. Романов назначался официальным оппонентом ряда диссертаций. Ездил в научные командировки, в частности, в 1944 г. находился в продолжительной командировке в Москве.

С 1944 по 1951 г. Н. П. Романов — заведующий кафедрой в Узбекском университете г. Самарканда. Переезд в Узбекистан был связан с состоянием здоровья Николая Павловича. К концу 30-х гг. прошлого столетия в Ташкенте сформировался коллектив математиков, плодотворно трудившихся под руководством известного ученого В. И. Романовского. Ташкент превратился в крупный исследовательский центр, и, как писал А. Я. Хинчин, весь научный мир с интересом следил за работами по математической статистике, исходившими из Средней Азии. В самый разгар Великой Отечественной войны на базе существовавшего с 1940 г. Узбекистанского филиала Академии наук по Постановлению Правительства СССР от

27.09.1943 г. была создана Академия наук Узбекистана. В составе академии в январе 1944 г. начал работать Институт математики и механики.

В 1951 г. Н. П. Романов переехал в Ташкент, где работал бессменным заведующим кафедрой теории чисел и алгебры Среднеазиатского государственного университета.

В 1958–1960 гг. возглавлял отдел математического анализа Института математики и механики в Ташкенте.

Николай Павлович был превосходным лектором. Так, еще в Томске в 1941 г. он получил первую премию ТГУ за лучшую лекцию. Это было время, когда динамично развивающейся экономике страны требовались профессионалы высокого уровня, профессия математика была престижной, студенты тянулись к преподавателям, которые успешно сочетали преподавательскую деятельность с научной работой. В Самарканде Н. П. Романовым воспитана целая группа математиков, среди которых большое число представителей среднеазиатских народов.

За достижения в педагогической и научной деятельности Н. П. Романов был награжден орденом Трудового Красного Знамени и был удостоен почетного звания «Заслуженный деятель науки УзССР».

Скончался Н. П. Романов 8 мая 1972 г. Похоронен на ташкентском Боткинском кладбище №1. Это кладбище является своеобразным памятником историко-мемориального характера.

Основными направлениями научной деятельности Николая Павловича Романова являются аддитивная теория чисел, операторная дзета-функция и однопараметрические подгруппы линейных операторов, вопросы связи гильбертова пространства и теории чисел, аналитические функции целого аргумента. Имеются работы по теории функций комплексных переменных. Всего им опубликовано более 40 научных статей.

Первые научные работы Н. П. Романова относятся к аддитивной теории чисел. В 1933–1934 гг. он доказал замечательные теоремы о числах, представимых в виде суммы простого числа и степеней целого числа. Данные результаты получили высокую оценку и послужили основой для дальнейших исследований в работах известных математиков Э. Ландау, П. Эрдеша и П. Турана. Некоторые работы П. Эрдеша и П. Турана, связанные с исследованиями Н. П. Романова, были опубликованы в Томске.

Кратко остановимся на вкладе Николая Павловича в решение знаменитой проблемы Гольдбаха. В математических кругах проблема Гольдбаха стояла в одной «шеренге» с теоремой Ферма, которая в итоге была доказана в 1995 г. Проблема Гольдбаха остаётся пока нерешённой.

В 1742 г. академик Х. Гольдбах[1] в письме к Л. Эйлеру высказал предположение, что каждое целое число, большее трёх, может быть разложено на сумму не более чем трёх простых чисел. Эйлер тут же заметил, что для доказательства этого предположения достаточно обнаружить, что каждое чётное число может быть разложено на сумму двух простых. В дальнейшем последнее утверждение получило название сильной, или бинарной, проблемы Гольдбаха, а задача, сформулированная самим Гольдбахом, — слабой, или тернарной, проблемы Гольдбаха. Многочисленные попытки доказать гипотезу Гольдбаха заканчивались неудачей.

Конечно, не было недостатка и в попытках путём экспериментальной проверки натолкнуться на противоречащий пример. Все напрасно — противоречащих гипотезе Гольдбаха примеров не находилось. Вместе с тем доказательство этого предположения не было получено: ведь проверено было только конечное число чисел, а бесконечное множество их так и осталось нерассмотренным.

Из всех этих безуспешных начинаний в 1912 г. на Международном математическом конгрессе в Кембридже был даже сделан довольно безутешный вывод, что проблема Гольдбаха превосходит силы современной математики. Первый крупный успех в решении проблемы Гольдбаха был достигнут в 1930 г. молодым советским математиком Львом Генриховичем Шнирельманом. Ему удалось показать, что всякое целое число может быть представлено в виде суммы ограниченного числа (несколько сотен тысяч) простых чисел. Особое значение имел своеобразный и очень оригинальный метод доказательства данного результата, с помощью которого удалось продвинуться в решении этой и некоторых других проблем. Принципиальный шаг был сделан, оставалось улучшать изобретённый метод и уменьшать полученную оценку. На этот путь и встали многие математики как у нас, так и за границей. Н. П. Романов, уточнив некоторые неравенства в методе Шнирельмана, показал, что число необходимых слагаемых не превосходит 2208. Его работа положила начало ряду исследований, посвященных дальнейшему снижению констан-

[1]Христиан Гольдбах (1690–1764), член Петербургской академии наук.

ты Шнирельмана. Усилиями ряда математиков к 1937 г. это число было уменьшено до 67.

В том же 1937 г. академику И. М. Виноградову удалось, улучшив свой метод тригонометрических сумм, показать, что всякое нечётное число, большее некоторого достаточно большого числа, является суммой не более чем трёх простых. Отсюда для чётных чисел немедленно вытекало, что они являются суммой не более чем четырёх простых.

Результат Виноградова быстро облетел математический мир и ещё выше поднял славу отечественной математики. В обзорных докладах, прочитанных в математических обществах Франции, Англии и других стран, специалисты называли теорему Виноградова одним из самых блестящих проявлений человеческого гения в XX в.

В 1995 г. была доказана теорема Ромаре (Ramaré), которая утверждает, что любое четное число представимо в виде суммы не более чем шести простых чисел. В 2012 г. Теренсу Тао из Калифорнийского университета, по сообщению Nature News, удалось доказать, что всякое нечётное число представимо как сумма не более чем пяти простых чисел.

Еще в студенческие и аспирантские годы Николая Павловича заинтересовали применения операторных методов в теории чисел. Позже, в 1935 г., интерес к этим вопросам у Николая Павловича усилился под влиянием идей Л. Г. Шнирельмана, который занимался аналогичными вопросами. Частные случаи операторной дзета-функции рассматривались еще Л. Г. Шнирельманом; в более общем виде они были развиты Н. П. Романовым. Николай Павлович ввел общее понятие операторной дзета-функции и гамма-функции на основе теории однопараметрических операторных полугрупп. Им были получены аналоги теории дзета-функции Римана, в частности, операторный аналог функционального уравнения Римана. На этом пути получаются не только теоретико-числовые, но и чисто аналитические факты. Н. П. Романов нашел разнообразные методы построения однопараметрических полугрупп линейных операторов в различного рода функциональных пространствах и сделал важный вклад в исчисление инфинитезимальных операторов. Значительная часть работ Николая Павловича посвящена приложению теории гильбертова пространства к теории чисел. Им даны новые, основанные на теоретико-числовых соображениях методы построения ортогональных последовательностей. Используя общие принципы, развитые в своих работах, Николай Павлович получил большое число различных эквивалентов гипотезы Римана о корнях дзета-функции.

Эти и другие результаты Н. П. Романова высоко оценили академик Ю. В. Линник и профессор Т. А. Сарымсаков [43]. Практически во всех книгах, вышедших после второй половины XX в. и посвященных теории чисел, есть упоминания о Н. П. Романове (см., например, [32, 44]).

В последнее время Н. П. Романов работал над усовершенствованием элементарных методов в теории чисел, исследованием асимптотики степенных рядов на границе круга сходимости и другими вопросами.

Некоторое представление о Н. П. Романове как человеке может дать следующая выдержка из книги [45]: «Романов был своеобразной личностью, постоянно погруженной в абстрактный мир математических образов и идей. Это проявлялось даже в его внешнем виде, который обнаруживал отвлечённость от окружающей действительности и рассеянность, иногда казавшуюся со стороны наигранной».

Приведём один любопытный случай, сообщённый Эрихом Сергеевичем Воробейчиковым, бывшим проректором ТГУ. А ему рассказал Александр Александрович Сироткин, в описываемое время — студент ТГУ, а много позже — заместитель декана радиофизического факультета ТГУ. Однажды, в начале Великой Отечественной войны, Н. П. Романов находился в очереди возле булочной, ожидая хлеба. У магазина стоял фургон с хлебом, вдруг Николай Павлович вынул кусок мела и стал писать формулы на стенке фургона. В какой-то момент фургон тронулся и Николай Павлович, следуя за ним целый квартал, продолжал делать на нём свои выкладки.

Николай Павлович переводил со словарем с французского и итальянского, изъяснялся по-английски, свободно владел немецким. О семье Николая Павловича нам известно немного. Его отец Романов Павел Петрович в 30–40-е гг. также жил в Томске. У него, кроме Николая, были сыновья Алексей (подполковник танковых войск) и Пётр (преподаватель техникума). Павел Петрович дружил с известным в Томске медиком академиком А. Г. Савиных, они вместе ездили на охоту. В Самарканд Николай Павлович и его жена уехали с двумя сыновьями — Владимиром и Леонидом (родился в 1937 г.). В Узбекистане у Романовых родилась дочь.

При написании данной заметки использовались материалы из [32, 35, 38, 40, 43–45], а также воспоминания томички Надежды Афанасьевны Понеделковой. Когда она была девочкой, её семья жила в одном доме с Н. П. Романовым по ул. Советская, 60. Это был деревянный двухэтажный дом напротив общежития ТГУ по ул. Советская, 59. Недавно этот дом снесли. Надежда Афанасьевна 30 лет работала администратором кинотеатра им. М. Горького. Её отец А. Я. Понеделков преподавал начертательную геометрию в ТГУ и ТПИ, был деканом физико-математического факультета ТГПИ. Один из его студентов А. А. Воробьёв стал впоследствии ректором ТПИ.

П. А. Крылов, А. Р. Чехлов

1. О двух теоремах аддитивной теории чисел

В настоящей работе доказываются два следующих предложения:

1. В каждом интервале $(0, x)$ $(x \geqslant 3)$ находится больше чем αx целых чисел, представимых в виде суммы одного простого числа и n-й степени целого числа, где α зависит только от n.

2. В каждом интервале $(0, x)$ $(x \geqslant 3)$ находится больше чем $\beta \frac{x}{\log \log x}$ чисел, представимых в виде суммы одного простого числа и некоторой степени данного целого числа a, причем β зависит только от a.

Если воспользоваться основными понятиями суммы последовательности и плотности последовательности, введёнными в теорию чисел Л. Г. Шнирельманом [49], то тогда первое предложение можно сформулировать следующим образом: сумма последовательности простых чисел и последовательности $n = x$ степеней натурального ряда чисел есть последовательность положительной плотности (суммой последовательностей n_1, n_2, n_3, $\ldots$ и m_1, m_2, $\ldots$ называется последовательность всех чисел, представимых в виде $n_i + m_j$). Плотностью последовательности n_1, n_2, n_3, $\ldots$ в интервале $(0, x)$ назовем отношение числа чисел n_i, лежащих в интервале, к длине этого интервала. Для последовательности положительной плотности будет постоянно удовлетворяться неравенство

$$\nu(x) > \alpha x,$$

где $\nu(x)$ означает число чисел нашей последовательности, не превосходящих x, и $\alpha > 0$ не зависит от x. Для доказательства указанных предложений выведем одно общее тождество, относящееся к двум любым целочисленным последовательностям n_1, n_2, n_3, $\ldots$ и m_1, m_2, m_3, $\ldots$. Тождество пишется следующим образом:

$$\sum_{u=0}^{2x} \Psi(u; x)^2 = 2{\sum_{u=0}^{x}}' A_1(u; x) A_2(u; x), \tag{1}$$

где $A_1(u; x)$, $A_2(u; x)$ и $\Psi(u; x)$ означают соответственно число решений уравнений

$$n_i - n_j = u, \quad m_i - m_j = u, \quad m_i + m_j = u,$$

причем везде

$$n_i \leqslant x, \quad n_j \leqslant x, \quad m_i \leqslant x, \quad m_j \leqslant x.$$

Штрих при знаке суммирования означает, что при $u = 0$ мы должны вместо $A_1(0;x)A_2(0;x)$ взять $\dfrac{1}{2}A_1(0;x)A_2(0;x)$. Для вывода тождества (1) сосчитаем число решений уравнения

$$n_i - n_j - m_k + m_i = 0 \quad (n_i \leqslant x, \quad n_j \leqslant x, \quad m_k \leqslant x, \quad m_i \leqslant x).$$

С одной стороны, это уравнение может быть записано в виде

$$n_i - n_j - (m_k - m_i) = 0\,(n_i \leqslant x,\, n_j \leqslant x,\, m_k \leqslant x,\, m_i \leqslant x) \tag{2}$$

и заменено системой уравнений

$$n_i - n_j = u, \quad m_k - m_i = u \quad (u = 0, 1, 2, \ldots, x_1 - 1, -2, \ldots, -x)$$
$$(n_i \leqslant x, \quad n_j \leqslant x, \quad m_k \leqslant x, \quad m_i \leqslant x).$$

Следовательно, число решений уравнения (2) равно

$$\sum_{u=-x}^{x} A_1(u;x)A_2(u;x) = 2{\sum_{u=0}^{x}}' A_1(u;x)A_2(u;x).$$

С другой стороны, уравнение (2) может быть записано в виде

$$n_i + m_i - (n_j + m_k) = 0 \quad (n_i \leqslant x, \quad n_j \leqslant x, \quad m_k \leqslant x, \quad m_i \leqslant x)$$

и заменено системой уравнений

$$n_i + m_i = u, \quad n_j + m_k = u \quad (u = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2x)$$
$$(n_i \leqslant x, \quad n_j \leqslant x, \quad m_k \leqslant x, \quad m_i \leqslant x).$$

Следовательно, число решений уравнения (2) равно

$$\sum_{u=0}^{2x} \Psi(u;x)^2,$$

т.е. левой части тождества (1), которое, таким образом, доказано. Возьмем в общем тождестве (1) в качестве m_i последовательность простых чисел и в качестве n_i последовательность n-х степеней чисел натурального ряда. Согласно лемме Viggo Brun'a, обобщенной Шнирельманом, имеем

$$A_2(u;x) < c_1 \frac{x}{\log^2 x} \prod_{p/u} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

при $u \neq 0$. Кроме того,

$$A_2(u;x) = \pi(x) < c_2 \frac{x}{\log x}$$

согласно оценке Чебышева. Поэтому имеем

$$\sum_{u=0}^{2x} \Psi(u;x)^2 = 2{\sum_{u=0}^{x}}' A_1(u;x) A_2(u;x) <$$
$$< 2c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{u=1}^{x} A_1(u;x) f(u) + c_2 \frac{x}{\log x} \sqrt[n]{x},$$

так как

$$A_1(0;x) = \left[\sqrt[n]{x}\right].$$

Здесь положено:

$$f(u) = \prod_{p/u} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \sum_{d/u} \frac{\mu(d)^2}{d}.$$

Предыдущее неравенство преобразуется далее:

$$\begin{aligned} \sum_{u=0}^{2x} \Psi(u;x)^2 &= 2c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{u=1}^{x} A_1(u;x) \sum_{d/u} \frac{\mu(d)^2}{d} + c_2 \frac{x^{\frac{n+1}{n}}}{\log x} = \\ &= 2c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)^2}{k} \sum_{u=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]} A_1(ku;x) + c_2 \frac{x^{\frac{n+1}{n}}}{\log x}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\sum\limits_{u=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]} A_1(ku;x)$ не больше чем число решений сравнения

$$y_1^n - y_2^n \equiv 0\ (k) \quad (y_1 \leqslant \sqrt[n]{x}, \quad y_2 \leqslant \sqrt[n]{x}). \tag{4}$$

Для каждого данного y_2 y_1 имеет не больше чем $\left(\left[\frac{\sqrt[n]{x}}{k}\right]+1\right)\Phi(k)$ значений, где $\Phi(k)$ означает максимальное число классов по модулю k, имеющих один и тот же n-ичный вычет. Следовательно, число решений сравнения (4) не больше чем

$$\left[x^{\frac{1}{n}}\right]\left(\left[\frac{x^{\frac{1}{n}}}{k}\right]+1\right)\Phi(k),$$

что, наверное, меньше, чем $2\,x^{\frac{2}{n}}\,\dfrac{\Phi(k)}{k}$. Неравенство (3) приобретает вид

$$\sum_{u=0}^{2x}\Psi(u;x)^2 < 4c_1\frac{x^{1+\frac{2}{n}}}{\log^2 x}\sum_{k=1}^{x}\frac{\Phi(k)}{k^2}\mu(k)^2 + c_2\frac{x^{\frac{n+1}{n}}}{\log x}.$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{x}\frac{\Phi(k)}{k^2}\mu(k)^2,$$

как мы увидим далее, сходится, поэтому последнее неравенство приобретает вид

$$\sum_{u=0}^{2x}\Psi(u;x)^2 < c_3\frac{x^{\frac{n+2}{n}}}{\log^2 x}. \qquad (5)$$

Оценим теперь

$$\sum_{u=0}^{2x}\Psi(u;x)$$

снизу. Очевидно, что $\sum\limits_{u=0}^{2x}\Psi(u;x)$ равно числу решений неравенства

$$p_i + y^n \leqslant 2x,\ p_i \leqslant x,\ y_n \leqslant x,$$

т.е. равно

$$\left[\sqrt[n]{x}\right]\pi(x).$$

Следовательно,

$$\sum_{u=0}^{2x}\Psi(u;x) > c_4\frac{x^{\frac{n+1}{n}}}{\log x}. \qquad (6)$$

Обозначим через $\nu(2x)$ число чисел, разложимых на сумму одного простого числа и n-степени простого числа, лежащих в интервале

$(0,\ 2x)$. Очевидно, что $\nu(2x)$ не меньше чем число чисел, отличных от нуля, в ряду

$$\Psi(1;x), \Psi(2;x), \ldots, \Psi(2x;x).$$

Следовательно, на основании неравенства Шварца имеем

$$\nu(2x) > \frac{\left(\sum\limits_{u=0}^{2x} \Psi(u;x)\right)^2}{\sum\limits_{u=0}^{2x} \Psi(u;x)^2}.$$

Воспользовавшись (5) и (6), получаем

$$\nu(2x) > \frac{c_4^2}{c_3} x = 2\alpha x$$

или

$$\nu(x) > \alpha x.$$

Последнее неравенство представляет собой содержание теоремы 1. Что касается сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\Phi(k)}{k^2}\mu(k)^2$, которым мы пользовались выше, то она легко получается, если на основании известного мультипликативного свойства функции $\Phi(k)$ преобразуем ряд в бесконечное произведение

$$\prod_p \left(x + \frac{\Phi(p)}{p^2}\right)$$

распространенное по всем простым числам p. Но $\Phi(p) \leqslant n$, так как число сравнений

$$z^n \equiv \alpha \pmod p$$

при простом p не превосходит n, и сходимость бесконечного произведения

$$\prod_p \left(x + \frac{\Phi(p)}{p^2}\right)$$

и вместе с ним ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi(k)}{k^2}\mu(k)^2$$

получается из очевидной сходимости бесконечного произведения

$$\prod_p \left(1 + \frac{n}{p^2}\right).$$

В предыдущих рассуждениях ничего не изменится, если вместо последовательности всех простых чисел возьмем последовательность простых чисел положительной относительной плотности, т.е. такую подпоследовательность $P_1{}'$, $P_2{}'$, $P_3{}'$, $\ldots$, для которой число $\pi_1(x)$ всех $p_i{}'$, не превосходящих x, удовлетворяет неравенству

$$\pi_1(x) > \gamma \frac{x}{\log x}.$$

Поэтому можно высказать следующую теорему: сумма последовательности n-х степеней натурального ряда и подпоследовательности простых чисел положительной относительной плотности есть последовательность положительной плотности. В частности, последовательность всех простых чисел, содержащихся в данной арифметической прогрессии, сложенная с последовательностью n-х степеней натурального ряда чисел, дает последовательность положительной плотности. Далее, последовательность всех простых чисел, представимых данной квадратичной бинарной формой, сложенная с последовательностью n-х степеней, дает также последовательность положительной плотности. Отсюда вытекает, что последовательность чисел, представимых в виде $ax^2 + 2bxy + cy^2 + z^n$, есть последовательность положительной плотности.

Для доказательства второго предложения применим наше тождество (1) к последовательности простых чисел и последовательности чисел, образующих геометрическую прогрессию, т.е. возьмем $n_i = a^i$, $m_i = p_i$. Здесь, как и выше,

$$A_2(u;\, x) < c_1 \frac{x}{\log^2 x} \prod_{p/u} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

при $u \neq 0$ и

$$A_2(0;\, x) < c_2 \frac{x}{\log x}.$$

Кроме того, $A_1(u;\, x)$ принимает для каждого значения $u \neq 0$ одно из двух значений 0 и 1. В самом деле, уравнение

$$a^{k'_1} - a^{k'_2} = u$$

не может иметь больше одного решения, так как из
$a^{k_2} - a^{k_1} = a^{k_2'} - a^{k_1'}$ или

$$a^{k_1}(a^{k_2-k_1} - 1) = a^{k_1'}(a^{k_2'-k_1'} - 1)$$

следует $k_1 = k_1'$ и $k_2 = k_2'$. Очевидно также, что

$$A_1(0;\, x) = [\log_a x] < c_5 \log x.$$

Теперь на основании (1) можно записать следующее неравенство:

$$\sum_{u=0}^{2x} \Psi(u;x)^2 < 2c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{r=1;\, s=1}^{\log_a x} f[a^r(a^s-1)] + c_2c_3x,$$

где, как и выше,

$$f(u) = \prod_{p/u}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \sum_{d/u} \frac{\mu(d)^2}{d}.$$

Или, так как для любых ν_1 и ν_2, $f(\nu_1\nu_2) \leqslant f(\nu_1)f(\nu_2)$,

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{u=0}^{2x} \Psi(u;x)^2 < 2c_1 \frac{x\log_a x}{\log^2 x} \prod_{p/u}\left(1+\frac{1}{p}\right) \sum_{s=1}^{\log_a x} f(a^s-1) + c_6x,\\
&\sum_{u=0}^{2x} \Psi(u;x)^2 < c_7 \frac{x}{\log x} \sum_{s=1}^{\log_a x} \sum_{d/a^{s-1}} \frac{\mu(d)^2}{d} + c_6x =\\
&\qquad\qquad = c_6x + c_7\frac{x}{\log x} \sum_{\substack{k=1\\(k,a)=1}}^{x} \frac{\mu(k)^2}{k}\left[\frac{\log_a x}{l(k)}\right],
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где $l(k)$ означает длину периода, образуемого различными степенями a^0, a^1, a^2, $\ldots$ по модулю k. Очевидно, что $l(k)$ равно эйлеровской функции $\varphi(k)$ для всех k, для которых a является первообразным корнем. Кроме того,

$$l(a^i - 1) = i,$$

следовательно,

$$l(k) = \log_a(k+1)$$

для всех k вида a^i-1. Для всех остальных k постоянно удовлетворяются неравенства

$$\varphi(k)>l(k)>[\log_a(k+1)].$$

Из неравенства (7) вытекает:

$$\sum_{u=0}^{2x}\Psi(u;x)^2<c_8\frac{x}{\log x}\sum_{\substack{k=1\\(k,a)=1}}^{x}\frac{\mu(k)^2}{k}\left[\frac{\log_a x}{l(k)}\right]$$

или

$$\sum_{u=0}^{2x}\Psi(u;x)^2<c_9x\sum_{\substack{k=1\\(k,a)=1}}^{x}\frac{\mu(k)^2}{kl(k)},$$

так как всегда

$$l(k)\geqslant[\log_a(k+1)]\sum_{u=0}^{2x}\Psi(u;x)^2<c_{10}x\log\log x. \tag{7'}$$

Кроме того, очевидно

$$\sum_{u=0}^{2x}\Psi(u;x)=\pi(x)[\log_a x]>c_{11}x. \tag{8}$$

Обозначив через $\nu(2x)$ число чисел интервала $(0,\,2x)$, разложимых на сумму одного простого числа и одной степени a, имеем на основании неравенства Шварца и $(7')$, (8):

$$\nu(2x)>\frac{\left[\sum\limits_{u=0}^{2x}\Psi(u;x)\right]^2}{\sum\limits_{u=0}^{2x}\Psi(u;x)^2}>\frac{c_{11}^2}{c_{10}}\frac{x}{\log\log x}$$

или

$$\nu(x)>\beta\frac{x}{\log\log x}. \tag{9}$$

Второе предложение, таким образом, доказано. Дальнейшее улучшение оценки (9) зависит от улучшения оценки для суммы

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,a)=1}}^{x}\frac{\mu(k)^2}{kl(k)}.$$

В случае, если ряд

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,a)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{kl(k)}$$

сходится, можно высказать предложение: последовательность простых чисел, сложенная с геометрической прогрессией, дает последовательность положительной плотности. Но, однако, доказать что-либо относительно сходимости или расходимости ряда

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,a)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)}{kl(k)}$$

не удается ввиду сложной природы функции $l(k)$.

2. Об одной теореме аддитивной теории чисел

В настоящей работе рассматривается задача о разложении чисел на сумму одного квадрата и одного простого числа. Эта задача решается таким образом, что в каждом интервале $(0,\, x)$ $(x > 2)$ лежит больше чем αx чисел, представимых в виде суммы одного квадрата и одного простого числа, где $\alpha > 0$ — некоторая абсолютная константа.

Основой всего дальнейшего будет служить тождество, относящееся к двум любым последовательностям. Если мы имеем две произвольные возрастающие последовательности целых положительных чисел $n_1,\, n_2,\, \ldots$ и $m_1,\, m_2,\, \ldots$ и если мы обозначим через $A_1(u;x)$ число решений уравнения $n_i - n_j = u$ при условии $n_i \leqslant x$, $n_j \leqslant x$ через $A_2(u;x)$ — число решений уравнения $m_i - m_j = u$ $(m_i \leqslant x$, $m_j \leqslant x)$ и через $\psi(u;x)$ — число решений уравнения $n_i + m_j = u$ $(n_i \leqslant x,\, m_j \leqslant x)$, то $A_1(u;x)$, $A_2(u;x)$, $\psi(u;x)$ удовлетворяют следующему тождеству:

$$\sum_{u=0}^{2x} \{\psi(u;x)\}^2 = 2 \sum_{u=0}^{x}{}' A_1(u;x) A_2(u;x). \qquad (\alpha)$$

Здесь акцент при знаке суммирования означает, что при $u = 0$ мы должны вместо $A_1(0;x)A_2(0;x)$ взять $\dfrac{1}{2} A_1(0;x)A_2(0;x)$.

Для доказательства этого тождества нужно двумя способами подсчитать число решений уравнения

$$n_i + m_j - n_k - m_l = 0 \quad (n_i \leqslant x,\ m_j \leqslant x,\ n_k \leqslant x,\ m_l \leqslant x); \qquad (\beta)$$

с одной стороны, это уравнение можно заменить системой уравнений:

$$n_i + m_j = u,\, n_k + m_l = u$$
$$(n_i \leqslant x,\ m_j \leqslant x, n_k \leqslant x,\ m_l \leqslant x,\ 0 \leqslant u \leqslant 2x).$$

Число решений этой системы, очевидно, равно левой части тождества (α). С другой стороны, уравнение (β) может быть написано следующим образом:

$$(n_i - n_k) - (m_l - m_j) = 0$$

и может быть заменено системой уравнений:

$$n_i - n_k = u, m_l - m_j = u$$
$$(n_i \leqslant x,\ n_k \leqslant x,\ m_l \leqslant x, m_j \leqslant x,\ -x \leqslant u \leqslant x).$$

Число решений этой системы, очевидно, равно

$$\sum_{u=-x}^{u=x} A_1(u;x)A_2(u;x) = 2\sum_{u=0}^{u=x}{}' A_1(u;x)A_2(u;x).$$

Но это последнее выражение есть не что иное, как правая часть тождества (α). Тождество (α), таким образом, доказано.

Возьмем в качестве второй последовательности последовательность $m_i = (Mi+k)^2$, т.е. последовательность квадратов всех положительных чисел, сравнимых с данным числом k по данному модулю M, оставляя первую последовательность пока произвольной. В этом случае $A_2(u;x)$ означает число решений уравнения

$$(Mz_1+k)^2 - (Mz_2+k)^2 = u \qquad (\gamma)$$

или иначе

$$[(Mz_1+k)+(Mz_2+k)][(Mz_1+k)-(Mz_2+k)] = u;$$

здесь должно быть $0 \leqslant Mz_1+k \leqslant [\sqrt{x}\,]$, $0 \leqslant Mz_2+k \leqslant [\sqrt{x}\,]$, т.е. $0 \leqslant z_1 \leqslant s$, $0 \leqslant z_2 \leqslant s$, где мы через s для краткости обозначили $\left[\dfrac{\sqrt{x}-k}{M}\right]$. Для каждой пары z_1, z_2, удовлетворяющей уравнению (γ), имеем:

$$M(z_1+z_2)+2k = v_1, \quad M(z_1-z_2) = v_2, \qquad (\delta)$$

где v_1, $v_2 = u$.

Очевидно, что

$$v_1 - 2k \equiv 0 \pmod M,\ v_2 \equiv 0 \pmod M,\ \frac{v_1-2k}{M} + \frac{v_2}{M} = 2z_1 \leqslant 2s;$$
$$v_1+v_2-2k \leqslant 2Ms, \quad v_1+v_2 \leqslant 2Ms+2k;$$

кроме того,

$$\frac{v_2}{M} \leqslant \frac{v_1-2k}{M}, \quad \frac{v_2}{M} \equiv \frac{v_1-2k}{M} \pmod 2,$$

так как

$$\frac{v_2}{M} = z_1 - z_2, \quad \frac{v_1 - 2k}{M} = z_1 + z_2.$$

И, обратно, для всякого разложения числа u на дополнительные сомножители v_1, v_2, удовлетворяющие условиям:

$$\left.\begin{aligned} v_1 - 2k \equiv 0 \pmod{M},\, v_2 \equiv 0 \pmod{M}, \\ v_1 + v_2 \leq 2Ms + 2k, v_2 \leqslant v_1 - 2k, \quad \frac{v_2}{M} \equiv \frac{v_1 - 2k}{M} \pmod{2}, \end{aligned}\right\} \tag{Γ}$$

система (δ), а следовательно, и уравнение (γ) имеют решения в целых положительных, не превосходящих s числах.

Отсюда ясно, что число решений уравнения (γ) в целых положительных числах, не превосходящих s, равно числу разложений числа u на дополнительные сомножители v_1, v_2, удовлетворяющие условиям (Г). На основании всего вышеизложенного тождество (α) может быть написано следующим образом:

$$\sum_{u=0}^{2x} \{\psi(u; x)\}^2 = 2 \sum_{u=0}^{x}{}' A_1(u; x) A_2(u; x) = 2 \sum{}' A_1(v_1 v_2; x),$$

где суммирование распространено на все пары чисел v_1 и v_2, удовлетворяющие условиям (Г). Сумма $\sum{}' A_1(v_1 v_2; x)$ равна числу решений уравнения

$$n_i - n_j = v_1 v_2, \tag{λ}$$

где $n_i \leqslant x$, $n_j \leqslant x$, а v_1 и v_2 означают всевозможные числа, удовлетворяющие условиям (Г). При этом мы должны число тех решений уравнения (λ), которые соответствуют $v_1 v_2 = 0$, разделить на два согласно значению акцента при знаке суммирования. Обозначим v_1 буквой u, тогда $\dfrac{n_i - n_j}{u} = v_2$. Так как

$$0 \leqslant v_1 + v_2 = \frac{n_i - n_j}{u} + u \leqslant 2Ms + 2k,$$

то

$$0 \leqslant u \leqslant 2Ms + 2k.$$

Кроме того,

$$\frac{n_i - n_j}{u} = v_2 \equiv 0 \pmod{M},$$

т.е.

$$n_i - n_j \equiv 0 \pmod{Mu}, \quad u = v_1 \equiv 2k \pmod{M},$$
$$\frac{n_i - n_j}{Mu} \equiv \frac{u-2k}{M} \pmod{2}, \quad \frac{n_i - n_j}{u} \leqslant u - 2k$$

на основании (Г). Следовательно, тождество (α) можно написать так:

$$\sum_{u=0}^{2x} \{\psi(u;x)\}^2 = 2\sum{}' A_1(v_1 v_2; x) = 2 \sum_{\substack{u \equiv 2k \pmod{M}}}^{0\leqslant u \leqslant 2Ms+2k}{}' B(u; M, k, x). \qquad (\sigma)$$

Здесь $B(u; M, k, x)$ означает число тех решений сравнения $n_i - n_j \equiv 0 \pmod{Mu}$, для которых удовлетворяются условия:

$$\begin{aligned} &0 \leqslant \frac{n_i - n_j}{u} \leqslant u - 2k, \quad \frac{n_i - n_j}{Mu} \equiv \frac{u-2k}{M} \pmod{2}, \\ &\frac{n_i - n_j}{u} + u \leqslant 2Ms + 2k, \quad n_i \leqslant x, \ n_j \leqslant x. \end{aligned} \qquad (\Delta)$$

Рассмотрим теперь сумму $\sum\limits_{u=0}^{2x} \psi(u;x)$. Она равна, очевидно, числу решений неравенств

$$(Mi+k)^2 + n_j \leqslant 2x, \quad (Mi+k)^2 \leqslant x, \quad n_j \leqslant x,$$

т.е. равна

$$sP(x) = \left[\frac{\sqrt{x} - k}{M}\right] \cdot P(x),$$

где $P(x)$ означает число членов последовательности n_i, не превосходящих x. Согласно неравенству Шварца имеем

$$\mu(2x, M, k) > \frac{\left(\sum\limits_{u=0}^{2x} \psi(u;x)\right)^2}{\sum\limits_{u=0}^{2x} \{\psi(u;x)\}^2} = \frac{s^2\{P(x)\}^2}{\sum\limits_{\substack{u\equiv 2k \pmod{M}}}^{0\leqslant u\leqslant 2Ms+2k} B(u; M, k, x)}$$

или

$$\mu(2x, M, k) > \frac{(\sqrt{x} - k)^2 \{P(x)\}^2}{M^2 \sum\limits_{\substack{u\equiv 2k \pmod{M}}}^{0\leqslant u\leqslant 2[\sqrt{x}\,]} B(u; M, k, x)} \qquad (\Sigma)$$

так как
$$2Ms + 2k = 2M\left[\frac{\sqrt{x}-k}{M}\right] + 2k < 2[\sqrt{x}\,].$$

Здесь $\mu(2x, M, k)$ означает число тех $\psi(u;x)$ $(u = 0, 1, 2, \ldots, 2x)$, которые отличны от нуля, т.е. означает число чисел, лежащих в интервале $(0,\,2x)$ и представимых в виде суммы одного члена нашей последовательности $n_i \leqslant x$ и одного квадрата $y^2 \leqslant x$, причем $y \equiv k \pmod{M}$. Очевидно, что

$$B(u; M, k, x) \leqslant \frac{1}{2}A_1(0;x) + A_1(Mu;x) + A_1(2Mu;x) + \ldots +$$
$$+ A_1(Mu\frac{u-2k}{M};x)$$

[число $\frac{u-2k}{M}$ — целое, так как $u \equiv 2k \pmod{M}$]. Если мы возьмем в качестве n_i последовательность всех простых чисел, то тогда на основании обобщенной леммы Viggo Brun'a [49]

$$A_1(y;x) = O\left(\frac{x}{\log^2 x}\theta(y)\right)$$

для $y > 0$, где
$$\theta(y) = \prod_{p/y}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Кроме того,
$$A_1(0;x) = \pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right);$$

$\pi(x)$ означает число простых чисел, меньших чем x.

Теперь мы можем написать следующее неравенство[1]:

$$B(u; M, k, x) < c_1\frac{x}{\log x} + c_2\frac{x}{\log^2 x}\sum_{i=1}^{\frac{u-2k}{M}}\theta(Mui),$$

или, так как для любых y_1 и y_2, $\theta(y_1)\theta(y_2) \geqslant \theta(y_1y_2)$,

$$B(u; M, k, x) < c_1\frac{x}{\log x} + c_2\frac{\theta(M)\theta(u)x}{\log^2 x}\sum_{i=1}^{\left[\frac{u}{M}\right]}\theta(i). \qquad (\tau)$$

[1]Здесь и в дальнейшем c_1, c_2, ... означают положительные постоянные.

Для дальнейшего нам будут необходимы две оценки:

$$\sum_{i=1}^{z} \theta(i) = O(z) \tag{A}$$

и

$$\sum_{i=1}^{z} i\theta(i) = O(z^2), \tag{B}$$

устанавливаемые следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{z} \theta(i) = \sum_{i=1}^{z} \sum_{d/i} \frac{\{\mu(d)\}^2}{d} = \sum_{k=1}^{z} \left[\frac{z}{k}\right] \frac{\{\mu(k)\}^2}{k} < z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{\mu(k)\}^2}{k} = O(z),$$

$$\sum_{i=1}^{z} i\theta(i) = \sum_{i=1}^{z} i \sum_{d/i} \frac{\{\mu(d)\}^2}{d} = \sum_{k=1}^{z} \frac{1}{2} \left(\left[\frac{z}{k}\right]^2 + \left[\frac{z}{k}\right]\right) \frac{\{\mu(k)\}^2}{k} < \\ < z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{\mu(k)\}^2}{k^2} = O(z^2).$$

На основании (A) неравенство (τ) преобразуется к виду

$$B(u; M, k, x) < c_3 \left(\frac{x}{\log x} + \frac{\theta(M)\theta(u)x}{M \log^2 x}\right).$$

Поэтому

$$\sum_{\substack{0 \leqslant u < 2[\sqrt{x}\,] \\ u \equiv 2k \pmod M}} B(u; M, k, x) < 2c_3 \frac{x^{3/2}}{M \log x} + \\ + c_3 \frac{\theta(M)x}{M \log^2 x} \sum_{\substack{1 \leqslant u < 2[\sqrt{x}\,] \\ u \equiv 2k \pmod M}} u\theta(u),$$

$$\sum_{\substack{0 \leqslant u < 2[\sqrt{x}\,] \\ u \equiv 2k \pmod M}} B(u; M, k, x) < \\ < c_4 \left(\frac{x^{3/2}}{M \log x} + \frac{\theta(M)x}{M \log^2 x} \sum_{\substack{1 \leqslant u < 2[\sqrt{x}\,] \\ u \equiv 2k \pmod M}} u\theta(u)\right);$$

подставляя последнее неравенство в неравенство (Σ), получим

$$\mu(2x, M, k) > c_5 \frac{(\sqrt{x}-k)^2\{P(x)\}^2}{M\frac{x^{3/2}}{\log x} + \frac{M\theta(M)x}{\log^2 x} \sum\limits_{\substack{u\equiv 2k \pmod M}}^{1\leqslant u<2[\sqrt{x}\,]} u\theta(u)}$$

или

$$\mu(2x, M, k) > c_6 \frac{(\sqrt{x}-k)^2 x^2}{M\log x\cdot x^{3/2} + M\theta(M) \sum\limits_{\substack{u\equiv 2k \pmod M}}^{1\leqslant u<2[\sqrt{x}\,]} u\theta(u)}. \tag{C}$$

В случае $M = 1$, $k = 0$ знаменатель правой части неравенства (C) легко может быть оценён на основании (B), и мы получаем

$$\mu(2x, 1, 0) = \mu(2x) > 2\alpha x,$$

где α — некоторая абсолютная положительная константа. Таким образом, имеем *теорему: число чисел, лежащих в интервале* $(0, x)$ *$(x \geqslant 2)$ и представимых в виде суммы одного простого числа и одного квадрата, больше чем αx, где α — некоторая положительная абсолютная константа. Иначе говоря, последовательность чисел, представимых в виде суммы одного простого числа и одного квадрата, обладает положительной плотностью.*

(Плотностью последовательности m_i называется нижняя грань отношений $\dfrac{N(x)}{x}$, где $N(x)$ означает число членов взятой последовательности, не превосходящих x. Последовательностью положительной плотности называется, следовательно, такая последовательность, для которой, при всех положительных значениях x, $\dfrac{N(x)}{x} > \alpha$, или $N(x) > \alpha x$, где $\alpha > 0$ — некоторая константа). Если мы применим формулу (Σ) не к последовательности всех простых чисел, а к некоторой подпоследовательности положительной относительной плотности, т.е. к такой последовательности p'_1, p'_2, p'_3, ..., для которой число чисел p'_i, не превосходящих x, будет больше чем $\beta\pi(x)$, где β — некоторое постоянное число $(1 > \beta > 0)$, то числитель дроби, стоящей в правой части неравенства, приобретет множитель β^2; что касается знаменателя, то он от замены последовательности всех простых чисел некоторой подпоследовательностью может только уменьшиться, так как он связан с числом решений числового уравнения

$p_i - p_j = u$ в простых числах данной последовательности. Отсюда вытекает следующее обобщение предыдущей теоремы: *числа, представимые в виде суммы одного квадрата и одного простого числа, взятого из данной подпоследовательности простых чисел положительной относительной плотности, образуют последовательность положительной плотности.* В частности, числа, представимые в виде суммы одного квадрата и одного простого числа, содержащегося в данной первообразной арифметической прогрессии, образуют последовательность положительной плотности. Еще специальнее: последовательность чисел, представимых в виде суммы $p + z^2$, где p — простое число вида $4k + 1$, а z — любое целое число, есть последовательность положительной плотности.

Заметим наконец, что полученное нами общее неравенство (C) позволяет делать и более общие выводы, давая числу M другие значения.

3. К проблеме Гольдбаха

В своей замечательной работе [49] Шнирельман впервые доказал, что каждое целое число может быть разложено на сумму ограниченного числа простых слагаемых, причем в качестве верхней границы для числа простых чисел, необходимых для представления всех достаточно больших чисел, он получил число 100000. В настоящей работе доказывается, что путем некоторого видоизменения рассуждений Шнирельмана эта граница может быть уменьшена примерно в 100 раз. Результат Шнирельмана основан на двух его леммах.

Лемма I. Число $\nu(x)$ чисел, разложимых на сумму двух простых слагаемых и не превосходящих x для достаточно больших x, удовлетворяет неравенству $\nu(x) > \alpha x$, где α есть положительная абсолютная константа. Или, по терминологии Шнирельмана, последовательность чисел, разложимых на сумму двух простых слагаемых, есть последовательность плотности не меньшей α.

Лемма II. Если последовательность $n_1,\ n_2,\ \ldots$ есть последовательность положительной плотности $\geqslant \alpha > 0$, то тогда каждое достаточно большое число, с точностью до ограниченного слагаемого, может быть разложено на сумму не больше чем $2\left[\dfrac{1}{\alpha}\right]$ слагаемых из последовательности $n_1,\ n_2,\ \ldots$.

Комбинируя эти две леммы, мы получаем предложение: каждое достаточно большое число может быть с точностью до ограниченного слагаемого разложено на сумму не больше чем $2\left[\dfrac{1}{\alpha}\right]$ простых чисел. Следуя Шнирельману, получим $\alpha = \dfrac{1}{200000}$, следовательно, для указанной верхней границы для числа необходимых простых слагаемых $2\left[\dfrac{1}{\alpha}\right] = 400000$. Легко показать, однако, что в качестве α можно взять $\dfrac{1}{552}$ и получить, таким образом, для указанной верхней границы $2\left[\dfrac{1}{\alpha}\right] = 1104$. Рассмотрим произвольную целочисленную последовательность $n_1,\ n_2,\ \ldots$.

Обозначим через $A(u,x)$, $\psi(u,x)$ число решений соответственно уравнений:

$$n_i - n_j = u(n_i \leqslant x,\ n_j \leqslant x) \text{ и } n_i + n_j = u(n_i \leqslant x,\ n_i \leqslant x).$$

Между определенными таким образом величинами существует соотношение

$$\sum_{u=1}^{2x} \psi(u,x)^2 = A(0,x)^2 + 2\sum_{u=1}^{x} A(u,x)^2 \tag{1}$$

или, если мы обозначим через $P(x)$ число n_i, не превосходящих x,

$$\sum_{u=1}^{2x} \psi(u,x)^2 = P(x)^2 + 2\sum_{u=1}^{x} A(u,x)^2. \tag{1a}$$

Для доказательства тождества (1) рассмотрим уравнение

$$n_i + n_j - n_k - n_l = 0 \quad (n_i \leqslant x,\ n_j \leqslant x,\ n_k \leqslant x,\ n_l \leqslant x) \tag{2}$$

и сосчитаем двумя различными способами число его решений. Это уравнение может быть записано в виде $n_i + n_j = n_k + n_l$ ($n_i \leqslant x$, $n_j \leqslant x$, $n_k \leqslant x$, $n_l \leqslant x$) и заменено системой уравнений $n_i + n_j = u$, $n_k + n_l = u$ ($n_i \leqslant x$, $n_j \leqslant x$, $n_k \leqslant x$, $n_l \leqslant x$), $u = 1, 2, 3, \ldots, 2x$.

Отсюда следует, что число решений уравнения (2) равно

$$\sum_{u=1}^{2x} \phi(u,x)^2,$$

т.е. левой части тождества (1). С другой стороны, уравнение (2) может быть представлено в виде $n_i - n_k = n_l - n_j$ ($n_i \leqslant x$, $n_j \leqslant x$, $n_k \leqslant x$, $n_l \leqslant x$) и заменено системой $n_i - n_k = u$, $n_l - n_j = u$ ($n_i \leqslant x$, $n_j \leqslant x$, $n_k \leqslant x$, $n_l \leqslant x$; $u = -x$, $-(x-1)$, $\ldots$, -1, 0, 1, 2, 3, $\ldots$, x).

Поэтому число решений уравнения (2) равно

$$\sum_{u=1}^{x} A(u,x)^2 = A(0,x)^2 + 2\sum_{u=1}^{x} A(u,x)^2,$$

т.е. равно левой части тождества (1), которое, таким образом, доказано. Обозначим через $\nu(2x)$ число чисел интервала $(0,\, 2x)$, представимых в виде $n_i \leqslant n_j$ ($n_i \leqslant x$, $n_j \leqslant x$). Очевидно, что это число равно числу чисел ряда $\psi(1,x)$, $\psi(2,x)$, $\psi(3,x)$, $\ldots$, $\psi(2x,x)$, отличных от нуля. Поэтому на основании неравенства Шварца имеем

$$\nu(2x) > \frac{\left(\sum\limits_{u=1}^{2x} \psi(u,x)\right)^2}{\sum\limits_{u=1}^{2x} \psi(u,x)^2}. \tag{3}$$

Кроме того, очевидно, $\sum\limits_{u=1}^{2x} \psi(u,x) = P(x)^2$, так как $\sum\limits_{u=1}^{2x} \psi(u,x)$ равно числу решений системы неравенств $n_i \leqslant x$, $n_j \leqslant x$.

На основании (1) и (3) теперь имеем

$$\nu(2x) > \frac{P(x)^4}{P(x)^2 + \sum\limits_{u=1}^{x} A(u,x)^2}. \tag{4}$$

Если $n_1, n_2, \ldots, n_k$ означает последовательность целых чисел, то тогда, как известно, $P(x) = \pi(x) \sim \dfrac{x}{\lg x}$.

Кроме того, на основании обобщенной леммы Вигго – Бруна (см. вышеуказанную работу Шнирельмана)

$$A(u,x) < \boldsymbol{A}\frac{x}{\log^2 x} \prod_{d|u} \left(1 + \frac{1}{q}\right) = \boldsymbol{A}\frac{x}{\log^2 x} \sum_{d|u} \frac{\mu(d)^2}{d} = \boldsymbol{A}\frac{x}{\log^2 x} f(u), \tag{5}$$

где $\boldsymbol{A}$ означает абсолютную константу, μ есть символ функции Мёбиуса, и произведение справа распространено на все простые делители q числа u.

На основании (5) имеем

$$\begin{aligned}\sum_{u=1}^{x} A(u,x)^2 &< \boldsymbol{A}\frac{x}{\lg^2 x} \sum_{u=1}^{x} A(u,x) f(u) = \\ &= \boldsymbol{A}\frac{x}{\lg^2 x} \sum_{u=1}^{x} A(u,x) \sum_{d|u} \frac{\mu(d)^2}{d} = \\ &= \boldsymbol{A}\frac{x}{\lg^2 x} \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)^2}{k} \sum_{u=1}^{x/k} A(uk,x) = \\ &= \boldsymbol{A}\left(\frac{x}{\lg^2 x} \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)^2}{k} S(k)\right),\end{aligned}$$

где $S(k) = \sum\limits_{u=1}^{x/k} A(uk,x)$ означает число решений сравнения $p_i - p_j \equiv \equiv 0 \pmod k$ в простых целых числах $\leqslant x$. Обозначим через $\pi(x,\alpha,k)$ число простых чисел меньших чем x и сравнимых с α по модулю k.

Нетрудно показать, слегка видоизменяя рассуждения Ландау [15, vol. 2]:

$$\pi(x, \alpha, k) = \frac{1}{\varphi(x)} \operatorname{li}(x) + O(k^3 x e^{-\sqrt{\lg x}}).$$

Кроме того, совершенно очевидно $\pi(x, \alpha, k) < \dfrac{x}{k}$. Далее,

$$S(k) = \sum_{i=1}^{\pi(x)} \pi(x, p_i, k) = \frac{\operatorname{li}(x)\pi(x)}{\varphi(k)} + O(k^3 \frac{x^2}{\lg x} e^{-\sqrt{\lg x}}),$$

или

$$S(k) = \frac{\operatorname{li}(x)\pi(x)}{\varphi(k)} + O(k^3 \frac{x^2}{\lg^{10} x}). \tag{6}$$

Воспользовавшись неравенством $\pi(x, \alpha, k) < \dfrac{x}{k}$, точно так же получаем

$$S(k) < \frac{\pi(x)x}{k}. \tag{7}$$

Оценим теперь сумму

$$\sum_{k=1}^{x} \frac{S(k)}{k} \mu(k)^2. \tag{8}$$

На основании (6) имеем

$$\sum_{k=1}^{y} \frac{S(k)}{k} \mu(k)^2 = \operatorname{li}(x)\pi(x) \sum_{k=1}^{y} \frac{\mu(k)^2}{k\varphi(k)} + O\left(\frac{x^2}{\lg^{10} x} \sum_{k=1}^{y} k^2\right) = \\ = \operatorname{li}(x)\pi(x) \sum_{k=1}^{y} \frac{\mu(k)}{k\varphi(k)} + O\left(\frac{x^2}{\lg^{10} x} y^3\right),$$

а на основании (7) для второй части (8) получим

$$\sum_{k=y} \frac{S(k)}{k} \mu(k)^2 < \pi(x)x \sum_{k=y}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi(x)x}{y}.$$

Сопоставляя последние неравенства, получим

$$\sum_{k=y}^{\infty} \frac{S(k)}{k} \mu(k)^2 < \operatorname{li}(x)\pi(x)x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{k\varphi(k)} + \frac{\pi(x)x}{y} + O\left(\frac{x^2}{\lg^{10} x} y^3\right),$$

полагая $y = \lg^2 x$, получим

$$\sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)^2}{k} S(k) < \frac{x^2}{\lg^2 x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{k\varphi(k)} + O\left(\frac{x^2}{\lg^2 x}\right).$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{k\varphi(k)}$, как легко получить путем преобразования в бесконечное произведение, равен $\dfrac{\zeta(2)}{\zeta(3)} = 1,37$, и, следовательно, для всех достаточно больших значений x $\sum\limits_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)^2}{k} S(k) < 1,38 \dfrac{x^2}{\lg^2 x}$.

Отсюда легко получить следующее неравенство:

$$\sum_{u=1}^{x} A(u,x)^2 < 1,37\boldsymbol{A} \frac{x^2}{\lg^4 x},$$

или, полагая вместе с Шнирельманом $\boldsymbol{A} = 100$, получим

$$\sum_{u=1}^{x} A(u,x)^2 < 137 \frac{x^2}{\ln^4 x}, \tag{9}$$

на основании (4) и (9) имеем $\nu(2x) > \dfrac{\pi(x)^4}{\pi(x)^2 + 2,137\dfrac{x^3}{\lg^4 x}}$ или, для достаточно больших x,

$$\nu(2x) > \frac{1}{2,138} x, \text{ или } \nu(x) < \frac{1}{2,276} x,$$

на основании леммы II теперь имеем: каждое достаточно большое число может быть разложено на сумму не больше чем 1104 слагаемых, что и требовалось доказать.

4. Замечание к работе «К проблеме Гольдбаха»

В моей работе «К проблеме Гольдбаха» имеется, кроме ошибок вычислительного характера, существенная ошибка теоретического характера, состоящая в пользовании леммой о равномерной, относительно k, оценке остаточного члена в формуле

$$\pi(x, l, k) = \frac{1}{\varphi(x)} \operatorname{li}(x) + O(k^3 x e^{-a\sqrt{\log x}}).$$

Эта лемма не вытекает из рассуждений, приведенных в 2-м томе книги Ландау, как мною утверждалось в указанной выше работе, и справедливость самой леммы остается под сомнением.

Однако эта лемма, без существенного изменения дальнейших рассуждений, может быть заменена аналогичными, известными оценками из теории распределения простых чисел в арифметической прогрессии, как указано, между прочим, в работе Ландау, Шерка и Гейльбронна [9].

5. Об аддитивных свойствах общих числовых последовательностей

Главная проблема теории чисел состоит в определении аддитивных свойств специальных числовых последовательностей, некоторые члены которых имеют конкретные арифметические характеристики. Так, например, проблема Гольдбаха аддитивных свойств последовательности простых чисел, проблема Варинга аддитивных свойств последовательности степеней.

Л. Шнирельман нашел первым, что рассмотрение общих числовых последовательностей в аддитивной теории чисел ведет не только к общему положению, но и также может оказаться чрезвычайно важным для решения классических проблем.

Таким образом, Шнирельману [19] удалось решить ослабленную проблему Гольдбаха. Он доказал через рассмотрение аддитивных свойств общих последовательностей, только метрически охарактеризованных, что каждое целое число можно представить в виде суммы конечного числа простых чисел. К тому же кругу идей относятся и другие исследования Хинчина [13], Бухштаба [5, 31] и мои [55]. В данной работе я занимался именно аддитивными свойствами общих числовых последовательностей в среднем их значении. В дальнейшем будем рассматривать функцию $f(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,n)$, указывающую количество чисел замкнутого интервала $(1,\, n)$, которые представимы или в виде x_i, или y_i, или суммы x_i+y_i $(i=1,\,\ldots,\, k_1,\ j=1,\,2,\,\ldots,\,k_2)$. Другими словами, применив введённое Шнирельманом фундаментальное значение суммы ряда, можем сказать, что $f(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,n)$ даёт количество всех чисел ряда, сумма элементов последовательностей $x_1x_2\ldots x_{k_1}$ и $y_1y_2\ldots y_{k_2}$ которых не превосходит n. Здесь x_i, y_i — различные или равные целые числа, принадлежащие интервалу $(1,\, n)$. Совершенно невозможно определить значение этой функции для x_i и y_i. Если, например, последовательности x_i и y_i совпадают с последовательностью простых чисел, тогда задача определения значения этой функции равнозначна решению проблемы Гольдбаха. Но, как будет показано, среднее значение этой функции можно легко выразить через элементарные. В некотором смысле я решил здесь все существующие и возможные проблемы аддитивной теории чисел в среднем.

Первая теорема о среднем

$$\begin{gathered}\sum_{1\le x_1<x_2<\ldots<x_{k_1}\le n} f(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,n) = \\ = C^n_{k_1} - \sum_{r=1}^{n-k_2} C^{m-1-\bar{y}_r+r}_{k_1},\end{gathered}\tag{1}$$

где $\bar{y}_1\bar{y}_2\ldots\bar{y}_{n-k_2}$ (в порядке возрастания) образуют дополнительную последовательность к $y_1y_2\ldots y_{k_2}$ интервала $(1, n)$, а суммирование расширяется посредством всех комбинаций из первых n чисел натурального ряда для каждого числа k_1. Все числа y_i здесь различные. Здесь и в последующем C^n_k обозначают биномиальные коэффициенты: $C^n_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ для $0 < k < n$, $C^n_0 = 1$, $C^n_n = 1$ и $C^n_k = 0$ для $k > n$. Специальный случай этой теоремы для $k_1 = 1$ содержится в цитированной выше работе Эрдоса. Формулу (1) докажем по индукции. Она очевидно верна для $n = 1$ и для любого k_1, если $\sum_{1\le x_1<x_2\ldots<x_{k_1}\le n} f(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,n)$ положим равной нулю для $k_1 > n$ и равной k_2 для $k_1 = 0$. Можем, следовательно, предполагать, что она верна для заданного $n = m$ и для всех k_1, и надо доказать для $n = m + 1$ и всех k_1. Требуется рассмотреть два случая в зависимости от того, принадлежит $m + 1$ постоянной y-последовательности или нет. В первом случае запишем формулу, которую надо доказать, в виде

$$\begin{gathered}\sum_{1\le x_1<x_2<\ldots<x_{k_1}\le m+1} f(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_1+1}\,|\,m+1) = \\ = (m+1)C^{m+1}_{k} - \sum_{r=1}^{m-k_2} C^{m-\bar{y}_r+r}_{k_1}.\end{gathered}\tag{2}$$

Во втором:

$$\sum_{1\le x_1<x_2<\ldots<x_{k_1}\le m+1} f(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,m+1) =$$

$$= (m+1)C^{m+1}_{k_1} - \sum_{r=1}^{m+1-k_2} C^{m-\bar{y}_r+r}_{k_1}. \tag{3}$$

В обоих случаях сумму, стоящую слева, можно разложить на две части, разложив все комбинации $x_1x_2\ldots x_{k_1}$ на две группы, в зависимости, содержит ли эта комбинация $m+1$ или нет. Формулы (2) и (3) можно тогда записать:

$$\sum_{1\le x_1<x_2<\ldots<x_{k_1-1}\le m} f(x_1x_2\ldots x_{k_1-1}, m+1;\, y_1y_2\ldots y_{k_2+1}\,|\,m+1)+$$
$$+\sum_{1\le x_1<x_2<\ldots<x_{k_1}\le m} f(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2+1}\,|\,m+1)=$$
$$=(m+1)C_{k_1}^{m+1}-\sum_{r=1}^{m-k_2} C_{k_1}^{m-\bar{y}_r+r} \tag{2'}$$

и

$$\sum_{1\le x_1<x_2<\ldots<x_{k_1}\le m} f(x_1x_2\ldots x_{k_1-1}, m+1;\, y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,m+1)+$$
$$+\sum_{1\le x_1<x_2<\ldots<x_{k_1}\le m} f(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,m+1)= \tag{3'}$$
$$=(m+1)C_{k_1}^{m+1}-\sum_{r=1}^{m+1-k_1} C_{k_1}^{m-\bar{y}_r+r}.$$

Здесь

$$f(x_1x_2\ldots x_{k_1-1}, m+1;\, y_1y_2\ldots y_{k_2+1}\,|\,m+1)=$$
$$=f(x_1x_2..x_{k_1-1};y_1y_2..y_{k_2}|m)+1 \tag{4}$$

и

$$f(x_1x_2\ldots x_{k_1-1}, m+1;\, y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,m+1)=$$
$$=f(x_1x_2\ldots x_{k_1-1};\, y_1y_2..y_{k_2}\,|\,m)+1. \tag{5}$$

Так как последовательности сумм последовательностей $x_1x_2\ldots x_{k_1}$; $y_1y_2\ldots y_{k_2+1}$ и $x_1x_2\ldots x_{k_1-1}$; $y_1y_2\ldots y_{k_2}$ в интервале $(1,\, m)$ совпадают и первая из них содержит один член в интервале $(1,\, m+1)$, а именно, $m+1$. Точно так же можно сказать про последовательность сумм последовательностей $x_1x_2\dots x_{k_1}$; $y_1y_2\dots y_{k_2+1}$ и $x_1x_2\dots x_{k_1}$; $y_1y_2\dots y_{k_2}$, если $y_{k_2+1}=m+1$.

Кроме того,

$$f(x_1x_2\dots x_{k_1};\, y_1y_2\dots y_{k_2}|m+1) = f(x_1x_2\dots x_{k_1};\, y_1y_2\dots y_{k_2}|m)+$$

$$+\varepsilon(x_1x_2\dots x_{k_1};\, y_1y_2\dots y_{k_2}\,|\,m+1), \tag{6}$$

где $\varepsilon(x_1x_2\dots x_{k_1};\, y_1y_2\dots y_{k_2}\,|\,m+1)$ равно или единице, или нулю, в зависимости от того, представимо ли число $m+1$ в виде x_i+y_j $(r=1,\,2,\,\dots,\,k_1;\; j=1,\,2,\,\dots,\,k_2)$ или нет. Привлекая равенства (4), (5) и (6), можно записать левую часть равенств $(2')$ соответственно $(3')$ в следующем виде:

$$\sum_{1\le x_1<x_2<\dots<x_{k_1-1}\le m}[f(x_1x_2\dots x_{k_1-1};\, y_1y_2\dots y_{k_2}\,|\,m)+1]+$$
$$+\sum_{1\le x_1<x_2<\dots<x_{k_1}\le m}[f(x_1x_2\dots x_{k_1};\, y_1y_2\dots y_{k_2}\,|\,m)+1]$$

и

$$\sum_{1\le x_1<x_2<\dots<x_{k_1-1}\le m}[f(x_1x_2\dots x_{k_1-1};\, y_1y_2\dots y_{k_2}\,|\,m)+1]+$$
$$+\sum_{1\le x_1<x_2<\dots<x_{k_1}\le m}f(x_1x_2\dots x_{k_1};\, y_1y_2\dots y_{k_2}\,|\,m)+$$
$$+\sum_{1\le x_1<x_2<\dots<x_{k_1}\le m}\varepsilon(x_1x_2\dots x_{k_1};\, y_1y_2\dots y_{k_2}\,|\,m+1).$$

Или

$$\sum_{1\le x_1<x_2<\dots<x_{k_1-1}\le m}f(x_1x_2\dots x_{k_1-1};\, y_1y_2\dots y_{k_2}\,|\,m)+$$
$$+\sum_{1\le x_1<x_2<\dots<x_{k_1}\le m}f(x_1x_2\dots x_{k_1};\, y_1y_2\dots y_{k_2}\,|\,m)+$$

$$+\,C_{k_1-1}^m+C_{k_1}^m = mC_{k_1-1}^m-\sum_{r=1}^{m-k_2}C_{k_1}^{m-1-\bar{y}_r+r}+$$
$$+\,mC_{k_1}^m-\sum_{r=1}^{m-k_2}C_{k_1}^{m-1-\bar{y}_r+r}+C_{k_1}^m+C_{k_1-1}^m$$

и [1]

$$\sum_{1\le x_1<x_2<\ldots<x_{k_1-1}\le m} f(x_1x_2\ldots x_{k_1-1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,m)+$$
$$+\sum_{1\le x_1<x_2<\ldots<x_{k_1}\le m} f(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,m)+$$
$$+C_{k_1-1}^{m}+C_{k_1}^{m}-C_{k_1}^{m-k_2}=mC_{k_1-1}^{m}-\sum_{r=1}^{m-k_2}C_{k_1}^{m-1-\bar y_r+r}+$$
$$+C_{k_1}^{m}-\sum_{r=1}^{m-k_2}C_{k_1}^{m-1-\bar y_r+r}+C_{k_1-1}^{m}+C_{k_1}^{m}+C_{k_1}^{m-k_2}.$$

Здесь была использована формула (1), которая считается верной для $n=m$.

Используя известное равенство $C_k^n+C_{k-1}^n=C_k^{n+1}$, можно последние выражения для $m+1=y_{k_2+1}$ записать в следующем виде:

$$(m+1)C_{k_1}^{m+1}-\sum_{r=1}^{n-k_2}C_{k_1}^{m-\bar y_r+r}$$

и для $m+1=\bar y_{m-k_2+1}$

$$(m+1)C_{k_1}^{m+1}-\sum_{r=1}^{m-k_2}C_{k_1}^{m-\bar y_r+r}-C_{k_1}^{m-k_2}=$$

$$=(m+1)C_{k_1}^{m+1}-\sum_{r=1}^{m-k_2+1}C_{k_1}^{m-\bar y_r+r}.$$

Получаем равенство (1) для $m=n+1$, и, следовательно, оно доказано для всех n.

[1] Сумма $\sum_{1\le x_1<x_2<\ldots<x_{k_1}\le m}\varepsilon(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,m+1)$ равна $C_{k_1}^{m}-C_{k_1}^{m-k_2}$, так как она указывает, сколькими способами могут быть выбраны комбинации $x_1x_2\ldots x_{k_1}$, чтобы по меньшей мере одна из сумм x_i+y_j $(i=1,2,\ldots,k_1;\ j=1,2,\ldots,k_2)$ была равна $m+1$. Очевидно, это количество комбинаций получаем, когда из количества возможных комбинаций, т.е. из $C_{k_1}^{m}$, вычитаем количество комбинаций чисел x_i+y_j $(i=1,2,\ldots,k_1;\ j=1,2,\ldots,k_2)$, не равных $m+1$. Чтобы получить эти последние комбинации, нужно взять числа x_i, которые отличны от чисел $m+1-y_1, m+1-y_2,\ldots,m+1-y_{k_2}$, и образовать всевозможные $m-k_2$ комбинации этих чисел.

Вторая теорема о среднем

$$\sum_{x_1=1}^{n}\sum_{x_2=1}^{n}\ldots\sum_{x_{k_1}=1}^{n} f(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,n) =$$

$$= n^{k_1+1} - \sum_{r=1}^{n-k_2}(n-1-\bar{y}_r+r)^{k_1}. \tag{7}$$

Здесь, как и выше, y_i обозначают положительные различные принадлежащие интервалу $(1, n)$ числа. Обозначим через $\varphi(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,n)$ количество всех чисел таблицы, отличных друг от друга и от y_i, принадлежащих интервалу $(1,\, n)$.

x_1	x_2	$\ldots$	x_{k_1}
x_1+y_1	x_2+y_1	$\ldots$	$x_{k_1}+y_1$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_1+y_{k_2}$	$x_2+y_{k_2}$	$\ldots$	$x_{k_1}+y_{k_2}$

. (A)

Очевидно равенство

$$f(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,n) = \varphi(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,n) + k_2. \tag{8}$$

Рассмотрим также функцию $\varepsilon(g)$, которая принимает значение единица для всех значений аргумента, совпадающих с y_i, и значение ноль для всех других положительных и отрицательных значений аргумента, отличных от нуля, кроме того, положим $\varepsilon(0) = 1$. Легко увидеть, что выражение

$$1-(1-\varepsilon(a-x_1))(1-\varepsilon(a-x_2))\ldots(1-\varepsilon(a-x_{k_1}))$$

равно или единице, или нулю, в зависимости от того, входит число a в таблицу (A) или нет. Следовательно, получаем значения функции $\varphi(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,n)$, суммируя предыдущие значения всех чисел из интервала $(1, n)$, отличных от y_i:

$$\varphi(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,n) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n-k_2} \{1 - (1 - \varepsilon(\bar{y}_r - x_1))(1 - \varepsilon(\bar{y}_r - x_2)) \dots (1 - \varepsilon(\bar{y}_r - x_{k_1}))\}. \quad (9)$$

Далее имеем

$$\sum_{x_1=1}^{n} \sum_{x_2=1}^{n} \dots \sum_{x_{k_1}=1}^{n} \varphi(x_1 x_2 \dots x_{k_1}; y_1 y_2 \dots y_{k_2} | n) =$$
$$= \sum_{x_1=1}^{n} \sum_{x_2=1}^{n} \dots \sum_{x_{k_1}=1}^{n} \sum_{r=1}^{n-k_2} \{1 - (1 - \varepsilon(\bar{y}_r - x_1))\times$$
$$\times (1 - \varepsilon(\bar{y}_r - x_2)) \dots (1 - \varepsilon(\bar{y}_r - x_{k_1}))\}.$$

Или, после обращения последовательности суммирования

$$\sum_{x_1=1}^{n} \sum_{x_2=1}^{n} \dots \sum_{x_{k_1}=1}^{n} \varphi(x_1 x_2 \dots x_{k_1};\, y_1 y_2 \dots y_{k_2} \,|\, n) =$$
$$= \sum_{r=1}^{n-k_2} \Big[\sum_{x_1=1}^{n} \sum_{x_2=1}^{n} \dots \sum_{x_{k_1}=1}^{n} \{1 - (1 - \varepsilon(\bar{y}_r - x_1))\times \quad (10)$$
$$\times (1 - \varepsilon(\bar{y}_r - x_2)) \dots (1 - \varepsilon(\bar{y}_r - x_{k_1}))\}\Big].$$

Чтобы вычислить правую часть равенства (10), необходимо оценить сумму, представленную в виде $\sum_{x=1}^{n} \varepsilon(\bar{y}_r - x)$.

Эта сумма равна $\varepsilon(0) + \sum_{x_1=1}^{\bar{y}_r-1} \varepsilon(\bar{y}_r - x) = 1 + \sum_{n=1}^{\bar{y}_r-1} \varepsilon(u)$, так как $\varepsilon(g)$ для $g > 0$ равна нулю. Или, если обозначим через $\psi(u)$ количество всех u, не превышающих числа y-последовательности:

$$\sum_{x=1}^{n} \varepsilon(\bar{y}_r - x) = 1 + \psi(\bar{y}_r).$$

Если здесь, как и раньше, числа $\bar{y}_r$ упорядочены по возрастанию, то $\psi(\bar{y}_r)$ равно $\bar{y}_r - r$, так как среди всех $\bar{y}_r$, чисел интервала $(1, \bar{y}_r)$, ровно r не содержится в y-последовательности числа, а именно, $\bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_r$. Следовательно,

$$\sum_{x=1}^{n} \varepsilon(\bar{y}_r - x) = \bar{y}_r - r + 1. \quad (11)$$

Теперь у нас есть всё необходимое, чтобы определить внутреннюю сумму правой чисти равенства (10).

Согласно (9), (10) и (11) имеем

$$\sum_{x_1=1}^{n}\sum_{x_2=1}^{n}\ldots\sum_{x_{k_1}=1}^{n}\varphi(x_1x_2\ldots x_{k_1};y_1y_2\ldots y_{k_2}|n) =$$
$$=\sum_{r=1}^{n-k_2}\Big[\sum_{x_1=1}^{n}\sum_{x_2=1}^{n}\ldots\sum_{x_{k_1}=1}^{n}\{\varepsilon(\bar{y}_r-x_1)+$$
$$+\varepsilon(\bar{y}_r-x_2)+\ldots+\varepsilon(\bar{y}_r-x_{k_1})-\varepsilon(\bar{y}_r-x_1)\varepsilon(\bar{y}_r-x_2)-$$
$$-\varepsilon(\bar{y}_r-x_1)\varepsilon(\bar{y}_r-x_3)-\ldots+\varepsilon(\bar{y}_r-x_1)\varepsilon(\bar{y}_r-x_2)\ldots\varepsilon(\bar{y}_r-x_{k_1})\}\Big]=$$
$$=\sum_{r=1}^{n-k_2}\Big[C_1^{k_1}n^{k-1}\sum_{x=1}^{n}\varepsilon(\bar{y}_r-x)-C_2^{k_1}\Big(\sum_{x=1}^{n}\varepsilon(\bar{y}_r-x)\Big)^2+\ldots\pm$$
$$\pm\Big(\sum_{x=1}^{n}\varepsilon(\bar{y}_r-x)\Big)^{k_1}\Big]=\sum_{r=1}^{n-k_2}\Big[n^{k_1}-(n-1-\bar{y}_r+r)^{k_1}\Big]$$

и

$$\sum_{x_1=1}^{n}\sum_{x_2=1}^{n}\ldots\sum_{x_{k_1}=1}^{n}f(x_1x_2\ldots x_{k_1};\,y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,n)=k_2n^{k_1}+$$
$$+\sum_{x_1=1}^{n}\sum_{x_2=1}^{n}\ldots\sum_{x_{k_1}=1}^{n}\varphi(x_1x_2\ldots x_{k_1};\,y_1y_2\ldots y_{k_2}\,|\,n)=$$
$$=n^{k_1+1}-\sum_{r=1}^{n-k_2}(n-1-\bar{y}_r+r)^{k_1},$$

ч. т. д.

Теперь покажем, что из второй теоремы о среднем можно вывести первую теорему о среднем, используя одну общую лемму.

Первая лемма: Дана система функций $F(x_1)$, $F(x_1x_2)$, $\ldots$, $F(x_1x_2\ldots x_k)$, которая характеризуется значениями $F(x_1x_2\ldots x_s) = F(x'_1x'_2\ldots x'_{s'}))$, причём $x'_1x'_2\ldots x'_{s'}$ обозначают различные друг от друга числа среди чисел $x_1x_2\ldots x_s$. Функции $F(x_1)$, $F(x_1x_2)$, $\ldots$, $F(x_1x_2\ldots x_k)$ есть симметричные функции целочисленных переменных x_i. Тогда суммы вида

$$\Sigma_p F = \sum_{x_1=1}^{n} \sum_{x_2=1}^{n} \ldots \sum_{x_p=1}^{n} F(x_1 x_2 \ldots x_p)$$

и

$S_p F = p! \sum_{1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_p \leq n} F(x_1 x_2 \ldots x_p)$ связаны следующими отношениями:

$$S_p = B_0^p \Sigma_p + B_1^p \Sigma_{p-1} + B_2^p \Sigma_{p-2} + \ldots + B_{p-1}^p \Sigma_1, \tag{12}$$

$$\Sigma_p = B'^p_0 S_p + B'^p_1 S_{p-1} + B'^p_2 S_{p-2} + \ldots + B'^p_{p-1} S_1, \tag{13}$$

причём B_s^p и B'^p_s есть целые числа, зависящие только от p и s и не зависящие от точных значений функциональной системы. Далее заметим, что B_s^p равен коэффициенту при p — s-й степени x в разложении полинома $x(x-1)\ldots(x-p+1)$ по степеням x.

Из последнего факта можно легко получить **вторую лемму**:

Если суммы $\sum_{x_1=1}^{n} \sum_{x_2=1}^{n} \ldots \sum_{x_p=1}^{n} F(x_1 x_2 \ldots x_p)$ для $p = 1, 2, \ldots, k$ равны выражениям $c_1 a_1^p + c_2 a_2^p + \ldots + c_v a_v^p$, где a_i, v и c_i обозначают любые независимые от p величины, то существует также равенство

$$\sum_{1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_p \leqslant n} F(x_1 x_2 \ldots x_p) =$$
$$= c_1 \frac{a_1(a_1-1)\ldots(a_1-p+1)}{p!} + c_2 \frac{a_2(a_2-1)\ldots(a_2-p+1)}{p!} + \ldots +$$
$$+ c_\nu \frac{a_\nu(a_\nu-1)\ldots(a_\nu-p+1)}{p!}, \text{ где } p = 1, 2, 3, \ \ldots, \ k.$$

Чтобы сумму $\sum\limits_{x_1=1}^{n} \ldots \sum\limits_{x_p=1}^{n} F(x_1 x_2 \ldots x_p)$ выразить через суммы S_i $(i = 1, 2, 3, \ \ldots, \ p)$, надо ее разложить на частичные суммы, в зависимости от количества различных аргументов $x_1 x_2 \ldots x_p$. Одна частичная сумма, например, распространяется на такие системы значений $x_1 x_2 \ldots x_p$, которые состоят только из различных чисел. Это, очевидно, равно S_p. Чтобы вычислить частичную сумму, которая состоит только ровно из s отличных друг от друга чисел, входящих в систему значений $x_1 x_2 \ldots \ x_p$, необходимо предварительно решить, сколько систем $x_1x_2 \ldots x_p$ из чисел интервала $(1, n)$ можно образовать, так что $x_1x_2 \ldots x_p$ состоят из заданных отличных друг от друга различных чисел $a_1a_2 \ldots a_s$. Пусть $i_1^1 i_2^1 \ldots i_{\nu_1}^1, i_1^2 i_2^2 \ldots i_{\nu_2}^2, \ldots,$ $i_1^s i_2^s \ldots i_{\nu_s}^s$ — индексы x_i, для которых x_i равны $a_1a_2 \ldots a_s$. Для количества индексов $i_1^1 i_2^1 \ldots i_{\nu_1}^1$ имеется $C_{\nu_1}^p$ возможностей. После того как выбор сделан, можно из остальных $p - \nu_1$ индексов выбрать индексы $i_1^2 i_2^2 \ldots i_{\nu_2}^2$ $C_{\nu_2}^{p-\nu_1}$ способом и так далее. Следовательно, индексы можно выбрать $C_{\nu_1}^p C_{\nu_2}^{p-\nu_1} \ldots C_{\nu_s}^{p-\nu_1-\nu_2-\ldots-\nu_{s-1}}$ способом. В сумме $\sum\limits_{x_1=1}^{n} \sum\limits_{x_2=1}^{n} \ldots \sum\limits_{x_p=1}^{n} F(x_1x_2 \ldots x_p)$ встречается ровно $s! \cdot \sum\limits_{\nu_1+\ldots+\nu_s=p} C_{\nu_1}^p \times$ $\times\, C_{\nu_2}^{p-\nu_1} \ldots C_{\nu_s}^{p-\nu_1-\nu_2-\ldots-\nu_{s-1}}$ членов, совпадающих с $F(a_1a_2 \ldots a_s)$, причем суммирование расширено через все разложения числа p на равные или неравные положительные слагаемые $\nu_1\nu_2 \ldots \nu_s$. Разложения, которые отличаются только расположением равных слагаемых, будем при суммировании рассматривать только один раз, и множитель $s!$ возникает потому, что числа $a_1a_2 \ldots a_s$ могут появляться во всех $s!$ расположениях. Искомая частичная сумма равна $s! B'^{p}_{p-s} \sum\limits_{1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_s \leqslant n} F(a_1a_2 \ldots a_s) = B'^{p}_{p-s} S_s$, где через B'^{p}_{p-s} обозначена сумма $\sum C_{\nu_1}^p C_{\nu_2}^{p-\nu_1} \ldots C_{\nu_s}^{p-\nu_1-\nu_2-\ldots\,\nu_{s-1}}$. Формула (13) доказана, и мы видим также, что коэффициенты B'^{p}_{s} зависят только от p и от s. Решая уравнение (13) относительно S, легко приходим к уравнению (12), даже если равенство $S_1F = \sum_1 F$ считается само собой разумеющимся, и убеждаемся, что коэффициенты B_s^p — целые числа, также зависящие только от p и s. Чтобы определить эти коэффициенты, выберем из функций $F(x_1), F(x_1x_2), \ldots,$ $F(x_1x_2 \ldots x_p)$ те, которые тождественно равны 1. Такая система функций, очевидно, удовлетворяет всем вышеперечисленным требованиям, и мы имеем: $\sum_p = n^p$ и $S_p = n(n-1) \ldots (n-p+1)$.

Уравнение (12) принимает следующий вид:

$$n(n-1) \ldots (n-p+1) = n^p + B_1^p n^{p-1} + \ldots + B_{p-1}^p n.$$

Уравнение в этом виде может быть решено только для всех тех n, при которых оно сводится к алгебраическому тождеству. Следовательно, B_s^p — коэффициенты полинома $x(x-1) \ldots (x-p+1)$, откуда следует очевидным образом вторая лемма. Далее легко увидеть, что введенные выше функции $f(x_1x_2 \ldots x_p; y_1y_2 \ldots y_{k_2} \mid n) =$ $= F(x_1x_2 \ldots x_p)$ удовлетворяют всем условиям лемм и что, следовательно, по второй лемме, при $c_1 = n$, $c_2 = c_3 = \ldots = c_{n_1-k_2+1} = -1$ и $a_1 = n$, $a_{r+1} = n - 1 - \overline{y_r} + r$ $(r = 1, 2, \ldots n - k_2)$ первая теорема о среднем может быть получена из второй.

Третья теорема о среднем

$$\sum_{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{k_1}\leqslant n} \; \sum_{1\leqslant y_1<y_2<\ldots<y_{k_2}\leqslant n} f(x_1x_2\ldots x_{k_1}; y_1y_2\ldots y_{k_2} \mid n) = \\ = C^n_{k_1}C^n_{k_2} - C^n_{k_1+1}C^n_{k_2+1} + C^n_{k_1+1}C^{n-k_1-1}_{k_2+1}. \tag{14}$$

Эту теорему можно вывести также из первой теоремы о среднем посредством суммирования всех систем значений, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_{k_2} \leqslant n$. Но мы проведём его более легким и подходящим для обобщения способом. Для этого доказательства необходима следующая лемма: если образовать из всех целых чисел интервала $(1, n)$ все комбинации $x_1x_2\ldots x_{k_1}$ и $y_1y_2\ldots y_{k_2}$ для каждого k_1 и k_2, то количество пар комбинаций $x_1x_2\ldots x_{k_1}; y_1y_2\ldots y_{k_2}$, для которых ни одна сумма $x_i + y_j$ $(i = 1, 2, \ldots, k_1; j = 1, 2, \ldots, k_2)$ не совпадает с $n+1$, равно $C^n_{k_1}C^{n-k_1}_{k_2}$. Можно выбрать $x_1x_2\ldots x_{k_1}$ $C^n_{k_1}$ способом. После выбора чисел $x_1x_2\ldots x_{k_1}$ необходимо взять для y_i все $n-k_1$ числа, отличные от $n+1-x_1, n+1-x_2, \ldots, n+1-x_{k_1}$ из интервала $(1, n)$, и образовать из этих y_i все комбинации для каждого числа k_2. Искомое количество, следовательно, есть $C^n_{k_1}C^{n-k_1}_{k_2}$. Для количества пар комбинаций $x_1x_2\ldots x_{k_1}; y_1y_2\ldots y_{k_2}$ по меньшей мере для одной суммы $x_i + y_j$ $(i = 1, 2, \ldots, k_1; j = 1, 2, \ldots, k_2)$, равной $n+1$, получаем, очевидно: $C^n_{k_1}C^n_{k_2} - C^n_{k_1}C^{n-k_1}_{k_2}$, здесь есть ровно $C^n_{k_1}C^n_{k_2}$ всевозможных пар комбинаций. Если ввести символ $\varepsilon(x_1x_2\ldots x_{k_1}; y_1y_2\ldots y_{k_2} \mid n+1)$, который будет равен единице, если по меньшей мере одна из сумм x_i+y_j $(i = 1, 2, \ldots, k_1; j = 1, 2, \ldots, k_2)$ совпадает с $n+1$, и равен нулю в противном случае, то можно этот результат выразить в следующем виде:

$$\sum_{1\leqslant x_1<\ldots<x_{k_1}\leqslant n} \; \sum_{1\leqslant y_1<\ldots<y_{k_2}\leqslant n} \varepsilon(x_1x_2\ldots x_{k_1}; y_1y_2\ldots y_{k_2} \mid n+1) = \\ = C^n_{k_1}C^n_{k_2} - C^n_{k_1}C^{n-k_1}_{k_2}. \tag{15}$$

Теперь формулу (14) можно доказать по индукции. Она, очевидно, верна для $n = 1$ и для любых k_1, k_2, если положить сумму $\sum\limits_{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{k_1}\leqslant n}\ \sum\limits_{1\leqslant y_1<y_2<\ldots<y_{k_2}\leqslant n} f(x_1x_2\ldots x_{k_1}; y_1y_2\ldots y_{k_2} \mid n)$ для $k_1 > n$ и $k_2 > n$ равной нулю. В дальнейшем будем полагать эту сумму для $k_1 = 0$ равной $k_2 C_{k_2}^n$, что согласуется с правой частью равенства (14). Равенство доказано для $n = m$, проведём доказательство для $n = m+1$. Разделим все $C_{k_1}^{m+1} C_{k_2}^{m+1}$ системы аргументов на четыре группы в соответствии с четырьмя возможными случаями:

$$1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{k_1} \leqslant m+1,\ 1 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_{k_2} \leqslant m+1,$$

$$1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{k_1} \leqslant m,\ 1 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_{k_2} \leqslant m+1,$$

$$1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{k_1} \leqslant m+1,\ 1 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_{k_2} \leqslant m,$$

$$1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{k_1} \leqslant m,\ 1 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_{k_2} \leqslant m.$$

Сумма

$$\sum_{1\leqslant x_1<\ldots<x_{k_1}\leqslant m+1}\ \sum_{1\leqslant y_1<\ldots<y_{k_2}\leqslant m+1} f(x_1x_2\ldots x_{k_1}; y_1y_2\ldots y_{k_2} \mid m+1)$$

раскладывается, соответственно, на четыре частичные суммы:

$$\sum_{\substack{1\leqslant x_1<\ldots<x_{k_1}\leqslant m\\ 1\leqslant y_1<\ldots<y_{k_2}\leqslant m}} f(x_1\ldots x_{k_1}; y_1\ldots y_{k_2} \mid m+1)+$$
$$+\sum_{\substack{1\leqslant x_1<\ldots<x_{k_1-1}\leqslant m\\ 1\leqslant y_1<\ldots<y_{k_2}\leqslant m}} f(x_1\ldots x_{k_1-1}m+1; y_1\ldots y_{k_2} \mid m+1)+$$
$$+\sum_{\substack{1\leqslant x_1<\ldots<x_{k_1}\leqslant m\\ 1\leqslant y_1<\ldots<y_{k_2-1}\leqslant m}} f(x_1\ldots x_{k_1}; y_1\ldots y_{k_2-1}m+1 \mid m+1)+$$
$$+\sum_{\substack{1\leqslant x_1<\ldots<x_{k_1-1}\leqslant m\\ 1\leqslant y_1<\ldots<y_{k_2-1}\leqslant m}} f(x_1\ldots x_{k_1-1}m+1; y_1\ldots y_{k_2-1}m+1 \mid m+1).$$

Или, в соответствии с равенствами (4) — (6), (14) и (15)

$$\sum_{\substack{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{k_1}\leqslant m\\ 1\leqslant y_1<y_2<\ldots<y_{k_2}\leqslant m}} f(x_1x_2\ldots x_{k_1};y_1y_2\ldots y_{k_2}\mid m)+$$

$$+\sum_{\substack{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{k_1-1}\leqslant m\\ 1\leqslant y_1<y_2<\ldots<y_{k_2}\leqslant m}} f(x_1x_2\ldots x_{k_1-1};y_1y_2\ldots y_{k_2}\mid m)+$$

$$+\sum_{\substack{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{k_1}\leqslant m\\ 1\leqslant y_1<y_2<\ldots<y_{k_2-1}\leqslant m}} f(x_1x_2\ldots x_{k_1};y_1y_2\ldots y_{k_2-1}\mid m)+$$

$$+\sum_{\substack{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{k_1-1}\leqslant m\\ 1\leqslant y_1<y_2<\ldots<y_{k_2-1}\leqslant m}} f(x_1x_2\ldots x_{k_1-1};y_1y_2\ldots y_{k_2-1}\mid m)+$$

$$+C^m_{k_1-1}C^m_{k_2}+C^m_{k_1}C^m_{k_2-1}+C^m_{k_1-1}C^m_{k_2-1}+$$

$$+\sum_{\substack{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{k_1}\leqslant m\\ 1\leqslant y_1<y_2<\ldots<y_{k_2}\leqslant m}} \varepsilon(x_1x_2\ldots x_{k_1};y_1y_2\ldots y_{k_2}\mid m+1)=$$

$$=mC^m_{k_1}C^m_{k_2}-C^m_{k_1+1}C^m_{k_2+1}+C^m_{k_1+1}C^{m-k_1-1}_{k_2+1}+$$

$$+mC^m_{k_1-1}C^m_{k_2}-C^m_{k_1}C^m_{k_2+1}+C^m_{k_1}C^{m-k_1}_{k_2+1}+mC^m_{k_1}C^m_{k_2-1}-$$

$$-C^m_{k_1+1}C^m_{k_2}+C^m_{k_1+1}C^{m-k_1-1}_{k_2}+mC^m_{k_1-1}C^m_{k_2-1}-$$

$$-C^m_{k_1}C^m_{k_2}+C^m_{k_1}C^{m-k_1}_{k_2}+C^m_{k_1}C^m_{k_2}-C^m_{k_1}C^{m-k_1}_{k_2}=$$

$$=(m+1)(C^m_{k_1}+C^m_{k_1-1})(C^m_{k_2}+C^m_{k_2-1})-(C^m_{k_1}+C^m_{k_1+1})\times$$

$$\times(C^m_{k_2}+C^m_{k_2-1})+(C^m_{k_1}+C^m_{k_1+1})(C^{m-k_1-1}_{k_2}+C^{m-k_1-1}_{k_2+1}).$$

Или

$$(m+1)C^{m+1}_{k_1}C^{m+1}_{k_2}-C^{m+1}_{k_1+1}C^{m+1}_{k_1+1}+C^{m+1}_{k_1+1}C^{m-k_1}_{k_2+1}.$$

Видим, что равенство (14) выполнено для $n=m+1$ и тем самым доказано для всех n.

Четвертая теорема о среднем

$$\sum_{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_k\leqslant n} f(x_1x_2\ldots x_k;x_1x_2\ldots x_k\mid n)= \\ = nC_k^n-2C_{k+2}^n-C_{k+1}^n+2^{k+3}C_{k+2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}+2^{k+1}(1+2\varepsilon_n)C_{k+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}, \tag{16}$$

где $\varepsilon_{2m}=0$ и $\varepsilon_{2m+1}=1$.

Эту формулу будем доказывать тоже по индукции. Предварительно нужно определить количество систем значений $x_1x_2\ldots x_k$, которые удовлетворяют неравенствам $1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_k\leqslant n$, $x_i+x_j\neq n+1$ $(i=1,2,\ldots,k; j=1,2,\ldots,k)$. Это количество обозначим ${C'}_k^n$. Количество систем значений $x_1x_2\ldots x_k$, удовлетворяющих неравенствам $x_i\neq x_j$ при $i\neq j$, $x_i+x_j\neq n+1$ $(i=1,2,\ldots,k;$ $j=1,2,\ldots,k)$, $1\leq x_i\leq n$ обозначим A_k^n. Очевидно, ${C'}_k^n=\frac{1}{k!}A_k^n$.

Теперь докажем по индукции равенство:

$$A_k^n=n(n-2)\ldots(n-2k+2) \quad \text{для} \quad n\equiv 0 \ (\operatorname{mod} 2) \tag{17}$$

и

$$A_k^n=(n-1)(n-3)\ldots(n-2k+1) \quad \text{для} \quad n\equiv 1 \ (\operatorname{mod} 2), \tag{18}$$

которое, очевидно, для $k=1$ и для любого n верно. Сначала покажем, что A_k^n удовлетворяет следующему рекурсивному соотношению: $A_{k+1}^n=A_k^n(n-2k)$ при $n\equiv 0$ (mod 2) и $A_{k+1}^n=A_k^n(n-2k-1)$ при $n\equiv 1$ (mod 2). Чтобы получить все A_{k+1}^n системы значений $x_1x_2\ldots x_{k+1}$ указанного вида, надо добавить к каждой из A_k^n системе значений $x_1x_2\ldots x_k$ достаточную x_{k+1} с теми же свойствами, т.е. $x_{k+1}\neq x_i$, $x_{k+1}+x_i\neq n+1$ $(i=1,2,\ldots,k)$, $2x_{k+1}\neq n+1$. Можно, следовательно, взять для x_{k+1} любое целое число интервала $(1,n)$, которое отличается от чисел $n+1-x_1, n+1-x_2,\ldots,n+1-x_k$, $x_1x_2\ldots x_k$. Ещё x_{k+1} должно быть отличным от $\frac{n+1}{2}$ для нечётного n. Числа $n+1-x_1$, $n+1-x_2$, $\ldots$, $n+1-x_k$, $x_1x_2\ldots x_k$ и для нечётного n также числа $n+1-x_1$, $n+1-x_2$, $\ldots$, $n+1-x_k$, $x_1x_2\ldots x_k$, $\frac{n+1}{2}$ отличаются друг от друга. Если, например, $x_i=n+1-x_j$, то отсюда следует равенство $x_i+x_j=n+1$, что противоречит неравенству

$x_i + x_j \neq n+1$ ($i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, k$). К такому же противоречию приводит предположение $x_i = \frac{n+1}{2}$ или $\frac{n+1}{2} = n + 1 - x_i$. Для каждой A_k^n систем $x_1 x_2 \ldots x_k$ в зависимости от x_{k+1} имеется $n - 2k$ возможностей для $n \equiv 0 \pmod 2$ и $n - 2k - 1$ для $n \equiv 1 \pmod 2$. Таким образом, мы доказали рекурсивную формулу $A_{k+1}^n = A_k^n(n-2k)$ для $n \equiv 0 \pmod 2$ и $A_{k+1}^n = A_k^n(n-2k)$ для $n \equiv 1 \pmod 2$, и из этой формулы следуют после заключения индукции формулы (17) и (18) для всех k, так как они справедливы для $k = 1$. Следовательно, количество комбинаций $x_1 x_2 \ldots x_k$ для каждого числа k интервала $(1, n)$, для которого справедливо неравенство $x_i + x_j \neq n + 1$ для $n \equiv 0 \pmod 2$, равно $C'^n_k = \dfrac{n(n-2)\ldots(n-2k+2)}{k!}$ и для $n \equiv$ $\equiv 1 \pmod 2$ равно $C'^n_k = \dfrac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2k+1)}{k!}$. Элементарными вычислениями можно легко убедиться, что вышеприведённое выражение можно преобразовать к виду $2^k C_k^{[\frac{n}{2}]}$. Это даёт следующее равенство $C'^n_k = 2^k C_k^{[\frac{n}{2}]}$. Количество комбинаций $x_1 x_2 \ldots x_k$, для которых по меньшей мере одна сумма $x_i + x_j$ ($i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, k$) равна $n + 1$, даётся выражением $C_k^n - C'^n_k = C_k^n -$ $-2^k C_k^{[\frac{n}{2}]}$, так как, чтобы получить это количество, надо из количества всевозможных комбинаций вычесть количество комбинаций $x_1 x_2 \ldots x_k$, удовлетворяющих неравенствам $x_i + x_j \neq n+1$ ($i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, k$). Или, если использовать выше введенный символ $\varepsilon(x_1 x_2 \ldots x_{k_1}; y_1 y_2 \ldots y_{k_2} \mid m+1)$:

$$\sum_{1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leqslant n} \varepsilon(x_1 x_2 \ldots x_k; x_1 x_2 \ldots x_k \mid n+1) = C_k^n - 2^k C_k^{[\frac{n}{2}]}. \tag{19}$$

Положим сумму $\sum\limits_{1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leqslant n} f(x_1 x_2 \ldots x_k; x_1 x_2 \ldots x_k \mid n)$ равной нулю для $k = 0$ и $k > n$, что обосновано равенством (16). Равенство (16), очевидно, верно для $n = 1$ и для всех k. Равенство (16) доказано для всех n и для всех k, получим истинность этого равенства для $n = m+1$ из истинности равенства для $n = m$. Сделаем это следующим образом:

$$\sum_{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_k\leqslant m+1} f(x_1x_2\ldots x_k;x_1x_2\ldots x_k\mid m+1)=$$
$$=\sum_{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}\leqslant m} f(x_1x_2\ldots x_{k-1}m+1;x_1x_2\ldots x_{k-1}m+1\mid m+1)+$$
$$+\sum_{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_k\leqslant m} f(x_1x_2\ldots x_k;x_1x_2\ldots x_k\mid m+1).$$

Или, из (5), (6) и (19):

$$\sum_{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_k\leqslant m+1} f(x_1x_2\ldots x_k;x_1x_2\ldots x_k\mid m+1)=$$
$$=\sum_{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_k\leqslant m} f(x_1x_2\ldots x_k;x_1x_2\ldots x_k\mid m)+$$
$$+\sum_{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}\leqslant m} f(x_1x_2\ldots x_{k-1};x_1x_2\ldots x_{k-1}\mid m)+C_k^m+$$
$$+C_{k-1}^m-2^kC_k^{[\frac{m}{2}]}. \tag{20}$$

Используя формулу (16), которая истинна по предположению для $n=m$, можно привести правую сторону равенства (20) к следующему виду:

$$mC_k^m-2C_{k+2}^m-C_{k+1}^m+2^{k+3}C_{k+2}^{[\frac{m}{2}]}+2^{k+1}(1+2\varepsilon_m)C_{k+1}^{[\frac{m}{2}]}+mC_{k-1}^m-$$
$$-2C_{k+1}^m-C_k^m+2^{k+2}C_{k+1}^{[\frac{m}{2}]}+2^k(1+2\varepsilon_m)C_k^{[\frac{m}{2}]+C_k^m+C_{k-1}^m}-$$
$$-2^kC_{k+1}^{[\frac{m}{2}]}=(m+1)C_{k+1}^{m+1}-2C_{k+2}^{m+1}-C_{k+1}^{m+1}+2^{k+3}C_{k+2}^{[\frac{m}{2}]}+$$
$$+2^{k+2}C_{k+1}^{[\frac{m}{2}]}+2^{k+1}C_{k+2}^{[\frac{m}{2}]}+2^{k+2}\varepsilon_mC_{k+1}^{[\frac{m}{2}]}+2^{k+1}\varepsilon_mC_k^{[\frac{m}{2}]}.$$

Или, если отдельно рассмотреть случаи $m=2p+1$ и $m=2p$:

$$(m+1)C_k^{m+1}-2C_{k+2}^{m+1}-C_{k+1}^{m+1}+2^{k+3}C_{k+2}^p+2^{k+2}C_{k+1}^p+2^{k+1}C_{k+1}^p+$$
$$+2^{k+2}C_{k+1}^p=(m+1)C_k^{m+1}-2C_{k+2}^{m+1}-C_{k+1}^{m+1}+2^{k+3}(C_{k+1}^p+C_{k+2}^p)+$$
$$+2^{k+1}(C_k^p+C_{k+1}^p)=(m+1)C_k^{m+1}-2C_{k+2}^{m+1}-C_{k+1}^{m+1}+2^{k+3}C_{k+2}^{p+1}+$$
$$+2^{k+1}C_{k+1}^{p+1}=(m+1)C_k^{m+1}-2C_{k+2}^{m+1}-C_{k+1}^{m+1}+2^{k+3}C_{k+2}^{[\frac{m+1}{2}]}+$$
$$+2^{k+1}(1+2\varepsilon_{m+1})C_{k+1}^{[\frac{m+1}{2}]}$$

при $m = 2p + 1$ и

$$(m+1)C_k^{m+1} - 2C_{k+2}^{m+1} - C_{k+1}^{m+1} + 2^{k+3}C_{k+2}^{p} + 2^{k+2}C_{k+1}^{p} + \\ + 2^{k+1}C_{k+1}^{p} = (m+1)C_k^{m+1} - 2C_{k+2}^{m+1} - C_{k+1}^{m+1} + 2^{k+3}C_{k+2}^{[\frac{m+1}{2}]} + \\ + 2^{k+1}(1+2\varepsilon_{m+1})C_k^{[\frac{m+1}{2}]}$$

при $m = 2p$.

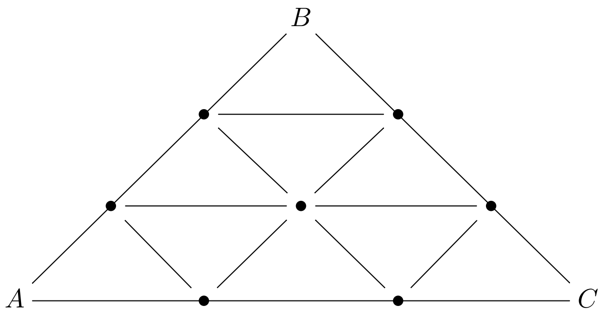
Тем самым формула (16) верна для $n = m + 1$ и справедлива по индукции для всех n.

Следует отметить некоторые вопросы из этого же круга идей.

Определить сумму

$$\sum_{\substack{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{k_1}\leqslant n\\ 1\leqslant y_1<y_2<\ldots<y_{k_2}\leqslant n\\ 1\leqslant z_1<z_2<\ldots<z_{k_3}\leqslant n}} f(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2};\, z_1z_2\ldots z_{k_3} \mid n),$$

где $f(x_1x_2\ldots x_{k_1};\, y_1y_2\ldots y_{k_2};\, z_1z_2\ldots z_{k_3} \mid n)$ обозначает количество чисел, не превышающих n, которые представлены по меньшей мере один раз в одной из форм $x_i, y_j, z_k, x_i+y_j, x_i+z_k, y_j+z_k, x_i+y_j+z_k$ $(i = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2;\ k = 1, 2, \ldots, k_3)$. Этот вопрос на первый взгляд кажется сложным. Его можно решить непосредственно, если будут решены комбинаторные задачи: найти количество комбинаций для каждых k точек фигуры, приведённой ниже, которые лежат на s линиях, параллельных стороне CA, и на p линиях, параллельных стороне AB, и на q линиях, параллельных стороне BC, причем s, p, q — заданные числа, и точки, которые надо комбинировать, расположены так, что стороны AB, BC и CA разбиваются на n частей. Затем через точки деления проводятся прямые, параллельные сторонам AB, BC, CA. Будем считать точки деления за исключением вершин треугольника.



Далее можно поставить вопрос о наибольшем среднем значении функции $f(x_1x_2\dots x_{k_1}; y_1y_2\dots y_{k_2} \mid n)$. Мне удалось определить сумму в виде

$$\sum_{\substack{1\leqslant x_1<x_2<\dots<x_{k_1}\leqslant n\\ 1\leqslant y_1<y_2<\dots<y_{k_2}\leqslant n}} f(x_1x_2\dots x_{k_1}; y_1y_2\dots y_{k_2} \mid n)^2,$$

но решение будет опубликовано в следующем номере этого журнала.

Особенно интересно было бы определить значение суммы

$$\sum_{\substack{1\leqslant x_1<x_2<\dots<x_{k_1}\leqslant n\\ 1\leqslant y_1<y_2<\dots<y_{k_2}\leqslant n}} f(x_1x_2\dots x_{k_1}; y_1y_2\dots y_{k_2} \mid n)^p$$

при любом p, так как потом можно будет судить о распределении значений функции $f(x_1x_2\dots x_{k_1}; y_1y_2\dots y_{k_2} \mid n)$, но эта задача связана с трудными комбинаторными проблемами.

6. Определение среднего квадратичного основной функции аддитивной теории чисел

В моей предыдущей работе [58], рассматривается вопрос об определении средних значений функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\ y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}|\ n)$, определяемой как число целых чисел интервала $(1,\ n)$, совпадающих или, по крайней мере, с одним из x-в, или с одним из y-в, или с одной из сумм вида $x_i + y_j$ $(i = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2)$[1]. В вышеуказанной работе определяется среднее арифметическое функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\ y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}|\, n)$, т.е. определяется значение

$$\frac{1}{M} \sum_{\substack{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{k_1}\leqslant n\\ 1\leqslant y_1<y_2<\ldots<y_{k_2}\leqslant n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}|\, n), \tag{1}$$

где при суммировании в качестве $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k_1}$ берутся все сочетания из первых n чисел натурального ряда по k_1 и в качестве y_1, $y_2,\ \ldots,\ y_{k_2}$ все сочетания из первых n целых чисел по k_2, причем $M = C^n_{k_1} C^n_{k_2}$ означает число слагаемых в указанной двойной сумме. В дальнейшем $C^n_k = \dbinom{n}{k}$ будет означать коэффициент при u^k в разложении $(1+u)^n$ по степеням u. В цитированной выше работе дается простое выражение для среднего арифметического (1). Целью настоящей работы является определение квадратичного среднего функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\ y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}|\, n)$, для чего необходимо определение суммы

$$\sum_{\substack{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{k_1}\leqslant n\\ 1\leqslant y_1<y_2<\ldots<y_{k_2}\leqslant n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}|\, n)^2. \tag{2}$$

Сумму (2) мы для сокращения будем писать также следующим образом:

$$\sum_{X^n_{k_1}} \sum_{Y^n_{k_2}} f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}|\, n)^2.$$

---

[1]По терминологии, введенной проф. Шнирельманом Л. Г., $f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};$ $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}|\, n)$ означает число членов последовательности, полученной путем сложения последовательностей $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k_1}$ и $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{k_2}$, лежащих в интервале $(1,\ n)$. См. работу Шнирельмана [49], а также [19].

Тогда для среднего квадратичного $\mathfrak{M}_2(f)$ имеем

$$\mathfrak{M}_2(f) = \sqrt{\frac{\sum\limits_{X_{k_1}^n} \sum\limits_{Y_{k_2}^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}|\, n)^2}{C_{k_1}^n C_{k_2}^n}}.$$

Для того чтобы определить сумму (2), будет необходимо определить, как мы дальше увидим, сумму

$$\sum_{\substack{1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{k_1}\leqslant n\\ 1\leqslant y_1<y_2<\ldots<y_{k_2}\leqslant n}}{}' f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}|\, n), \tag{3}$$

где штрих при знаке суммирования означает, что суммирование распространено только на те пары сочетания $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\ y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$, у которых ни одна из сумм x_i+y_j $(i = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2)$ не равна $n+1$. Для определения этой последней суммы введем символ $\varepsilon(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{k_2})$, равный единице, если m совпадает по крайней мере с одним из x-в, или с одним из y-в, или по крайней мере с одной из сумм x_i+y_j $(i = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2)$, и равный нулю в других случаях. Тогда очевидно

$$\begin{gathered} f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}|\, n) = \\ = \sum_{m=1}^{n} \varepsilon(m|x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}). \end{gathered} \tag{4}$$

Чтобы получить значение суммы (3), нужно просуммировать обе части тождества (4) по всем парам комбинаций $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};$ $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$, удовлетворяющим условиям

$$x_i + y_j \neq n + 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots k_2). \tag{5}$$

При этом получим

$$\begin{aligned} &\sum_{X_{k_1}^n} \sum_{Y_{k_2}^n}{}' f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}|\, n) = \\ &= \sum_{X_{k_1}^n} \sum_{Y_{k_2}^n}{}' \sum_{m=1}^{n} \varepsilon(m|x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}) = \\ &= \sum_{m=1}^{n} g_{k_1 k_2}(m|\, n), \end{aligned} \tag{6}$$

где $g_{k_1 k_2}(m|\,n)$ означает

$$\begin{aligned} &\sum_{X^n_{k_1}}{\sum_{Y^n_{k_2}}}' \varepsilon(m|x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}) = \\ &= \sum_{X^n_{k_1}}{\sum_{Y^n_{k_2}}}' 1 - \sum_{X^n_{k_1}}{\sum_{Y^n_{k_2}}}' (1 - \varepsilon(m|x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{k_2})) = \\ &= C^n_{k_1 k_2} - B^{n;m}_{k_1 k_2}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $C^n_{k_1 k_2} = \sum_{X^n_{k_1}}{\sum_{Y^n_{k_2}}}' 1$ означает число пар сочетаний $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$ из чисел интервала $(1,\, n)$, удовлетворяющих неравенствам (5), а $B^{n;m}_{k_1 k_2}$ — число пар сочетаний $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$; $y_1, \ldots, y_{k_2}$, удовлетворяющих неравенствам (5) и, кроме того, неравенствам

$$x_i \neq m;\ y_j \neq m;\ x_i + y_j \neq m\ (i = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2), \tag{8}$$

так как $1 - \varepsilon(m|x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots y_{k_2})$ равно 1, если x_i и y_j удовлетворяют (8), и равны нулю в противном случае. $C^n_{k_1 k_2}$ равно $C^n_{k_1} C^{n-k_2}_{k_2}$ (см. [58]). Наша задача сводится, таким образом, к определению $B^{n;m}_{k_1 k_2}$, т.е. к определению числа пар сочетаний $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$, удовлетворяющих условиям (4) и (8). Для решения этой задачи воспользуемся известной теоремой математической логики: если дана совокупность из N объектов и s условий A_1, A_2, …, A_s, то тогда $\bar{N}$ – число объектов, не удовлетворяющих ни одному из условий A_1, A_2, …, A_s, равно $N - N_{A_1} - N_{A_2} - \ldots - N_{A_s} + N_{A_1 A_2} + N_{A_1 A_3} + \cdots \pm N_{A_1 A_2 \ldots A_s}$, где $N_{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}}$ означает число объектов совокупности, удовлетворяющих условиям A_{i_1}, A_{i_2}, …, A_{i_p} (см., например, Полиа и Сеге «Задачи и теоремы из анализа», II).

Для нас будет особо интересен тот частный случай, когда $N_{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}}$ будет всегда равно или нулю, или, в противном случае, некоторому числу, зависящему только от p, которое мы обозначим через $N_{A^{(p)}}$. Иными словами, для всех совместимых комбинаций A_{i_1}, A_{i_2}, …, A_{i_p}, $N_{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}}$ равно одному и тому же числу.

Тогда $\bar{N} = N - sN_A + C^{*s}_2 N_{A^{(2)}} - C^{*s}_3 N_{A^{(3)}} + \cdots \pm C^{*s}_s N_{A^{(s)}}$, где C^{*s}_p равно числу совместимых сочетаний из s условий A_{i_1}, A_{i_2}, …, A_s по p. То есть равно числу тех сочетаний A_{i_1}, A_{i_2}, …, A_{i_p}, для которых $N_{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}} \neq 0$. Другой частный случай мы можем получить в том случае, если все совместимые комбинации из условий можно разбить на четыре класса, так что $N_{A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_p}}$ равно одному и тому же числу $N_{A^{(p)}}$ для всех комбинаций $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_p}$ первого класса, равно одному и тому же числу $N'_{A^{(p)}}$ для всех комбинаций второго класса $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_p}$, равно числу $N''_{A^{(p)}}$ для всех комбинаций третьего класса и числу $N'''_{A^{(p)}}$ для всех комбинаций четвертого класса. Обозначая соответственно через C_p^{*s}, ${C'}_p^{*s}$, ${C''}_p^{*s}$, ${C'''}_p^{*s}$ число совместимых комбинаций первого, второго, третьего и четвертого класса, получим

$$\bar{N} = N + \sum_{p=1}^{s}(-1)^p\{C_p^{*s}N_{A^{(p)}} + {C'}_p^{*s}N_{A^{(p)}} + {C''}_p^{*s}N_{A^{(p)}} + {C'''}_p^{*s}N_{A^{(p)}}\}. \tag{9}$$

Мы применим формулу (9) к совокупности всех пар сочетаний $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$, удовлетворяющих условиям (5). В данном случае $N = C^n_{k_1k_2}$. Под условиями $A_1 = \{{}^{*}_{m}\}$, $A_2 = \{{}^{1}_{m-1}\}$, $\ldots$, $A_m = \{{}^{m-1}_{1}\}$, $A_{m+1} = \{{}^{m}_{*}\}$ будем подразумевать следующие условия: A_1 означает, что в сочетание $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$ входит m, A_2 означает, что в сочетание $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$ входит 1 и в сочетание $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$ входит $m-1$ и т. д., A_{m+1} означает, что в сочетание $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$ входит m. Под комбинациями $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_p}$ первого рода будем подразумевать комбинации, не содержащие A_1 и A_{m+1}; под комбинациями второго рода будем понимать комбинации, содержащие A_1, но не содержащие A_{m+1}; под комбинациями третьего рода — комбинации, содержащие A_{m+1}, но не содержащие A_1, и, наконец, под комбинациями четвертого рода — комбинации, содержащие одновременно и A_1, и A_{m+1}. Очевидно, что $B^{n;m}_{k_1k_2}$ равно числу объектов рассматриваемой совокупности, не удовлетворяющих ни одному из условий A_1, A_2, $\ldots$, A_{m+1}. Докажем теперь, что для любой совместимой комбинации первого, второго, третьего и четвертого класса условий A_{i_1}, A_{i_2}, $\ldots$, A_{i_p} число соответствующих объектов будет зависеть только от p и от класса комбинаций, и определим это число, которое мы обозначили соответственно через $N_{A^{(p)}}$, $N'_{A^{(p)}}$, $N''_{A^{(p)}}$, $N'''_{A^{(p)}}$, а также определим число совместимых сочетаний из A_1, A_2, $\ldots$, A_{m+1} по p. Выясним, прежде всего, структуру совместимых комбинаций из условий A_1, A_2, $\ldots$, A_{m+1}. Комбинация A_{i_1}, A_{i_2}, $\ldots$, A_{i_p} или $\left\{\begin{matrix} i_1-1 \\ m-i_1+1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} i_2-1 \\ m-i_2+1 \end{matrix}\right\}\cdots\left\{\begin{matrix} i_p-1 \\ m-i_p+1 \end{matrix}\right\}$ будет совместимой тогда и только тогда, когда эти условия не противоречат условиям (5), т.е. когда ни одна из сумм вида $i_a - 1 + m - i_b + 1$ не равна $n+1$ ($a=1,2,\dots,p$; $b=1,2,\dots,p$), т.е. тогда и только тогда, когда $i_a-i_b\neq n+1-m$. Иными словами, число совместимых сочетаний условий A_i по p равно числу сочетаний из $m+1$ первых целых чисел по p, таких, что ни в одно из сочетаний не входит ни одной пары чисел, имеющих данную разность $n+1-m$. Обозначим это число через $C_p^{m+1;\,n+1-m}$. Также очевидно, что число совместимых сочетаний первого класса A_{i_1}, A_{i_2}, …, A_{i_p} равно числу сочетаний из первых $m-1$ целых чисел по p в каждом, таких, что ни в одном из сочетаний не входит ни одной пары чисел, имеющих данную разность $n+1-m$, т.е. равно $C_p^{m+1;\,n+1-m}$, а числа совместимых сочетаний второго и третьего класса равны между собой и равны ${C'}_{p-1}^{m+1;\,n+1-m}$, где ${C'}_k^{n;\,d}$ означает число сочетаний из n первых целых чисел по k таких, что все числа, входящие в сочетания, отличны от d и ни одна пара этих чисел не имеет разности, равной d. Так же точно число сочетаний четвертого класса равно ${C''}_{p-2}^{m-1;\,n+1-m}(1-\delta_{2m}^{n+1})$,[1] где ${C''}_k^{n;\,d}$ означает число сочетаний из первых n целых чисел по k таких, что ни в одно сочетание не входит ни одной пары чисел, имеющих данную разность d, и не входит ни одного числа, равного d или $n+1-d$. Очевидно, что $C_p^{m-1;\,n+1-m}=C_p^{m-1}$, ${C'}_{p-1}^{m-1;\,n+1-m}=C_{p-2}^{m-1}$, ${C''}_{p-2}^{m-1;\,n+1-m}=C_{p-2}^{m-1}$, если $n+1-m>>m-1$. Найдем теперь число $N_{A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_p}}$ для любой совместимой комбинации $A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_p}$ первого класса. Мы увидим сейчас, что оно не будет зависеть от того, какую из совместимых комбинаций $A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_p}$ первого класса мы возьмем, и что с комбинациями второго, третьего и четвертого классов дело обстоит аналогичным образом. То есть мы убедимся в приложимости формулы (9) к данному случаю. Совместимая комбинация первого класса условий $A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_p}$ или $\left\{\begin{matrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{matrix}\right\}$, …, $\left\{\begin{matrix}\alpha_p\\ \beta_p\end{matrix}\right\}$ ($\alpha_u=i_u-1$; $\beta_v=m+1-i_v$; $u=1,2,\dots,p$; $v=1,2,\dots,p$) накладывает на пару сочетаний $x_1,x_2,\dots,x_{k_1}$; $y_1,y_2,\dots,y_{k_2}$, удовлетворяющих условиям (5), условия: α_1, α_2, …, α_p входят в сочетание $x_1,x_2,\dots,x_{k_1}$ (и, следовательно, в силу (5) $n+1-\alpha_1$, $n+1-\alpha_2$, …, $n+1-\alpha_p$, не входят в $y_1,y_2,\dots,y_{k_2}$), β_1, β_2, …, β_p входят в $y_1,y_2,\dots,y_{k_2}$ (и, следовательно, $n+1-\beta_1$, $n+1-\beta_2$, …, $n+1-\beta_p$ не входят в $x_1,x_2,\dots,x_{k_1}$). Условия для $x_1,x_2,\dots,x_{k_1}$; $y_1,y_2,\dots,y_{k_2}$

[1] Здесь δ_q^p — символ Кронекера. Очевидно, что если $2m=n+1$, то комбинации, содержащие одновременно $A_1=\{{}^{*}_{m}\}$ и $A_{m+1}=\{{}^{m}_{*}\}$, не совместимы.

можно записать символически так:

$$\begin{array}{l} \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_p\ (\bar{\beta}_1)\ (\bar{\beta}_2)\ \ldots\ (\bar{\beta}_p), \\ \beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_p\ (\bar{\alpha}_1)\ (\bar{\alpha}_2)\ \ldots\ (\bar{\alpha}_p), \end{array} \tag{10}$$

где числа, стоящие в верхней (соответственно в нижней) строчке без скобок, означают числа, входящие в сочетание $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$ (соответственно в $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$), а числа, стоящие в скобках в верхней (соответственно в нижней) строчке, означают числа, не входящие в сочетание $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$ (соответственно в $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$), причем $\bar{\alpha}_u = n+1-\alpha_u$, $\bar{\beta}_k = n+1-\beta_u$ $(u = 1, 2, \ldots, p)$.

Очевидно, что числа α_1, α_2, …, α_p, $\bar{\beta}_1$, $\bar{\beta}_2$, …, $\bar{\beta}_p$ все различны между собой, так как, предположив, что $\alpha_i = \bar{\beta}_j$, получим $\alpha_i = n + {} + 1 - \beta_j$ или $\alpha_i + \beta_j = n+1$, что противоречит условиям (5). Так же точно числа β_1, β_2, …, β_p, $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, …, $\bar{\alpha}_p$ все между собой различны. Если мы выбросим из $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$ числа α_1, α_2, …, α_p, соответственно β_1, β_2, …, β_p, то убедимся, что число пар сочетаний $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$, удовлетворяющих условиям (5) и (10), равно числу пар сочетаний $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1-p}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2-p}$, удовлетворяющих условиям (5) и условиям

$$\begin{array}{l} (\alpha_1)\ (\alpha_2)\ \ldots\ (\alpha_p)\ (\bar{\beta}_1)\ (\bar{\beta}_2)\ \ldots\ (\bar{\beta}_p), \\ (\beta_1)\ (\beta_2)\ \ldots\ (\beta_p)\ (\bar{\alpha}_1)\ (\bar{\alpha}_2)\ \ldots\ (\bar{\alpha}_p). \end{array}$$

Обозначим числа α_1, α_2, …, α_p, $\bar{\beta}_1$, $\bar{\beta}_2$, …, $\bar{\beta}_p$, расположенные в порядке возрастания, через γ_1, γ_2, …, γ_{2p}, а числа β_1, β_2, …, β_p, $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, …, $\bar{\alpha}_p$ через ${\gamma'}_1$, ${\gamma'}_2$, …, ${\gamma'}_{2p}$. Очевидно, что ${\gamma'}_1 = n+1-\gamma_{2p}$, ${\gamma'}_2 = n+1-\gamma_{2p-1}$, …, ${\gamma'}_{2p} = n+1-\gamma_1$, число $N_{A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_p}}$ равно числу пар сочетаний $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1-p}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2-p}$, удовлетворяющих условию (5), причем таких, что $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1-p}$ не содержит γ_1, γ_2, …, γ_{2p}, а $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2-p}$ не содержит ${\gamma'}_1$, ${\gamma'}_2$, …, ${\gamma'}_{2p}$.

Обозначим все числа интервала $(1,\ n)$, не равные γ_1, γ_2, …, γ_{2p}, через δ_1, δ_2, …, δ_{n-2p}, и числа интервала $(1,\ n)$, не равные ${\gamma'}_1$, ${\gamma'}_2$, …, ${\gamma'}_{2p}$, через ${\delta'}_1$, ${\delta'}_2$, …, ${\delta'}_{n-2p}$. Очевидно, что $\gamma_i + {\gamma'}_j = n+1$ тогда и только тогда, когда $i+j = n+1-2p$ и $\delta_i + {\delta'}_j = n+1$ тогда и только тогда, когда $i+j = n+1-2p$. Рассмотренные выше пары сочетаний $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1-p}$; $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{k_2-p}$ можно записать следующим образом: $\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \ldots, \delta_{i_{k_1-p}}$; ${\delta'}_{j_1}, {\delta'}_{j_2}, \ldots, {\delta'}_{j_{k_2-p}}$. Условие (5) запишется тогда

$$i_\mu + j_\nu \neq n+1-2p\ (\mu = 1,\ 2,\ \ldots, n-2p;\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots, n-2p).$$

Число пар сочетаний $x_1, x_2, \dots, x_{k_1-p}$; $y_1, y_2, \dots, y_{k_2-p}$ равно числу пар сочетаний i_1, i_2, …, i_{k_1-p}; j_1, j_2, …, j_{k_2-p} из чисел i и j, лежащих в интервале $(1,\ n-2p)$ и удовлетворяющих условиям $i_\mu + j_\nu \neq n + 1 - 2p$ $(\mu = 1, 2, \dots, n-2p;\ \nu = 1, 2, \dots, n-2p)$, т.е. равно $C^{n-2p}_{k_1-p,\ k_2-p}$. То есть для любой совместимой комбинации условий $A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_p}$ первого класса $N_{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_p}} = C^{n-2p}_{k_1-p,\ k_2-p}$. Возьмем теперь любую из совместимых комбинаций второго класса
$A_1 A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_{p-1}}$ $(i_{p-1} \leqslant m)$ или
$\left\{ \begin{matrix} * \\ m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\} \dots \left\{ \begin{matrix} \alpha_{p-1} \\ \beta_{p-1} \end{matrix} \right\}$, где, в силу условий (5),

$$\alpha_i + \beta_j \neq n + 1\ (i = 1, 2, \dots, p-1;\ j = 1, 2, \dots, p-1);$$
$$m + \alpha_i \neq n + 1\ (i = 1, 2, \dots, p-1).$$

Число $N_{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_{p-1}}}$ есть в данном случае число пар сочетаний $x_1, x_2, \dots, x_{k_1}$; $y_1, y_2, \dots, y_{k_2}$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{matrix} \alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_{p-1}\ (\bar{m})\ (\bar{\beta}_1)\ (\bar{\beta}_2)\ \dots\ (\bar{\beta}_{p-1}), \\ \beta_1\ \beta_2\ \dots\ \beta_{p-1}\ m\ (\bar{\alpha}_1)\ (\bar{\alpha}_2)\ \dots\ (\bar{\alpha}_{p-1}) \end{matrix} \tag{11}$$

и условиям (5). Условия (11) означают, что в сочетание $x_1, \dots, x_{k_1}$ (соответственно $y_1, y_2, \dots, y_{k_2}$) числа, стоящие в верхней скобке (11), без скобок входят, а в скобках не входят. Все числа, входящие в верхнюю (соответственно в нижнюю), между собой различны, так как, например, из $\alpha_i = \bar{\beta}_j$ следует $\alpha_i + \beta_j = n + 1$. Выбросим из сочетаний $x_1, x_2, \dots, x_{k_1}$ и $y_1, y_2, \dots, y_{k_2}$ заведомо входящие в них числа α_1, α_2, …, α_{p-1} и m, β_1, β_2, …, β_{p-1}. Мы получим пары сочетаний: $x_1, x_2, \dots, x_{k_1-p+1}$; $y_1, y_2, \dots, y_{k_2-p}$. Обозначая через γ_1, γ_2, …, γ_{2p-1} (соответственно γ'_1, γ'_2, …, γ'_{2p-1}) числа в верхней (соответственно нижней) строчке (11) и через δ_1, δ_2, …, δ_{n-2p+1} и δ'_1, δ'_2, …, δ'_{n-2p+1} последовательности, дополнительные в интервале $(1,\ n)$ соответственно к $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2p-1}$ и $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{2p-1}$. Из рассуждений, аналогичных предыдущим, легко получаем: $N_{A_1 A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_{p-1}}} = C^{n-2p+1}_{k_1-p+1,\ k_2-p}$. Переставляя местами k_1 и k_2, точно так же получим для любой совместимой комбинации третьего класса A_{i_1}, A_{i_2}, …, A_{i_p-1}, A_{m+1} $(i_1 \neq 1)$: $N_{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_{p-1}} A_{m+1}} = C^{n-2p+1}_{k_1-p,\ k_2-p+1}$. Для любой совместимой комбинации четвертого класса $A_1 A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_{p-2}} A_{m+1}$ $(2m \neq n+1)$ или $\left\{ \begin{matrix} * \\ m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\} \dots \left\{ \begin{matrix} \alpha_{p-2} \\ \beta_{p-2} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ * \end{matrix} \right\}$

$(2m \neq n+1)$ вместо условий (10) появляются условия

$$\begin{array}{l} \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_{p-2}\ m,\ (\bar{m})\ (\bar{\beta}_1)\ (\bar{\beta}_2)\ \ldots\ (\bar{\beta}_{p-2}), \\ \beta_1\ \beta_2\ \ \ldots\ \beta_{p-2}\ m,\ (\bar{m})(\bar{\alpha}_1)\ (\bar{\alpha}_2)\ \ldots\ (\bar{\alpha}_{p-2}). \end{array} \tag{11$'$}$$

Легко видеть, что числа, стоящие как в верхней, так и в нижней строчке, между собой различны. Рассуждения, вполне аналогичные предыдущим, показывают, что

$$N_{A_1 A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_{p-2}} A_{m+1}} = C^{n-2p+2}_{k_1-p+1,\ k_2-p+1}.$$

Формула $(9)'$ теперь дает для $B^{n;\ m}_{k_1\ k_2}$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} B^{n;\ m}_{k_1\ k_2} = C^n_{k_1,k_2} + \sum_{p=1}^{m+1} (-1)^p [C^{m-1;\ n+1-m}_p C^{n-2p}_{k_1-p,\ k_2-p} + \\ + C'^{m-1;\ n+1-m}_{p-1} (C^{n-2p+1}_{k_1-p+1,\ k_2-p} + C^{n-2p+1}_{k_1-p,\ k_2-p+1}) + \\ + (1-\delta^{n+1}_{2m}) C''^{m-1;\ n+1-m}_{p-2} C^{n-2p+2}_{k_1-p+1,\ k_2-p+1}]. \end{aligned}$$

Следовательно, на основании (7)

$$\begin{aligned} g_{k_1,\ k_2}(m|\, n) = \sum_{p=1}^{m+1} (-1)^{p-1} [C^{m-1;\ n+1-m}_p C^{n-2p}_{k_1-p,\ k_2-p} + \\ + C'^{m-1;\ n+1-m}_{p-1} (C^{n-2p+2}_{k_1-p+1,\ k_2-p+1} - C^{n-2p+1}_{k_1-p+1,\ k_2-p+1}) + \\ + (1-\delta^{n+1}_{2m}) C''^{m-1;\ n+1-m}_{p-2} C^{n-2p+2}_{k_1-p+1,\ k_2-p+1}], \end{aligned}$$

так как $C^{n-2p+1}_{k_1-p+1,\ k_2-p} + C^{n-2p+1}_{k_1-p,\ k_2-p+1} = C^{n-2p+2}_{k_1-p+1,\ k_2-p+1} - -C^{n-2p+1}_{k_1-p+1,\ k_2-p+1}$, что легко проверить, подставляя вместо $C^n_{k_1,k_2}$ его выражение через биномиальные коэффициенты и пользуясь известным правилом Паскаля $C^m_s + C^m_{s-1} = C^{m+1}_s$. Кроме того, очевидно, $C^{m-1;\ n+1-m}_p + 2C'^{m-1;\ n+1-m}_{p-1} + C''^{m-1;\ n+1-m}_{p-2}(1-\delta^{n+1}_{2m}) = = C^{m+1;\ n+1-m}_p$, так как левая часть равенства означает число всех совместимых сочетаний из $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{m+1}$, а слагаемые правой части — число совместимых сочетаний соответственно первого, второго, третьего и четвертого класса. Поэтому

$$\begin{aligned} g_{k_1,\,k_2}(m|\,n) = \sum_{p=1}^{m+1}(-1)^{p-1}[C_p^{m-1;\,n+1-m}C_{k_1-p,\,k_2-p}^{n-2p}+ \\ +(C_p^{m+1;\,n+1-m}-C_p^{m-1;\,n+1-m}-C'^{m-1;\,n+1-m}_{p-1})\times \\ \times C_{k_1-p+1,\,k_2-p+1}^{n-2p+2}]- \\ -\sum_{p=1}^{m+1}(-1)^{p-1}C'^{m-1;\,n+1-m}_{p-1}C_{k_1-p+1,\,k_2-p+1}^{n-2p+1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Для дальнейшего нам будет необходимо определить $C_k^{n;\,d}$, т.е. решить следующую комбинаторную задачу: найти число сочетаний из первых n чисел натурального ряда по k таких, что ни в одно из сочетаний не входит ни одной пары чисел, имеющих данную разность d. Докажем прежде следующую лемму:

Лемма 1. *Число сочетаний из чисел интервала* $(1, n)$ *по* k *с запрещенной разностью 1, т.е.* $C_k^{n;\,1}$ *равно* C_k^{n-k+1}, *т.е. числу всех сочетаний из чисел интервала* $(1,\ n-k+1)$ *по* k. *Обозначая* $C_k^{n;\,1}$ *через* C'^{n}_{k}, *получим*

$$C'^{n}_{k} = C_k^{n-k+1}. \tag{13}$$

Для доказательства этой леммы возьмем одно из сочетаний x_1, x_2, …, x_k из чисел интервала $(1,\ n)$ с запрещенной разностью 1 и построим из него новое сочетание x_1, x_2-1, x_3-2, …, $x_k-(k-1)$. Так как числа x_1, x_2, …, x_k имеют разность не меньшую 2, то числа x_1, x_2-1, x_3-2, …, x_k-k+1 образуют возрастающую последовательность, т.е. образуют действительно сочетание, причем сочетание из интервала $(1,\ n-k+1)$, так как наибольшее число этого сочетания $x_k-(k-1)$ не может превзойти $n-k+1$. Таким образом, каждому сочетанию из интервала $(1,\ n)$ с запрещенной разностью 1 соответствует определённое сочетание из интервала $(1,\ n-k+1)$. Обратно, каждому сочетанию $y_1, y_2, \ldots, y_k$ из интервала $(1,\ n-k+1)$ соответствует сочетание y_1, y_2+1, y_3+2, …, $y_k+k-1)$, очевидно содержащееся в интервале $(1,\ n)$ и не содержащее разности 1. Установив взаимно однозначное соответствие между всеми сочетаниями из интервала $(1,\ n-k+1)$ с сочетаниями из интервала $(1,\ n)$ с запрещенной разностью 1, мы доказали равенство (13). Легко доказать тождество

$$C'^{n}_{k} = C'^{n-1}_{k} + C'^{n-2}_{k-1}, \tag{14}$$

пользуясь формулой (13) и тождеством Паскаля $C_k^m = C_k^{m-1} + {}+C_{k-1}^{m-1}$. Рассмотрим теперь производящие функции чисел C'^{n}_{k}, определяемые равенствами

$$\varphi_n = \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C'^{n}_{k} x^k. \tag{14a}$$

Легко видеть, что $\varphi_n(x)$ есть многочлен $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$-го порядка и что $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = 1 + x$, $\varphi_2 = 1 + 2x$; умножая обе части тождества (14) на x^k и суммируя по k, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} C'^{n}_{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} C'^{n-1}_{k} x^k + x \sum_{k=0}^{\infty} C'^{n-2}_{k-1} x^{k-1}$$

или

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) + x\varphi_{n-2}(x). \tag{15}$$

Рекуррентное соотношение (15) может служить для определения $\varphi_n(x)$ при целом отрицательном n. Подставляя в него $n = 1$, получим $\varphi_{-1}(x) = 1$; подставляя $n = 0$, получим $\varphi_{-2}(x) = 0$; подставляя $n = -1$, получим $\varphi_{-3}(x) = \dfrac{1}{x}$. Легко доказать по индукции общий результат:

$$\varphi_{-n}(x) = -\frac{\varphi_{n-1}(x)}{(-x)^{n-2}}. \tag{16}$$

В самом деле, предположив, что формула верна для $n = m - 1$ и $n = m - 2$, подставляя в (16) $n = -m + 2$, получим
$\varphi_{-(m-2)} = \varphi_{-(m-1)} + x\varphi_{-m}$ или

$$x\varphi_{-m} = \varphi_{-(m-2)} - \varphi_{-(m-1)} = -\frac{\varphi_{m-6}}{(-x)^{m-4}} + \frac{\varphi_{m-5}}{(-x)^{m-3}} = \\ = \frac{\varphi_{m-5} + x\varphi_{m-6}}{(-x)^{m-3}} = \frac{\varphi_{m-4}}{(-x)^{m-3}}$$

или

$$\varphi_{-m} = \frac{\varphi_{m-4}}{(-x)^{m-2}}.$$

Докажем теперь **лемму 2**, выражающуюся в равенстве

$$\varphi_{m_1}\varphi_{m_2} = \sum_{\nu=0}^{m_2+1} (-1)^\nu \varphi_{m_1+m_2+1-2\nu}. \tag{17}$$

Равенство очевидно при $m_2 = 1$. При $m_2 = 0$ имеем $\varphi_{m_1} = \varphi_{m_1+1} - -x\varphi_{m_1-1}$, что также очевидно на основании (15). Легко теперь доказать равенство (17) для всех m_2 по индукции. Предположив, что равенство (17) верно для $m_2 = \mu - 2$ и $m_2 = \mu - 1$, мы докажем его справедливость для $m_2 = \mu$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi_{m_1}\varphi_\mu &= \varphi_{m_1}\varphi_{\mu-1} + x\varphi_{m_1}\varphi_{\mu-2} = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\mu} (-x)^\nu \varphi_{m_1+\mu-2\nu} + x\sum_{\nu=0}^{\mu-1} (-x)^\nu \varphi_{m_1+\mu-2\nu-1} = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\mu-1} (-x)^\nu \left[\varphi_{m_1+\mu-2\nu} + x\varphi_{m_1+\mu-2\nu-1}\right] + +(-x)^\mu \varphi_{m_1-\mu} = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\mu-1} (-x)^\nu \varphi_{m_1+\mu+1-2\nu} + (-x)^\mu(\varphi_{m_1-\mu+1} - x\varphi_{m_1-\mu-1}) = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\mu+1} (-x)^\nu \varphi_{m_1+\mu+1-2\nu}.\end{aligned}$$

Равенство (17), таким образом, доказано для $m_2 = \mu$, а следовательно, и для всех значений m_2. Полагая в формуле (17) $m_1 = 0$, $m_2 = m$, получим $\varphi_m = \sum\limits_{\nu=0}^{m+1} (-x)^\nu \varphi_{m_1+\mu+1-2\nu}$. На основании последнего равенства и равенства (17) имеем далее

$$\begin{aligned}\varphi_{m_1}\varphi_{m_2} &= \varphi_{m_2} \sum_{\mu_1=0}^{m_1+1} (-x)^{\mu_1} \varphi_{m_1-2\mu_1+1} = \\ &= \sum_{\mu_1=0}^{m_1+1} \sum_{\mu_2=0}^{m_2+1} (-x)^{\mu_1+\mu_2} \varphi_{m_1+m_2+2-2(\mu_1+\mu_2)}.\end{aligned} \tag{18}$$

Путем многократного применения формулы (17) и формулы (18) имеем

$$\varphi_{m_1}\varphi_{m_2}\ldots\varphi_{m_s} = \sum_{\mu_1=0}^{m_1+1}\sum_{\mu_2=0}^{m_2+1}\ldots\sum_{m_s=0}^{m_s+1}(-x)^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_s}\times$$
$$\times\,\varphi_{m_1+m_2+\ldots+m_s+s-2(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_s)} = \tag{19}$$
$$= \sum_{n=0}^{n+s}(-x)^u\varphi_{n+s-2n}C(u\,|\,m_1, m_2, \ldots, m_s),$$

где $C(u\,|\,m_1, m_2, \ldots, m_s)$ означает число способов, которыми можно представить u в форме

$$u = z_1 + z_2 + \cdots + z_s, \quad 0 \leqslant z_i \leqslant m_i + 1, \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

и

$$n = \sum_{i=1}^{s} m_i.$$

Лемма 3. *Обозначив через* $\varphi_{n;\,d}$ *сумму* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k^{n;\,d}x^k$, *имеем*

$$\varphi_{n;\,d} = \varphi_{m_1}\varphi_{m_2}\ldots\varphi_{m_d}, \tag{20}$$

где

$$m_i = \left[\frac{n+i-1}{d}\right] \quad (i = 1, 2, \ldots, d).$$

Для доказательства этой формулы найдем выражение $C_k^{n;\,d}$ через символы вида $C'^{m}_{k} = C_k^{m;\,1}$. Для этого разобьем все числа 1, 2, …, n на классы вычетов по модулю

$$\begin{array}{c} d,\ 2d,\ \ldots,\ \mu_1 d \\ 1,\ d+1,\ 2d+1,\ \ldots,\ (\mu_2-1)d+1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d-1,\ 2d-1,\ 3d-1,\ \ldots,\ (\mu_d-1)d+1, \end{array} \tag{A}$$

где

$$\mu_1 = \left[\frac{n}{d}\right],\ \mu_i = \left[\frac{n-i+1}{d}\right] + 1 = \left[\frac{n+(d-i+2)-1}{d}\right] =$$
$$= m_{d-i+2}\ (i = 2, 3, \ldots, d).$$

Каждое из сочетаний $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ из чисел интервала $(1,\ n)$ по k с запрещенной разностью d мы получим, если возьмем все комбинации из сочетаний по $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_d$ $(s_1 + s_2 + \cdots + s_d = k)$ соответственно из всех чисел первой, второй, третьей и т.д. строки с запрещенной разностью d. Действительно, любые два числа из двух разных строк не могут иметь разности, равной d, так как эти числа имеют разность, не делящуюся на d, и поэтому достаточно потребовать, чтобы все числа в сочетании $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$, входящие в любую из строчек таблицы (A), не имели разности d. Но число сочетаний из μ_1 чисел первой строки (A) по s_1 с запрещенной разностью d равно числу сочетаний из чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ \mu$ по s_1 с запрещенной разностью d, т.е. равно ${C'}^{\mu_1}_{s_1}$. Аналогичным образом можно показать, что число сочетаний из всех μ_i чисел i-й строки таблицы (A) по s_i равно ${C'}^{\mu_i}_{s_i}$, так как в любой из строчек запрещение разности d приводит к запрещению рядом стоящих чисел. Окончательно получим

$$C^{n;\ d}_k = \sum_{s_1+s_2+\cdots+s_d=k} {C'}^{\mu_1}_{s_1} {C'}^{\mu_2}_{s_2} \ldots {C'}^{\mu_d}_{s_d}, \tag{21}$$

где суммирование распространено на всевозможные разложения числа k на d равных или неравных между собою неотрицательных чисел. Равенство (21) приводит нас к утверждению равенства коэффициентов при одинаковых степенях x в соотношении (20), и, таким образом, это последнее доказано. Воспользовавшись формулой (19) и очевидным равенством $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_d = m_1 + m_2 + \cdots + m_d = n$, получим далее

$$\varphi_{n;\ d}(x) = \sum_{s=0}^{n+d} C(s \,|\, m_1,\ m_2, \ldots,\ m_d)(-x)^s \varphi_{n+d-2s}(x), \tag{22}$$

где $C(s \,|\, m_1,\ m_2, \ldots,\ m_d) = C(s|n,\ d)$ равно числу представлений числа s в форме $s = z_1 + z_2 + \cdots + z_d$ $(0 \leqslant z_i \leqslant \left[\frac{n+i-1}{d}\right] + 1)$.

Докажем теперь формулу, связывающую $C^{n;\ d}_k$ и ${C'}^{n;\ d}_k$:

$$C^{n;\ d}_k = \sum_{m=1}^{n} {C'}^{m-1;\ d}_{k-1}. \tag{23}$$

Рассмотрим все сочетания $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ с запрещенной разностью d, в которых $x_k = m$. Очевидно, что число этих сочетаний x_1, $x_2,\ \ldots,\ x_{k-1},\ m$ равно числу сочетаний $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-1}$ из чисел

$1, 2, \ldots, m-1$ по $k-1$ с запрещенной разностью d таких, что все x_i $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ отличны от $m-d$. От таких сочетаний можно взаимно однозначным образом перейти к сочетаниям, где $y_1 = m - x_{k-1}$, $y_2 = m - x_{k-2}$, $\ldots$, $y_{k-1} = m - x_1$. Сочетания y_1, y_2, $\ldots$, y_{k-1} представляют сочетания из чисел интервала $(1,\ m-1)$ с запрещенной разностью d, причем $y_i \neq d$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, так как $x_i = m - y_{k-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ отличны от $m-d$. Поэтому число сочетаний x_1, x_2, $\ldots$, x_k с запрещенной разностью d, где $x_k = m$, равно $C'^{m-1;\ d}_{k-1}$. Так как число m может принимать любое из значений 1, 2, $\ldots$, n, мы получаем формулу (23). Обозначая через $\varphi'_{n;\ d}(x) = \sum_{k=0}^{n} C'^{n;\ d}_{k} x^k$ производящую функцию чисел $C'^{n;\ d}_{k}$, на основании (23) имеем

$$\varphi_{n;\ d}(x) = 1 + x \sum_{s=0}^{n-1} \varphi'_{s;\ d}(x), \tag{24}$$

так как сравнение коэффициентов при одинаковых степенях x приводит к равенству (23). Найдем теперь производящую функцию чисел $g_{k_1 k_2}(m|\, n)$, воспользовавшись при этом формулой (12) и формулой

$$\sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n} C^{n}_{k_1,\, k_2} u^{k_1} v^{k_2} = (1 + u + v)^n. \tag{25}$$

Эта последняя формула вытекает из равенства $C^{n}_{k_1,\, k_2} = C^{n}_{k_1} C^{n-k_1}_{k_2}$, доказанного в моей предыдущей работе (см. [58]). Умножив равенство (12) на $u^{k_1} v^{k_2}$ и суммируя по k_1 и k_2, получим:

$$F(u,\ v\,|\, m,\ n) = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n} g_{k_1 k_2}(m|\, n) u^{k_1} v^{k_2} =$$

$$= \sum_{p=1}^{m+1} \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n} (-1)^{p-1} \Big(C^{m-1;\ n+1-m}_{p} C^{n-2p}_{k_1-p;\ k_2-p} u^{k_1-p} v^{k_2-p} \times$$

$$\times (uv)^p + (C^{m+1;\ n+1-m}_{p} - C^{m-1;\ n+1-m}_{p} - C'^{m-1;\ n+1-m}_{p-1}) \times$$

$$\times C^{n-2p+2}_{k_1-p+1;\ k_2-p+1} u^{k_1-p+1} v^{k_2-p+1} (uv)^{p-1} \Big) -$$

$$- \sum_{p=1}^{m+1} \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n} (-1)^{p-1} C'^{m-1;\ n+1-m}_{p-1} \times$$

$$\times C^{n-2p+1}_{k_1-p+1;\ k_2-p+1} u^{k_1-p+1} v^{k_2-p+1} (uv)^{p-1}.$$

Пользуясь формулой $\sum_{k_1=0}^{l}\sum_{k_2=0}^{l} C^l_{k_1,\,k_2} u^{k_1} v^{k_2} = (1+u+v)^l$, имеем далее

$$
\begin{aligned}
&F(u,\ v\,|\,m,\ n) = \sum_{p=1}^{m+1}(-1)^{p-1}(C_p^{m-1;\,n+1-m}(1+u+v)^{n-2p}(uv)^p+\\
&+(C_p^{m+1;\,n+1-m}-C_p^{m-1;\,n+1-m}-C'^{\,m-1;\,n+1-m}_{p-1})\times\\
&\times(1+u+v)^{n-2p+2}(uv)^{p-1})-\\
&-\sum_{p=1}^{m+1}(-1)^{p-1}C'^{\,m-1;\,n+1-m}_{p-1}(1+u+v)^{n-2p+1}(uv)^{p-1}=\\
&=w^n[1-\varphi_{m-1;\,n+1-m}(x)]+\frac{w^n}{x}[\varphi_{m+1;\,n+1-m}(x)-\\
&-\varphi_{m-1;\,n+1-m}(x)]-w^n\varphi'_{m-1;\,n+1-m}(x)-w^{n-1}\varphi'_{m-1;\,n+1-m}(x),
\end{aligned}
$$

где $x=-\dfrac{uv}{(1+u+v)^2}$ и $w=1+u+v$. Пользуясь вытекающим из (24) соотношением $\varphi'_{m;\,d}(x)=\dfrac{\varphi_{m+1;\,d}(x)-\varphi_{m;\,d}(x)}{x}$, получим

$$
\begin{aligned}
&F(u,\ v\,|\,m,\ n)=w^n[1-\varphi_{m-1;\,n+1-m}(x)]+\\
&+\frac{w^n}{x}[\varphi_{m+1;\,n+1-m}(x)-\varphi_{m-1;\,n+1-m}(x)]-\\
&-w^{n-1}\frac{1+w}{x}[\varphi_{m;\,n+1-m}(x)-\varphi_{m-1;\,n+1-m}(x)].
\end{aligned}
$$

Суммируя обе части полученной формулы по m от единицы до n, получим значение производящей функции $\Phi'_n(u,\ v)$ от

$$
\begin{aligned}
S'^{\,n}_{k_1,\,k_2}&=\sum_{X^n_{k_1}}\sum_{Y^n_{k_2}}{}' f(x_1,x_2,\ldots,x_{k_1};\,y_1,y_2,\ldots,y_{k_2}|\,n)=\\
&=\sum_{m=1}^{n} g_{k_1,\,k_2}(m|\,n):
\end{aligned}
$$

$$\Phi'_n(u,v) = nw^n - w^n \sum_{m=1}^{n} \varphi_{m-1;\,n+1-m}(x) +$$
$$+ \frac{w^n}{x} \sum_{m=1}^{n} [\varphi_{m+1;\,n+1-m}(x) - \varphi_{m;\,n+1-m}(x)] -$$
$$- \frac{w^{n-1}}{x} \sum_{m=1}^{n} [\varphi_{m;\,n+1-m}(x) - \varphi_{m-1;\,n+1-m}(x)] \tag{26}$$

или

$$\Phi'_n(u,v) = nw^n + \frac{w^{n+2}}{uv} \sum_{m=1}^{n} (\varphi_{m;\,n+1-m}(x) +$$
$$+ x\varphi_{m-1;\,n+1-m}(x) - \varphi_{m+1;\,n+1-m}(x)) + \tag{27}$$
$$+ \frac{w^{n+1}}{uv} \sum_{m=1}^{n} (\varphi_{m;\,n+1-m}(x) - \varphi_{m-1;\,n+1-m}(x)).$$

Пользуясь тем, что при $d < n$ справедлива формула (22), то получим

$$\varphi_{n;\,d}(x) = \sum_{\nu=0}^{n+d} C(s \,|\, n,\, d)(-x)^{\nu} \varphi_{n+d-2\nu}(x).$$

Формула (22), как легко видеть, остается верной и при $d > n$, давая для $\varphi_{n;\,d}(x)$ значение $(1+x)^n$. На основании (22) и $d+m=n$ имеем

$$\varphi_{m;\,d}(x) + x\varphi_{m-1;\,d}(x) - \varphi_{m+1;\,d}(x) =$$
$$= \sum_{s=0}^{n+1} C(s \,|\, m,\, d)(-x)^s \varphi_{n+1-2s}(x) +$$
$$+ x \sum_{s=0}^{n+2} C(s \,|\, m-1,\, d)(-x)^s \varphi_{n-2s}(x) -$$
$$- \sum_{s=0}^{n+2} C(s \,|\, m+1,\, d)(-x)^s \varphi_{n+2-2s}(x),$$

где $d = n+1-m$. Введем обозначения: $d_s^m = C(s \,|\, m+1\, d) - C(s \,|\, m,\, d)$. Тогда $C(s \,|\, m+1,\, d) = C(s \,|\, m,\, d) + d_s^m$ и $C(s \,|\, m,\, d) =$

$= C(s\,|\,m-1,\, d)+d_s^{m-1}$. Легко видеть, пользуясь формулой (15), что

$$\varphi_{m;\,d}(x) + x\varphi_{m+1;\,d}(x) - \varphi_{m+1;\,d}(x) =$$
$$= -\sum_{s=0}^{n+2} d_s^m(-x)^s\varphi_{n+2-2s}(x) - x\sum_{s=0}^{n} d_s^{m-1}(-x)^s\varphi_{n-2s}(x) =$$
$$= \sum_{s=0}^{n+2}(d_{s-1}^{m-1} - d_s^m)(-x)^s\varphi_{n+2-2s}(x).$$

На основании этого последнего равенства и формулы (27) имеем

$$\Phi'_n(u,\, v) = nw^n + \frac{w^{n+2}}{uv}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=0}^{n+2}(d_{s-1}^{m-1} - d_s^m)(-x)^s\varphi_{n+2-2s}(x)+$$
$$+\frac{w^{n+1}}{uv}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=0}^{n+1}(C(s\,|\,m,\, n+1-m)\varphi_{n+1-2s}(x)-$$
$$-C(s\,|\,m-1,\, n+1-m)\varphi_{n-2s}(x))(-x)^s =$$
$$= nw^n + \frac{w^{n+2}}{uv}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=0}^{n+2}(d_{s-1}^{m-1} - d_s^m)(-x)^s\varphi_{n+2-2s}(x)+$$
$$+\frac{w^{n+1}}{uv}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=0}^{n+2} d_s^{m-1}\varphi_{n+1-2s}(x)(-x)^s+$$
$$+\frac{w^{n+1}}{uv}x\sum_{m=1}^{n-2}\sum_{s=0}^{n} C(s\,|\,m-1,\, n+1-m)\varphi_{n-1-2s}(x)(-x)^s.$$

Далее имеем

$$\Phi'_n(u,\, v) = nw^n + \frac{w^{n+2}}{uv}\sum_{s=0}^{n+2} a_s^n(-x)^s\varphi_{n+2-2s}(x)+$$
$$+\frac{w^{n+1}}{uv}\sum_{s=0}^{n+2} b_s^n(-x)^s\varphi_{n+1-2s}(x) - w^{n-1}\sum_{s=0}^{n} c_s^n(-x)^s\varphi_{n+1-2s}(x), \tag{28}$$

где

$$a_s^n = \sum_{m=1}^{n} (d_{s-1}^{m-1} - d_s^m) =$$
$$= \sum_{m=1}^{n} (C(s-1\,|\,m,\, n+1-m) + C(s\,|\,m,\, n+1-m) -$$
$$- C(s-1\,|\,m-1,\, n+1-m) - C(s\,|\,m+1,\, n+1-m)), \tag{29}$$

$$b_s^n = \sum_{m=1}^{n} d_s^{m-1} = \sum_{m=1}^{n} [C(s\,|\,m,\, n+1-m) - C(s\,|\,m-1,\, n+1-m)] \tag{30}$$

и

$$c_s^n = \sum_{m=1}^{n} C(s\,|\,m-1,\, n+1-m). \tag{31}$$

Введем следующие обозначения:

$$S_{k_1,\,k_2}^{n;\,p} = \sum_{X_{k_1}^n} \sum_{Y_{k_2}^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}\,|\, n)^p \tag{32}$$

и

$$S'^{\,n;\,p}_{k_1,\,k_2} = \sum_{X_{k_1}^n} {\sum_{Y_{k_2}^n}}' f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}\,|\, n)^p, \tag{33}$$

где первая сумма распространена на все пары сочетаний $x_1, \ldots, x_{k_1}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$ из чисел интервала $(1,\ n)$ по k_1 и k_2, а вторая — только на пары сочетаний $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{k_1}$; $y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{k_2}$, удовлетворяющих условиям $x_i + y_j \neq n+1$ $(i = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2)$.

Докажем теперь, что суммы $S_{k_1,\,k_2}^{n;\,p}$ можно выразить через суммы вида $S'^{\,n;\,p-1}_{k_1,\,k_2}$ и что, следовательно, в частности, вычисление $S_{k_1,\,k_2}^{n;\,2}$ сводится к вычислению найденной выше суммы $S'^{\,n}_{k_1,\,k_2}$.

Рассмотрим для этого сумму

$$S_{k_1,\,k_2}^{n+1;\,p} = \sum_{X_{k_1}^{n+1}} \sum_{Y_{k_2}^{n+1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}\,|\, n+1)^p.$$

Эту сумму можно разложить на четыре части соответственно с четырьмя возможными случаями: $n+1$ не входит ни в $X_{k_1}^{n+1}$, ни в

$Y_{k_2}^{n+1}$, $n+1$ входит в $X_{k_1}^{n+1}$, но не входит в $Y_{k_2}^{n+1}$, $n+1$ не входит в $X_{k_1}^{n+1}$, но входит в $Y_{k_2}^{n+1}$, и $n+1$ входит и в $X_{k_1}^{n+1}$, и в $Y_{k_2}^{n+1}$. Тогда получим

$$\begin{aligned}
S_{k_1,\,k_2}^{n+1;\,p} &= \sum_{X_{k_1}^n}\sum_{Y_{k_2}^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2} |\, n+1)^p + \\
&+ \sum_{X_{k_1-1}^n}\sum_{Y_{k_2}^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1-1}, n+1;\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2} |\, n+1)^p + \\
&+ \sum_{X_{k_1}^n}\sum_{Y_{k_2-1}^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2-1}, n+1 |\, n+1)^p + \\
&+ \sum_{X_{k_1-1}^n}\sum_{Y_{k_2-1}^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1-1}, n+1;\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2-1}, n+1 |\, n+1)^p.
\end{aligned} \tag{34}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1-1}, n+1;\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2} |\, n+1) = \\
&= f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1-1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2} |\, n) + 1, \\
&f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2-1}, n+1 |\, n+1) = \\
&= f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2-1} |\, n) + 1, \\
&f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1-1}, n+1;\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2-1}, n+1 |\, n+1) = \\
&= f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1-1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2-1} |\, n) + 1
\end{aligned}$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2} |\, n+1) = \\
&= f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2} |\, n) + \\
&+ \varepsilon(n+1 | x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}),
\end{aligned}$$

где $\varepsilon(n+1|x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2})$ равно единице, если по крайней мере одна из сумм $x_i + y_j$ $(i = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2)$ равна $n+1$, и равно нулю в противном случае. На основании этих равенств, вытекающих из определения функции

$f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}|\, n)$ [1] и равенства (34), имеем

$$S^{n+1;\,p}_{k_1,\,k_2} = \sum_{X^n_{k_1}} \sum_{Y^n_{k_2}} [\varepsilon(n+1|x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}) +$$
$$+ f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}|\, n)^p +$$
$$+ f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1-1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}|\, n)^p] +$$

$$+ \sum_{X^n_{k_1-1}} \sum_{Y^n_{k_2}} [1 + \sum_{X^n_{k_1}} \sum_{Y^n_{k_2-1}} (1 + f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2-1}|\, n)^p) +$$
$$+ \sum_{X^n_{k_1-1}} \sum_{Y^n_{k_2-1}} (1 + f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1-1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2-1}|\, n)^p)].$$

Пользуясь формулой Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{s=0}^{n} C^n_s a^s b^{n-s}$$

и определениями (32) и (33), получим

$$S^{n+1;\,p}_{k_1,\,k_2} = \sum_{s=1}^{p-1} C^p_s (S^{n;\,s}_{k_1,\,k_2} - S'^{n;\,s}_{k_1,\,k_2}) + S^{n;\,p}_{k_1,\,k_2} + \sum_{s=1}^{p} C^p_s S^{n;\,s}_{k_1-1,\,k_2} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{p} C^p_s S^{n;\,s}_{k_1,\,k_2-1} + \sum_{s=1}^{p} C^p_s S^{n;\,s}_{k_1-1,\,k_2-1} + \sum_{X^n_{k_1-1}} \sum_{Y^n_{k_2}} 1 +$$
$$+ \sum_{X^n_{k_1}} \sum_{Y^n_{k_2-1}} 1 + \sum_{X^n_{k_1-1}} \sum_{Y^n_{k_2-1}} 1 +$$
$$+ \sum_{X^n_{k_1}} \sum_{Y^n_{k_2}} \varepsilon(n+1|x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2})$$

или так как

$$\sum_{X^n_{k_1}} \sum_{Y^n_{k_2}} \varepsilon(n+1|x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}) =$$
$$= \sum_{X^n_{k_1}} \sum_{Y^n_{k_2}} 1 - \sum_{X^n_{k_1}} {\sum_{Y^n_{k_2}}}' 1 = C^n_{k_1} C^n_{k_2} - C^n_{k_1} C^{n-k_1}_{k_2},$$

[1] См. мою работу [58].

последние четыре члена дают

$$(C_{k_1}^n + C_{k_1-1}^n)(C_{k_2}^n + C_{k_2-1}^n) - C_{k_1}^n C_{k_2}^{n-k_1} =$$
$$= C_{k_1}^{n+1} C_{k_2}^{n+1} - C_{k_1}^n C_{k_2}^{n-k_1} = C_{k_1}^{n+1} C_{k_2}^{n+1} - C_{k_1,\,k_2}^n.$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} S_{k_1,\,k_2}^{n+1;\,p} &= S_{k_1,\,k_2}^{n;\,p} - C_{k_1,\,k_2}^n + C_{k_1}^{n+1} C_{k_2}^{n+1} + \\ &+ \sum_{s=1}^{p-1} C_s^p (S_{k_1,\,k_2}^{n;\,s} - {S'}_{k_1,\,k_2}^{n;\,s}) + \sum_{s=1}^{p} C_s^p S_{k_1-1,\,k_2}^{n;\,s} + \\ &+ \sum_{s=1}^{p} C_s^p S_{k_1,\,k_2-1}^{n;\,s} + \sum_{s=1}^{p} C_s^p S_{k_1-1,\,k_2-1}^{n;\,s}. \end{aligned} \tag{35}$$

Рассмотрим теперь производящие функции для $S_{k_1,\,k_2}^{n;\,p}$ и ${S'}_{k_1,\,k_2}^{n;\,s}$, определяемые формулами:

$$\Phi_{n;\,p}(u,v) = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n} S_{k_1,\,k_2}^{n;\,p} u^{k_1} v^{k_2},$$

$$\Phi'_{n;\,p}(u,v) = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n} {S'}_{k_1,\,k_2}^{n;\,p} u^{k_1} v^{k_2}.$$

Умножая обе части равенства (35) на $u^{k_1} v^{k_2}$ и суммируя, получим:

$$\begin{gathered} \Phi_{n+1;\,p}(u,v) = \Phi_{n;\,p}(u,v) + (1+u)^n (1+v)^n - (1+u+v)^n + \\ + \sum_{s=1}^{p-1} C_s^p \Phi_{n;\,s}(u,v) - \Phi'_{n;\,s}(u,v) + (u+v+uv) \sum_{s=1}^{p} C_s^p \Phi_{n;\,s}(u,v). \end{gathered} \tag{36}$$

Особо простой вид принимает формула (36) при $p = 2$:

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1;\,2}(u,v) &= (1+u)(1+v)\Phi_{n;\,2}(u,v) + (1+u)^{n+1}(1+v)^{n+1} - \\ &- (1+u+v)^n + 2(1+u)(1+v)\Phi_n(u,v) - 2\Phi'_n(u,v), \end{aligned} \tag{37}$$

где $\Phi_n(u,v) = \Phi_{n;\,1}(u,v)$ и $\Phi'_n(u,v) = \Phi'_{n;\,1}(u,v)$. Легко видеть, что $\Phi_{1;\,s}(u,v) = u + v + uv$ при всяком s.

Кроме того, на основании результатов моей вышеуказанной работы

$$S^{n;\,1}_{k_1,\,k_2} = nC^n_{k_1}C^n_{k_2} - C^n_{k_1+1}C^n_{k_2+1} + C^n_{k_1+1}C^{n-k_2-1}_{k_2+1}.$$

И поэтому

$$\begin{aligned}\Phi_n(u,v) = \Phi_{n;\,1}(u,v) = \Phi_n(u,v) = n(1+u)^n(1+v)^n - \\ - \frac{(1+u)^n(1+v)^n - (1+u+v)^n}{uv}.\end{aligned} \tag{38}$$

Умножив обе части равенства (37) на $\{(1+u)(1+v)\}^{m-n-1}$, суммируя по n от единицы до $m-1$, получим

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{m-1}\Phi_{n+1;\,2}(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{m-n-1} = \\ &= \sum_{n=1}^{m-1}\Phi_{n;\,2}(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{m-n} + (m-1)(1+u)^m(1+v)^m - \\ &- \sum_{n=1}^{m-1}(1+u+v)^n\{(1+u)(1+v)\}^{m-n-1} + \\ &+ 2(1+u)(1+v)\sum_{n=1}^{m-1}\Phi_n(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{m-n-1} - \\ &- 2\sum_{n=1}^{m-1}\Phi'_n(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{m-n-1}.\end{aligned}$$

Перенося первый член правой части полученного равенства влево, получим

$$\begin{aligned}&\Phi_{m;2}(u,v) - \Phi_{1;\,2}(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{m-1} = \\ &= (m-1)(1+u)^m(1+v)^m - \\ &- \sum_{n=1}^{m-1}(1+u+v)^n\{(1+u)(1+v)\}^{m-n-1} + \\ &+ 2(1+u)(1+v)\sum_{n=1}^{m-1}\Phi_n(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{m-n-1} - \\ &- 2\sum_{n=1}^{m-1}\Phi'_n(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{m-n-1}.\end{aligned}$$

Или, заменяя m на n и n на k, пользуясь равенством $\Phi_{1;\,s}(u,v)=(1+u)(1+v)-1$:

$$\Phi_{n;\,2}(u,v)=n(1+u)^n(1+v)^n-(1+u)^{n-1}(1+v)^{n-1}-$$
$$-\sum_{k=1}^{n-1}(1+u+v)^k\{(1+u)(1+v)\}^{n-k-1}+$$
$$+2(1+u)(1+v)\sum_{k=1}^{n-1}\Phi_k(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{n-k-1}+$$
$$+2\sum_{k=1}^{n-1}\Phi'_k(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{n-k-1}. \tag{39}$$

Пользуясь формулами (28) и (38), преобразуем формулу (39) к следующему виду:

$$\Phi_{n;\,2}(u,v)=n(1+u)^n(1+v)^n-\frac{(1+u)^n(1+v)^n-(1+u+v)^n}{uv}+$$
$$+\,2(1+u)(1+v)\sum_{k=1}^{n-1}\{(1+u)(1+v)\}^{n-k-1}(k(1+u)^k(1+v)^k-$$
$$-\,\frac{(1+u)^k(1+v)^k-(1+u+v)^k}{uv})-$$
$$-\,2\sum_{k=1}^{n-1}\{(1+u)(1+v)\}^{n-k-1}(k(1+u+v)^k+$$
$$+\,\frac{(1+u+v)^{k+2}}{uv}\sum_{s=0}^{k+2}a_s^k(-x)^s\varphi_{k+2-2s}(x)+$$
$$+\,\frac{(1+u+v)^{k+1}}{uv}\sum_{s=0}^{k+1}b_s^k(-x)\varphi_{k-1-2s}(x)-$$
$$-\,(1+u+v)^{k-1}\sum_{s=0}^{k}c_s^k(-x)^s\varphi_{k-1-2s}(x)),$$

где a_s^k, b_s^k и c_s^k определяются формулами (29) — (31) и x означает $-\dfrac{uv}{(1+u+v)^2}$.

Пользуясь элементарными формулами

$$\sum_{k=1}^{m} a^{m-k}b^k = b\frac{a^m - b^m}{a-b},$$

$$\sum_{k=1}^{m} ka^{m-k}b^k = b\frac{mb^{m+1} - (m+1)ab^m + a^{m+1}}{(b-a)^2},$$

получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1}\{(1+u)(1+v)\}^{n-k-1}(1+u+v)^k = \\
&= \frac{(1+u)^{n-1}(1+v)^{n-1} - (1+u+v)^{n-1}}{uv}(1+u+v) = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\{(1+u)(1+v)\}^{n-k-1}(1+u+v)^k = \\
&= \frac{(n-1)(1+u+v)^n - n(1+u)(1+v)(1+u+v)^{n-1}}{u^2v^2}(1+u+v) + \\
&+ \frac{(1+u)^n(1+v)^n}{u^2v^2}(1+u+v).
\end{aligned}$$

На основании этих последних равенств имеем далее

$$\begin{aligned}
\Phi_{n;\,2}(u,v) = {}& n^2(1+u)^n(1+v)^n - \\
& - (2n-1)\frac{(1+u)^n(1+v)^n - (1+u+v)^n}{uv} - \\
& - 2\sum_{k=1}^{n}\{(1+u)(1+v)\}^{n-k-1}\Bigg(\frac{(1+u+v)^{k+2}}{uv}\times \\
& \times \sum_{s=0}^{k} a_s^k(-x)^s\varphi_{k+2-2s}(x) + \frac{(1+u+v)^{k+1}}{uv}\times \\
& \times \sum_{s=0}^{k+1} b_s^k(-x)^s\varphi_{k+1-2s}(x) - \\
& - (1+u+v)^{k-1}\sum_{s=0}^{k} c_s^k(-x)^s\varphi_{k-1-2s}(x)\Bigg).
\end{aligned} \tag{40}$$

Здесь $\varphi_m(x)$ равно 1 при $m = -1$, равно нулю при $m = -2$ и определяется по формуле (14а) при $m \geqslant 0$ и по формуле (16) при $m < -2$. Если мы обобщим определение ${C'}^k_m$, полагая ${C'}^{-1}_0 = 1$, ${C'}^{-1}_k = 0$ при любом положительном и отрицательном k, а также полагая ${C'}^{-2}_k = 0$ при любом k, и, кроме того, положим ${C'}^m_k = 0$ при $m \geqslant 0$ и $k < 0$, или $k > m$ и ${C'}^m_k = (-1)^{m-1}{C'}^{|m|-4}_{k+|m|-2}$ при $m < -2$ и при $k \geqslant -|m| + 2$ и ${C'}^m_k = 0$ при $k < -|m| + 2$, то тогда имеем на основании формулы (14а) и (16)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} {C'}^m_k x^k = \sum_{k=0}^{m} {C'}^m_k x^k = \varphi_m(x) \quad \text{при } m \geqslant -2 \ \text{ и}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} {C'}^m_k x^k = \sum_{k=-|m|+2}^{-2} (-1)^{m-1}{C'}^{|m|-4}_{k+|m|-2} x^k = -$$

$$-\frac{1}{(-x)^{|m|-2}} \sum_{s=0}^{|m|-2} {C'}^{|m|-2}_s x^s = -\frac{\varphi_{|m|-4}(x)}{(-x)^{|m|+2}} = \varphi_m(x)$$

при любом $m < -3$.

Тогда для любого как положительного, так и отрицательного m имеем формулу

$$\varphi_m(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} {C'}^m_k x^k. \tag{41}$$

Определяя коэффициент при $u^{k_1}v^{k_2}$ в обеих частях равенства (40) и пользуясь формулой

$$\{(1+u)(1+v)\}^{n-k-1} = (1+u+v+uv)^{n-k-1} =$$
$$= \sum_{t=0}^{n-k-1} {C'}^{n-k-1}_t (1+u+v)^{n-k-t-1}(uv)^t$$

и формулой (41), а также равенством $x = -\dfrac{uv}{(1+u+v)^2}$, имеем

$$
\begin{aligned}
S^{n;\,2}_{k_1,\,k_2} &= n^2 C^n_{k_1} C^n_{k_2} - (2n-1) C^n_{k_1+1} C^n_{k_2+1} + (2n-1) C^n_{k_1+1} C^{n-k_1-1}_{k_2+1} + \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{k+2} \sum_{p+t \leqslant \mu+1} (-1)^{p+s} C^{n-k-1}_t C^{n-t-2p+1}_{k_1-p-t+1,\, k_2-t-p+1} {C'}^{k+2-2s}_{p-s} a^k_s + \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{k+1} \sum_{p+t \leqslant \mu+1} (-1)^{p+s} C^{n-k-1}_t C^{n-t-2p+1}_{k_1-p-t+1,\, k_2-t-p+1} {C'}^{k+1-2s}_{p-s} b^k_s + \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{k+1} \sum_{p+t \leqslant \mu} (-1)^{p+s} C^{n-k-1}_t C^{n-t-2p-2}_{k_1-p-t,\, k_2-t-p} {C'}^{k-1-2s}_{p-s} c^k_s,
\end{aligned}
\tag{42}
$$

где $C^n_{k_1,\,k_2} = C^n_{k_1} C^{n-k_1}_{k_2}$, μ равно наименьшему из чисел k_1, k_2, ${C'}^m_k$ имеют только что указанное обобщённое определение и a^k_s, b^k_s и c^k_s определяются формулами (29) — (31). Формула (42) очень сильно упрощается для $k_2 = 1$. Также просто выглядят выражения $S^{n;\,2}_{k_1,\,2}$, $S^{n;\,2}_{k_1,\,3}$. Весьма вероятно, что формула (42) может привести к простой асимптотической формуле для $S^{n;\,2}_{k_1,\,k_2}$ при $n \to \infty$. Было бы очень интересно выяснить значения $S^{n;\,p}_{k_1,\,k_2}$, так как тогда можно было бы установить закон распределения значений функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{k_2} | n)$, в частности, найти максимальное значение этой функции. Отметим еще одну теорему, связанную с определением ${S'}^{n;\,p}_{k_1,\,k_2}$. Если мы обозначим через $\sum\limits_{k_1,k_2,k_3}^{n}$ сумму $\sum\limits_{X^n_{k_1}} {\sum\limits_{Y^n_{k_2}}}' C_{k_2}^{n-f(x_1,x_2,\ldots,x_{k_1};\, y_1,y_2,\ldots,y_{k_2}\,|\,n)}$, то тогда $\sum\limits_{k_1,k_2,k_3}^{n}$ симметрично в нижних индексах. Иными словами, существует тождество:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{X^n_{k_1}} {\sum_{Y^n_{k_2}}}' C_{k_1}^{n-f(x_1,x_2,\ldots,x_{k_1};\, y_1,y_2,\ldots,y_{k_2}\,|\,n)} = \\
&= \sum_{X^n_{k_1}} {\sum_{Y^n_{k_2}}}' C_{k_2}^{n-f(x_1,x_2,\ldots,x_{k_1};\, y_1,y_2,\ldots,y_{k_2}\,|\,n)},
\end{aligned}
\tag{43}
$$

где $C^n_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ означает биномиальный коэффициент. Для доказательства формулы (43) рассмотрим число троек из сочетаний $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$; $z_1, z_2, \ldots, z_{k_3}$ из числа интервала $(1,\, n)$ соответственно по k_1, по k_2 и k_3, причем таких, для которых удовлетворяются условия: $x_i + y_j \neq n+1$ $(i = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2)$ и ни одно z_i $(i = 1, 2, \ldots, k_3)$ не равно ни одному из x-в, ни одному из y-в и ни одной сумме вида $x_i + y_j$ $(i = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2)$. При фиксированных $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$ для z-в запрещено $f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2} | \, n)$ мест и, следовательно, оставлены свободными $n - f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2} | \, n)$ мест. Поэтому $z_1, z_2, \ldots, z_k$ могут быть выбраны $C_{k_1}^{n - f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2} |\, n)}$ способами. Суммируя это выражение по всем возможным парам сочетаний $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$, получим в качестве искомого числа троек сочетаний левую часть равенства (43). С другой стороны, при фиксированных $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$; $z_1, z_2, \ldots, z_{k_3}$, которые, естественно, должны удовлетворять неравенствам $x_i + z_j \neq n+1$ $(i = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_3)$, в качестве $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$ можно взять любое сочетание из чисел интервала $(1,\, n)$, отличных от чисел таблицы:

$$\begin{array}{ccccc}
z_1, & z_1 - x_1, & z_1 - x_2, & \ldots & z_1 - x_{k_1}, \\
z_2, & z_2 - x_1, & z_2 - x_2, & \ldots & z_2 - x_{k_1}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
z_{k_3}, & z_{k_3} - x_1, & z_{k_3} - x_2, & \ldots & z_{k_3} - x_{k_1}, \\
 & n+1-x_1, & n+1-x_2, & \ldots & n+1-x_{k_1},
\end{array}$$

лежащих в интервале $(1,\, n)$. Тогда числа $y'_i = n + 1 - y_{k_2 - i + 1}$ $(i = 1, 2, \ldots, k_2)$ должны быть отличны от всех чисел таблицы:

$$\begin{array}{cccc}
n+1-z_1, & n+1-z_2, & \ldots & n+1-z_{k_3}, \\
n+1-z_1+x_1, & n+1-z_2+x_1, & \ldots & n+1-z_{k_3}+x_1, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
n+1-z_1+x_{k_1}, & n+1-z_2+x_{k_1}, & \ldots & n+1-z_{k_3}+x_{k_1}, \\
x_1, & x_2, & \ldots & x_{k_1},
\end{array}$$

лежащих в интервале $(1,\, n)$. Таких чисел будет $f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, z_1', z_2', \ldots, z_{k_3}' | \, n)$, где $z_i' = n + 1 - z_{k_3 - i + 1}$ $(i = 1, 2, \ldots, k_3)$. Следовательно, сочетания y_1', y_2', $\ldots$, y_{k_2}' можно располагать на всех оставшихся $n - f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, z_1', z_2', \ldots, z_{k_3}' | \, n)$ местах интервала. Так как каждому сочетанию $z_1, z_2, \ldots, z_{k_3}$ соответствует взаимно однозначно сочетание $z_1', z_2', \ldots, z_{k_3}'$ и наоборот, то для числа выбора y-в получим $C_{k_3}^{n - f(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, z_1', z_2', \ldots, z_{k_3}' |\, n)}$, причем условие $x_i \neq z_j$

сведётся к условию $x_i + z_j{}' \neq n+1$ $(i = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_3)$. Поэтому для числа троек $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\ y_1, y_2, \ldots, y_{k_2};\ z_1, z_2, \ldots, z_{k_3}$ получим

$$\sum_{X_{k_1}^n} {\sum_{Y_{k_2}^n}}' C_{k_3}^{n-f(x_1,x_2,\ldots,x_{k_1};\, z_1{}',z_2{}',\ldots,z_{k_3}{}' |\, n)},$$

т.е. левую часть равенства (43), которое таким образом доказано. Так как мы определили сумму

$$\sum_{X_{k_1}^n} {\sum_{Y_{k_2}^n}}' C_1^{n-f(x_1,x_2,\ldots,x_{k_1};\, y_1,y_2,\ldots,y_{k_2} |\, n)} = nC_{k_1,\,k_2}^n - {S'}_{k_1,\,k_2}^n,$$

то, очевидно, что тем самым определили сумму

$$\sum_{X_{k_1}^n} \sum_{z=1}^{k} C_{k_2}^{n-f(x_1,x_2,\ldots,x_{k_1};\, z |\, n)}$$

при любом k_2, откуда можно найти ${S'}_{k_1,\,1}^{n;\,p}$ при любом p. Мы имеем также принципиальную возможность определять $S_{k_1,\,1}^{n;\,p}$, пользуясь формулой (35). Мне удалось также доказать, что определение $S_{k_1,\,k_2}^{n;\,p}$ при любых k_1, k_2, p связано с решением следующей комбинаторной задачи: определить число сочетаний x_1, x_2, …, x_k из чисел 1, 2, …, n по k, в которых ни одна из разностей $x_i - x_j$ $(i = 1, 2, \ldots, k;$ $j = 1, 2, \ldots, k)$ не равна ни одному из чисел d_1, d_2, …, d_s. Однако решение этой задачи при $s > 1$ представляется чрезвычайно трудным.

7. О некоторых теоремах аддитивной теории чисел

В данной работе будут доказаны следующие две теоремы [1].

Теорема 1. *В каждом интервале* $(0,\,x)$ *содержится более* αx *чисел, представимых в виде суммы простого числа и* k*-й степени целого числа, где* α *— положительная постоянная, зависящая только от* k*. Или, иными словами, последовательность всех чисел, разложимых на сумму простого числа и* k*-й степени, есть последовательность положительной плотности* [2].

Теорема 2. *В каждом интервале* $(0,\,x)$ *содержится более* βx *чисел, представимых в виде суммы простого числа и степени заданного целого числа* a*, где* β *— положительная постоянная, зависящая только от* a [3].

Рассмотрим сначала две произвольные последовательности положительных целых чисел $m_1,\, m_2,\, m_3,\, \ldots$ и $n_1,\, n_2,\, n_3,\, \ldots$. Обозначим через $M(x)$ и $N(x)$ число чисел m_i, соответственно n_i, не превосходящих x; через $A_1(u,\,x)$, $A_2(u,\,x)$ и $\psi(u,\,x)$ — числа решений уравнений

$$m_i - m_j = u, \quad n_i - n_j = u \quad \text{и} \quad m_i + n_j = u,$$

где $m_i \leqslant x$, $m_j \leqslant x$, $n_i \leqslant x$, $n_j \leqslant x$. Обозначим, кроме того, через $\nu(2x)$ число чисел $\leqslant 2x$, представимых в виде $n_i + m_j$ ($n_i \leqslant x$, $m_j \leqslant x$). Определенные так величины удовлетворяют следующему

---

[1] См. также [55].

[2] Последовательность $n_2,\, n_2,\, n_3,\, \ldots$ называется последовательностью положительной плотности, если для всех достаточно больших значений x выполнено неравенство $\dfrac{N(x)}{x} > \alpha$, где $N(x)$ обозначает число всех $n_i \leqslant x$, а α — положительная постоянная. См. работу Шнирельмана [49] (перепечатано в [50]); см. также [19] (русский перевод в [51]). В позднейшей работе Дэвенпорт и Хейльброн [3], пользуясь методами И. М. Виноградова, показали, что почти все натуральные числа представимы в виде сумм указанного вида, т.е. что числа, не представимые в этом виде, образуют последовательность нулевой плотности.

[3] Характер зависимости β от a был предметом исследования позднейшей работы Э. Ландау [16], в которой доказано, что $\beta \geq \frac{c}{\ln a}$, где c — положительная абсолютная постоянная (легко видеть, что $\ln a$ здесь нельзя заменить более медленно возрастающей функцией от a).

неравенству:

$$\nu(2x) > \frac{M(x)^2\, N(x)^2}{M(x)\, N(x) + \sum\limits_{u=1}^{x} A_1(u,\, x)\, A_2(u,\, x)}. \tag{1}$$

Это неравенство легко выводится из тождества

$$\sum_{u=0}^{x} \psi(u;\, x)^2 = M(x)\, N(x) + 2\sum_{u=1}^{x} A_1(u,\, x)\, A_2(u,\, x). \tag{2}$$

Тождество (2) мы получим, определяя двумя различными способами число решений уравнения

$$n_i - n_j - m_k + m_l = 0 \tag{3}$$

с $n_i \leqslant x$, $n_j \leqslant x$, $m_k \leqslant x$, $m_l \leqslant x$. С одной стороны, мы можем записать (3) в форме $n_i - n_j = m_k - m_l$ и заменить следующей системой $2x+1$ уравнений:

$$\begin{gathered} n_i - n_j = u, \quad m_k - m_l = u \\ (u = -x,\, -(x-1),\, \ldots,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2, \ldots,\, x; \\ n_i \leqslant x,\, n_j \leqslant x,\, m_k \leqslant x,\, m_l \leqslant x). \end{gathered}$$

Число решений этой системы, очевидно, равно

$$\sum_{u=-x}^{x} A_1(u,\, x)\, A_2(u,\, x) = A_1(0,\, x)\, A_2(0,\, x) + 2\sum_{u=1}^{x} A_1(u,\, x)\, A_2(u,\, x) = \\ = M(x)\, N(x) + 2\sum_{u=1}^{x} A_1(u,\, x)\, A_2(u,\, x).$$

Но система (3) может быть также записана в виде $n_i + m_l = n_j + m_k$ и заменена системой уравнений

$$\begin{gathered} n_i + m_l = u, \quad n_j + m_k = u \\ (u = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, 2x;\, n_i \leqslant x,\, n_j \leqslant x,\, m_k \leqslant x,\, m_l \leqslant x). \end{gathered}$$

Число решений этой последней равно $\sum\limits_{u=0}^{2x} \psi(u,\, x)^2$. Но это есть как раз левая часть тождества (2), которое тем самым доказано. Очевидно, $\nu(2x)$ равно числу отличных от нуля чисел ряда

$$\psi(0,\, x),\, \psi(1,\, x),\, \psi(2,\, x),\, \ldots,\, \psi(2x,\, x).$$

Полагая $\varepsilon_i = 1$, если $\psi(i, x) > 0$, и $\varepsilon_i = 0$, если $\psi(i, x) = 0$, мы получим в силу неравенства Шварца

$$\sum_{i=0}^{2x} \varepsilon_i^2 \sum_{i=0}^{2x} \psi(i, x)^2 > \Big(\sum_{i=0}^{2x} \varepsilon_i \, \psi(i, x)\Big)^2 = \Big(\sum_{i=0}^{2x} \psi(i, x)\Big)^2$$

или

$$\nu(2x) = \sum_{i=0}^{2x} \varepsilon_i^2 > \frac{\Big(\sum\limits_{i=0}^{2x} \psi(i, x)\Big)^2}{\sum\limits_{i=0}^{2x} \psi(i, x)^3}. \tag{4}$$

В силу (2) и очевидного равенства $\sum\limits_{i=0}^{2x} \psi(i, x) = M(x)\, N(x)$ мы получаем теперь из (4) неравенство (1).

В качестве последовательностей m_i и n_i мы возьмем теперь последовательность всех простых чисел и последовательность k-х степеней всех натуральных чисел. Исследуем ближе, что дает наше неравенство (1) в этом случае. Как доказал Шнирельман, обобщая результаты Виго Бруна, здесь

$$A_1(u, x) < c_1 \, \frac{x}{\log^2 x} \prod_{q/u} \Big(1 + \frac{1}{q}\Big), \tag{5}$$

где $A_1(u, x)$ по определению означает число решений уравнения $P_i - P_j = u$ в положительных простых числах, не превышающих x, а q пробегает все простые делители u. $A_2(u, x)$ равно здесь числу решений уравнения

$$z_1^k - z_2^k = u \qquad (z_1^k \leqslant x, \, z_2^k \leqslant x) \tag{6}$$

в положительных целых z. Далее, здесь $N(x) = \left[\sqrt[k]{x}\right]$ и $M(x) = \pi(x)$[1]; следовательно, по известным чебышевским неравенствам

$$c_2 \, \frac{x}{\log x} < M(x) < c_3 \, \frac{x}{\log x}. \tag{7}$$

[1] $\pi(x)$ — известная теоретико-числовая функция, дающая число простых чисел, не превосходящих x.

Полагая для сокращения записи

$$f(u) = \sum_{d/n} \frac{\mu(d)^2}{d} = \prod_{q/u} \Bigl(1 + \frac{1}{q}\Bigr),$$

где μ — известная функция Мёбиуса, мы можем в силу неравенства (5) написать:

$$\sum_{u=1}^{x} A_1(u,\, x)\, A_2(u,\, x) < c_1\, \frac{x}{\log^2 x} \sum_{u=1}^{x} A_2(u,\, x)\, f(u) =$$

$$= c_1\, \frac{x}{\log^2 x} \sum_{u=1}^{x} A_2(u,\, x) \sum_{d/n} \frac{\mu(d)^2}{d} = c_1\, \frac{x}{\log^2 x} \sum_{s=1}^{x} \frac{\mu(s)^2}{s} \sum_{u=1}^{[x/s]} A_2(us,\, x),$$

$$\sum_{u=1}^{x} A_1(u,\, x)\, A_2(u,\, x) < c_1\, \frac{x}{\log^2 x} \sum_{s=1}^{x} \frac{\mu(s)^2}{s} \sum_{u=1}^{[x/s]} A_2(us,\, x). \tag{8}$$

Сумма $\sum\limits_{u=1}^{[x/s]} A_2(us,\, x)$, очевидно, равна числу решений сравнения $z_1^k - z_2^k \equiv 0 \pmod s$, где $z_1^k \leqslant x$, $z_2^k \leqslant x$, $z_1 \neq z_2$. Для каждого из $[\sqrt[k]{x}]$ значений, которые может принять z_2, z_1 принимает самое большее $\left[\dfrac{\sqrt[k]{k}}{s}\right]\Phi(s)$ значений, где $\Phi(s)$ означает число вычетов r по модулю s, удовлетворяющих сравнению $r^k - z_2^k \equiv 0 \pmod s$. По известным теоремам о сравнении высших степеней[1] [15] имеем $\Phi(k) = \prod\limits_{i=1}^{\nu} \Phi(P_i)$, где P_i пробегает все простые делители числа s, $\Phi(P) \leqslant k$ для всякого простого P, следовательно, $\Phi(s) \leqslant k^{\,\nu(s)}$, где $\nu(s)$ обозначает число простых делителей числа s. Но, как известно, для каждого s, не имеющего квадратных делителей, имеет место оценка

$$\nu(s) = c_4\, \frac{\log s}{\log\, \log s}; \tag{9}$$

[1] Мы ограничиваемся случаем чисел s, не имеющих квадратных делителей, так как для других s следует, что $\mu(s)^2 = 0$.

следовательно,

$$\Phi(s) \leqslant k^{\nu(s)} < k^{c_4 \frac{\log s}{\log\log s}} = s^{c_4 \frac{\log k}{\log\log s}} < c_5\, s^2.$$

Соединяя все эти результаты, получаем

$$\sum_{u=1}^{[x/s]} A_2(us,\, x) \leqslant [\sqrt[k]{x}] \left[\frac{\sqrt[k]{x}}{s}\right] \Phi(s) < c_5\, \frac{x^{2/k}}{s^{1-s}}$$

и в силу (8)

$$\sum_{u=1}^{x} A_1(u,\, x)\, A_2(u,\, x) < c_1 \cdot c_5\, \frac{x^{1+\frac{2}{k}}}{\log^2 x} \sum_{s=1}^{x} \frac{\mu(s)^2}{s^{2-s}} < \\ < c_1 \cdot c_5\, \frac{x^{1+\frac{2}{k}}}{\log^2 x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu(s)^2}{s^{2-s}}$$

или

$$\sum_{u=1}^{x} A_1(u,\, x)\, A_2(u,\, x) < c_6\, \frac{x^{1+\frac{2}{k}}}{\log^2 x}. \tag{10}$$

Подставляя теперь (7), (10) в неравенство (1) и принимая во внимание, что $N(x) = [x^{1/k}]$, мы получаем

$$\nu(2x) > \frac{c_2^2\, \frac{x^{2+\frac{2}{k}}}{\log^2 x}}{\frac{c_s\, x^{1+\frac{1}{k}}}{\log x} + 2\, c_6\, \frac{x^{1+\frac{2}{k}}}{\log^2 x}} > 2\,\alpha\, x,$$

или, наконец, $\nu(x) > \alpha\, x$. Тем самым теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 мы должны применить неравенство (1) к случаю, когда $m_1,\, m_2,\, m_3,\, \ldots$ и $n_1,\, n_2,\, n_3,\, \ldots$ суть соответственно последовательность всех простых чисел и последовательность всех степеней заданного целого числа a. Здесь, как и выше:

$$A_1(u,\, x) < c_1\, \frac{x}{\log^2 x} \prod_{q/u} \left(1 + \frac{1}{q}\right) = c_1\, \frac{x}{\log^2 x}\, f(u),$$

$$c_2 \frac{x}{\log^2 x} < M(x) < c_3 \frac{x}{\log^2 x}.$$

Кроме того,

$$N(x) = \Big[\log_a^x\Big] = \Big[\frac{\log x}{\log a}\Big]. \tag{11}$$

Что касается $A_2(u, x)$, то оно может принимать лишь два значения 0 и 1, так как при $u \neq 0$ уравнение

$$a^{j_1}(a^{i_1-j_1} - 1) = a^{j_2}(a^{i_2-j_2} - 1)$$

не может иметь более одного решения. В самом деле, из равенства

$$a^{i_1} - a^{j_1} = a^{i_2} - a^{j_2}$$

или

$$a^{j_1}(a^{i_1-j_1} - 1) = a^{j_2}(a^{i_2-j_2} - 1),$$

$i_1 \neq j_1$, вытекает, что $i_1 = i_2$ и $j_1 = j_2$, ибо a^n и $a^m - 1$ при $m > 0$ и $n > 0$ всегда взаимно просты.

Оценим теперь сумму

$$\sum_{u=1}^{x} A_1(u, x)\, A_2(u, x).$$

В силу (5) имеем

$$\sum_{u=1}^{x} A_1(u, x)\, A_2(u, x) < c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{u=1}^{x} A_2(u, x)\, f(u),$$

или так как $A_2(u, x) = 1$ для всех u вида

$$a^i - a^j \qquad (i \leqslant \log_a^x,\ j \leqslant \log_a^x)$$

и $A_2(u,\,x)=0$ для всех остальных u

$$\begin{aligned}\sum_{u=1}^{x} A_1(u,\,x)\,A_2(u,\,x) &< c_1\,\frac{x}{\log^2 x}\sum_{\log_a^x > i > j \geqslant 1} f(a^i - a^j) \leqslant\\ &\leqslant c_1\,\frac{x}{\log^2 x}\sum_{\log_a^x \geqslant i > j > 0} f(a^{i-j}-1)\,f(a^j) =\\ &= c_1\,\frac{x\,f(a)}{\log^2 x}\sum_{\log_a^x \geqslant i > j > 0} f(a^{i-j}-1),\end{aligned}$$

ибо для произвольных v_1, v_2 и j имеем $f(v_1)\,f(v_2)\geqslant f(v_1\,v_2)$ и $f(a^j)=f(a)$. Следовательно, получаем

$$\sum_{u=1}^{x} A_1(u,\,x)\,A_2(u,\,x) < c_7\,\frac{x}{\log x}\sum_{s=1}^{\log_a^x} f(a^s-1) =$$

$$= c_7\,\frac{x}{\log x}\sum_{s=1}^{\log_a^x}\sum_{d/a^s-1}\frac{\mu(d)^2}{d} = c_7\,\frac{x}{\log x}\sum_{k=1}^{x}\frac{\mu(k)^2}{k}\sum_{a^s-1\equiv 0 \pmod k}^{s\leqslant \log_a^x} 1 =$$

$$= c_7\,\frac{x}{\log x}\sum_{(k,\,a)=1}^{1\leqslant k<x}\frac{\mu(k)^2}{k}\left[\frac{\log_a^x}{l(k)}\right],$$

где $l(k)$ обозначает длину периода, образуемого степенями a^0, a^1, a^2, … по модулю k, иначе говоря, — показатель, которому принадлежит a по модулю k. Из последнего неравенства получаем

$$\sum_{u=1}^{x} A_1(u,\,x)\,A_2(u,\,x) < c_8\,x\sum_{\substack{k=1\\(k,\,a)=1}}^{x}\frac{\mu(k)^2}{k\,l(k)}$$

или, так как ряд $\sum\limits_{\substack{k=1\\(k,\,a)=1}}^{\infty} \dfrac{\mu(k)^2}{k\,l(k)}$, как будет ниже показано, сходится[1],

$$\sum_{u=1}^{x} A_1(u,\,x)\,A_2(u,\,x) < c_8\,x \sum_{\substack{k=1\\(k,\,a)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{k\,l(k)}.$$

Следовательно,

$$\sum_{u=1}^{x} A_1(u,\,x)\,A_2(u,\,x) < c_9\,x. \tag{12}$$

Подставляя (7), (11) и (12) в (1), получаем

$$\nu(2x) > \frac{c_2^2\,\frac{x^2}{\log^2 x}\left[\log_a^x\right]^2}{c_3\,\frac{x}{\log x}\left[\log_a^x\right] + 2\,c_9\,x} > 2\beta\,x$$

или

$$\nu(x) > \beta\,x.$$

Последнее неравенство и составляет как раз содержание теоремы 2. Остается еще доказать сходимость ряда $\sum\limits_{\substack{k=1\\(k,\,a)=1}}^{\infty} \dfrac{\mu(k)^2}{k\,l(k)}$. Для этой цели мы преобразуем его следующим образом:

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,\,a)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{k\,l(k)} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sum_{l(k)=l} \frac{\mu(k)^2}{k} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sum_{d/a^l-1}{}' \frac{\mu(d)^2}{d},$$

где штрих при знаке суммы указывает на то, что сумма $\sum\limits_{d/a^l-1}{}' \dfrac{\mu(d)^2}{d}$ распространяется на все первообразные делители числа $a^l - 1$; т.е.

[1] Эта лемма, доказательство которой было одним из самых трудных моментов печатаемой работы, сама по себе имеет значительный интерес. Другое доказательство её было дано вскоре после опубликования настоящей статьи Эрдешем и Тураном [6].

только на такие делители, которые не делят ни одно a^m-1 с $m<l$. Очевидно,

$$\sum_{d/a^l-1}{}' \frac{\mu(d)^2}{d} \leqslant \sum_{\substack{d/a^l-1\\ \varphi(d)\equiv 0 \pmod{l}}} \frac{\mu(d)^2}{d},$$

так как для каждого d имеем $\varphi(d)\equiv 0 \pmod{l(d)}$ [1].

Положим для сокращения записи

$$\sigma(l)=\sum_{\substack{d/a^l-1\\ \varphi(d)\equiv 0\,(l)}} \frac{\mu(d)^2}{d}.$$

Достаточно доказать сходимость ряда $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\dfrac{\sigma(l)}{l}$. Каждое целое число l может быть представлено, и при том единственным образом, в виде $l_1\,l_2^2$, где l_1 обозначает произведение всех различных простых чисел, входящих в l с нечетной кратностью. Разложим $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\dfrac{\sigma(l)}{l}$ на две части:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sigma(l)}{l}=\sum_{l_2\geqslant l_1}\frac{\sigma(l)}{l}+\sum_{l_2<l_1}\frac{\sigma(l)}{l}.$$

Рассмотрим сначала первую часть:

$$\sum_{l_2\geqslant l_1}\frac{\sigma(l)}{l}<c_{10}\sum_{l_2\geqslant l_1}\frac{\log l}{l}<c_{11}\sum_{l_2\geqslant l_1}\frac{1}{l^{1-\varepsilon}}<c_{11}\sum_{l_2\geqslant l_1}\frac{1}{(l_1\,l_2^2)^{1-\varepsilon}}<$$

$$<c_{11}\sum_{l_1=1}^{\infty}\frac{1}{l_1^{1-\varepsilon}}\sum_{l_2=l_1}^{\infty}\frac{1}{l_2^{2-2\varepsilon}}<\frac{c_{11}}{1-2\varepsilon}\sum_{l_1=1}^{\infty}\frac{1}{l_1^{2-3\varepsilon}}<c_{12}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\sigma(l)<c_{10}\,\log l$; докажем его. Имеем

$$\sigma(l)<\sum_{d/a^l-1}\frac{\mu(d)^2}{d}=f(a^l-1).$$

[1] $\varphi(d)$ — известная теоретико-числовая функция Эйлера.

Но

$$f(u) = \prod_{q/u} \Bigl(1 + \frac{1}{q}\Bigr) < \prod_{q/u} \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{u}{\varphi(u)}$$

или, в силу известных оценок для функции Эйлера $\varphi(u)$,

$$f(u) < c_{13} \log\log u, \tag{13}$$

$$\sigma(l) < f(a^l - 1) < c_{10} \log l. \tag{14}$$

Тем самым сходимость первой части ряда $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \dfrac{\sigma(l)}{l}$ доказана. Доказательству сходимости второй части этого ряда мы предпошлем две леммы.

Лемма I. *Пусть* $\pi(x,\,k)$ *— число всех простых чисел* $P_i^{(k)}$ *вида* $k\,z+1$*, не превосходящих* $\leqslant x$*. Пусть* $\pi(k,\,x) \geqslant 2$*. Тогда*

$$\pi(x,\,k) < b_1 \frac{x}{k^{1/3} \log x}, \tag{A}$$

где b_1 *— абсолютная положительная постоянная.*

Доказательство. Число различных пар $P_i^{(k)}$, $P_j^{(k)}$, $i \neq j$, которые могут быть образованы из этих простых чисел, равно $\pi(x,\,k)^2 - \pi(x,\,k)$. Но оно, очевидно, не превосходит числа решений сравнения

$$P_i - P_j \equiv 0 \pmod{k} \quad (P_i \neq P_j) \tag{B}$$

во всех положительных простых числах $P_i \leqslant x$, $P_j \leqslant x$, ибо каждая из указанных пар удовлетворяет этому сравнению. Число же решений сравнения $\bigl(B\bigr)$ равно

$$\sum_{u=1}^{[x/k]} A_1(u\,k,\,x) + \sum_{u=-1}^{-[x/k]} A_1(u\,k,\,x) = 2 \sum_{u=1}^{[x/k]} A_1(u\,k,\,x).$$

Принимая во внимание неравенство (5), мы получаем теперь:

$$\pi(x,\,k)^2-\pi(x,\,k)\leqslant 2\sum_{u=1}^{[x/k]}A_1(u\,k,\,x)<2\,c_1\,\frac{x}{\log^2 x}\sum_{x=1}^{[x/u]}f(k\,u)\leqslant$$
$$\leqslant 2\,c_1\,\frac{x\,f(k)}{\log^2 x}\sum_{u=1}^{[x/k]}f(u),$$

так как $f(v_1)\,f(v_2)\geqslant f(v_1\,v_2)$. Следовательно,

$$\pi(x,\,k)^2-\pi(x,\,k)<2\,c_1\,\frac{x\,f(k)}{\log^2 x}\sum_{u=1}^{[x/k]}\sum_{d/u}\frac{\mu(d)^2}{d}=$$
$$=2\,c_1\,\frac{x\,f(k)}{\log^2 x}\sum_{s=1}^{[x/k]}\frac{\mu(s)^2}{s}\sum_{d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\;s)}^{d\leqslant[x,\,k]}1=$$
$$=2\,c_1\,\frac{x\,f(k)}{\log^2 x}\sum_{s=1}^{[x/k]}\frac{\mu(s)^2}{s}\left[\frac{x}{k\,s}\right]<2\,c_1\,\frac{x^2\,f(k)}{k\,\log^2 x}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\mu(s)^2}{s^2}$$

или в силу (13)

$$\pi(x,\,k)^2-\pi(x,\,k)<2\,c_1\,c_{13}\,\frac{x^2\,\log\log k}{k\,\log^2 x}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\mu(s)^2}{s^2}<\frac{1}{2}\,b_1^2\,\frac{x^2}{k^{2/3}\log^2 x},$$

или, наконец, так как из $\pi(x,\,k)\geqslant 2$ вытекает, что $\pi(x,\,k)^2-$ $-\pi(x,\,k)>\frac{1}{2}\pi(x,\,k)^2$:

$$\pi(x,\,k)^2<b_1^2\,\frac{x^2}{k^{2/3}\log^2 x},$$
$$\pi(x,\,k)<b_1\,\frac{x}{k^{1/3}\log x}, \tag{A}$$

что и требовалось доказать.

Лемма II. *Пусть $P_1^{(k)}$, $P_2^{(k)}$, ... — последовательность всех простых чисел вида $kz+1$, расположенная в возрастающем поряд-*

ке. Тогда для каждого $y \geqslant 3$

$$\sum_{i=1}^{y} \frac{1}{P_i^{(k)}} < b_2 \frac{\log\log y}{k^{1/3}}, \tag{C}$$

где b_2 — *абсолютная положительная константа.*

Доказательство. В силу (A) имеем

$$i = \pi(P_i^{(k)},\, k) < b_1 \frac{P_i^{(k)}}{\log P_i^{(k)} \cdot k^{1/3}} < b_1 \frac{P_i^{(k)}}{\log\, i \cdot k^{1/3}};$$

$$\frac{1}{P_i^{(k)}} < \frac{b_1}{k^{1/3} i\, \log i}; \sum_{i=1}^{y} \frac{1}{P_i^{(k)}} < \frac{b_1}{k^{1/3}} \sum_{i=2}^{y} \frac{1}{i\, \log i} + \frac{1}{P_1^{(k)}} < \frac{b_2\, \log\log y}{k^{1/3}},$$

что и требовалось доказать.

Теперь мы в состоянии оценить $\sigma(l)$, $l = l_1\, l_2^2$, $l_1 > l_2$. Пусть N обозначает произведение всех различных простых делителей числа $a^l - 1$. Сумму $\sigma(l)$ можно записать в виде

$$\sum_{\varphi(P_{i_1})\, \varphi(P_{i_2}) \ldots \varphi(P_{i_k}) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ l)} \frac{1}{P_{i_1}\, P_{i_2}\, \ldots\, P_{i_k}},$$

где суммирование производится по всем комбинациям простых делителей числа N, удовлетворяющих условию

$$(P_{i_1} - 1)(P_{i_2} - 1) \ldots (P_{i_k}) \equiv 0 (\bmod l).$$

Сумма не уменьшается, если мы заменим это условие условием $(P_{i_1} - 1)(P_{i_2} - 1) \ldots (P_{i_k}) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ l_1)$. Из этого последнего условия вытекает, что среди простых чисел P_{i_1}, P_{i_2}, $\ldots$, P_{i_k} имеется хотя бы одно простое число $P_{j_1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ l_1)$ или по крайней мере два простых числа $P_{j_1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ k_1)$, $P_{j_2} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ k_2)$, $l_1 = k_1\, k_2$, либо по крайней мере три $P_{j_1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ k_1)$, $P_{j_2} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ k_2)$, $P_{j_3} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ k_3)$,

$k_1\,k_2\,k_3 = l_1$, и так далее. Поэтому имеем

$$\sigma(l) \leqslant \sum_{(P_{i_1}-1)\ldots(P_{i_k}-1)\equiv 0(\bmod\ l_1)} \frac{1}{P_{i_1}\,P_{i_2}\ldots P_{i_k}} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{P_j\equiv 1(\bmod\ l_1)} \frac{1}{P_j} \sum_{\frac{d/N}{P_j}} \frac{\mu(d)^2}{d} + \frac{1}{2!} \sum_{l_1=k_1k_2} \sum_{P_{j_1}\equiv 1(\bmod\ k_1)} \frac{1}{P_{j_1}} \times$$
$$\times \sum_{P_{j_2}\equiv 1(\bmod\ k_2)} \frac{1}{P_{j_2}} \sum_{\frac{d/N}{P_{j_1}\,P_{j_2}}} \frac{\mu(d)^2}{d} + \ldots + \frac{1}{\nu!} \sum_{l_1=k_1k_2\ldots k_\nu} \times$$
$$\times \sum_{P_{j_1}\equiv 1(\bmod\ k_1)} \frac{1}{P_{j_1}} \sum_{P_{j_2}\equiv 1(\bmod\ k_2)} \frac{1}{P_{j_2}} \cdots \sum_{P_{j_\nu}\equiv 1(\bmod\ k_\nu)} \frac{1}{P_{j_\nu}} \times$$
$$\times \sum_{\frac{d/N}{P_{j_1}\,P_{j_2}\ldots P_{j_\nu}}} \frac{\mu(d)^2}{d}.$$

Сумма обрывается на ν-м члене, где ν обозначает число различных простых делителей числа l_1, ибо l_1, не имея квадратных делителей, не может быть разложено в произведение более ν множителей $k_i > 1$. Все суммы делятся на факториалы, поскольку, разумеется, достаточно принять во внимание лишь существенно различные комбинации, не беря в расчет перестановки одних и тех же простых делителей. Обозначая через y число различных простых делителей числа $a^l - 1$, мы получаем из последнего неравенства

$$\sigma(l) < f(N)\Biggl(\sum_{i=1}^{y} \frac{1}{P_i^{(l_1)}} + \frac{1}{2!} \sum_{l_1=k_1\,k_2} \sum_{i=1}^{y} \frac{1}{P_i^{(k_1)}} \sum_{i=1}^{y} \frac{1}{P_i^{(k_2)}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{\nu!} \sum_{l_1=k_1\,k_2\ldots k_\nu} \sum_{i=1}^{y} \frac{1}{P_i^{(k_1)}} \cdots \sum_{i=1}^{y} \frac{1}{P_i^{(k_\nu)}} \Biggr).$$

Применяя оценки (14) и (C), мы получаем из этого неравенства:

$$\sigma(l) < c_{10} \log l \left(\frac{(b_1 \log\log y)}{l_1^{1/3}} + \frac{(b_1 \log\log y)^2}{2!} \times \right.$$
$$\times \sum_{l_1 = k_1\, k_2} \frac{1}{k_1^{1/3}\, k_2^{1/3}} + \ldots + \frac{(b_1 \log\log y)^{\nu}}{\nu!} \times$$
$$\left. \times \sum_{l_1 = k_1\, k_2 \ldots k_\nu} \frac{1}{k_1^{1/3}\, k_2^{1/3} \ldots k_\nu^{1/3}} \right),$$

$$\sigma(l) < c_{10} \frac{\log l}{l_1^{1/3}} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(b_1\ \log\log y)^i}{i!} \Theta_i(l_1) < c_{10} \frac{\log l}{l_1^{1/3}} (b_1\ \log\log y)^{\nu} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{l} \frac{\Theta_i(l_1)}{i!} = c_{10} \frac{\log l}{l_1^{1/3}} (b_1\ \log\log y)^{\nu} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Theta_i(l_1)}{i!},$$

где $\Theta_i(l_1)$ обозначает число решений уравнения $l_1 = k_1\, k_2 \ldots k_i$ в положительных целочисленных $k > 1$. Но в силу известной оценки числа $\nu(x)$, простых делителей числа x:

$$\nu(x) < c_4 \frac{\log x}{\log\log x},$$
$$y = \nu(a^l - 1) < c_4 \frac{\log(a^l - 1)}{\log\log(a^l - 1)} < b_3 \frac{l}{\log l},$$
$$\nu = \nu(l_1) < c_4 \frac{\log l_1}{\log\log l_1} < c_4 \frac{\log l}{\log\log l}.$$

Следовательно, так как

$$\left(b_1\ \log\log b_3 \frac{l}{\log l}\right)^{c_4 \frac{\log l}{\log\log l}} < (b_4\ \log\log l)^{c_4 \frac{\log l}{\log\log l}} =$$
$$= e^{c_4 \frac{\log l}{\log\log l}\ \log(b_4\ \log\log l)} = l^{c_4 \frac{\log(b_4\ \log\log l)}{\log\log l}} < b_5\, l^3,$$

имеем

$$\sigma(l) < b_6 \frac{l^{s_1}}{l_1^{1/3}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Theta_i(l_1)}{i!}.$$

Принимая во внимание соотношения, что $l_1 > l_2$, $l_1^3 > l$, $l_1\, l_2^2 = l$, $l_1 > l^{1/3}$, мы получаем теперь:

$$\sigma(l) < b_6 \frac{l^{s_1}}{l^{1/3}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Theta_i(l_1)}{i!} < b_6 \frac{1}{l^{s_2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Theta_i(l_1)}{i!} = \frac{b_6}{l_1^{s_2}\, l_2^{2s_2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Theta_i(l_1)}{i!}$$
$$(\varepsilon_2 = \frac{1}{9} - \varepsilon_1),$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ l_1>l_2}}^{\infty} \frac{\sigma(l)}{l} < b_6 \sum_{l_2=1}^{\infty} \frac{1}{l_2^{2+2s_2}} \sum_{l_1=1}^{\infty} \frac{1}{l_1^{1+s_2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Theta_i(l_1)}{i!} =$$
$$= b_6\, \zeta(2+2\varepsilon_2) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{l_1=1}^{\infty} \frac{\Theta_i(l_1)}{l_1^{1+\varepsilon_2}} < b_6\, \zeta(2+2\varepsilon_2) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \zeta(1+\varepsilon_2)^i =$$
$$= b_6\, \zeta(2+2\varepsilon_2)\, e^{\zeta(1+\varepsilon_2)},$$

т.е. так же вторая часть ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma(l)}{l}$ сходится, что и завершает доказательство сходимости этого ряда.

8. Об одной ортогональной системе

(*Представлено академиком С. Л. Соболевым 24. IV 1943*)

Настоящая статья посвящена изучению специальной ортогональной системы, получаемой ортогональным нормализованием системы

$$\theta_n(x) = nx - [nx]$$

в интервале (0, 1). Функции $\psi_n(x)$ этой системы связаны с функциями $\theta_n(x)$ первоначальной системы замечательно простым соотношением

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2^{(n)}}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \theta_d(x) d,$$

где суммирование распространено на все делители d числа n и где

$$\varphi_2^{(n)} = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^2$$

— известная обобщённая эйлерова функция, удовлетворяющая соотношению

$$\sum_{d/n} \varphi_2(d) = d^2.$$

Данный в тексте вывод этих зависимостей основан на исследовании особых определителей вида $|(i,\, k)^2|$, где $(i,\, k)$ — общий наибольший делитель i и k, и на формуле

$$\int_0^1 \theta_a(x)\theta_b(x)\, dx = \frac{(a,\, b)^2}{12ab},$$

которую можно найти, например, в [15]. Подобные же рассуждения позволяют нам определить ортогональную систему $\psi_n^*(x)$, порожденную функциями

$$\theta_n^*(x) = (nx - [nx])^2 - (nx - [nx]) + \frac{1}{6},$$

и вообще систему $\psi_{n;k}(x)$, порожденную системой

$$\theta_{n;k}(x) = B_k(nx - [nx]) \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots),$$

где $B_k(t)$ — k-й бернуллиев полином. Во всех этих случаях можно вывести соотношения, аналогичные приведенным выше. Именно, мы имеем

$$\psi_{n;k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\frac{k!2}{(2k)!} \cdot |B_{2k}|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi_{2k}^{(x)}}} \cdot \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^k \cdot \theta_{d;k}(x).$$

Далее автор доказывает полноту ортогональной нормальной системы

$$1,\ \psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \dots$$

в смысле метрики $L_2(0,\,1)$.

Не меняя существенным образом рассуждения, мы можем доказать полноту системы

$$1,\ \psi_{1;k}(x),\ \psi_{2;k}(x),\ \dots, \psi_{1;\,k+1}(x),\ \psi_{2;\,k+1}(x),\ \dots\ .$$

Известное тождество Парсеваля

$$\int_0^1 f(x)^2 dx = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (f,\,\psi_{n;k})^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (f,\,\psi_{n;\,k+1})^2$$

приводит к тождествам, содержащим простые числа; ни одно из них не тривиально. Автору не удалось получить их каким-либо другим способом. Таким образом, соотношение Парсеваля является мощным источником получения соотношений, относящихся к теории чисел.

Хотя получаемые таким образом ортогональные нормальные системы кажутся весьма частными, тем не менее они, возможно, ведут к весьма общим методам в теории простых чисел. Так, вопросы, связанные с обыкновенной сходимостью разложения Фурье по ψ заданной функции $f(x)$ в заданной точке x, представляются весьма трудными и имеют связь с теорией диофантовых приближений и с распределением дробей Фарея в интервале $(0, 1)$. Производящие ряды Дирихле для $\psi_{n;k}(x)$ могут быть представлены при помощи следующих формул:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_{n;k}(x)\sqrt{\varphi_{2n}(x)}}{n^s} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\frac{k!^2}{(2k)!}|B_{2k}|}} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_k(nx-[nx])}{n^{s-k}} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

9. Об одной полной ортонормированной системе пространства $L_2(0,\ 1)$

(*Представлено академиком С. Л. Соболевым 25. III 1944*)

Видоизменяя развитый мною метод построения ортонормированных систем, П. Ш. Хагдеев получил следующий результат. Если $F(x)$ определена на $(-\infty, \infty)$ как периодическая функция с периодом, равным единице, равная $+1$ в $(0,\ 1/2)$ и -1 в $(1/2,\ 1)$, и если $\tau_n(x) = nF(nx)$ $(n = 1, 3, 5, \ldots)$, то ортогонализация последовательности $\tau_1(x),\ \tau_3(x),\ \tau_5(x),\ \ldots$ в интервале $(0,\ 1)$ приводит к ортонормированной системе

$$\rho_1(x),\ \rho_3(x),\ \rho_5(x),\ \ldots,$$

где

$$\rho_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \tau_d(x),\ \ \varphi_2(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^2 = n^2 \prod \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

и где $\tau_n(x)$ и $\rho_n(x)$ определены только для нечетных индексов, а при четных n не определены совсем. Такой способ нумерации рассмотренных им функций оказался необходимым для простоты и симметрии формул.

Он показал далее, что

$$\rho_n(x) = \frac{\varphi(n)}{\sqrt{\varphi_2(n)}} + \frac{2}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) d\{2\varphi(dx,\ d) - \varphi(2dx,\ d)\},$$

где $\varphi(m,\ n)$ означает число натуральных чисел, не превосходящих m и взаимно простых с n.

Интересно, что

$$\sqrt{\varphi_2(n)}\rho_n(x) = a_n(x) = \\ = \varphi(n) + 2\sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)\{2\varphi(dx,\, d) - \varphi(2dx,\, d)\}d$$

всегда имеет только целочисленные значения, и соотношения ортогональности:

$$\int_0^1 a_n(x)a_m(x)dx = \begin{cases} \varphi_2(n), & \text{если } m = n, \\ 0, & \text{если } m \neq n \end{cases}$$

свидетельствуют о наличии бесконечного множества тождественных соотношений для обобщенных эйлеровских функций $\varphi(n,\, m)$.

Эти тождества, очевидно, можно представить в безынтегральной форме, учитывая, что $\varphi(nx,\, n)$ кусочно-постоянна. Я заметил, что упомянутая система является частью полной ортонормированной системы, состоящей из функций

$$1,\ \rho_{n;\,\nu}(x) = \rho_n(2^\nu x),\ \sigma_{n;\,\nu}(x) = \rho_n(2^\nu x + 1/4)$$

$$(n = 1,\, 3,\, 5,\, \ldots;\ \nu = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \ldots).$$

Равенства Парсеваля

$$\int_0^1 f(x)^2 dx = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 + \sum_{n;\nu}\left(\int_0^1 f(x)\rho_{n;\,\nu}(x)dx\right)^2 + \\ + \sum_{n;\nu}\left(\int_0^1 f(x)\sigma_{n;\,\nu}(x)dx\right)^2,$$

где $f(x)$ — любая функция с интегрируемым квадратом, определенная в $(0,\, 1)$, и n пробегает все нечетные натуральные числа, а ν — все неотрицательные числа, являются источником многих арифметических соотношений.

Функции $\rho_{n;\,\nu}(x)$ порождают в $L_2(0,\,1)$ гильбертово подпространство всех функций, удовлетворяющих почти всюду условию $f(x) = -f(1-x)$, а 1, $\sigma_{n;\,\nu}(x)$ — пространство всех функций, удовлетворяющих почти всюду условию $f(x) = f(1-x)$. Интересно, что $\rho_{1;\,\nu}(x)$ $(\nu = 0,\,1,\,2,\,\ldots)$ образуют известную ортонормированную систему Радемахера, естественным расширением которой является указанная здесь система.

10. Об ортонормированных системах

(*Представлено академиком С. Л. Соболевым 25. III 1944*)

В настоящей статье $\mu(n)$ означает известную функцию Мёбиуса, удовлетворяющую соотношению

$$\sum_{d/n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n > 1, \end{cases}$$

$(n,\, m)$ будет означать общий наибольший делитель чисел n, m; $\sum_{d/n}$ — сумму по делителям n. Согласно известному принципу обращения из

$$a_n = \sum_{d/n} b_d \quad (n = 1,\, 2,\, 3, \dots)$$

следует

$$b_n = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d \quad (n = 1,\, 2,\, 3, \dots)$$

и наоборот.

Для дальнейшего важна лемма: если $k < n$, $f(u)$ — любая функция, то $\sum_{d/n} f((k,\, d))\mu\left(\dfrac{n}{d}\right) = 0$.

Введем при фиксированном N операции A и B над любыми функциями целочисленного аргумента n:

операция A переводит $f(n)$ в $Af(n) = f((n,\, N))$,

операция B переводит $f(n)$ в $Bf(n) = \varepsilon\left(\dfrac{N}{n}\right) f(n)$,
где $\varepsilon(u) = 1$, если u — целое число, $\varepsilon(u) = 0$ в противном случае. Также положим

$$Sf(n) = \sum_{d/n} f(d), \quad S^{-1}f(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d), \quad Ef(n) = f(n).$$

По принципу обращения $SS^{-1} = S^{-1}S = E$.

Далее

$$SBf(n) = \sum_{d/n} \varepsilon\left(\frac{N}{n}\right) f(d) = \sum_{d/n} f(d) = \sum_{d/(n,\,N)} f(d) = ASf(n),$$

$$SB = AS, \quad S^{-1}AS = B, \quad S^{-1}A = BS^{-1},$$

$$S^{-1}Af(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f((d,\,N)) = BS^{-1}f(n) =$$
$$= \varepsilon\left(\frac{N}{n}\right) \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d).$$

Полагая $N = k$ и учитывая $\varepsilon(k/n) = 0$, получим указанную лемму.

Рассмотрим пространство Гильберта в аксиоматической форме Неймана — Отона. Последовательность элементов из H $f_1,\, f_2,\, f_3,\, \ldots$ назовем обладающей свойством D, точнее D_g, если $(f_n,\, f_m) = g((n,\, m))$, где $g(u)$ — любая вещественная функция целого аргумента u. Тогда система элементов $\gamma_1,\, \gamma_2,\, \gamma_3,\, \ldots$, заданная соотношениями

$$\gamma_n = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d) \quad (n = 1,\, 2,\, 3, \ldots),$$

ортогональна, т.е. $(\gamma_n,\, \gamma_m) = 0$, если $m \neq n$.

В самом деле, если $k < n$,

$$(\gamma_n,\, f_k) = \left(\sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d,\, f_k\right) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) (f_k,\, f_d) =$$
$$= \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g((k,\, d))) = 0.$$

Здесь использована доказанная выше арифметическая лемма. Таким образом, γ_n ортогонален ко всем f с индексами, меньшими, чем n, а следовательно, к γ_m при $m < n$, которое есть линейная комбинация таких f. Процесс ортогонализации по E. Schmidt'у для последовательности, обладающей D-свойством, совпадает, таким образом, с процессом обращения по Мёбиусу, играющему исключительно важную роль в теории чисел, и притом не зависит от $g(u)$[1].

Если

$$G(n) = S^{-1}g(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) > 0 \quad (n = 1,\, 2,\, 3, \dots),$$

то систему $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ можно нормировать. Мы имеем следующий результат: если $f_1,\, f_2,\, f_3,\, \dots$ обладает D_g-свойством, то $\psi_1,\, \psi_2,\, \dots,$ где $\psi_n = \dfrac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$, есть ортонормированная система H.

Что предыдущие результаты не беспредметны, я показал путем построения разнообразных и многочисленных примеров систем, обладающих D_g-свойством, прежде всего, для случая любой $g(n)$, обладающей свойствами $g(n) > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{g(k)} < \infty$, $g(a)g(b) = g(1)g(ab)$ при любых целых a, b. В случае сепарабельного H можно построить бесчисленное множество примеров последовательностей $f_1,\, f_2,\, f_3,\, \dots,$ которые кроме D-свойства обладают также полнотой, т.е. таких, что совокупность полиномов вида $\sum_{i=1}^{N} c_i f_i$ образует всюду плотное в H множество, и тогда система $\psi_1,\, \psi_2,\, \psi_3,\, \dots$ будет полной, во всех смыслах, ортонормированной системой.

[1]Причина этого явления лежит в следующем. Определитель $|c_{ik}|_n$, где $c_{ik} = g((i,\, k))$, имеет адъюнкты $A_{k,\,n}$ последнего столбца пропорциональными числам $\mu(n/k)$, т.е. $A_{k,\,n} = A\mu(n|k)$, где $\mu(u)$ определено, как обычно, если u — целое число, и $\mu(u) = 0$, если u — не целое, где только A зависит от выбора g.

Из

$$\sqrt{G(n)}\psi_n = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d \tag{1}$$

и из принципа обращения Мёбиуса следует

$$f_n = \sum_{d/n} \sqrt{G(n)}\psi_d. \tag{2}$$

Вводя f_n^* по формуле

$$f_n^* = \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{\sqrt{G(d)}}\psi_d, \tag{3}$$

имеем

$$(f_n,\, f_m^*) = \begin{cases} 1, & \text{если } (n,\, m) = 1, \\ 0, & \text{если } (n,\, m) > 1, \end{cases}$$

так как

$$(f_n,\, f_m^*) = \sum_{\substack{d/n,\\ d/m}} \mu(d) = \sum_{d/(n,\,m)} \mu(d).$$

На основании (1) и (3) получаем

$$f_n^* = \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{G(d)} \sum_{\delta|d} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right) f_\delta = \sum_{d/n} k_n(d) f_d,$$

где

$$k_n(d) = \sum_{\delta|\frac{n}{d}} \frac{\mu(d\delta)\mu(\delta)}{G(d\delta)}.$$

В частности, если $g(u)$ обладает свойством мультипликативности $g(a)g(b) = g(ab)$, то

$$G(n) = g(n)\prod_{p/n}(1 - g(p)^{-1}), \quad k_n(d) = \frac{\mu(d)}{G(d)} \sum_{\delta/\frac{n}{d}} \frac{\mu(\delta)^2}{G(\delta)} = \frac{\mu(d)g(n)}{g(d)G(n)}.$$

Отсюда получаем

$$(f_n^*, f_m) = \frac{g(n)}{G(n)} \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{g(d)} g((d, m)) = \begin{cases} 1, & \text{если } (n, m) = 1, \\ 0, & \text{если } (n, m) > 1, \end{cases} \tag{4}$$

где $g(n)$ — любая мультипликативная функция, для которой

$$G(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Таким образом, можно получить много арифметических тождеств, которые иначе получаются лишь из довольно сложных комбинаторных соображений. Совершенно неформальные тождества получаем, если к предыдущим соображениям добавляются соображения полноты систем гильбертова пространства. На этом пути мне удалось получить большое количество разнообразных арифметических тождеств.

Укажу, опуская почти очевидное доказательство, следующий результат: если $\omega(n) \gtrless 0$, $\omega(a)\omega(b) = \omega(ab)$, $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)^2 < \infty$, α_1, α_2, α_3, $\ldots$ есть ортонормированная система H, то f_1, f_2, f_3, $\ldots$, где $f_n = \omega(n)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)\alpha_{kn}$, обладают D_g-свойством со значением $g(u) = \dfrac{\sigma}{\omega(n)^2}$, $\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)^2$.

Далее можно показать, что если α_1, α_2, α_3, $\ldots$ образуют полную систему H, то и ψ_1, ψ_2, $\ldots$, $\psi_n = \dfrac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$ образуют полную систему H.

Закончим следующим замечанием.

Необходимое и достаточное условие для существования последовательности, обладающей D_g-свойством, может быть дано в следующей форме:

$$G(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \geqslant 0 \quad (n = 1,\, 2,\, 3, \ldots).$$

Условие достаточно, ибо, если оно выполнено, последовательность $f_n = \sum_{d/n} \sqrt{G(d)}\psi_d$ $(n = 1,\, 2,\, \ldots)$ обладает D_g-свойством, если ψ_1, $\psi_2, \ldots$ — любая ортонормированная последовательность H. В самом деле,

$$(f_n,\, f_m) = \left(\sum_{d/n} \sqrt{G(d)}\psi_d,\ \sum_{\delta/m} \sqrt{G(\delta)}\psi_\delta\right) =$$
$$= \sum_{d/(n,\, m)} G(d) = g((n,\, m)).$$

Оно необходимо, так как если $f_1,\, f_2,\, \ldots$ обладает D_g-свойством, то $\sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) = (\gamma_n,\, \gamma_n) \geqslant 0$, где $\gamma_n = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$.

Если $G(n)$ — любая функция, причем $G(n) > 0$ $(n = 1,\, 2,\, \ldots)$, и элементы последовательностей $f_1,\, f_2,\, \ldots,\, \psi_1,\, \psi_2,\, \ldots$ связаны соотношениями $f_n = \sum_{d/n} \sqrt{G(d)}\psi_d$, то $\psi_1,\, \psi_2,\, \ldots$ ортонормирована тогда и только тогда, когда $f_1,\, f_2,\, \ldots$ обладает D_g-свойством с $g(n) = \sum_{d/n} G(d)$.

11. Об одной специальной ортонормированной системе и её связи с теорией простых чисел

В результате моих исследований над приложением функционального анализа к теории простых чисел я пришел к вопросу об ортогонализации системы $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, $\theta_3(x)$ в интервале $(0, 1)$, где $\theta_n(x) = nx - [nx] - \frac{1}{2}$. Возникшая при этом ортонормированная система оказалась обладающей многими своеобразными и необычайными арифметическими свойствами. Она связана разнообразными нитями с вопросом о распределении простых чисел и с теорией обычной и функциональной дзета-функции. Уже факт полноты этой системы после ее расширения влечёт многообразные арифметические следствия. То обстоятельство, что полнота некоторых функциональных семейств влечёт теорему Hadamard'а из теории простых чисел, было показано N. Wiener'ом при помощи его методов, связанных с рассмотрением интегралов Fourier. Связи между вопросами полноты систем и вопросами арифметики вырисовываются в работе Einar Hill'а и Otto Szasz'а [10].

Вопросы, рассмотренные здесь, отличны от указанных, но связаны с ними. Рассмотрение изучаемой здесь казалось бы узко специальной ортонормированной системы функций приводит к изучению вопросов широкого и принципиального характера.

Пользуясь процессом ортогонализации по E. Schmidt'у, легко видеть, что $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, …, где $\psi_n(x)$ определяется формулой

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma_{n-1}\,\Gamma_n}} \begin{vmatrix} (\theta_1,\,\theta_1) & (\theta_1,\,\theta_2) & \ldots & (\theta_1,\,\theta_{n-1}) & \theta_1(x) \\ (\theta_2,\,\theta_1) & (\theta_2,\,\theta_2) & \ldots & (\theta_2,\,\theta_{n-1}) & \theta_2(x) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ (\theta_n,\,\theta_1) & (\theta_n,\,\theta_2) & \ldots & (\theta_n,\,\theta_{n-1}) & \theta_n(x) \end{vmatrix} \qquad (1)$$

и где $\Gamma_m = |(\theta_i,\,\theta_k)|_m$ — определитель Грама для системы $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, …, $\theta_m(x)$, образуют ортонормированную в интервале $(0,1)$ систему, эквивалентную $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, … . Здесь всюду $(\theta_i,\,\theta_k)$ определено как $\int\limits_0^1 \theta_i(x)\theta_k(x)dx$.

Пользуясь формулой, доказанной в [15, vol. 2, theorem 484], имеем

$$(\theta_n,\,\theta_m) = \frac{(n,\,m)^2}{12nm} \qquad (2)$$

для любых целых положительных n, m, где $(n,\,m)$ — общий наибольший делитель чисел n, m.

Теперь очевидно, что

$$\Gamma_n = \begin{vmatrix} (\theta_1,\,\theta_1) & (\theta_1,\,\theta_2) & \ldots & (\theta_1,\,\theta_n) \\ (\theta_2,\,\theta_1) & (\theta_2,\,\theta_2) & \ldots & (\theta_2,\,\theta_n) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ (\theta_n,\,\theta_1) & (\theta_n,\,\theta_2) & \ldots & (\theta_n,\,\theta_n) \end{vmatrix} = \frac{1}{12^n\,n!^2} D_n,$$

где положено

$$D_n = \begin{vmatrix} (1,\,1)^2 & (1,\,2)^2 & \dots & (1,\,n)^2 \\ (2,\,1)^2 & (2,\,2)^2 & \dots & (2,\,n)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n,\,1)^2 & (n,\,2)^2 & \dots & (n,\,n)^2 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Определитель D_n, напоминающий известный определитель Smith'а, может быть вычислен приемом, аналогичным способу, которым обычно вычисляется этот последний. Здесь необходимо ввести арифметическую функцию $\varphi_2(n)$, полагая

$$\varphi_2(n) = \sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) d^2 = n^2 \prod_{p/n} \Big(1 - \frac{1}{p^2}\Big), \tag{4}$$

где d пробегает все делители, а p — все простые делители числа n. Как известно,

$$\sum_{d/n} \varphi_2(d) = n^2. \tag{5}$$

Вводя в рассмотрение определители

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$B_n = \begin{vmatrix} a_{11}\,\varphi_2(1) & a_{12}\,\varphi_2(2) & \dots & a_{1n}\,\varphi_2(n) \\ a_{21}\,\varphi_2(1) & a_{22}\,\varphi_2(2) & \dots & a_{2n}\,\varphi_2(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\,\varphi_2(1) & a_{n2}\,\varphi_2(2) & \dots & a_{nn}\,\varphi_2(n) \end{vmatrix},$$

где

$$a_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ делится на } i, \\ 0, & \text{если } k \text{ не делится на } i. \end{cases}$$

Мы видим, что произведение i-й строки A_n на k-ю строку B_n равно

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}\,a_{ks}\,\varphi_2(s) = \sum_{d/(i,\,k)} \varphi_2(d) = (i,\,k)^2 \quad [\text{см.}\,(5)].$$

Поэтому $A_n\,B_n = D_n$, откуда легко получаем

$$D_n = A_n\,B_n = A_n^2\,\varphi_2(1)\,\varphi_2(2)\,\dots\,\varphi_2(n) = \varphi_2(1)\,\varphi_2(2)\,\dots\,\varphi_2(n).$$

Отсюда на основании (3) имеем

$$\Gamma_n = \frac{1}{12^n\,n!^2}\,\varphi_2(1)\,\varphi_2(2)\,\dots\,\varphi_2(n). \tag{6}$$

Вычислим также

$$D_n^*(x_1,\,x_2,\,\dots,\,x_n) = \begin{vmatrix} (1,\,1)^2 & (1,\,2)^2 & \dots & (1,\,n-1)^2 & x_1 \\ (2,\,1)^2 & (2,\,2)^2 & \dots & (2,\,n-1)^2 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n,\,1)^2 & (n,\,2)^2 & \dots & (n,\,n-1)^2 & x_n \end{vmatrix},$$

равный, как легко убедиться, произведению $A_n^* \, B_n^*$, где

$$A_n^* = A_n^*(x_1,\, x_2,\, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,\,n-1} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,\,n-1} & x_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,\,n-1} & x_n \end{vmatrix},$$

$$B_n^* = \begin{vmatrix} a_{11}\,\varphi_2(1) & a_{12}\,\varphi_2(2) & \ldots & a_{1,\,n-1}\,\varphi_2(n-1) & 0 \\ a_{21}\,\varphi_2(1) & a_{22}\,\varphi_2(2) & \ldots & a_{2,\,n-1}\,\varphi_2(n-1) & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,\,1}\,\varphi_2(1) & a_{n-1,\,2}\,\varphi_2(2) & \ldots & a_{n-1,\,n-1}\,\varphi_2(n-1) & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

в чем убеждаемся, перемножая строки A_n^* на строки B_n^* и пользуясь (5). Из очевидных соображений вытекает $B_n^* = \varphi_2(1)\,\varphi_2(2)\ldots \ldots\varphi_2(n-1)$. Вычисление $A_n^*(x_1,\, x_2,\, \ldots, x_n) = \alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2 + \ldots + \alpha_n\, x_n$ несколько сложнее. Очевидно, $A_n^*(a_{1i},\, a_{2i},\, \ldots,\, a_{ni}) = 0$ при $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1$ и равно единице при $i = n$. Поэтому α_i удовлетворяют системе[1] линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\,y_1 + a_{21}\,y_2 + \ldots + a_{n1}\,y_n &= 0 \\ a_{12}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + \ldots + a_{n2}\,y_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{1,\,n-1}\,y_1 + a_{2,\,n-1}\,y_2 + \ldots + a_{n,\,n-1}\,y_n &= 0 \\ a_{1,n}\,y_1 + a_{2,\,n}\,y_2 + \ldots + a_{n,\,n}\,y_n &= 1 \end{aligned}\right\}. \tag{I}$$

[1]Система (I), определитель которой не равен нулю, не может иметь двух различных решений.

Полагая $y_k^* = \mu\left(\frac{n}{k}\right)$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$, где $\mu(u) = 0$ при u нецелом и равно функции Мёбиуса от u при u целом, и учитывая известную формулу

$$\sum_{d/m} \mu(d) = \begin{cases} 0, \text{ если } m > 1, \\ 1, \text{ если } m = 1, \end{cases}$$

мы видим, что $y_1^*,\, y_2^*,\, \ldots,\, y_n^*$ также удовлетворяют системе (I). Отсюда

$$\alpha_i = \mu\left(\frac{n}{i}\right),\; A_n^* = \sum_{k=1}^{n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) x_d,$$

$$D_n^*(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) =$$
$$= A_n^*\, B_n^* = \varphi_2(1)\, \varphi_2(2)\, \ldots\, \varphi_2(n-1) \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) x_d. \tag{7}$$

Сопоставляя (1), (6) и (7), имеем

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d\theta_d(x), \tag{8}$$

откуда на основании известной теоремы обращения Мёбиуса

$$\theta_n(x) = nx - [nx] - \frac{1}{2} = \frac{1}{n\sqrt{12}} \sum_{d/n} \sqrt{\varphi_2(d)}\, \psi_d(x). \tag{9}$$

Нетрудно найти производящий ряд Дирихле для изучаемой здесь ортонормированной системы $\psi_1(x),\, \psi_2(x),\, \ldots$. Именно на основании (8) или (9) при $R(s) > 2$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varphi_2(n)}\, \psi_n(x)}{n^s} = \frac{\sqrt{12}}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx - [nx] - \frac{1}{2}}{n^{s-1}}, \tag{10}$$

где $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ — известная функция Римана.

Функция

$$\chi_1(s,\, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx - [nx] - \frac{1}{2}}{n^s},$$

входящая в (10), была исследована Hecke [8] для случая, когда $x = \sqrt{D}$ (D — целое число).

Легко видеть, что

$$(\theta_n,\, \psi_m) = \frac{\sqrt{\varphi_2(m)}}{n\sqrt{12}}\, a_{n,\,m},$$

где

$$a_{n,\,m} = \begin{cases} 1, & \text{если}\, m \text{ делится на } n, \\ 0, & \text{если}\, m \text{ не делится на } n. \end{cases}$$

Далее для $\vartheta_n(x)$, $\vartheta_n^*(x)$, определяемых формулами

$$\vartheta_n(x) = n\sqrt{12}\,\theta_n(x) = \sum_{d/n} \sqrt{\varphi_2(d)}\,\psi_d(x),$$

$$\vartheta_n^*(x) = \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{\sqrt{\varphi_2(d)}}\,\psi_d(x),$$

очевидно имеем

$$(\vartheta_n,\, \vartheta_n^*) = \left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{если } (n,\, m) = 1, \\ 0, & \text{если } (n,\, m) > 1 \end{array}\right\}. \tag{11}$$

Очевидно также, что

$$(\vartheta_n^*,\, \vartheta_m^*) = \frac{P_{m,\,n}}{\varphi_2\left(P_{m,\,n}\right)}, \tag{12}$$

где $P_{m,\,n}$ — произведение всех различных простых чисел, входящих в состав $(m,\,n)$. Если $\Phi(x)$ — любая функция, имеющая интегрируемую в $(0,1)$ производную ($\Phi(0)=0$), то

$$(\Phi'(x),\,\theta_n(x)) = \int\limits_0^1 \Bigl(nx-[nx]-\frac{1}{2}\Bigr)\,\Phi'(x)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \Bigl(nx-\frac{1}{2}\Bigr)\,\Phi'(x)dx - \sum_{k=1}^{n-1} k \int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \Phi'(x)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \Phi\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr) - n\int\limits_0^1 \Phi(x)dx + \frac{1}{2}\,\Phi(1).$$

Отсюда видно, что ортогональность $\Phi'(x)$ ко всем $\theta_n(x)$ влечёт соотношение

$$\sum_{k\leqslant n}{}' \Phi\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr) = n\int\limits_0^1 \Phi(t)dt,$$

где

$$\sum_{k\leqslant n}{}' \Phi\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr) = \sum_{k=1}^{n-1} \Phi\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr) + \frac{1}{2}\,\Phi(1)$$

для всех n, и наоборот. Отсюда легко видеть, что единица ортогональна ко всем $\theta_n(x)$, и потому система $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, … не будет полной.

Построим ортонормированную систему, взяв в качестве исходной

$$\theta_n^*(x) = (nx-[nx])^2 - (nx-[nx]) + \frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nkx}{k^2};$$

здесь

$$(\theta_n^*,\,\theta_m^*) = \int\limits_0^1 \theta_n^*(x)\,\theta_m^*(x)dx = \frac{(n,\,m)^4}{180\,n^2\,m^2}. \tag{13}$$

Определитель Грама $\Gamma_n^* = |(\theta_i^*\,\theta_k^*)|_n$ равен $\dfrac{1}{180^n\,n!^4}\,D_n^*$, где

$$D_n^* = \begin{vmatrix} (1,\,1)^4 & (1,\,2)^4 & \ldots & (1,\,n)^4 \\ (2,\,1)^4 & (2,\,2)^4 & \ldots & (2,\,n)^4 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ (n,\,1)^4 & (n,\,2)^4 & \ldots & (n,\,n)^4 \end{vmatrix}.$$

Вычисления, полностью аналогичные предыдущим, показывают, что

$$\psi_n^*(x) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma_{n-1}^*\,\Gamma_n^*}} \begin{vmatrix} (\theta_1^*\,\theta_1^*) & \ldots & (\theta_1^*\,\theta_{n-1}^*) & \theta_1^*(x) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ (\theta_n^*\,\theta_1^*) & \ldots & (\theta_n^*\,\theta_{n-1}^*) & \theta_n^*(x) \end{vmatrix}$$

выражаются следующим образом:

$$\psi_n^*(x) = \frac{\sqrt{180}}{\sqrt{\varphi_4(n)}} \sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\, d^2\, \theta_d^*(x). \tag{14}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \theta_n^*(x) &= (nx - [nx])^2 - (nx - [nx]) + \frac{1}{6} = \\ &= \frac{1}{n^2\sqrt{180}} \sum_{d/n} \sqrt{\varphi_4(d)}\, \psi_d^*(x). \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь

$$\varphi_4(n) = \sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\, d^4 = n^4 \Big(1 - \frac{1}{p_1^4}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p_2^4}\Big) \ldots \Big(1 - \frac{1}{p_s^4}\Big)$$

— функция, обладающая известным свойством:

$$\sum_{d/n} \varphi_4(d) = n^4.$$

Очевидно, далее, что при $R(s) > 3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n^*(x)\sqrt{\psi_4(n)}}{n^s} = \frac{\sqrt{180}}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx-[nx])^2-(nx-[nx])+\frac{1}{6}}{n^{s-2}}. \quad (16)$$

Можно показать, что система

$$\begin{aligned} &\psi_0^*(x), \quad \psi_1^*(x), \quad \psi_2^*(x), \ldots, \\ &\qquad\qquad \psi_1(x), \quad \psi_2(x), \ldots \qquad (\psi_0^*(x)=1) \end{aligned}$$

будет полной на $L_2(0, 1)$ и при этом ортонормальной, так как[1] $(\psi_i\, \psi_2) = 0$.

Функция

$$\chi_2(s, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx-[nx])^2-(nx-[nx])+\frac{1}{6}}{n^s}$$

и, общее,

$$\chi_r(s, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_r\,(nx-[nx])}{n^s},$$

где $B_r(t)$ — полином Бернулли, есть обобщённая функция Hecke, исследованная Behnke [1, 2] в связи с теорией диофантовых аппроксимаций.

Пользуясь предыдущим выражением для (Φ', θ_n) и формулой (8), легко найти коэффициенты Фурье для $\Phi'(x)$ по системе $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \ldots$. Именно

$$a_n = (\Phi', \psi_n) = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\, d \Big\{ {\sum_{k\leqslant d}}' \Phi\Big(\frac{k}{d}\Big) - d\int\limits_0^1 \Phi(t)dt \Big\} \quad (17)$$

[1] В самом деле, $(\theta_n\, \theta_m^*) = 0$, так как $\theta_n(x)\, \theta_m^*(x) = -\theta_n\,(1-x)\, \theta_m^*\,(1-x)$, а ψ', ψ^* — линейные комбинации соответственно θ, θ^*.

или

$$a_n = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\, d \sum_{k=1}^{d} \Phi\left(\frac{k}{d}\right) - \sqrt{3}\frac{\varphi(n)}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\, \Phi(1) - $$

$$-\sqrt{12\varphi_2(n)} \int\limits_0^1 \Phi(t)dt. \tag{18}$$

Равенство Парсеваля здесь имеет вид

$$12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_2(n)} \Big\{ \sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\, d \,\Big({\sum_{k\leqslant d}}' \Phi\Big(\frac{k}{d}\Big) - d \int\limits_0^1 \Phi(t)dt\Big)\Big\}^2 =$$

$$= \int\limits_0^1 \Phi'(t)^2 dt. \tag{19}$$

Оно является неистощимым источником получения разнообразнейших арифметических тождеств, содержащих бесконечные ряды и бесконечные произведения, распространённые на простые числа. Конечно, равенство (19) справедливо для тех и только тех $\Phi(x)$, для которых $\Phi'(x)$ аппроксимируема полиномами вида $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i\, \psi_i(x)$.

Для $\Phi''(x)$ $(\Phi'(0) = 0,\ \Phi(0) = 0)$ имеем

$$\int\limits_0^1 \Phi''(t)\, \theta_n^*(t)dt = \int\limits_0^1 \theta_n^*(t)\, d\Phi'(t) = \frac{1}{6}\, \Phi'(1) - 2n \int\limits_0^1 \theta_n(t)\, \Phi'(t)dt =$$

$$= \,-\, 2n {\sum_{k\leqslant n}}' \Phi\Big(\frac{k}{n}\Big) + 2n^2 \int\limits_0^1 \Phi(t)dt + \frac{1}{6}\, \Phi'(1).$$

Для $a_n^* = \int\limits_0^1 \Phi''(t)\, \psi_n^*(t) dt$ на основании (14) имеем

$$a_n^* = \frac{\sqrt{180}}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\, d^2 \Big(-2d \sum_{k \leqslant d}{}' \Phi\Big(\frac{k}{d}\Big) + \\ +2d^2 \int\limits_0^1 \Phi(t) dt + \frac{1}{6}\, \Phi'(1)\Big). \qquad (20)$$

Очевидно, $\psi_0^*(x) = 1$ ортогональна ко всем $\psi_n(x)$, $\psi_n^*(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Дополнительно имеем

$$a^* = \int\limits_0^1 \Phi''(t) dt = \Phi'(1).$$

Равенство (19) для $\Phi(t) = 1 - \cos 2\pi t$ дает

$$\prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^2}\Big) = \frac{6}{\pi^2}.$$

Таким образом, на основании известных из теории чисел фактов, $\sin 2\pi x$ удовлетворяет равенству Парсеваля, и поэтому $\sin 2\pi x$ аппроксимируется функциями $\psi_n(x)$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти c_i, N так, что

$$\int\limits_0^1 \Big(\sin 2\pi x - \sum_{i=1}^N c_i\, \psi_i(x)\Big)^2 dx < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \Big[\sin 2\pi m x - \sum_{i=1}^N c_i\, \psi_i(mx)\Big]^2 dx < \varepsilon,$$

где m — любое данное целое положительное число. Но так как на основании формул (8) и (9) и очевидного соотношения $\theta_r(sx) = \theta_{r\,s}(x)$, $\psi_k(mx)$ выражаются линейно через $\psi_l(x)$, то

$$\int\limits_0^1 \Big[\sin 2\pi mx - \sum_{i=1}^{N\,m} c_i'\,\psi_i(x)\Big]^2 dx < \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что все функции $\sin 2\pi x$, $\sin 4\pi x$, $\sin 6\pi x$, … аппроксимируемы в смысле метрики $L_2(0,\,1)$ функциями $\psi_n(x)$. Легко также показать, что равенство Парсеваля $\int\limits_0^1 \Phi(t)^2 dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\Phi,\,\psi_n^*)^2$ выполняется для $\Phi(t) = \cos 2\pi t$, так как оно легко сводится к известному соотношению $\prod\limits_p \Big(1 - \dfrac{1}{p^4}\Big) = \dfrac{90}{\pi^4}$, и отсюда, аналогично предыдущему, следует, что $\cos 2\pi mx$ аппроксимируем полиномами вида $\sum\limits_{i=0}^{N} c_i\,\psi_i^*(x)$. Но всякая функция с суммируемым квадратом аппроксимируема через $\sin 2\pi mx$, $\cos 2\pi mx$ $(m = 0,\,1,\,2,\,\ldots)$, а эти последние по доказанному здесь аппроксимируемы функциями $\psi_n(x)$, $\psi_n^*(x)$, и поэтому общее равенство Парсеваля

$$\int\limits_0^1 \Phi''(t)^2 dt = \Phi'(1)^2 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_2(n)} \times$$
$$\times \Big\{ \sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\, d \Big({\sum_{k \leqslant d}}' \Phi'\Big(\frac{k}{d}\Big) - d\Phi'(1)\Big)\Big\}^2 +$$

$$+180 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_4(n)} \Big\{ \sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\, d^2 \Big(2d {\sum_{k \leqslant d}}' \Phi\Big(\frac{k}{d}\Big) - 2d^2 \int\limits_0^1 \Phi(t)dt -$$
$$- \frac{1}{6}\,\Phi'(1)\Big)\Big\}^2 \quad (\Phi(0) = \Phi'(0) = 0) \tag{21}$$

можно считать доказанным.

Исключительный интерес представляет выяснение вопроса о законности разложения функций $f(x)$ в ряд Фурье

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,\psi_n(x)+b_n\,\psi_n^*(x)),$$

т.е. вопроса о сходимости его в обычном смысле слова к $f(x)$. Однако эти вопросы, по-видимому, очень трудны и связаны с тонкими проблемами теории диофантовых приближений.

Значительные обобщения изложенных результатов получим путем ортонормирования функций $\theta_{n;\,k}(x)$, где

$$\theta_{n;\,2k}(x)=B_{2k}\,(nx-[nx])=(-1)^{k-1}\,\frac{2\cdot(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nmx}{m^{2k}},$$

$$\theta_{n;\,2k+1}(x)=B_{2k+1}\,(nx-[nx])=(-1)^{k-1}\,\frac{2\cdot(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nmx}{m^{2k+1}},$$

на основе формулы

$$\int\limits_0^1 B_r\,(nx-[nx])\,B_r\,(mx-[mx])dx=2\,\frac{r!^2}{(2r)!}\,|B_{2r}|\,\frac{(n,\,m)^{2r}}{n^r\,m^r},$$

где $B_r(t)$ — r-й полином Бернулли, B_{2r} — $2r$-е бернуллиево число.

Для соответствующих $\psi_{n;\,k}(x)$ имеем

$$\psi_{n;\,k}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\,\frac{k!^2}{(2k)!}\,|B_{2k}|}}\,\frac{1}{\sqrt{\varphi_{2k}(n)}}\sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\,d^k\,B_k\,(dx-[dx]),\quad(22)$$

$$\theta_{n;\,k}(x)=B_k\,(nk-[nx])=\sqrt{2\,\frac{k!^2}{(2k)!}\,|B_{2k}|}\,\frac{1}{n^k}\sum_{d/n}\sqrt{\varphi_{2k}(d)}\,\psi_{d,\,k}(x),$$

(23)

где

$$\varphi_{2k}(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^{2k}.$$

Легко доказать полноту ортонормированной системы

$$1,\ \psi_{1;\,k},\ \psi_{2;\,k},\ \ldots,\ \psi_{1;\,k+1},\ \psi_{1;\,k+2},\ \ldots,$$

сводящейся при $k = 1$ к рассмотренной выше, и получить новые разнообразные тождества из соответствующего равенства Парсеваля.

Легко также доказать следующую формулу:

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} d\varphi\left(\frac{n}{d}\right) \{x\varphi(d) - \varphi(dx,\, d)\} - \frac{1}{2}\, \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\, \varphi(n), \tag{24}$$

где $\varphi(m,\, n)$ — число чисел, не превосходящих m и взаимно простых n, и аналогичные формулы для $\psi_n^*(x)$.

Из этой формулы легко получить следующие выражения для производящей функции $\psi_n(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x)\, \sqrt{\varphi_2(n)}}{n^s} = \sqrt{12} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\varphi(n) - \varphi(nx,\, n) - \frac{1}{2}\, \delta_1^n}{n^{s-1}}, \tag{25}$$

где $\delta_1^n = 0$, если $n > 1$, и $\delta_1^1 = 1$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x)\, \sqrt{\varphi_2(n)}}{n^s} = \sqrt{12} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} \left(- \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} \int\limits_0^{\infty} \frac{M(u,\, x)}{u^s} du\right), \tag{26}$$

где

$$M(u,\, x) = xN(u) - N(u,\, x),$$

а $N(u)$ — число всех несократимых дробей сегмента $(0, 1)$ со знаменателями, не превосходящими u; $N(u,\, x)$ — число таких дробей в сегменте $(0,\, x)$.

Связь рассматриваемых здесь вопросов с распределением чисел Farey и, следовательно[1], с гипотезой Римана становится очевидной.

[1] Landau E. Loc. cit.

12. Пространство Гильберта и теория чисел

(*Представлено академиком И. М. Виноградовым*)

В работе излагается новый аналитический метод теории чисел, основанный на рассмотрении гильбертова пространства.

§ 1

Во всей работе $\mu(n)$ означает известную арифметическую функцию Мёбиуса, обладающую свойством

$$\sum_{d/n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n > 1; \end{cases}$$

$(n,\, m)$ — общий наибольший делитель n и m, $\sum\limits_{d/n}$ означает, что суммирование распространено по всем делителям n.

Согласно известному принципу обращения Мёбиуса из соотношений $a_n = \sum\limits_{d/n} b_d$ $(n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots)$ следует $b_n = \sum\limits_{d/n} \mu\Bigl(\dfrac{n}{d}\Bigr)\, a_d$ $(n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots)$ и наоборот. Большую роль в дальнейшем будет играть следующая

ЛЕММА 1. *Если $k < n$, $f(u)$ — любая функция, определенная для всех положительных u, то*

$$\sum_{d/n} \mu\Bigl(\frac{n}{d}\Bigr) f((d,\, k)) = 0. \tag{1}$$

Для доказательства этой леммы введем операции S, S', A, B, E, определенные на множестве Φ всех функций от целого аргумента, задав их следующим образом:

$$Sf(n) = \sum_{d/n} f(d), \;\; S'f(n) = \sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) f(d), \;\; Af(n) = f((n,\, N)),$$

$$Bf(n) = \varepsilon\Big(\frac{N}{n}\Big) f(n), \;\; Ef(n) = f(n),$$

где $\varepsilon(u) = 1$, если u — целое число, и $\varepsilon(u) = 0$ — в противном случае и где N — заданное число.

Согласно принципу обращения Мёбиуса $SS' = S'S = E$. Кроме того,

$$SB\, f(n) = S\varepsilon\, \left(\frac{N}{n}\right)\, f(n) = \sum_{d/n} \varepsilon\, \left(\frac{N}{d}\right) f(d) = \sum_{\substack{d/n \\ d/N}} f(d) =$$

$$= \sum_{d/(n,\, N)} f(d) = AS\, f(n),$$

$$SB = AS, \;\; B = S^{-1}AS, \;\; BS^{-1} = S^{-1}A.$$

Далее

$$S^{-1}A\, f(n) = S^{-1} f((n,\, N)) = \sum_{d/n} \mu\, \left(\frac{n}{d}\right)\, f((d,\, N)) =$$

$$= BS^{-1}\, f(n) = \varepsilon\, \left(\frac{N}{n}\right)\, S^{-1}\, f(n).$$

Полагая $N = k < n$ и учитывая, что $\varepsilon\left(\dfrac{k}{n}\right) = 0$, сразу получаем требуемый результат.

Лемму 1 можно доказать и иначе, установив, что $\displaystyle\sum_{\substack{d/n \\ (d,\, k)=\delta}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) =$ $= 0$ при $k < n$ и приняв во внимание, что

$$\sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\, f((d,\, k)) = \sum_{\delta} f(\delta)\, \sum_{\substack{d/n \\ (d,\, k)=\delta}} \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Смысл леммы 1 состоит в том, что в сумме $\sum\limits_{d/n} \mu\left(\dfrac{n}{d}\right)$, при $k < n$, отдельные подсуммы, соответствующие условиям $(d,\, k) = \delta$, равны нулю.

§ 2

Рассмотрим абстрактно заданное гильбертово пространство H в аксиоматической форме Стона — Неймана [42].

Последовательность $f_1,\, f_2,\, f_3,\, \ldots$ элементов H назовем обладающей D-`свойством`, точнее, D_g-`свойством`, если $(f_n,\, f_m) = g((n,\, m))$, где $g(n)$ — данная функция целого положительного аргумента.

Если последовательность $f_1,\, f_2,\, f_3,\, \ldots$ *обладает D-свойством, то последовательность* $\gamma_1,\, \gamma_2,\, \gamma_3,\, \ldots$, *где* $\gamma_n = \sum\limits_{d/n} \mu\left(\dfrac{n}{d}\right) f_d$, *ортогональна.*

В самом деле, если $k < n$,

$$(\gamma_n,\, f_k) = \left(\sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d,\, f_k\right) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) (f_d,\, f_k) =$$
$$= \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g((d,\, k)) = 0,$$

как это следует из леммы 1, и $(\gamma_n,\, \gamma_m) = 0$ при $m < n$, так как γ_m — линейная комбинация из f_k $(k \leqslant m < n)$. Точно так же и $(\gamma_n,\, \gamma_m) = \overline{(\gamma_n,\, \gamma_m)} = 0$ при $m > n$.

Далее

$$(\gamma_n,\,\gamma_n)=\left(\gamma_n,\,\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\,f_d\right)=(\gamma_n,\,f_n)=\left(\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\,f_d,\,f_n\right)=$$
$$=\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\,(f_d,\,f_n)=\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\,g((d,\,n))=$$
$$=\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\,g(d).$$

Отсюда видно, что $g(u)$ не может быть совсем произвольной, так как $\sum\limits_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\,g(d)=(\gamma_n,\,\gamma_n)\geqslant 0$. Условие $\sum\limits_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\,g(d)\geqslant 0$ $(n=1,\,2,\,3,\,\ldots)$, таким образом, необходимо для существования последовательности $f_1,\,f_2,\,f_3,\,\ldots$, обладающей D_g-свойством, но оно и достаточно, так как если $G(n)=\sum\limits_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d)\geqslant 0$, то последовательность $f_1,\,f_2,\,f_3,\,\ldots$, где $f_n=\sum\limits_{d/n}\sqrt{G(d)}\alpha_d$, а $\alpha_1,\,\alpha_2,\,\alpha_3,\,\ldots$ — любая ортонормированная последовательность H, обладает D_g-свойством.

В самом деле,

$$(f_n,f_m)=\left(\sum_{d/n}\sqrt{G(d)}\alpha_d,\sum_{\delta/m}\sqrt{G(\delta)}\alpha_\delta\right)=\sum_{d/(n,m)}G(d)=g((n,m)).$$

Здесь $G(n)=\sum\limits_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d)$ по определению $G(n)$, а $g(n)=\sum\limits_{d/n}G(d)$ следует отсюда по принципу обращения Мёбиуса.

Таким образом, условие, необходимое и достаточное для того, чтобы существовала последовательность $f_1,\,f_2,\,f_3,\,\ldots$, обладающая D_g-свойством, состоит в сильной неотрицательности $g(n)$, т.е. в том, что $g(n)$ получается путем суммирования некоторой неотрицательной функции $G(n)$ по делителям.

Если

$$G(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) > 0 \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots),$$

то последовательность γ_1, γ_2, γ_3, $\ldots$ можно нормировать, и мы получаем ортонормированную последовательность ψ_1, ψ_2, ψ_3, $\ldots$, где

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{G(n)}}\gamma_n$$

или

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d. \tag{2}$$

Отсюда по принципу обращения Мёбиуса следует:

$$f_n = \sum_{d/n} \sqrt{G(d)}\psi_d. \tag{3}$$

Таким образом, если последовательность f_1, f_2, f_3, $\ldots$ обладает D_g-свойством, то ψ_1, ψ_2, ψ_3, $\ldots$, где ψ_n задано любой из двух эквивалентных формул (2) или (3) и $G(n) = \sum\limits_{d/n} g(d)$, есть ортонормированная последовательность. Если ψ_1, ψ_2, ψ_3, $\ldots$ задана как произвольная ортонормированная последовательность H и $G(n)$ — как произвольная неотрицательная функция целого аргумента, то f_1, f_2, f_3, $\ldots$, где f_n определено формулой (3), обладает D_g-свойством со значением $g(n) = \sum\limits_{d/n} G(d)$. В самом деле, тогда, как было указано выше,

$$(f_n, f_m) = \left(\sum_{d/n} \sqrt{G(d)}\psi_d, \sum_{\delta/m} \sqrt{G(\delta)}\psi_\delta\right) = \sum_{d/(n,m)} G(d) = g((n,m)).$$

Таким образом,

ТЕОРЕМА 1. *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы в H существовала последовательность, обладающая D_g-свойством, состоит в том, что $g(n)$ удовлетворяет соотношению*

$$\sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \geq 0 \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots).$$

ТЕОРЕМА 2. *Если элементы двух последовательностей $f_1,\, f_2,\, f_3,\, \ldots$ и $\psi_1,\, \psi_2,\, \psi_3,\, \ldots$ гильбертова пространства связаны соотношениями*

$$f_n = \sum_{d/n} \sqrt{G(d)}\psi_d \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots),$$

где $G(n)$ — любая положительная функция целого аргумента, то $\psi_1,\, \psi_2,\, \psi_3,\, \ldots$ ортонормирована тогда и только тогда, когда $f_1,\, f_2,\, f_3,\, \ldots$ обладают D_g-свойством со значением $g(n) = \sum\limits_{d/n} G(d)$.

Интересно, что для последовательностей, обладающих D-свойством, процесс ортогонализации по Шмидту (E. Schmidt) совпадает с процессом обращения по Мёбиусу, т.е. происходит совпадение одного из важнейших процессов анализа с одним из важнейших процессов теории чисел. Это обстоятельство связано с тем, что в любом определителе $|a_{ik}|$, в котором элементы зависят только от общего наибольшего делителя индексов $a_{ik} = g((i,k))$, адъюнкты элементов последнего столбца $A_{n1},\, A_{n2},\, A_{n3},\, \ldots\, A_{nn}$ пропорциональны числам $\mu\left(\frac{n}{1}\right),\ \mu\left(\frac{n}{2}\right),\ \ldots,\ \mu\left(\frac{n}{n}\right)$; при u нецелом мы полагаем $\mu(u)$ равным нулю.

Возникает вопрос: каковы должны быть $f_1,\, f_2,\, f_3,\, \ldots$, чтобы $\gamma_n = \sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$ образовали ортогональную последовательность? Предполагая $f_1,\, f_2,\, f_3,\, \ldots$ линейно независимыми, находим, что

$(\gamma_n, \gamma_n) = G(n) > 0$, $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$ ортонормированы, а $f_n = \sum\limits_{d/n} \sqrt{G(d)}\psi_d$, как мы видели выше, образуют последовательность, обладающую D-свойством. Таким образом, возможность ортогонализации путем инверсии Мёбиуса есть характерное свойство последовательностей, обладающих D-свойством, что в свою очередь связано с тем, что симметрическая функция $g(i,k)$ зависит только от общего наибольшего делителя своих аргументов, $g(i,k) = g((i,k))$, тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d,k) = 0$ при всех $n > 1$ и для всякого $k < n$.

Таким образом, лемма 1 допускает обращение.

Особое значение приобретает указанная в теореме 2 взаимосвязь между D-свойством и ортонормированностью благодаря возможности построения последовательностей из H, обладающих D-свойством, — построения, основанного на других соображениях, чем те, которые были указаны выше и базирующиеся на простом арифметическом принципе наложения двух арифметических прогрессий. Это построение дано следующей теоремой 3.

ТЕОРЕМА 3. *Если дана комплекснозначная функция $\omega(n)$, обладающая свойством $\omega(a)\omega(b) = \omega(ab)$, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\omega(k)|^2 < \infty$, и ортонормированная последовательность α_1, α_2, α_3, … элементов H, то f_1, f_2, f_3, … ($f_n = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega(k)\alpha_{kn}$) обладает D_g-свойством, причем*

$$g(n) = \frac{\sigma}{|\omega(n)|^2}, \quad \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} |\omega(k)|^2.$$

В самом деле,

$$(f_n, f_m) = \left(\overline{\omega(n)}^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\omega(k)\alpha_{kn},\ \overline{\omega(m)}^{-1}\sum_{l=1}^{\infty}\omega(l)\alpha_{lm}\right) =$$

$$= \left(\overline{\omega(n)}^{-1}\sum_{k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,n)}\omega\left(\frac{k}{n}\right)\alpha_k,\ \overline{\omega(m)}^{-1}\sum_{l\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,m)}\omega\left(\frac{l}{m}\right)\alpha_l\right) =$$

$$= \overline{\omega(n)}^{-1}\overline{\omega(m)}^{-1}\sum_{k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,[n,m])}\omega\left(\frac{k}{n}\right)\overline{\omega}\left(\frac{k}{m}\right) =$$

$$= |\omega(n)|^{-2}|\omega(m)|^{-2}\sum_{k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,[n,m])}|\omega(k)|^2 =$$

$$= \sigma|\omega(n)|^{-2}|\omega(m)|^{-2}|\omega([n,m])|^2 = \frac{\sigma}{|\omega((n,m))|^2}.$$

Объединяя теоремы 2 и 3, получаем теорему 4.

ТЕОРЕМА 4. *Если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ — ортонормированная последовательность в H, $\omega(n) \neq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\omega(ab) = \omega(a)\omega(b)$, $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{\infty}|\omega(k)|^2 < \infty$, то*

$$\psi_n = (\sigma\Omega(n))^{-\frac{1}{2}}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\overline{\omega(d)}^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\omega(k)\alpha_{kd} \tag{4}$$

образуют ортонормированную последовательность H, где

$$\Omega(n) = \sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)|\omega(d)|^{-2} = |\omega(d)|^{-2}\prod_{p/n}(1 - |\omega(p)|^2).$$

Для дальнейшего важна следующая

ТЕОРЕМА 5. *Если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ — ортонормированная система, полная для подпространства H' пространства H, то ψ_1, ψ_2, ψ_3, …, где ψ_n определены формулами (4), также образуют полную систему H'.*

Очевидно, что ψ_n принадлежат H'. Поэтому подпространство H'', порожденное ψ_1, ψ_2, ψ_3, ..., входит в H'. Нужно показать, что оно совпадает с H'. Для этого достаточно показать, что $\alpha_n \in H''$. Вхождение α_n в H'' характеризуется наличием равенства Парсеваля: $(\alpha_n, \alpha_n) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |(\alpha_n, \psi_k)|^2$.

Проверим равенство

$$(\alpha_1, \alpha_1) = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\alpha_1, \psi_k)|^2.$$

Очевидно, что

$$(\alpha_1, \psi_k) = \frac{\mu(k)}{\sqrt{\sigma\Omega(k)}}.$$

Но

$$\sum_{k=0}^{\infty} |(\alpha_1, \psi_k)|^2 = \sigma^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{\Omega(k)} = \sigma^{-1} \prod_p \left(1 + \frac{1}{\Omega(p)}\right) =$$

$$= \sigma^{-1} \prod_p (1 - |\omega(p)|^2)^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = 1.$$

Здесь двукратно использован известный в теории чисел приём преобразования бесконечных рядов, распространенных на все целые числа, в бесконечные произведения, распространённые на все простые числа, и очевидное свойство $\Omega(n)$: $\Omega(a)\Omega(b) = \Omega(ab)$, если $(a, b) = 1$ [37, с. 25].

Таким образом, α_1 аппроксимируемо при помощи линейных комбинаций из ψ_n, а следовательно, при помощи линейных комбинаций из f_n, так как $\psi_n = (G(n))^{-\frac{1}{2}} \sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать N, c_1, c_2, ..., c_N, так что $\|\alpha_1 - c_1 f_1 - c_2 f_2 - \ldots - c_N f_N\| < \varepsilon$.

Введем в H' линейные операторы L_1, L_2, L_3, ..., где L_n превращает $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \alpha_k$ в $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \alpha_{kn}$. Очевидно, что все операторы L_n изометричны, т.е. $\|L_n \beta\| = \|\beta\|$.

Далее очевидно, что

$$L_n\left(\alpha_1-\sum_{k=1}^{N}c_kf_k\right)=\alpha_n-\sum_{k=1}^{Nn}c'_kf_k.$$

Поэтому

$$\left\|\alpha_n-\sum_{k=1}^{Nn}c'_kf_k\right\|<\varepsilon.$$

Но все f_k выражаются через ψ по формулам (3), и поэтому

$$\left\|\alpha_n-\sum_{k=1}^{Nn}c''_k\psi_k\right\|<\varepsilon.$$

Таким образом, α_n аппроксимируемо полиномами вида $\sum c_k\psi_k$ и поэтому входит в H''. Все α_n входят в H'', а следовательно, $H''=H'$.

Прямая проверка равенства $1=(\alpha_n,\alpha_n)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|(\alpha_n,\psi_k)|^2$ при любом n приводят к большим сложностям арифметического характера. В качестве $\omega(k)$ проще всего взять $\omega(k)=k^{-s}$, где $\mathrm{Re}(s)>\frac{1}{2}$. Мы видим, что процесс образования сумм $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{kn}}{k^s}$, в котором казалось бы нет ничего арифметического, вызывает появление арифметики в виде D-свойства, а ортонормирование образующейся последовательности усугубляет арифметику, вызывая появление функции Мёбиуса[1].

Бесконечная матрица

$$\|c_{ik}\|,\ \text{где}\ c_{ik}=(\psi_i,\alpha_k)=\frac{\omega(k)}{\sqrt{\sigma\Omega(i)}}\sum_{d/(i,k)}\mu\left(\frac{i}{d}\right)|\omega(d)|^{-2},$$

[1]Конечно, известно, что общий принцип обращения рядов позволяет выразить a_n через b_n, если $b_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{kn}$, но развитый здесь метод даёт возможность указать, кроме этого известного «векторного» обращения, также скалярное обращение.

осуществляющая переход от одной полной ортонормированной системы пространства H' к другой, очевидно, унитарна.

Таким образом, в гильбертовом пространстве мы обнаруживаем бесчисленное множество арифметических вращений.

Можно указать варианты указанного выше метода построения ортонормированных систем. Если f_n определены для всех значений индекса n, взаимно простых с данными N, и если $(f_n, f_m) =$
$= g((n, m))$, то

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d, \quad \text{где} \quad G(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d), \quad (n, N) = 1,$$

образуют ортонормированную последовательность. Далее, если α_n (n пробегают все значения 1, 2, 3, ...) образуют ортонормированную последовательность H и $\omega(n)$ обладает указанными ранее свойствами, то $f_n = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum\limits_{(k,N)=1} \omega(k)\alpha_{kn}$ обладают свойством $(f_n, f_m) =$
$= g((n, m))$ при $(n, N) = 1$, $(m, N) = 1$, где $g(n) = \frac{\sigma}{|\omega(n)|^2}$, $\sigma =$
$= \sum\limits_{(k,N)=1} |\omega(n)|^2$. Здесь все индексы взаимно просты с N.

Положим $f_n = f_n^{(1)}$ и определим $f_n^{(q)}$ по формуле

$$f_n^{(q)} = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum_{\substack{k=1 \\ (k,N)=1}} \omega(k)\alpha_{knq},$$

где $(n, N) = 1$, q — любое простое число, все простые делители которого входят в N. Очевидно, $(f_n^{(q)}, f_m^{(q)}) = g((n, m))$, где, как и выше,

$$g(n) = \frac{\sigma}{|\omega(n)|^2}, \quad \sigma = \sum_{(k,N)=1} |\omega(k)|^2.$$

Полагая

$$\psi_n^{(q)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma\Omega(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d^{(q)}, \quad \Omega(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) |\omega(d)|^{-2} =$$

$$= |\omega(n)|^{-2} \prod_{p/n} (1 - |\omega(d)|^2),$$

получим ортонормированную систему $\psi_n^{(q)}$, где верхний индекс пробегает все числа, не содержащие простых делителей, отличных от тех, которые входят в N, а нижний индекс пробегает все числа, взаимно простые с N.

Теорема о полноте может быть доказана совершенно аналогично предыдущему и поэтому ясно, что $\psi_n^{(q)}$ при данном q и переменном n образуют систему, порождающую то же пространство, что и α_{nq} $(n, N) = 1$ [1].

Другой вариант получим, определяя f_n по формуле

$$f_n = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k) \alpha_{k^2 n^2}.$$

Тогда $(f_n, f_m) = g((n, m))$, где $g(n) = \frac{\sigma}{|\omega(n)|^2}$, $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\omega(k)|^2$. Полагая $f_n^{(Q)} = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega(k) \alpha_{k^2 n^2 Q}$, где Q — любое бесквадратное число, т.е. такое, что $\mu(Q) \neq 0$, также имеем $(f_n^{(Q)}, f_m^{(Q)}) = g((n, m))$, где $g(u) = \frac{\sigma}{|\omega(u)|^2}$, $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\omega(k)|^2$. Очевидно далее, что $(f_n^{(Q_1)}, f_m^{(Q_2)}) = 0$, если $Q_1 \neq Q_2$. Полагая $\psi_n^{(Q)} = \frac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d^{(Q)}$, где n — любое целое, Q — любое бесквадратное число, легко убеждаемся в том, что $\psi_n^{(Q)}$ образуют ортонормированную систему. Можно также показать, что $\psi_n^{(Q)}$ полна на подпространстве, порожденном α_1, α_2, $\alpha_3, \dots$.

[1] Этот способ построения ортонормированных систем будем в дальнейшем называть первым вариантом.

В первом из рассмотренных вариантов условия $\omega(n) \neq 0$ могут и не соблюдаться при $(n, N) > 1$, так как рассматриваются только значения $\omega(n)$ при $(n, N) = 1$. В частности, можно положить $\omega(n) = \frac{\chi(n)}{n^z}$, где $\mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2}$, $\chi(n)$ — характер Дирихле по модулю N. Тогда

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\chi(n)|}{n^{2s}}, \quad s = \mathrm{Re}(z)$$

и

$$\Omega(n) = n^{2s} \prod_{p/n} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) = \varphi_{2s}(n), \quad f_n^{(q)} = \chi(n)\overline{n^z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^z} \alpha_{knq},$$

$$\psi_n^{(q)} = \frac{n^s}{\varphi_{2s}(n)\sqrt{\zeta(2s)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d^{(q)} \quad (s = \mathrm{Re}(z)), \tag{5}$$

где n пробегает все числа, взаимно простые с N, q — все числа, не содержащие простых чисел, не входящих в N, образуют ортонормированную систему, эквивалентную с α_1, α_2, α_3, $\ldots$.

По поводу первого варианта можно сделать ещё следующее замечание. Обычно нам удаётся в конкретных случаях просуммировать (т.е. представить в сжатой аналитической форме) непосредственно не $f_n = \sum\limits_{\substack{k=1 \\ (k,N)=1}}^{\infty} \omega(k)\alpha_{kn}$, а $f' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega(k)\alpha_k$. Но легко видеть, что

$$f_1 = \sum_{d/n} \mu(d)\omega(d) L_d f'$$

и потому

$$f_n^{(q)} = \overline{\omega(n)}^{-1} L_{nq} f_1 = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum_{d/N} \mu(d)\omega(d) L_{nqd} f'. \tag{6}$$

Когда H конкретизировано, как $L_2(0, 1)$, и в качестве α_1, α_2, α_3, $\ldots$ взяты $\alpha_n(x) = \sqrt{2}\sin 2\pi n x$, операция L_n означает замену

$f(x)$ на $f(nx)$. Теорема 4 показывает, что мы можем, имея одну ортонормированную последовательность, построить бесчисленное множество ортонормированных последовательностей, пользуясь произвольной мультипликативной, нигде не равной нулю функцией с сходящейся суммой квадратов модулей всех ее частных значений.

Самый переход от старой системы α_1, α_2, α_3, $\ldots$ к новой ψ_1, ψ_2, ψ_3, $\ldots$ совершается при помощи унитарного преобразования с матрицей $\|c_{ik}\|$, где

$$c_{ik} = (\psi_i, \alpha_k) = \frac{\omega(k)}{\sqrt{\sigma\Omega(i)}} \sum_{d/(i,k)} \mu\left(\frac{i}{d}\right) |\omega(d)|^{-2},$$

унитарность которого видна только на основе теоретико-числовых соображений.

Само собой разумеется, новым здесь оказывается не тот давно известный факт, что переход от одной ортонормированной системы гильбертова пространства к другой будет унитарным преобразованием, связанным с унитарной матрицей, а совершенно не очевидный a priori факт существования в гильбертовом пространстве бесчисленного множества арифметически охарактеризованных вращений. Этот факт порождает так много арифметических соотношений между элементами гильбертова пространства, что можно говорить об арифметике гильбертова пространства. Уже перенумерация последовательности α_1, α_2, α_3, $\ldots$ в теореме 4 порождает новые примеры в конкретных функциональных случаях. Сопоставляя формулы

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\sigma\Omega(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d, \quad \psi_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}\alpha_k, \quad f_n = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)\alpha_{kn}$$

и учитывая невырожденность унитарной матрицы $\|c_{ik}\|$, мы видим, что если последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ пробегает[1] все ортонормированные последовательности H, $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ также пробегают все ортонормированные последовательности H, то $f_1, f_2, f_3, \ldots$, согласно теореме 2, дают все последовательности H, обладающие D_g-свойством со значением $g(n) = \frac{\sigma}{|\omega(n)|^2}$. Таким образом, если для любой $g(n)$, для которой $G(n) = \sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \geq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, можно указать общий способ получения всех последовательностей, обладающих D_g-свойством, состоящим в том, что в формулу $f_n = \sum\limits_{d/n} \sqrt{(G(d)}\psi_d$ в качестве $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ подставляются всевозможные ортонормированные последовательности H, для частного случая $g(n) = |\omega(n)|^{-2}$ можно указать дополнительно еще также всеобщий (т.е. охватывающий все последовательности с D_g-свойством) способ, состоящий в том, что в формулах $f_n = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega(k)\alpha_{kn}$ в качестве $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ берутся всевозможные ортонормированные последовательности H. Второй способ относится к случаю $g(n)$, удовлетворяющему условиям

$$g(ab) = g(a)g(b), \quad g(n) > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} g(k)^{-1} < \infty.$$

Для случая $g(n)$, не удовлетворяющего этим условиям, не удалось найти способ построения, кроме общего метода, данного теоремой 2.

Очевидно, что существование двух различных методов построения систем, обладающих D_g-свойством, позволяет построить новые ортонормированные системы из любой заданной. Теперь мы видим, что теорема 3 имеет обратную теорему.

[1] $\omega(n)$ и, следовательно, c_{ik} предполагаются фиксированными.

ТЕОРЕМА 6. *Если последовательность f_1, f_2, f_3, ... обладает D_g-свойством, причем*

$$g(n) > 0, \quad g(ab) = g(a)g(b), \quad \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)^{-1} < \infty,$$

то существует ортонормированная последовательность α_1, α_2, α_3, ..., такая что

$$f_n = \frac{\omega(n)^{-1}}{\sqrt{\sigma}} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)\alpha_{kn},$$

где

$$\omega(n) = g(n)^{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)^{-1}.$$

Сама же последовательность α_1, α_2, α_3, ... может быть найдена следующим образом: находим ψ_n по формуле

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d,$$

затем α по формулам

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_n, \psi_k)\psi_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}\psi_k,$$

$$c_{kn} = \frac{\omega(n)}{\sqrt{\sigma\Omega(k)}} \sum_{d/(n,k)} \mu\left(\frac{k}{d}\right) \omega(d)^{-2}, \ \Omega(n) = \omega(n)^{-2} \prod_{p/n} (1 - \omega(p)^2).$$

В силу известного факта выражение $\|f - \sum\limits_{k=1}^{N} a_k\psi_k\|$ принимает наименьшее значение при $a_k = (f, \psi_k)$. В частности, $\|\alpha_1 - \sum\limits_{k=1}^{N} a_k\psi_k\|$ принимает наименьшее значение при $a_k = \frac{\mu(k)}{\sqrt{\sigma\Omega(k)}}$. Но $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\sigma\Omega(n)}} \times \sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$, и, следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 7. *Наименьшее значение* $\|\alpha_1 - \sum\limits_{k=1}^{N} b_k f_k\|$ *достигается при*

$$b_k = c_k^N = \sum_{l=1}^{\left[\frac{N}{k}\right]} \frac{\mu(lk)\mu(l)}{\sigma\Omega(lk)} = \frac{\mu(k)}{\sigma\Omega(k)} \sum_{\substack{l=1\\(l,k)=1}}^{\left[\frac{N}{k}\right]} \frac{\mu(l)^2}{\Omega(l)}.$$

Скалярное произведение любых двух элементов f, g

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\alpha_k, \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b}_k\alpha_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 < \infty$$

пространства H', порождённого данной ортонормированной системой α_1, α_2, α_3, $\ldots$, может быть дано в двух различных формах:

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k, \quad (f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_n)\overline{(g, \psi_n)},$$

где

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\sigma\Omega(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d, \quad f_n = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)\alpha_{kn},$$

$$\Omega(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) |\omega(d)|^{-2} = |\omega(n)|^{-2} \prod_{p/n} (1 - |\omega(p)|^2), \quad \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} |\omega(k)|^2$$

и где $\omega(n) \neq 0$ — любая мультипликативная функция, для которой $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\omega(k)|^2 < \infty$.

$$(f, \psi_n) = \frac{1}{\sqrt{\sigma\Omega(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) (f, f_d) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma\Omega(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \omega(d)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\omega(k)} a_{kd}$$

и аналогично

$$(g,\psi_n)=\frac{1}{\sqrt{\sigma\Omega(n)}}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\omega(d)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\overline{\omega(k)}b_{kd}.$$

Из сопоставления этих двух форм получим тождество

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k=\sigma^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\Omega(n)^{-1}&\left\{\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\omega(d)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\overline{\omega(k)}a_{kd}\right\}\times\\&\times\left\{\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\overline{\omega(d)}^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\omega(k)b_{kd}\right\},\end{aligned}\tag{7}$$

где a_k и b_k — любые последовательности со сходящейся суммой квадратов модулей, $\omega(n)\neq 0$ — любая функция, для которой

$$\omega(ab)=\omega(a)\omega(b),\quad \sum_{k=1}^{\infty}|\omega(k)|^2<\infty$$

и где

$$\Omega(n)=|\omega(n)|^{-2}\prod_{p/n}(1-|\omega(p)|^2).$$

Полагая

$$\omega(n)=n^{-z},\quad s=\mathrm{Re}(z)>\frac{1}{2},\quad \Omega(n)=\varphi_{2s}(n)=n^{2s}\prod_{p/n}(1-p^{-2s}),$$

$$\sigma=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^z}\right|^2=\zeta(2s),$$

получим, в частности,

$$\begin{aligned}\zeta(2s)\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{2s}(n)^{-1}&\left\{\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)d^z\sum_{k=1}^{\infty}\overline{k}^{-z}a_{kd}\right\}\times\\&\times\left\{\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\overline{d}^z\sum_{k=1}^{\infty}k^{-z}b_{kd}\right\}.\end{aligned}\tag{8}$$

Очевидно, что тождество (7) выражает факт инвариантности скалярного произведения двух произвольных элементов пространства H' при вращении H', реализуемого матрицей $\|(\psi_i, \alpha_k)\| = \|c_{ik}\|$, где

$$c_{ik} = \frac{\omega(k)}{\sqrt{\sigma\Omega(i)}} \sum_{d/(i,k)} \mu\left(\frac{i}{d}\right) |\omega(d)|^{-2},$$

и тождество (7) представляет другое выражение факта унитарности матрицы $\|c_{ik}\|$ — факт, который столь же трудно доказуем из каких-либо иных выражений, отличных от приведенных выше.

Подставляя в (8) $z = \frac{s}{2}$ $(s > 1)$, находим

$$\zeta(s) \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_s(n)^{-1} \left\{ \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^{\frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{s}{2}} a_{kd} \right\} \times$$
$$\times \left\{ \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^{\frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{s}{2}} b_{kd} \right\}. \tag{9}$$

Пользуясь первым вариантом и вводя в пространстве h, порожденном всеми теми α_n, у которых $(n, N) = 1$, эквивалентную систему $\psi_n^{(1)}$, рассматривая также скалярное произведение любых f, g из h

$$f = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,N)=1}}^{\infty} a_k \alpha_k, \quad g = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,N)=1}}^{\infty} \bar{b}_k \alpha_k,$$

получаем следующее тождество:

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,N)=1}}^{\infty} a_k b_k =$$

$$= \sigma^{-1} \sum_{\substack{n=1\\(n,N)=1}}^{\infty} \Omega(n)^{-1} \left\{ \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \omega(d)^{-1} \sum_{\substack{k=1\\(k,N)=1}}^{\infty} \overline{\omega(k)} a_{kd} \right\} \times \tag{10}$$

$$\times \left\{ \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \overline{\omega(d)}^{-1} \sum_{\substack{k=1\\(k,N)=1}}^{\infty} \omega(k) b_{kd} \right\},$$

где $\omega(n)$ — любая мультипликативная функция, определенная для всех n, взаимно простых с данным N,

$$\sigma = \sum_{\substack{k=1\\(k,N)=1}}^{\infty} |\omega(k)|^2 < \infty, \quad \omega(n) \neq 0 \text{ при } (n, N) = 1,$$

$$\Omega(n) = |\omega(n)|^{-2} \prod_{p/n} (1 - |\omega(p)|^2).$$

Полагая $\omega(n) = \chi(n) n^{-z}$, $\mathrm{Re}(z) = s > \frac{1}{2}$, где $\chi(n)$ — характер Дирихле по модулю N, получим

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,N)=1}}^{\infty} a_k b_k = \prod_{p/N} (1 - p^{-2s})^{-1} \zeta(2s)^{-1} \times$$

$$\times \sum_{\substack{n=1\\(n,N)=1}}^{\infty} \varphi_{2s}(n)^{-1} \left\{ \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \overline{\chi}(d) d^z \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\chi}(k) \overline{k^{-z}} a_{kd} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \chi(d) d^z \sum_{k=1}^{\infty} \chi(k) k^{-z} b_{kd} \right\}. \tag{11}$$

Конкретизируя a_k и b_k различными способами, получим из (7) — (11) разнообразные конкретные тождества.

§ 3

Легко указать способ построения биортогональных систем, основанный на следующих замечаниях.

Если две последовательности $f_1, f_2, f_3, \ldots$ и $f'_1, f'_2, f'_3, \ldots$ таковы, что $(f_n, f'_m) = g((m,n))$, то мы будем говорить, что они обладают `относительным` D_g`-свойством`. В этом случае

$$\gamma_n = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d \text{ и } \gamma'_n = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f'_d,$$

очевидно, биортогональны, т.е. $(\gamma_n, \gamma'_m) = 0$, если $n \neq m$.

Очевидно,

$$(\gamma_n, \gamma'_n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) = G(n).$$

Если $G(n) \neq 0$, то $\psi_n = G(n)^{-\frac{1}{2}} \gamma_n$, $\psi'_n = \overline{G(n)}^{-\frac{1}{2}} \gamma'_n$ удовлетворяют условиям

$$(\psi_n, \psi'_m) = \begin{cases} 0, \text{ если } n \neq m, \\ 1, \text{ если } n = m. \end{cases}$$

Если дана ортонормированная последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *и две мультипликативные функции* $\omega_1(n)$, $\omega_2(n)$ *со сходящейся суммой квадратов модулей, нигде не обращающиеся в нуль, то*

$$f'_n = \overline{\omega_2(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_1(k) \alpha_{kn}, \quad f_n = \overline{\omega_1(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_2(k) \alpha_{kn}$$

образуют последовательности, обладающие относительным D_g-свойством со значением

$$g(u) = \frac{\sigma}{\omega_1\overline{\omega}_2(u)}, \quad \omega_1\overline{\omega}_2(n) = \omega_1(n)\overline{\omega_2(n)}, \quad \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_1\overline{\omega}_2(k).$$

В самом деле,

$$(f_n, f'_m) =$$

$$= \left(\overline{\omega_2(n)}^{-1} \sum_{k\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, n)} \omega_1\left(\frac{k}{n}\right)\alpha_k, \;\; \overline{\omega_1(m)}^{-1} \sum_{k\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, n)} \omega_2\left(\frac{k}{m}\right)\alpha_k\right) =$$

$$= \overline{\omega_2(n)}^{-1}\omega_1(m)^{-1} \sum_{k\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, [m,n])} \omega_1\left(\frac{k}{n}\right)\overline{\omega}_2\left(\frac{k}{m}\right) = \frac{\sigma}{\omega_1\omega_2((m,n))}.$$

Отсюда получаем:

ТЕОРЕМА 8. *Если*

$$\omega_1(n) \neq 0, \quad \omega_2(n) \neq 0, \quad \omega_1(ab) = \omega_1(a)\omega_1(b), \quad \omega_2(ab) = \omega_2(a)\omega_2(b),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\omega_1(k)|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\omega_2(k)|^2 < \infty, \quad g(n) = \frac{\sigma}{\omega_1(n)\overline{\overline{\omega_2(n)}}},$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_1(k)\overline{\omega_2(k)}, \quad G(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \neq 0$$

и $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ — *любая ортонормированная последовательность* H, *то*

$$\psi_n = G(n)^{-\frac{1}{2}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d \;\; \text{и} \;\; \psi'_n = \overline{G(n)}^{-\frac{1}{2}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f'_d,$$

где

$$f_n = \overline{\omega_2(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_1(k)\alpha_{kn}, \quad f'_n = \overline{\omega_1(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_2(k)\alpha_{kn},$$

образуют биортогональную пару последовательностей, т.е.

$$(\psi_n, \psi'_m) = \begin{cases} 0, \ \textit{если } n \neq m, \\ 1, \ \textit{если } n = m. \end{cases}$$

Если дана некоторая последовательность f_1, f_2, f_3, …, *обладающая* D_g*-свойством, где* $g(n)$ *такова, что*

$$G(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) > 0 \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots),$$

то согласно теореме 2,

$$f_n = \sum_{d/n} \sqrt{G(d)}\psi_d,$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3, … — *некоторая однозначно определенная ортонормированная последовательность.*

Введем теперь последовательность f_1^*, f_2^*, f_3^*, …, *где* f_n^* *определено формулой*

$$f_n^* = \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{\sqrt{G(d)}}\psi_d.$$

Тогда

$$(f_n, f_m^*) = \begin{cases} 1, \ \textit{если } (n,m) = 1, \\ 0, \ \textit{если } (n,m) > 1. \end{cases} \tag{12}$$

В самом деле,

$$(f_n, f_m^*) = \left(\sum_{d/n} \sqrt{G(d)}\psi_d,\ \sum_{\delta/n} \frac{\mu(\delta)}{\sqrt{G(\delta)}}\psi_\delta\right) =$$

$$= \sum_{d/(n,m)} \mu(d) = \begin{cases} 1, \ \text{если } (n,m) = 1, \\ 0, \ \text{если } (n,m) > 1. \end{cases}$$

Последовательность f_n^* можно использовать для получения различных арифметических тождеств, которые найдём, умножая на f_m^* обе части равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)|\omega(n)|^2 f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \log n\omega(n)\alpha_n \quad \left(f_n = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)\alpha_{kn}\right), \tag{13}$$

которое легко обосновать, если мультипликативная функция $\omega(n)$ такова, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\omega(k)| < \infty$.

Для

$$f_n = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)\alpha_{kn} = \sum_{d/n} \sqrt{G(d)}\psi_d,$$

где α_n, ψ_n, $\omega(n)$, $G(n)$ взяты, как и в теореме 4, можно указать последовательность $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$, $\hat{f}_3$, …, биортогональную к f_1, f_2, f_3, …, положив

$$\hat{f}_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{\sqrt{G(kn)}} \psi_{kn}.$$

Очевидно

$$(f_n, \hat{f}_m) = \sum_{\substack{d/n \\ d \equiv 0 \pmod{m}}} \mu\left(\frac{d}{m}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n \neq m. \end{cases}$$

Пользуясь формулой $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d$, можно выразить $\hat{f}_n$ через f_k следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{f}_n &= \sum_{k \equiv 0 \pmod{n}} \frac{\mu\left(\frac{k}{n}\right)}{\sqrt{G(k)}} \psi_k = \sum_{k \equiv 0 \pmod{n}} \frac{\mu\left(\frac{k}{n}\right)}{G(k)} \sum_{d/k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) f_d = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k \equiv 0 \pmod{[n,m]}} \frac{\mu\left(\frac{k}{n}\right) \mu\left(\frac{k}{m}\right)}{G(k)} f_m, \quad \hat{f}_n = \sum_{m=1}^{\infty} c_{n,m} f_m, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$c_{n,m}=\sum_{k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,[n,m])}\frac{\mu\left(\frac{k}{n}\right)\mu\left(\frac{k}{m}\right)}{G(k)}=\sigma^{-1}\sum_{k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,[n,m])}\frac{\mu\left(\frac{k}{n}\right)\mu\left(\frac{k}{m}\right)}{\Omega(k)}=$$

$$=\sigma^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu\left(\frac{[n,m]}{n}k\right)\mu\left(\frac{[n,m]}{m}k\right)}{\Omega(k[n,m])}=$$

$$=\sigma^{-1}\mu(m')\mu(n')\sum_{\substack{k=1\\(k,n'm')=1}}^{\infty}\frac{\mu(k)^2}{\Omega(k[n,m])},$$

причем

$$m'=\frac{m}{(n,m)}=\frac{[n,m]}{m},\quad n'=\frac{n}{(n,m)}=\frac{[n,m]}{n}.$$

Обозначив через b произведение всех степеней простых чисел, входящих в n и m с одинаковым показателем степени и взятых в b с этим показателем, имеем $[n,m]=ab$, где a — произведение всех степеней простых чисел, входящих в n и m с разными показателями, и которые, естественно, войдут в $[n,m]$ с наибольшими из этих разных показателей. Очевидно, что $(a,b)=1$, $(b,n'm')=1$ и $(k,n'm')=1$ эквивалентно $(k,a)=1$. Поэтому

$$c_{n,m}=\sigma^{-1}\mu(n')\mu(m')\sum_{\substack{k=1\\(k,a)=1}}^{\infty}\frac{\mu(k)^2}{\Omega(kab)}.$$

Представляя k в форме $k'c$, $(k',b)=1$ (c может содержать только те простые числа, которые входят в b), получаем

$$c_{n,m}=\sigma^{-1}\mu(n')\mu(m')\sum_{\substack{k'=1\\(k',ab)=1}}^{\infty}\frac{\mu(k'c)^2}{\Omega(k'abc)};$$

здесь c пробегает все числа, могущие содержать только те простые делители, которые входят в b. Очевидно, $(a,bc)=1$, $(k',abc)=1$, так как b и bc имеют одни и те же простые делители. Функции $\mu(n)$ и $\Omega(n) = |\omega(n)|^{-2} \prod\limits_{p/n} (1 - |\omega(p)|^2)$ обладают свойством узкой мультипликативности:

$$\mu(uv) = \mu(u)\mu(v),\ \Omega(uv) = \Omega(u)\Omega(v),\ \text{если } (u,v) = 1.$$

Поэтому

$$c_{n,m} = \sigma^{-1}\mu(n')\mu(m')\Omega(a)^{-1} \sum_{d/b} \frac{\mu(d)^2}{\Omega(bd)} \sum_{\substack{k=1 \\ (k,ab)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{\Omega(k)} =$$

$$= \mu(n')\mu(m')\Omega(ab)^{-1} \prod_{p/b} (1 + |\omega(p)|^2) \prod_{p/(a,b)} (1 - |\omega(p)|^2) =$$

$$= \mu\left(\frac{n}{(n,m)}\right) \mu\left(\frac{m}{(n,m)}\right) \omega([n,m])^2 \prod_{p/b_{n,m}} (1 + |\omega(p)|^2).$$

В случае $\omega(n) = n^{-z}$, $s = \mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2}$

$$c_{n,m} = \mu\left(\frac{n}{(n,m)}\right) \mu\left(\frac{m}{(n,m)}\right) |\omega([n,m])|^2 \prod_{p/b_{n,m}} (1 + |\omega(p)|^2), \quad (15)$$

где $b_{n,m}$ — произведение всех тех простых чисел, которые входят в m и n в одинаковой степени.

Умножая $\hat{f}_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{n,k} f_k$ на f_m и учитывая, что

$$(f_m, f_k) = g((m,k)) = \frac{\sigma}{|\omega((m,k))|^2} = \zeta(2s)(m,k)^{2s},$$

имеем

$$(\hat{f}_n, f_m) = \zeta(2s) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu\left(\frac{n}{(n,k)}\right) \mu\left(\frac{k}{(n,k)}\right)}{[n,k]^{2s}} \prod_{p/b_{n,k}} (1 + p^{-2s})(k,m)^{2s}$$

или, при замене $2s$ на s,

$$\delta_m^n \zeta(s)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu\left(\frac{n}{(n,k)}\right) \mu\left(\frac{k}{(n,k)}\right)}{n^s k^s} (n,k)^s (m,k)^s \prod_{p/b_{n,k}} (1 + p^{-s}), \quad (16)$$

где

$$\delta_m^n = \begin{cases} 1, \text{ если } n = m, \\ 0, \text{ если } n \neq m. \end{cases}$$

В частности, при любом $n = m$

$$\zeta(s)^{-1} = n^{-s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu\left(\frac{n}{(n,k)}\right) \mu\left(\frac{k}{(n,k)}\right)}{k^s} \prod_{p/b_{n,k}} (1 + p^{-s})(n,k)^{2s}, \qquad (17)$$

где $s > 1$ и n — любое целое число.

В предыдущем содержится

ТЕОРЕМА 9. *Если последовательность f_1, f_2, f_3, … элементов H обладает D_g-свойством, причем*

$$g(n) > 0, \quad g(ab) = g(a)g(b), \quad \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)^{-1} < \infty,$$

то последовательность $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$, $\hat{f}_3$, …, для которой

$$\hat{f}_n = \sum_{m=1}^{\infty} c_{n,m} f_m \quad \textit{и} \quad c_{n,m} =$$

$$= \sigma \mu\left(\frac{n}{(n,m)}\right) \mu\left(\frac{m}{(n,m)}\right) g([n,m])^{-1} \prod_{p/b_{n,m}} (1 + g(p)^{-1}),$$

образует с ней биортогональную пару, т.е.

$$(\hat{f}_n, f_m) = \delta_n^m, \quad \textit{где} \quad \delta_n^m = \begin{cases} 1, \textit{ если } n = m, \\ 0, \textit{ если } n \neq m. \end{cases}$$

Здесь, как и выше, $b_{n,m}$ — произведение всех простых чисел, входящих в n и m в одинаковой степени. Построение последовательности $\hat{f}_n$ по f_n важно ввиду (13), так как, умножая (13) на $\hat{f}_m$, получим

$$\Lambda(m)|\omega(m)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \log k\omega(k)(\alpha_k, \hat{f}_m). \qquad (18)$$

Отсюда видно, какую важную роль играет определение асимптотики $\sum\limits_{k=1}^{N} |\omega(k)|^{-2}\hat{f}_k$ в случае конкретных функциональных интерпретаций H для выяснения закона распределения простых чисел.

§ 4

Выше был указан способ получения ортонормированных последовательностей $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ из заданной ортонормированной последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, основанный на применении к $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ преобразования при помощи унитарной матрицы

$$C_\omega = \|c_{ik}\|,\ c_{ik} = \frac{\omega(k)}{\sqrt{\sigma\Omega(i)}} \sum_{d/(i,k)} \mu\left(\frac{i}{d}\right) |\omega(d)|^{-2},$$

$$\omega(ab) = \omega(a)\omega(b),\ \omega(n) \neq 0\ (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} |\omega(k)|^2 < \infty,\ \Omega(n) = |\omega(n)|^{-2} \prod_{p/n} (1 - |\omega(p)|^2).$$

Если бы удалось доказать чисто алгебраически факт унитарности матрицы с элементами $c_{ik} = \frac{\omega(k)}{\sqrt{\sigma\Omega(i)}} \sum\limits_{d/(i,k)} \mu\left(\frac{i}{d}\right) |\omega(d)|^{-2}$, тогда ортонормированность $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ была бы прямым следствием известного факта: преобразование последовательностей H при помощи унитарной матрицы переводит ортонормированную последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ в ортонормированную и полную для того подпространства H' из H, для которого полна последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$.

Из двух соотношений унитарности $C_\omega C_\omega^* = E,\ C_\omega^* C_\omega = E$ удается просто доказать только первое из них чисто алгебраически — арифметическим образом, минуя топологические моменты теории гильбертова пространства. Определим $\mu(u)$ как равную нулю при u

нецелом и как функцию Мёбиуса на множестве целых значений u. Определим, далее, e_{ik} по формуле

$$e_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ если } i \text{ делится на } k, \\ 0, \text{ если } i \text{ не делится на } k. \end{cases}$$

Пусть операция *, примененная к любой матрице $\|z_{ik}\|$, переводит её в $\|z^*_{ik}\|$, где $z^*_{ik} = \overline{z}_{ki}$.

Матрицу $B = \|b_{ik}\|$ будем называть *обладающей Δ_g-свойством,* если $b_{ik} = g((i,k))$, где $g(n)$ — данная функция целого аргумента. Если, сверх того, существует такая матрица X, что $B = XX^*$, то матрицу B назовем *обладающей D_g-свойством.*

Предположив, что

$$G(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) > 0 \ (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

введем матрицу $M = \|m_{ik}\|$, где $m_{ik} = G(i)^{-\frac{1}{2}} \mu\left(\frac{i}{k}\right)$, и матрицу $A = \|a_{ik}\|$, где $a_{ik} = e_{ik}\sqrt{G(k)}$. Очевидно, $MA = E$, так как

$$\sum_{s=1}^{\infty} m_{is} a_{sk} = G(i)^{-\frac{1}{2}} G(k)^{-\frac{1}{2}} \sum_{s=1}^{\infty} \mu\left(\frac{i}{s}\right) e_{sk} = G(i)^{-\frac{1}{2}} G(k)^{-\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \sum_{d/i} \mu\left(\frac{i}{d}\right) e_{dk} = G(i)^{-\frac{1}{2}} G(k)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{d/i \\ d \equiv 0 \pmod{k}}} \mu\left(\frac{i}{d}\right) = \delta^i_k.$$

Здесь сумма $\sum\limits_{\substack{d/i \\ d \equiv 0 \pmod{k}}} \mu\left(\frac{i}{d}\right)$ равна нулю как пустая при i, не делящемся на k, и равна $\sum\limits_{d'/i'} \mu\left(\frac{i'}{d'}\right)$, если i делится на k, где $i' = \frac{i}{k}$, т.е. опять-таки равна нулю, если $\frac{i}{k} > 1$, и только при $i = k$ равна единице.

Как всюду, здесь δ_i^k — символ Кронекера, т.е.

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1, \text{ если } i = k, \\ 0, \text{ если } i \neq k. \end{cases}$$

Далее, $AM = E$, так как $\sum\limits_{s=1}^{\infty} a_{is} m_{sk} = \sum\limits_{d/i} \mu\left(\frac{d}{k}\right)$, где $\sum\limits_{d/i} \mu\left(\frac{d}{k}\right) = \delta_{i'}^k$, $i' = \frac{i}{k}$, если i делится на k, и пуста, если i не делится на k.

В дальнейшем предполагается, что $g(u)$ такова, что все приводимые перемножения строк и столбцов сходятся абсолютно.

Имеем

$$AA^* = B, \quad MBM^* = E.$$

В самом деле,

$$(AA^*)_{ik} = \sum_{s=1}^{\infty} e_{is} e_{ks} G(s) = \sum_{d/(i,k)} G(d) = g((i,k)) = b_{ik}.$$

Умножая $AA^* = B$ слева на M и справа на M^* и учитывая, что $MA = A^*M^* = E$, имеем

$$MBM^* = MAA^*M^* = MA(MA)^* = E.$$

Равенство $AA^* = B$ показывает, что если $G(n) = \sum\limits_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) > 0$, то матрица B, обладающая Δ_g-свойством, будет обладать и D_g-свойством.

Далее, всякое разложение $B = XX^*$ (X — матрица со сходящейся суммой квадратов модулей элементов любой из строк) даёт

$$MBM^* = MXX^*M^* = MX(MX)^* = E.$$

Таким образом, для MX одно из условий унитарности выполнено — строки её образуют систему ортонормированных векторов.

Отсюда видно, что всякое разложение матрицы B, обладающей D_g-свойством, вида $B = XX^*$ важно для построения унитарных матриц, так как оно даёт матрицу $U = MX$, для которой одно из условий унитарности $UU^* = E$ выполнено. Очевидно, что если X даёт такое разложение, то XV (V — любая унитарная матрица) также даёт такое разложение, так как $XV(XV)^* = XVV^*X^* = XX^* = B$. Одно из разложений дано выше: $B = AA^*$, но оно не интересно, так как приводит нас к совершенно тривиальному факту унитарности единичной матрицы E.

Если $g(n) > 0$ обладает свойством

$$g(ab) = g(a)g(b), \quad \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)^{-1} < \infty,$$

то можно указать нетривиальное разложение указанного свойства, взяв

$$x_{ik} = \frac{g(i)}{\sqrt{\sigma}} e_{ki}\omega(k),$$

где $\omega(k)$ такова, что $|\omega(n)|^{-2} = g(n)$, $\omega(ab) = \omega(a)\omega(b)$.

В самом деле,

$$(XX^*)_{ik} = \sum_{s=1}^{\infty} x_{is}\overline{x}_{ks} = \frac{g(i)g(k)}{\sigma} \sum_{s=1}^{\infty} e_{si}e_{sk}|\omega(s)|^2 =$$

$$= \frac{g(i)g(k)}{\sigma} \sum_{s\equiv 0 \pmod{[(n,m)]}} g(s)^{-1} = g(i)g(k)g([i,k])^{-1} = g((i,k)) = b_{ik}$$

или $XX^* = B$.

Очевидно, что элементы MX будут

$$(MX)_{ik} = \frac{\omega(k)}{\sqrt{\sigma\Omega(i)}} \sum_{d/(i,k)} \mu\left(\frac{i}{d}\right) g(d), \quad \Omega(i) = G(i).$$

Чисто арифметически-алгебраическое доказательство соотношения $(MX)^*MX = E$ (ортонормированность столбцов) возможно, но оно значительно сложнее. Обозначая MX через C_ω, рассмотрим произведение $C^*_{\omega_1}C_\omega$, где $\omega(n)$ и $\omega_1(n)$ — любые нигде не равные нулю мультипликативные функции со сходящейся суммой квадратов модулей. Элементы C_ω обозначим c_{ik}, а элементы C_{ω_1} — через c'_{ik}. Элемент i-й строки и k-го столбца матрицы $C^*_{\omega_1}C_\omega$ обозначим p_{ik}.

Имеем
$$p_{ik} = \sum_{s=1}^{\infty} c'_{si}c_{sk}.$$

Необходимо доказать, что при $\omega_1(n) = \omega(n)$, $p_{ik} = \delta_i^k$, где
$$\delta_i^k = \begin{cases} 1, \text{ если } i = k, \\ 0, \text{ если } i \neq k \end{cases} \quad \text{(символ Кронекера).}$$

Самый общий способ задания мультипликативной функции $\omega(n)$ состоит в произвольном задании значений $\omega(p)$ (p — любое простое число) и в определении.

Если $g(n) > 0$ обладает свойством
$$\omega(n) = \omega(p_1)^{\alpha_1}\omega(p_2)^{\alpha_2}\ldots\omega(p_\nu)^{\alpha_\nu} \text{ для } n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_\nu^{\alpha_\nu},$$

а самый общий способ задания $\omega(n)$ со сходящейся суммой квадратов модулей состоит в том, что к указанному определению добавляют еще условия
$$|\omega(p_i)| < 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\omega(p_i)|^2 < \infty$$
($p_1, p_2, p_3, \ldots$ — последовательность всех простых чисел). В пределах этих ограничений $u_i = \omega(p_i)$ и $v_i = \omega_1(p_i)$ являются произвольными

комплексными числами, а все p_{ik} — функциями от произвольных переменных $u_1, u_2, u_3, \ldots$ и $v_1, v_2, v_3, \ldots$, удовлетворяющих условиям

$$|u_i| < 1, \quad |v_i| < 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |v_i|^2 < \infty.$$

Далее

$$p_{ik} = \frac{\overline{\omega_1(i)}\omega(k)}{\sqrt{\sigma\sigma_1}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\Omega(s)\Omega_1(s)}} \sum_{d/(i,s)} \mu\left(\frac{s}{d}\right) |\omega_1(d)|^{-2} \times$$
$$\times \sum_{d/(k,s)} \mu\left(\frac{s}{d}\right) |\omega(d)|^{-2}.$$

Выражение

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{\Omega(s)\Omega_1(s)}} \sum_{d/(i,s)} \mu\left(\frac{s}{d}\right) |\omega_1(d)|^{-2} \sum_{d/(k,s)} \mu\left(\frac{s}{d}\right) |\omega(d)|^{-2}$$

представляет узкомультипликативную функцию от s, т.е. $f(ab) = f(a)f(b)$, если $(a, b) = 1$. Для узкомультипликативной функции $f(n)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 + f(p) + f(p^2) + \ldots),$$

где произведение справа распространено на все простые числа [37, с. 25].

Полагая $i = i'p^{\alpha_1}$, $k = k'p^{\alpha_2}$, $(i', p) = (k', p) = 1$, имеем

$$f(p^\beta) = |\omega(p)|^\beta |\omega_1(p)|^\beta (1 - |\omega(p)|^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - |\omega_1(p)|^2)^{-\frac{1}{2}} \Sigma_1 \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{z=0}^{min(\beta,\alpha_1)} \mu(p^{\beta-z}|\omega_1(p)|^{-2z} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } \beta > \alpha_1 + 1, \\ -|\omega_1(p)|^{-2(\beta-1)}, \text{ если } \beta = \alpha_1 + 1, \\ |\omega_1(p)|^{-2\beta} - |\omega_1(p)|^{-2(\beta-1)}, \text{ если } \beta \le \alpha_1, \end{cases}$$

и аналогично

$$\Sigma_2 = \sum_{z=0}^{\min(\beta,\alpha_2)} \mu(p^{\beta-z}|\omega(p)|^{-2z} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } \beta > \alpha_2 + 1, \\ -|\omega(p)|^{-2(\beta-1)}, \text{ если } \beta = \alpha_2 + 1, \\ |\omega(p)|^{-2\beta} - |\omega(p)|^{-2(\beta-1)}, \text{ если } \beta \le \alpha_2. \end{cases}$$

Далее

$$a(p) = a(i,k,p) = 1 + \sum_{\beta=1}^{\infty} f(p^\beta) = 1 + \sum_{\beta=1}^{1+\min(\alpha_1,\alpha_2)} f(p^\beta) =$$

$$= \begin{cases} 1 + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\left\{\frac{1-(xy)^\alpha}{1-xy} + \frac{(xy)^\alpha)}{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \\ 1 + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\left\{\frac{1-(xy)^{\alpha_1}}{1-xy} + \frac{(xy)^{\alpha_1}}{1-y^2}\right\}, \text{ если } \alpha_1 < \alpha_2, \\ 1 + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\left\{\frac{1-(xy)^{\alpha_2}}{1-xy} + \frac{(xy)^{\alpha_2}}{1-x^2}\right\}, \text{ если } \alpha_1 > \alpha_2, \end{cases}$$

где

$$x = |\omega(p)|^{-1}, \quad y = |\omega_1(p)|^{-1}.$$

Очевидно,

$$\sum_{s=1}^{\infty} f(s) = \prod_p a(p),$$

где произведение справа распространено на все простые числа.

Полагая

$$b(p) = x^{-1}y^{-1}\eta^{-\alpha_1}\xi^{-\alpha_2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(y^2-1)^{\frac{1}{2}}a(p)$$

$$(\xi = \omega(p)^{-1} = u^{-1};\ \ \eta = \omega_1(p)^{-1} = v^{-1}),$$

получим

$$p_{ik} = \prod_p b(p).$$

После элементарных выкладок имеем

$$b(p) = \begin{cases} e^{i(\vartheta-\vartheta')\alpha}\left\{1 - \dfrac{(x-y)^2}{xy(xy-1)}\left(1 - \dfrac{(xy)^{-\alpha}}{1+\frac{xy-1}{\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}}}\right)\right\}, \\ \hfill \text{если } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \\ e^{i(\vartheta\alpha_1-\vartheta'\alpha_2)}\left\{(x^2-1)x^{\alpha_1-\alpha_2}y + \dfrac{(y-x)x^{-\alpha_2}y^{-\alpha_1}}{1+\frac{xy-1}{\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}}}\right\}\times \\ \hfill \times\dfrac{x-y}{xy(xy-1)}, \text{если } \alpha_1 < \alpha_2, \\ e^{i(\vartheta\alpha_1-\vartheta'\alpha_2)}\left\{(y^2-1)y^{\alpha_2-\alpha_1}x + \dfrac{(x-y)x^{-\alpha_2}y^{-\alpha_1}}{1+\frac{xy-1}{\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}}}\right\}\times \\ \hfill \times\dfrac{x-y}{xy(xy-1)}, \text{если } \alpha_2 < \alpha_1, \end{cases} \tag{19}$$

где

$$\vartheta = \arg\eta,\ \vartheta' = \arg\xi,\ y = |\eta|,\ x = |\xi|,\ \eta = \omega_1(p)^{-1},\ \xi = \omega(p)^{-1}$$

и $\alpha_1,\ \alpha_2$ — показатели степеней, с которыми p входит в i и k соответственно: $i = i'p^{\alpha_1}$, $k = k'p^{\alpha_2}$, $(i', p) = (k', p) = 1$.

В частности, если $(i, p) = 1$, то $\alpha_1 = 0$.

Зависимость x, y, ξ, η, ϑ, ϑ', α_1, α_2 от p мы не включаем в обозначения.

Из предыдущих выражений для $b(p)$ легко видеть, что при $x = y$

$$b(p) = \begin{cases} 1, \text{ если } \alpha_1 = \alpha_2, \\ 0, \text{ если } \alpha_1 \neq \alpha_2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что если $\omega_1(p) = \omega(p)$ для всех p, то

$$p_{ik} = \prod_p \delta_{\alpha_2(p)}^{\alpha_1(p)} = \delta_k^i \quad (\delta_k^i \text{ — символ Кронекера}),$$

так как очевидно, что если $i = k$, то $\alpha_1(p) = \alpha_2(p)$ для всех простых чисел p и все множители бесконечного произведения $\prod\limits_p b(p)$ равны единице, а если $i \neq k$, то по крайней мере для одного p имеем $\alpha_1(p) \neq \alpha_2(p)$ и потому по крайней мере один из сомножителей указанного произведения равен нулю.

Таким образом, $C_\omega^* C_\omega = E$, и унитарность C_ω доказана.

Остановимся на том случае, когда $\omega(n) > 0$, $\omega_1(n) > 0$. Тогда $\vartheta = \vartheta' = 0$ для всякого p. Легко видеть из (19), что в этом случае

$$\lim_{y \to x} \frac{b(p) - \delta_{\alpha_1}^{\alpha_2}}{y - x} = \left(\frac{\partial b(p)}{\partial y} \right)_{y = x} = \begin{cases} 0, \text{ если } \alpha_1 = \alpha_2, \\ x^{\alpha_1 - \alpha_2 - 1}, \text{ если } \alpha_1 < \alpha_2, \\ -x^{\alpha_2 - \alpha_1 - 1}, \text{ если } \alpha_1 > \alpha_2, \end{cases}$$

или

$$\left(\frac{\partial b(p)}{\partial (\omega_1(p))^{-1}} \right)_{\omega(p) = \omega_1(p)} = \operatorname{sgn}(\alpha_1 - \alpha_2) \omega(p)^{|\alpha_1 - \alpha_2| - 1},$$

где $\operatorname{sgn} 0 = 0$, $\operatorname{sgn} u = 1$, если $u > 0$, $\operatorname{sgn} u = -1$, если $u < 0$.

Формула

$$\left(\frac{\partial b(p)}{\partial \omega_1(p)} \right)_{\omega_1(p) = \omega(p)} = \operatorname{sgn}(\alpha_1 - \alpha_2) \omega(p)^{|\alpha_1 - \alpha_2| - 1} \tag{20}$$

и формулы

$$p_{ik} = \prod_p b(p), \quad \lim_{\omega_1(p)\to\omega(p)} b(p) = \delta_{\alpha_2}^{\alpha_1}$$

дают

$$\left(\frac{\partial p_{ik}}{\partial \omega_1(P)}\right)_{\omega_1(n)=\omega(n)} = \operatorname{sgn}(\alpha_1 - \alpha_2)\omega(P)^{|\alpha_1-\alpha_2|-1},$$

если i и k таковы, что $\alpha_1(p) = \alpha_2(p)$ для всех p, отличных от P, и

$$\left(\frac{\partial p_{ik}}{\partial \omega_1(P)}\right)_{\omega_1(n)=\omega(n)} = 0,$$

если $\alpha_1(p) \neq \alpha_2(p)$ по крайней мере для одного p, отличного от P. Здесь P — любое заданное простое число. Символ $\left(\frac{\partial p_{ik}}{\partial \omega_1(P)}\right)_{\omega_1(n)=\omega(n)}$ понимается таким образом, что в выражении $\frac{\partial p_{ik}}{\partial \omega_1(P)}$, зависящем от $\omega(p_1), \omega(p_2), \omega(p_3), \ldots$ и $\omega_1(p_1), \omega_1(p_2), \omega_1(p_3), \ldots$, где $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — последовательность всех простых чисел, полагаем $\omega_1(p_r) = \omega(p_r)$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$.

Полагая

$$h_{ik} = h_{ik}(\omega(P)) = \operatorname{sgn}(\alpha_2 - \alpha_1)\omega(P)^{|\alpha_1-\alpha_2|-1}$$

в случае, если $\lim\limits_{z\to\infty}(i, p^z) = \lim\limits_{z\to\infty}(k, p^z)$ для всех p, отличных от P, и $h_{ik} = 0$, когда по крайней мере для одного p, не равного P,
$\lim\limits_{z\to\infty}(i, p^z) \neq \lim\limits_{z\to\infty}(k, p^z)$ и, вводя обозначения $H_p = \|h_{ik}(p)\|$, имеем

$$C^*_{\omega+\delta\omega} C_\omega = E - \delta\omega(P) H_P + (\delta\omega(P))^2 H_P + \ldots = C^{-1}_{\omega+\delta\omega} C_\omega,$$

где $\omega + \delta\omega$ — мультипликативная функция, получаемая из $\omega(n)$, если её значения во всех простых числах задать как у $\omega(n)$, а в точке P изменить на $\delta\omega(P)$. Отсюда

$$C_\omega = C_{\omega+\delta\omega} - \delta\omega(P) C_\omega H_P + \ldots$$

или

$$\frac{\partial C_\omega}{\partial \omega(p)} = C_\omega H_p. \tag{21}$$

Таким образом, матрица C_ω представляет собой решение бесконечной системы дифференциальных уравнений (21), в которой любому простому числу p соответствует определённое уравнение. Очевидно также, что матрица

$$T_{\omega_1,\omega} = C^*_{\omega_1} C_\omega = C^{-1}_{\omega_1} C_\omega,$$

как функция параметров $u_i = \omega(p_i)$, $v_i = \omega_1(p_i)$, удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial T}{\partial u_i} = T H_{p_i} \tag{22}$$

с граничными условиями: $T = E$ при $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $\ldots$.

Итак, имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 10. *Если $u_1, u_2, u_3, \ldots$ и $v_1, v_2, v_3, \ldots$ — две любые числовые последовательности, удовлетворяющие условиям*

$$0 < u_i < 1,\ 0 < v_i < 1,\ \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 < \infty,\ \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2 < \infty,$$

и если $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — последовательность всех простых чисел, то матрица $T = \|t_{ik}\|$, где $t_{ik} = \Pi'_{ik}\Pi''_{ik}\Pi'''_{ik}$,

$$\Pi'_{ik} = \prod_{\nu=1}^{\infty}{}' \left[1 - \frac{(u_\nu - v_\nu)^2}{1 - u_\nu v_\nu} \left(1 - \frac{(u_\nu v_\nu)^{\alpha_\nu^{(i)}}}{1 + \frac{1 - u_\nu v_\nu}{\sqrt{(1-u_\nu^2)(1-v_\nu^2)}}}\right)\right],$$

$$\Pi''_{ik} = \prod_{\nu=1}^{\infty}{}'' \frac{u_\nu - v_\nu}{1 - u_\nu v_\nu} \left[(1 - u_\nu^2) u_\nu^{\alpha_\nu^{(k)} - \alpha_\nu^{(i)} - 1} + \frac{(u_\nu - v_\nu) u_\nu^{\alpha_\nu^{(k)}} v_\nu^{\alpha_\nu^{(i)}}}{1 + \frac{1 - u_\nu v_\nu}{\sqrt{(1-u_\nu^2)(1-v_\nu^2)}}}\right],$$

$$\Pi'''_{ik} = \prod_{\nu=1}^{\infty}{}''' \frac{v_\nu - u_\nu}{1 - u_\nu v_\nu} \left[(1 - v_\nu^2) v_\nu^{\alpha_\nu^{(i)} - \alpha_\nu^{(k)} - 1} + \frac{(v_\nu - u_\nu) u_\nu^{\alpha_\nu^{(k)}} v_\nu^{\alpha_\nu^{(i)}}}{1 + \frac{1 - u_\nu v_\nu}{\sqrt{(1-u_\nu^2)(1-v_\nu^2)}}}\right],$$

причем $\alpha_\nu^{(i)}, \alpha_\nu^{(k)}$ *определены формулами*

$$p_\nu^{\alpha_\nu^{(i)}} = \lim_{z\to\infty}(p_\nu^z, i), \quad p_\nu^{\alpha_\nu^{(k)}} = \lim_{z\to\infty}(p_\nu^z, k)$$

и Π' *означает, что произведение распространено на те значения* ν, *для которых* $\alpha_\nu^{(i)} = \alpha_\nu^{(k)}$, Π'' *и* Π''' *означают, что* ν *пробегает те значения, при которых* $\alpha_\nu^{(i)} < \alpha_\nu^{(k)}$, $\alpha_\nu^{(i)} > \alpha_\nu^{(k)}$ *соответственно, — будет ортогональной.*

Если положить $\omega(p_\nu) = u_\nu$, $\omega_1(p_\nu) = v_\nu$, *то*

$$T = C_{\omega_1}^{-1} C_\omega.$$

Кроме того, матрица T *удовлетворяет системе уравнений*

$$\frac{\partial T}{\partial u_r} = TH_{p_r} \ (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

и обращается в единичную матрицу при $u_r = v_r$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$.

Той же системе уравнений удовлетворяет C_ω, *если* $\omega(p_r) = u_r$. *Здесь*

$$H_{p_r} = \|h_{ik}^{p_r}\|,$$

где

$$h_{ik}^{(p_r)} = 0,$$

если $\alpha_\nu^{(i)} = \alpha_\nu^{(k)}$, *по крайней мере для одного* ν, *отличного от* r, *и*

$$h_{ik}^{(p_r)} = \operatorname{sgn}(\alpha_r^{(k)} - \alpha_r^{(i)}) u_r^{|\alpha_r^{(i)} - \alpha_r^{(k)}| - 1},$$

если $\alpha_\nu^{(i)} = \alpha_\nu^{(k)}$ *для всех* $\nu \neq r$.

Совершенно так же, считая $\omega(n)$ и $\omega_1(n)$ положительными, имеем

$$C_\omega C_{\omega_1}^* = \|q_{ik}\|,$$

где

$$q_{ik} = \sum_{s=1}^{\infty} c_{is} c'_{ks},$$

причём

$$c_{ik} = \frac{\omega(k)}{\sqrt{\sigma\Omega(i)}} \sum_{d/(i,k)} \mu\left(\frac{i}{d}\right) \omega(d)^{-2},$$

$$c'_{ik} = \frac{\omega_1(k)}{\sqrt{\sigma_1\Omega_1(i)}} \sum_{d/(i,k)} \mu\left(\frac{i}{d}\right) \omega_1(d)^{-2},$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)^2, \quad \sigma_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_1(k)^2,$$

$$\Omega(n) = \omega(n)^{-2} \prod_{p/n} (1 - \omega(p)^2), \quad \Omega_1(n) = \omega_1(n)^{-2} \prod_{p/n} (1 - \omega_1(p)^2)$$

и, далее,

$$q_{ik} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma\sigma_1\Omega(i)\Omega_1(k)}} \sum_{d/i} \sum_{\delta/k} \mu\left(\frac{i}{d}\right) \mu\left(\frac{k}{\delta}\right) \frac{\omega_1}{\omega}(d) \frac{\omega}{\omega_1}(\delta) \omega\omega_1((d,\delta))^{-1},$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)\omega_1(k), \quad \frac{\omega}{\omega_1}(n) = \frac{\omega(n)}{\omega_1(n)}, \quad \frac{\omega_1}{\omega}(n) = \frac{\omega_1(n)}{\omega(n)},$$

$$\omega\omega_1(n) = \omega(n)\omega_1(n).$$

Замечая, что

$$\Phi(m,n) = \sum_{d/m} \sum_{\delta/n} \mu\left(\frac{m}{d}\right) \mu\left(\frac{n}{\delta}\right) \frac{\omega_1}{\omega}(d) \frac{\omega}{\omega_1}(\delta) \omega\omega_1((d,\delta))^{-1}$$

обладает свойством $\Phi(m_1 m_2, n_1 n_2) = \Phi(m_1, n_1)\Phi(m_2, n_2)$, если $(m_1, m_2) = (n_1, n_2) = (m_1, n_2) = (m_2, n_1) = 1$, мы видим, что для вычисления $\Phi(m,n)$ достаточно вычислить $\Phi(p^\alpha, p^\beta)$ для случаев $\alpha > 0$, $\beta > 0$; $\alpha = 0$, $\beta > 0$; $\alpha > 0$, $\beta = 0$; $\alpha = \beta = 0$, где p — простое число, так как

$$\Phi(m,n) = \Phi(p_1^{\alpha_1}, p_1^{\beta_1}) \Phi(p_2^{\alpha_2}, p_2^{\beta_2}) \cdot \ldots \cdot \Phi(p_\nu^{\alpha_\nu}, p_\nu^{\beta_\nu}),$$

если $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_\nu^{\alpha_\nu}$, $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_\nu^{\beta_\nu}$, $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \ldots, \alpha_\nu \geq 0$, $\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \ldots, \beta_\nu \geq 0$.

Соответствующие вычисления дают

$$q_{ik} = \prod_p b^*(p),$$

где

$$b^*(p) = \begin{cases} 1 - \frac{(x-y)^2}{(xy-1)[xy-1+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}]}, \text{ если } \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \\ 1 - \frac{(x-y)^2}{xy-1}, \text{ если } \alpha_1 = \alpha_2 > 0, \\ \frac{x-y}{xy-1} y^{-\alpha_1} \sqrt{y^2-1}, \text{ если } \alpha_1 > \alpha_2 = 0, \\ \frac{y-x}{xy-1} x^{-\alpha_2} \sqrt{x^2-1}, \text{ если } \alpha_2 > \alpha_1 = 0, \\ \frac{y-x}{xy-1} x^{-(\alpha_2-\alpha_1)-1}(x^2-1), \text{ если } \alpha_2 > \alpha_1 > 0, \\ \frac{x-y}{xy-1} y^{-(\alpha_1-\alpha_2)-1}(y^2-1), \text{ если } \alpha_1 > \alpha_2 > 0, \end{cases} \qquad (23)$$

где

$$x = \omega(p)^{-1}, \quad y = \omega_1(p)^{-1}, \quad p^{\alpha_1} = \lim_{z\to\infty}(p^z, i), \quad p^{\alpha_2} = \lim_{z\to\infty}(p^z, k).$$

Формулы (22) показывают, что если $\omega(p_i)$ положить равным произвольным функциям некоторого параметра t, то

$$C'_\omega = \frac{d}{dt} C_\omega = C_\omega H,$$

где

$$H = \varkappa_1 H_{p_1} + \varkappa_2 H_{p_2} + \varkappa_3 H_{p_3} + \ldots, \quad \varkappa_i = \frac{d\omega(p_i, t)}{dt},$$

и H_{p_ν} — матрицы указанного выше вида, соответствующие различным простым числам p_ν. Так как матрица H имеет нули всюду, кроме элементов с номерами i, k (i и k отличаются по составу простых делителей на одно простое число), то в силу того, что $C_\omega^* C'_\omega = H$, имеем $\sum\limits_{s=1}^{\infty} c_{si} \frac{d}{dt} c_{sk} = 0$ во всех случаях, кроме того, когда

$$\lim_{z\to\infty} (p^z, i) = \lim_{z\to\infty} (p^z, k)$$

верно для всех простых чисел p, кроме одного. Эти своеобразные соотношения ортогональности ведут, в свою очередь, к новым арифметическим тождествам.

Так же, как и выше, можно вычислить, пользуясь (23),

$$\lim_{y\to\infty} \frac{b^*(p) - \delta_{\alpha_1}^{\alpha_2}}{y - x} = \left(\frac{\partial b^*(p)}{\partial y}\right)_{y=x}.$$

Здесь

$$b^*(p) = \begin{cases} 0, \text{ если } \alpha_1 = \alpha_2, \\ x^{-(\alpha_2-\alpha_1)-1}, \text{ если } \alpha_2 > \alpha_1 > 0, \\ -x^{-(\alpha_1-\alpha_2)-1}, \text{ если } \alpha_1 > \alpha_2 > 0, \\ \frac{x^{-\alpha_2}}{\sqrt{x^2-1}}, \text{ если } \alpha_2 > \alpha_1 = 0, \\ \frac{x^{-\alpha_1}}{\sqrt{x^2-1}}, \text{ если } \alpha_1 > \alpha_2 = 0, \end{cases}$$

или

$$\left(\frac{\partial b^*(p)}{\partial y}\right)_{y=x} = \operatorname{sgn}(\alpha_2 - \alpha_1) x^{-|\alpha_1-\alpha_2|-1} \text{ в случае } \alpha_1\alpha_2 \neq 0$$

и

$$\left(\frac{\partial b^*(p)}{\partial y}\right)_{y=x} = \operatorname{sgn}(\alpha_2 - \alpha_1) \frac{x^{-|\alpha_1-\alpha_2|-1}}{\sqrt{x^2-1}} \text{ в случае } \alpha_1\alpha_2 = 0.$$

Аналогично предыдущему

$$C_\omega C_{\omega+\delta\omega}^{-1} = C_\omega C_{\omega+\delta\omega}^* = E - \hat{H}_p \delta\omega(p) + \hat{H}_p (\delta\omega(p))^2 + \ldots,$$

где матрица $\hat{H}_p = \|\hat{h}_{ik}^{(p)}\|$ имеет элементы $\hat{h}_{ik}^{(p)} = 0$, если $\lim\limits_{z\to\infty}(q^z, i) = \lim\limits_{z\to\infty}(q^z, k)$, по крайней мере, для одного простого числа q, отличного от p, и

$$\hat{h}_{ik}^{(p)} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\alpha_1 - \alpha_2)\omega(p)^{|\alpha_1-\alpha_2|-1} & \text{при } \alpha_1\alpha_2 \neq 0, \\ \operatorname{sgn}(\alpha_1 - \alpha_2)\frac{\omega(p)^{|\alpha_1-\alpha_2|-1}}{\sqrt{1-\omega(p)^2}} & \text{при } \alpha_1\alpha_2 = 0, \end{cases}$$

когда $\lim\limits_{z\to\infty}(q^z, i) = \lim\limits_{z\to\infty}(q^z, k)$ для всех q, отличных от p. Очевидно, что $\frac{\partial C_\omega}{\partial \omega(p)} = \hat{H}_p C_\omega$, откуда следует

$$C_\omega H_p = \hat{H}_p C_\omega.$$

Далее аналогично предыдущему видим, что если положить $\omega(p) = \omega(p, t)$ равным некоторым функциям параметра t, то

$$\frac{dC_\omega}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} H_{p_i}\frac{d}{dt}\omega(p_i, t)C_\omega,$$

откуда

$$\sum_{s=1}^{\infty} c_{is}\frac{d}{dt}c_{ks} = \begin{cases} 0, \\ \operatorname{sgn}(\alpha_1 - \alpha_2)\omega(q)^{|\alpha_1-\alpha_2|-1}\frac{d\omega(q)}{dt}, \\ \operatorname{sgn}(\alpha_1 - \alpha_2)\frac{\omega(q)^{|\alpha_1-\alpha_2|-1}}{\sqrt{1-\omega(q)^2}} \cdot \frac{d\omega(q)}{dt}, \end{cases} \tag{24}$$

где первое равенство имеет место, если по крайней мере для двух различных простых чисел $\lim\limits_{z\to\infty}(p^z, i) \neq \lim\limits_{z\to\infty}(p^z, k)$, второе и третье равенства верны, когда соотношение $\lim\limits_{z\to\infty}(p^z, i) \neq \lim\limits_{z\to\infty}(p^z, k)$ осуществляется ровно для одного простого числа q, второе равенство верно, если $\lim\limits_{z\to\infty}(q^z, i) = q^{\alpha_1} > 1$, $\lim\limits_{z\to\infty}(q^z, k) = q^{\alpha_2} > 1$ и третье — в противном случае.

Для получения конкретных арифметических тождеств нужно в формулах (7) — (11) конкретизировать последовательности

$a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$. При этом важно разработать приёмы, позволяющие из $a_1, a_2, a_3, \ldots$ получить

$$a'_n = n^{\frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{s}{2}} a_{kn}, \quad A_n = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a'_d.$$

Тогда равенство (9) приобретает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \zeta(s)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_s(n)^{-1} A_n B_n,$$

где B_n имеет то же отношение к b_n, какое имеет A_n к a_n.

Ниже приведена таблица соответствующих значений a_n, a'_n, A_n.

Подставляя эти данные в соотношение (9), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) x^n =$$

$$= -\zeta(s)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)} \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_{p/n} \frac{\log p}{1 - p^{-s}} \right) \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{d^s x^d}{1 - x^d}, \quad (25)$$

$$(|x| < 1, s > 1).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{z-s} F_{s-z}(x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n, s-z) x^n =$$

$$= -\zeta(s)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)} \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_{p/n} \frac{\log p}{1 - p^{-s}} \right) \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{d^s x^d}{1 - x^d} \quad (26)$$

$$\left(|x| < 1, \quad \Lambda(n, u) = \frac{1}{n^u} \sum_{d/n} \Lambda(d) \varphi_u\left(\frac{n}{d}\right), \quad s > 1 \right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{1-s} F_{s-1}(x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n, s-1) x^n =$$

$$= -\zeta(s)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)} \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_{p/n} \frac{\log p}{1-p^{-s}} \right) \frac{x P_n'(x)}{P_n(x)}, \qquad (27)$$

где

$$P_n(x) = \sum_{d/n} (1 - x^d)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)} \text{ — полином деления круга,}$$

N	a_n	a_n'	A_n
1	$n^{-\frac{z}{2}}$ $Re(z) < 1$	$n^{\frac{s-z}{2}} \zeta(\frac{s+z}{2})$	$\varphi_{\frac{s-z}{2}}(n) \zeta(\frac{s+z}{2})$
2	$\Lambda(n) n^{-\frac{z}{2}}$ $Re(z) > 1$	$a_1' = -\frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{s+z}{2}\right)$ $a_n' = 0$, если $\Lambda(n) = 0$, $n > 1$, $a_n' = \log p \frac{p^{-\frac{\beta z}{2}}}{1-p^{-\frac{s+z}{2}}}$, если $n = p^{\beta}$	$A_n = -\mu(n) \left(\frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{s+z}{2}\right) + \right.$ $\left. + \sum_{p/n} p^{-\frac{s-z}{2}} \frac{\log p}{1-p^{-\frac{s+z}{2}}} \right)$, если $\mu(n) \neq 0$, $A_n = -\mu(\frac{n}{q^{\alpha}}) \times$ $\times \frac{q^{(\alpha-1)\frac{s-z}{2}} - q^{\alpha \frac{s-z}{2}}}{1-q^{\frac{s+z}{2}}} - \log q$, если $\mu\left(\frac{n}{q^{\alpha}}\right) \neq 0$, $\left(\frac{n}{q}, q\right) = 1$, $\alpha > 1$, q — простое число. $A_n = 0$ во всех остальных случаях

3	$n^{\frac{s}{2}}z^n,$ $\|z\|<1$	$n^s\frac{z^n}{1-z^n}$	$\sum\limits_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)d^s\frac{z^d}{1-z^d}$
4	$n^{\frac{s}{2}-1}z^n,$ $\|z\|<1$	$-n^{s-1}\log\left(1-z^n\right)$	$\sum\limits_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\times$ $\times d^s\log\left(1-z^d\right)$
5	$\Lambda(n)n^{-\frac{s}{2}}$	$a_1'=-\frac{\zeta'}{\zeta}\left(s\right)$ $a_n'=0,$ если $\Lambda(n)=0,$ $n>1,$ $a_n'=\log p\frac{p^{-\frac{\beta s}{2}}}{1-p^{-s}},$	$A_n=-\mu(n)\times$ $\times\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)+\sum\limits_{p/n}\frac{\log p}{1-p^{-s}}\right)$
6	$n^{-\frac{s}{2}+z}\times$ $\times F_{s-z}(x^n),$ $F_u(x)=$ $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_u(n)}{n^u}\times$ $\times x^n$ $\|x\|<1$	$n^z\frac{x^n}{1-x^n}$	$\sum\limits_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)d^z\frac{x^d}{1-x^d}$

7	$\frac{\mu(n)}{n^{\frac{z}{2}}}$ $Re(z) > 1$	$\mu(n)n^{\frac{s-z}{2}} \times$ $\times\zeta\left(\frac{s+z}{2}\right)^{-1} \times$ $\times\prod\limits_{p/n}\left(1 - p^{-\frac{s+z}{2}}\right)^{-1} =$ $= \zeta\left(\frac{s+z}{2}\right)^{-1} \times$ $\times\mu(n)n^s\varphi_{\frac{s+z}{2}}(n)^{-1}$	$A_n = 0$, если n делится на куб простого числа, $A_n = \zeta\left(\frac{s+z}{2}\right)^{-1} \times$ $\times\mu(P)\frac{Q^s}{\varphi_{\frac{s+z}{2}}(Q)}\times$ $\times\prod\limits_{p/P}\frac{1+p^{-\frac{z}{2}}(p^{\frac{s}{2}}-p^{-\frac{s}{2}})}{1-p^{-\frac{s+z}{2}}}$, если $n = PQ^2$, $(P, Q) = 1$, $\mu(P) \neq 0$, $\mu(Q) \neq 0$

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty} n^s x^n y^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi_s(n)}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{d^s x^d}{1-x^d}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{d^s y^d}{1-y^d} \quad (28)$$

$$(s > 1,\ |x| < 1,\ |y| < 1),$$

$$\frac{\zeta(z_1+z_2)\zeta(2s)}{\zeta(s+z_1)\zeta(s+z_2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_{s-z_1}(n)\varphi_{s-z_2}(n)}{\varphi_{2s}(n)} \quad (29)$$

$$\left(s > \frac{1}{2},\ z_1 > \frac{1}{2},\ z_2 > \frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{\zeta(s)\zeta(z)\zeta(z-s)}{\zeta(2z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_{4s-2z}(n)}{\varphi_s(n)\varphi_{2s-z}(n)} \quad (s > 1,\ z > 1). \quad (30)$$

Настоящая часть работы посвящена общим принципам развиваемого здесь метода. Конкретные приложения полученных результатов будут даны в части II.

13. Об определении среднеарифметических высшего порядка от основной функции аддитивной теории чисел

В моей предыдущей работе [59], а также в работе [58] определено значение

$$\mathfrak{M}_p(f,\, n) = \sqrt[p]{\frac{1}{C^n_{k_1} C^n_{k_2}} \sum_{\substack{1\le x_1<\ldots<x_{k_1}\le n\\ 1\le y_1<\ldots<y_{k_2}\le n}} f(x_1,\, \ldots,\, x_{k_1};\, y_1,\, \ldots,\, y_{k_2}\,|\,n)^p}$$

при $p = 1$ и при $p = 2$. Здесь $f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{k_1};\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{k_2} \mid n)$ означает основную функцию аддитивной теории чисел, определяемую как число чисел интервала $1, 2, \ldots n$, совпадающих или по крайней мере с одним из x-в, или по крайней мере с одним из y-в, или по крайней мере с одной из сумм $x_i + y_j$. Здесь так же, как и в предыдущих работах, C^n_k означает коэффициент при u^k в разложении $(1+u)^n$ по степеням, поэтому $C^n_{k_1} C^n_{k_2}$ равно числу членов в двойной сумме, стоящей под знаком корня в выражении $\mathfrak{M}_p(f, n)$. Целью настоящей работы является определение среднего кубического значения основной функции f, т.е. определение $\mathfrak{M}_3(f, n)$ или, что то же самое, определение двойной суммы

$$\begin{aligned} S^{n,\,3}_{k_1,\,k_2} &= \sum_{\substack{1\le x_1<\ldots<x_{k_1}\le n\\ 1\le y_1<\ldots<y_{k_2}\le n}} f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{k_1};\, y_1,\, y_2,\, \ldots y_{k_2}\,|\,n)^3 = \\ &= \sum_{X^n_{k_1}} \sum_{Y^n_{k_2}} f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{k_1};\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{k_2} \mid n)^3. \end{aligned} \tag{1}$$

Покажем, что для этого достаточно определить значение суммы:

$$\begin{aligned} S'^{n,\,2}_{k_1,\,k_2} &= \sum_{\substack{1\le x_1<\ldots<x_{k_1}\le n\\ 1\le y_1<\ldots<y_{k_2}\le n}}{}' f(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_{k_1};\,y_1,\,y_2,\ldots,\,y_{k_2}\,|\,n)^2 = \\ &= \sum_{X^n_{k_1}} \sum_{Y^n_{k_2}}{}' f(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_{k_1};\,y_1,\,y_2,\,\ldots,\,y_{k_2}\,|\,n)^2, \end{aligned} \tag{2}$$

где штрих при знаке суммирования означает, что суммирование распространено на все те пары сочетаний $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_{k_1};\,y_1,\,y_2,\,\ldots,\,y_{k_2}$, у которых выполнено условие $x_i + y_j \neq n+1$ $(i = 1,\,2,\,\ldots,\,k_1;$ $j = 1,\,2,\,\ldots,\,k_2)$.

В самом деле, в вышецитированной работе [59, с. 30] имеется формула (36), принимающая после элементарных упрощений следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1;p}(u,v) &= (1+u)^{n+1}(1+v)^{n+1} - (1+u+v)^n + \\ &+ (1+u)(1+v)\sum_{s=1}^{p} C^p_s \Phi_{n;s}(u,v) - \sum_{s=1}^{p-1} C^p_s \Phi'_{n;s}(u,v), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\Phi_{n;p}(u,v)$ и $\Phi'_{n;p}(u,v)$ определяются формулами:

$$\Phi_{n;\,p}(u,\,v) = \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n} S^{n;\,p}_{k_1;\,k_2} u^{k_1} v^{k_2}, \tag{4}$$

$$\Phi'_{n;\,p}(u,\,v) = \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n} S'^{n;\,p}_{k_1;\,k_2} u^{k_1} v^{k_2}, \tag{4'}$$

а $S^{n;\,p}_{k_1;\,k_2}$ и $S'^{n;\,p}_{k_1;\,k_2}$ определяются формулами (32) и (33) той же работы. Умножая обе части соотношения (3) на $\{(1+u)(1+v)\}^{m-n-1}$ и суммируя затем по n от единицы до $m-1$, получим

$$\sum_{n=1}^{m-1} \Phi_{n+1;p}(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{m-n-1} =$$
$$= \sum_{s=1}^{p} C_s^p \sum_{n=1}^{m-1} \Phi_{n;s}(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{m-n} + (m-1)(1+u)^m \times$$
$$\times (1+v)^m - \sum_{n=1}^{m-1} (1+u+v)^n \{(1+u)(1+v)\}^{m-n-1} -$$
$$- \sum_{s=1}^{p-1} C_s^p \sum_{n=1}^{m-1} \Phi'_{n;s}(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{m-n-1}.$$

Вычитая из обеих частей последнего равенства $\sum_{n=2}^{m=1} \Phi_{n;p}(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{m-n}$, получим

$$\Phi_{m;p}(u,v) = \{(1+u)(1+v)\}^{m-1}\Phi_{1;p}(u,v) + (m-1)(1+u)^m(1+v)^m -$$
$$- \sum_{n=1}^{m-1} (1+u+v)^n \{(1+u)(1+v)\}^{m-n-1} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{p-1} C_s^p \sum_{n=1}^{m-1} \Phi_{n;s}(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{m-n} -$$
$$- \sum_{s=1}^{p-1} C_s^p \sum_{n=1}^{m-1} \Phi'_{n;\,s}(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{m-n-1}$$

или, заменяя m на n и n на k и пользуясь равенством $\Phi_{1;\,p}(u,v) =$ $= u+v+uv = (1+u)(1+v)-1$, получим

$$\Phi_{n;\,p}(u,v) = n(1+u)^n(1+v)^n - (1+u)^{n-1}(1+v)^{n-1} -$$
$$- \sum_{k=1}^{n-1} (1+u+v)^k \{(1+u)(1+v)\}^{n-k-1} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{p-1} C_s^p \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_{k;\,s}(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{n-k} -$$

$$-\sum_{s=1}^{p-1} C_s^p \sum_{k=1}^{n-1} \Phi'_{k;\,s}(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{n-k-1}. \tag{5}$$

Таким образом, мы найдем $\Phi_{n;\,p}(u,v)$, если знаем $\Phi_{n;\,1}(u,v)$, $\Phi_{n;\,2}(u,v), \ldots, \Phi_{n;\,p-1}(u,v)$, $\Phi'_{n;\,1}(u,v), \Phi'_{n;\,2}(u,v), \ldots, \Phi'_{n;\,p-1}(u,v)$. Так как на основании формулы (26), (38) и (39) указанной работы[1] значения $\Phi_{n;\,1}(u,v) = \Phi_n(u,v)$, $\Phi'_{n;\,1}(u,v) = \Phi'_n(u,v)$ и $\Phi_{n;\,2}(u,v)$ известны, для определения $\Phi_{n;\,3}(u,v)$ достаточно определить $\Phi'_{n;\,2}(u,v)$, т.е. для определения значения суммы (1) достаточно определить сумму (2).

Начнем поэтому с определения суммы $S'^{\,n;\,2}_{k_1,k_2}$ и ее производящей функции $\Phi'_{n;\,2}(u,v)$. Для этого определим число пар из сочетаний $x_1, \ldots, x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots y_{k_2}$, где $(1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{k_1} \leqslant n$, $1 \leqslant y_1 < < \ldots < y_{k_2} \leqslant n)$ $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$ суть сочетания из первых n цифр натурального ряда чисел по k_1 и k_2 соответственно, удовлетворяющие условиям:

$$x_i + y_j \neq n+1; x_i + y_j \neq m_1; x_i + y_j \neq m_2; x_i \neq m_1; y_j \neq m_1;$$
$$x_i \neq m_2; y_j \neq m_2 (i = 1,2,\ldots,k_1;\ j = 1,2,\ldots,k_2), \tag{6}$$

где m_1 и m_2 — любые заданные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $1 \leqslant m_1 \leqslant n$, $1 \leqslant m_2 \leqslant n$. Для определения числа указанных пар сочетаний воспользуемся приемом, использованным в вышецитированной работе при определении числа пар сочетаний, удовлетворяющих условиям (5) и (8) этой работы. Воспользуемся и здесь

[1] Формула (39) в указанной работе напечатана неверно, а именно: последний член следует читать $-2\sum_{k=1}^{n-1} \Phi'_k(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{n-k-1}$, а не $+2\sum_{k=1}^{n-1} \Phi'_k(u,v)\{(1+u)(1+v)\}^{n-k-1}$.

также теоремой: (см. с. 15 указанной работы). Если дана совокупность из N объектов и S условий A_1, A_2, $\ldots$, A_s, то тогда число объектов $\overline{N}$, не удовлетворяющих ни одному из условий A_i, равно $N - N_{A_1} - N_{A_2} - \ldots - N_{A_s} + N_{A_1 A_2} + \ldots + N_{A_{s-1} A_s} - \ldots \mp N_{A_1 A_2 A_3 \ldots A_s}$, где $N_{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}}$ означает число объектов, удовлетворяющих условиям A_{i_1}, A_{i_2}, $\ldots$, A_{i_p}. В качестве указанной совокупности из N элементов возьмем все пары сочетаний $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$; y_1, y_2, $\ldots$, y_{k_2}, удовлетворяющие условиям $x_i + y_j \neq n+1$ ($i = 1, 2, \ldots, k_1$; $j = 1, 2, \ldots, k_2$), а в качестве условий A_i следующие условия:

$$A_1 = \left\{ {* \atop m_1} \right\}, A_2 = \left\{ {1 \atop m_1 - 1} \right\}, \ldots, A_{m_1} = \left\{ {m_1 - 1 \atop 1} \right\}, A_{m_1+1} = \left\{ {m_1 \atop *} \right\},$$

$$A_{m_1+2} = \left\{ {* \atop m_2} \right\}, A_{m_1+3} = \left\{ {1 \atop m_2 - 1} \right\}, \ldots, A_{m_1+m_2+2} = \left\{ {m_2 \atop *} \right\},$$

где условие $\left\{ {\alpha \atop \beta} \right\}$ означает, что в сочетание x_1, x_2, $\ldots$, x_{k_1} пары входит α, а в сочетание y_1, y_2, $\ldots$, y_{k_2} входит β, и, кроме того, условие $\left\{ {* \atop m} \right\}$ означает, что во второе сочетание пары входит m, а условие $\left\{ {m \atop *} \right\}$ означает, что в первое сочетание пары входит m. Очевидно, что искомое число пар сочетаний равно числу пар сочетаний, удовлетворяющих условиям:

$$x_i + y_j \neq n + 1 \ (i = 1, 2, \ldots, k_1;\ j = 1, 2, \ldots, k_2) \tag{7}$$

и не удовлетворяющих ни одному из условий A_i (см. с. 17–19 указанной работы). Назовем сочетание из условий A_{i_1}, A_{i_2}, $\ldots$, A_{i_p} совместимым, если $N_{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}} \neq 0$, и определим число совместимых сочетаний из условий A_i по p ($1 \leqslant p \leqslant m_1 + m_2 + 2$). Кроме того, определим число совместимых сочетаний по p каждого из следующих шестнадцати типов:

$$(\overline{A}_1, \overline{A}_{m_1+1}, \overline{A}_{m_1+2}, \overline{A}_{m_1+m_2+2}); (A_1, \overline{A}_{m_1+1}, \overline{A}_{m_1+2}, \overline{A}_{m_1+m_2+2});$$
$$(\overline{A}_1, A_{m_1+1}, \overline{A}_{m_1+2}, \overline{A}_{m_1+m_2+2});$$
$$(\overline{A}_1, \overline{A}_{m_1+1}, A_{m_1+2}, \overline{A}_{m_1+m_2+2}); (\overline{A}_1, \overline{A}_{m_1+1}, \overline{A}_{m_1+2}, A_{m_1+m_2+2});$$
$$(\overline{A}_1, \overline{A}_{m_1+1}, A_{m_1+2}, A_{m_1+m_2+2});$$
$$(\overline{A}_1, A_{m_1+1}, \overline{A}_{m_1+2}, A_{m_1+m_2+2}); (\overline{A}_1, A_{m_1+1}, A_{m_1+2}, \overline{A}_{m_1+m_2+2});$$
$$(A_1, \overline{A}_{m_1+1}, \overline{A}_{m_1+2}, A_{m_1+m_2+2});$$
$$(A_1, \overline{A}_{m_1+1}, A_{m_1+2}, \overline{A}_{m_1+m_2+2}); (A_1, A_{m_1+1}, \overline{A}_{m_1+2}, \overline{A}_{m_1+m_2+2});$$
$$(\overline{A}_1, A_{m_1+1}, A_{m_1+2}, A_{m_1+m_2+2});$$
$$(A_1, \overline{A}_{m_1+1}, A_{m_1+2}, A_{m_1+m_2+2}); (A_1, A_{m_1+1}, \overline{A}_{m_1+2}, A_{m_1+m_2+2});$$
$$(A_1, A_{m_1+1}, A_{m_1+2}, \overline{A}_{m_1+m_2+2}); (A_1, A_{m_1+1}, A_{m_1+2}, A_{m_1+m_2+2}),$$

где под сочетаниями типа $(A_1, A_{m_1+1}, \overline{A}_{m_1+2}, \overline{A}_{m_1+m_2+2})$, например, подразумеваются сочетания, содержащие A_1, A_{m_1+1}, но не содержащие A_{m_1+2}, $A_{m_1+m_2+2}$, и т.д. Иначе говоря, в названии типа сочетаний условия, заведомо не входящие в сочетания, отмечены черточками, а заведомо входящие в сочетания оставлены без изменения. Обозначим через $\overset{*}{C}{}_p^{s}$ число всех совместимых сочетаний из $A_1, \ldots, A_{m_1+m_2+2}$ по p, а через $\overset{*}{C}{}_p^{k,\,s}$ $(k = 1, 2, \ldots, 16)$ число всех совместимых комбинаций k-го типа из A_1, A_2, $\ldots$, $A_{m_1+m_2+2}$ по p. Очевидно, что

$$\overset{*}{C}{}_p^{s} = \sum_{k=1}^{16} \overset{*}{C}{}_p^{k,\,s}. \tag{8}$$

Обозначим через $T_k(m_1, m_2, \mu, \nu, p)$ число совместимых сочетаний k-го типа из условий: $\left\{ {* \atop m_1} \right\}, \left\{ {1 \atop m_1-1} \right\}, \ldots, \left\{ {m_1-1 \atop 1} \right\}$, $\left\{ {m_1 \atop *} \right\}, \left\{ {* \atop m_2} \right\}$, $\left\{ {1 \atop m_2-1} \right\}, \ldots, \left\{ {m_2 \atop *} \right\}$ по p, таких, что среди верхних чисел символов

$\left\{ {i \atop k} \right\}, \left\{ {* \atop k} \right\}, \left\{ {k \atop *} \right\}$, входящих в сочетание, имеются μ, а среди нижних чисел тех же символов имеется ν различных между собой чисел. Обозначим далее через $T(m_1, m_2, \mu, \nu, p)$ число всех совместимых сочетаний из условий вышеуказанного вида. Очевидно

$$T(m_1, m_2, \mu, \nu, p) = \sum_{k=1}^{16} T_k(m_1, m_2, \mu, \nu, p). \tag{9}$$

Определим значение суммы $\sum N_{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_p}}$, распространенной на все совместимые сочетания из условий A_i. Покажем сначала, что если среди верхних чисел условий $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_p}$ имеется μ и среди нижних ν различных между собою чисел, то

$$N_{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_p}} = C^{n-\mu-\nu}_{k_1-\mu,\, k_2-\nu}\,,$$

где $C^m_{k_1, k_2} = C^m_{k_1} C^{m-k_1}_{k_2}$ (см. с. 18 указанной работы).

В самом деле обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ все различные между собою верхние числа символов $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_p}$, а через $\beta_1, \dots, \beta_\nu$ — все различные между собою нижние числа тех же символов. Тогда число пар сочетаний $x_1, x_2, \dots, x_{k_1}; y_1, y_2, \dots, y_{k_2}$, удовлетворяющих условиям (7) и условиям $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_p}$, равно числу пар сочетаний, удовлетворяющих условиям (7) и условиям:

$$\begin{aligned} &\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu (\overline{\beta_1})(\overline{\beta_2}) \dots (\overline{\beta_\nu}), \\ &\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu (\overline{\alpha_1})(\overline{\alpha_2}) \dots (\overline{\alpha_\mu}), \end{aligned} \tag{10}$$

которые означают, что в первое сочетание пары $x_1, x_2, \dots, x_{k_1}$ заведомо входят числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ и заведомо не входят $\overline{\beta_1}, \dots, \overline{\beta_\nu}$, и, кроме того, в сочетание $y_1, y_2, \dots, y_{k_2}$ пары заведомо входят β_1, $\beta_2, \dots, \beta_\nu$ и заведомо не входят $\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_\mu}$, причем $\overline{\alpha_i} = n + 1 - \alpha_i$

$(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ и $\overline{\beta_i} = n + 1 - \beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$. Очевидно, что все числа верхней строчки условий (10), а равно и все числа нижней строчки, между собой различны, так как из предположения $\alpha_i = \overline{\beta_j}$ следует $\alpha_i + \beta_j = n + 1$, что противоречит тому, что $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_p}$ — суть совместимые условия, т. е. условия не противоречащие (7). Если мы выбросим из сочетаний $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}$ числа, заведомо в них входящие, то убедимся в том, что число $N_{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}}$ указанных пар сочетаний $x_1, \ldots, x_{k_1}; y_1, \ldots, y_{k_2}$ равно числу пар сочетаний $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1-\mu}; y_1, y_2, \ldots, y_{k_2-\nu}$, удовлетворяющих условиям (7) и условиям:

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_1)(\alpha_2)\ldots(\alpha_\mu)\,(\overline{\beta_1})(\overline{\beta_2})\ldots(\overline{\beta_\nu})\\
&(\beta_1)(\beta_2)\ldots(\beta_\nu)\,(\overline{\alpha_1})(\overline{\alpha_2})\ldots(\overline{\alpha_\mu}).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Если мы обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-\mu-\nu}$ все различные числа из числового интервала $1, 2, \ldots, n$, отличные от чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$, $\overline{\beta_1}, \overline{\beta_2}, \ldots, \overline{\beta_\nu}$, расположенные в возрастающем порядке, а через $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-\mu-\nu}$ — все различные числа того же интервала, отличные от $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_\mu}$ и расположенные в возрастающем порядке, то будем иметь (так как вычитая из $n + 1$ все числа верхней строчки (11), мы получим все числа нижней строчки) $\gamma_i = n + 1 - \delta_{n+1-\mu-\nu-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n - \mu - \nu)$, то есть $\gamma_i + \delta_j$ равно $n + 1$ тогда и только тогда, когда $i + j = n + 1 - \mu - \nu$. Рассматриваемые пары сочетаний $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1-\mu}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{k_2-\nu}$, удовлетворяющие условиям (7) и (11), можно записать как пары сочетаний $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots, \gamma_{i_{k_1-\mu}}; \delta_{j_1}, \delta_{j_2}, \ldots, \delta_{j_{k_2-\nu}}$, удовлетворяющие условиям $i_\mu + j_\nu \neq n + 1 - \mu - \nu$. Число же пар сочетаний, $i_1, \ldots, i_{k_1-\mu}$;

$j_1,\, j_2,\, \ldots,\, j_{k_2-\nu}$ $(i_\mu + j_\nu \neq n+1-\mu-\nu)$, равно $C^{n-\mu-\nu}_{k_1-\mu,\, k_2-\nu}$ (см. с. 15 цитированной работы). Поэтому имеем

$$\sum N_{A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_p}} = \sum_{\mu=0}^{m_1+m_2+1} \sum_{\nu=0}^{m_1+m_2+1} T(m_1, m_2, \mu, \nu, p) C^{n-\mu-\nu}_{k_1-\mu,\, k_2-\nu}. \quad (12)$$

Поэтому, на основании формулы

$$\overline{N} = N - N_{A_1} - N_{A_2} - \ldots - N_{A_s} + N_{A_1A_2} + \ldots + N_{A_{s-1}A_s} - \ldots \pm$$
$$\pm N_{A_1A_2\ldots A_s} (s = m_1 + m_2 + 2) \quad (13)$$

имеем для числа $\overline{N}$ всех пар сочетаний $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{k_1};\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{k_2}$, удовлетворяющих условиям (6):

$$N = C^n_{k_1,\, k_2} + \sum_{p=1}^{m_1+m_2+1} (-1)^p \sum_{\mu=0}^{m_1+m_2+1} \sum_{\nu=0}^{m_1+m_2+1} T(m_1, m_2, \mu, \nu, p) C^{n-\mu-\nu}_{k_1-\mu,\, k_2-\nu}. \quad (14)$$

Введем символ $\varepsilon(m;\, x_1,\, x_2,\, \ldots x_{k_1};\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{k_2})$, равный единице, если m входит в состав аддитивной суммы Шнирельмана последовательностей $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{k_1}$ и $y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{k_2}$, и равный нулю в противном случае, т.е. равен единице, если только пара сочетаний $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{k_1};\, y_1,\, \ldots,\, y_{k_2}$ нарушает по крайней мере одно из условий: $x_i \neq m, y_j \neq m$, $x_i + y_j \neq m$ $(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k_1;\; j = 1,\, 2,\, \ldots,\, k_2)$. Очевидно, что

$$\sum_{m_1=1}^{n} \sum_{m_2=1}^{n} \varepsilon(m_1;\, x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}) \times$$
$$\times\, \varepsilon(m_2;\, x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}) =$$
$$= \sum_{m_1=1}^{n} \sum_{m_2=1}^{n} \{[1 - \varepsilon(m_1;\, x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2})] \times$$
$$\times\, [1 - \varepsilon(m_2;\, x_1, x_2, \ldots, x_{k_1};\, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2})] - 1\} +$$

$$+\sum_{m_1=1}^{n}\sum_{m_2=1}^{n}[\varepsilon(m_1;\, x_1,x_2,\ldots,x_{k_1};\, y_1,y_2,\ldots,y_{k_2})+$$
$$+\,\varepsilon(m_2;\, x_1,x_2,\ldots,x_{k_1};\, y_1,y_2,\ldots,y_{k_2})] =$$
$$= f(x_1,x_2,\ldots,x_{k_1};\, y_1,y_2,\ldots,y_{k_2}\,|n)^2.$$

Суммируя обе части полученного соотношения по всем парам $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{k_1};\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{k_2}$, удовлетворяющим условиям $x_i+y_j \neq \neq n+1$ $(i=1,\, 2,\, \ldots,\, k_1;\, j=1,\, 2,\, \ldots,\, k_2)$, и пользуясь (14), получим

$$\sum_{X_{k_1}^n}{\sum_{Y_{k_2}^n}}' f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{k_1};\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{k_2}\,|n)^2 =$$
$$=\sum_{m_1=1}^{n}\sum_{m_2=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{m_1+m_2+1}\sum_{\nu=0}^{m_1+m_2+1}\sum_{p=1}^{m_1+m_2+1}(-1)^p\, T(m_1,\, m_2,\, \mu,\, \nu,\, p)\times$$
$$\times\, C_{k_1-\mu,\, k_2-\nu}^{n-\mu-\nu} + 2n\sum_{X_{k_1}^n}{\sum_{Y_{k_2}^n}}'\sum_{m=1}^{n}\varepsilon(m;\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{k_1};\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{k_2}),$$

где штрих при знаке двойной суммы $\sum_{X_{k_1}^n}\sum'_{Y_{k_2}^n}$ означает, что суммирование распространено на все пары сочетаний $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{k_1};$ $y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{k_2}$, удовлетворяющих условиям: $x_i+y_j \neq n+1$ $(i = = 1,\, 2,\, \ldots,\, k_1;\, j=1,\, \ldots,\, k_2)$, на основании формул (6) и (12) моей вышецитированной работы получим из последнего соотношения

$$\sum_{X_{k_1}^n}{\sum_{Y_{k_2}^n}}' f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{k_1};\; y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{k_2}\,|n)^2 =$$
$$=\sum_{m_1=1}^{n}\sum_{m_2=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{m_1+m_2+1}\sum_{\nu=0}^{m_1+m_2+1}\sum_{p=1}^{m_1+m_2+1}(-1)^p\, T(m_1,m_2,\mu,\nu,p)C_{k_1-\mu,\, k_2-\nu}^{n-\mu-\nu}+$$
$$+\,2n\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\Big[C_p^{\,m-1;\, n+1-m}\, C_{k_1-p,\, k_2-p}^{n-2p}\times$$
$$\times\left(C_p^{\,m+1;\, n+1-m} - C_p^{\,m-1;\, n+1-m} - C_{p-1}^{\,\prime\, m-1;\, n+1-m}\right) C_{k_1-p+1,\, k_2-p+1}^{n-2;\, p+2}\Big]+$$

$$+\,2n\sum_{m=1}^{n}\ \sum_{p=1}^{m+1}(-1)^p C'^{\,m-1;\,n+1-m}_{p-1}\, C^{\,n-2;\,p+2}_{k_1-p+1,\,k_2-p+1}, \tag{15}$$

где $C_k^{n;\,d}$ означает число всех сочетаний из первых n чисел натурального ряда по k, таких, что ни одна пара чисел, входящих в сочетание, не имеет разности, равной d, а $C'^{\,n;\,d}_k$ означает число таких сочетаний, все числа которых сверх того отличны от d.

Умножая обе части формулы (15) на $u^{k_1}v^{k_2}$ и суммируя по k_1, k_2 от нуля до n, получим

$$\begin{aligned}
\Phi'_{n;\,2}(u,v) &= \sum_{m_1,m_2=1}^{n}\ \sum_{\mu,\nu=0}^{n}\ \sum_{p=1}^{2n+2}(-1)^p\, T(m_1,m_2,\mu,\nu,p)\, u^{\mu}\, v^{\nu}\times\\
&\times(1+u+v)^{n-\mu-\nu}+2n\Phi'_n(u,v)=W_n(u,v)+n^2(1+u+v)^n+\\
&+\frac{2n(1+u+v)^{n+2}}{uv}\sum_{m=1}^{n}[\varphi_{m;\,n+1-m}(x)+\\
&+x\,\varphi_{m-1;\,m+1-m}(x)-\varphi_{m+1;\,n+1-m}(x)]+\\
&+\frac{2n(1+u+v)^{n+1}}{uv}\sum_{m=1}^{n}[\varphi_{m;\,m+1-m}(x)-\varphi_{m-1;\,n+1-m}(x)]=\\
&=W_n(u,v)+n^2(1+u+v)^n+2n\,\theta_n(u,v),
\end{aligned} \tag{16}$$

где $W_n(u,v)$, $\varphi_{n;\,d}(x)$, x, $\theta_n(u,v)$ и $\Phi'_n(u,v)$ определяются формулами:

$$x=-\frac{uv}{(1+u+v)^2},\ \ \theta_n(u,v)=\Phi'_n(u,v)-n\,(1+u+v)^n,$$

$$\Phi'_n(u,v)=\Phi'_{n;\,1}(u,v)=\sum_{k_1=0}^{n}\ \sum_{k_2=0}^{n} S'^{\,n}_{k_1,\,k_2}\, u^{k_1}v^{k_2}$$

и

$$\begin{aligned}
W_n(u,v)=&\sum_{m_1,m_2=1}^{n}\ \sum_{\mu,\nu=0}^{n}\ \sum_{p=1}^{2n+2}(-1)^p\, T(m_1,m_2,\mu,\nu,p)\, u^{\mu}\, v^{\nu}\times\\
&\times(1+u+v)^{n-\mu-\nu}
\end{aligned} \tag{17}$$

$\left(T(m_1, m_2, 0, 0, 0) = 1,\ T(m_1, m_2, \mu, \nu, 0) = 0 \text{ при } \mu + \nu \neq 0 \right)$.

Подставляя в формулу (5) настоящей работы $p = 3$ и пользуясь элементарной формулой

$$\sum_{k=1}^{n-1} (1+u+v)^k \left[(1+u)(1+v)\right]^{n-k-1} = \\ = \frac{(1+u)^{n-1}(1+v)^{n-1} - (1+u+v)^{n-1}}{uv}(1+u+v), \tag{18}$$

получим

$$\begin{aligned} \Phi_{n;\,3}(u,v) = n(1+u)^n(1+v)^n - \frac{(1+u)^n(1+v)^n - (1+u+v)^n}{uv} + \\ + 3\sum_{k=1}^{n-1} \Phi_{k;\,1}(u,v)\left[(1+u)(1+v)\right]^{n-k} + \\ + 3\sum_{k=1}^{n-1} \Phi_{k;\,2}(u,v)\left[(1+u)(1+v)\right]^{n-k} - \\ - 3\sum_{k=1}^{n-1} \Phi'_{k;\,1}(u,v)\left[(1+u)(1+v)\right]^{n-k-1} - \\ - 3\sum_{k=1}^{n-1} \Phi'_{k;\,2}(u,v)\left[(1+u)(1+v)\right]^{n-k-1}, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\Phi_{n;\,1}(u,v) = \Phi_n(u,v) = n\left[(1+u)(1+v)\right]^n - \\ - \frac{(1+u)^n(1+v)^n - (1+u+v)^n}{uv} \tag{20}$$

(см. формулу (38) цитированной работы),

$$\Phi'_{n;\,1}(u,v) = \Phi'_n(u,v) = n(1+u+v)^n + \frac{(1+u+v)^{n+2}}{uv} \times \\ \times \sum_{m=1}^{n} \left[\varphi_{m;\,n+1-m}(x) + x\,\varphi_{m-1;\,n+1-m}(x) - \varphi_{m+1;\,n+1-m}(x)\right] +$$

$$+\frac{(1+u+v)^{n+1}}{uv}\sum_{m=1}^{n}\left[\varphi_{m;\,n+1-m}(x)-\varphi_{m-1;\,n+1-m}(x)\right], \tag{21}$$

$$\left(x=-\frac{uv}{(1+u+v)^2}\right)$$

(см. формулу (27) там же). Подставляя в формулу (5) $p=2$, точно так же получим

$$\Phi_{n;\,2}(u,v)=n(1+u)^n(1+v)^n-\frac{(1+u)^n(1+v)^n-(1+u+v)^n}{uv}+$$
$$+2\sum_{k=1}^{n-1}\Phi_{k;\,1}(u,v)\left[(1+u)(1+v)\right]^{n-k}-$$
$$-2\sum_{k=1}^{n-1}\Phi'_{k;\,1}(u,v)\left[(1+u)(1+v)\right]^{n-k-1}$$

или на основании (18), (20), (21) и элементарной формулы

$$\sum_{k=1}^{n-1}k(1+u+v)^k\left[(1+u)(1+v)\right]^{n-k-1}=$$
$$=\frac{(n-1)(1+u+v)^n-n(1+u)(1+v)(1+u+v)^{n-1}}{u^2\,v^2}(1+u+v)+$$
$$+\frac{(1+u)^n(1+v)^n}{u^2\,v^2}(1+u+v) \tag{22}$$

получаем после элементарных упрощений

$$\begin{aligned}\Phi_{n;\,2}(u,v)&=n^2(1+u)^n(1+v)^n-\\&-(2n-1)\frac{(1+u)^n(1+v)^n-(1+u+v)^n}{uv}-\\&-2\sum_{k=1}^{n}\theta_k(u,v)\left[(1+u)(1+v)\right]^{n-k-1},\end{aligned} \tag{23}$$

где для простоты положено:

$$\theta_k(u,v) = \Phi'_n(u,v) - n(1+u+v)^n = \frac{(1+u+v)^{n+2}}{uv}\times$$
$$\times \sum_{m-1}^{n} \left[\varphi_{m;\,n+1-m}(x) + x\,\varphi_{m-1;\,n+1-m}(x) - \varphi_{m+1;\,n+1-m}(x)\right] +$$
$$+ \frac{(1+u+v)^{n+1}}{uv} \sum_{m=1}^{n} \left[\varphi_{m;\,n+1-m}(x) - \varphi_{m-1;\,n+1-m}(x)\right]. \tag{24}$$

Подставляя в (19) $\Phi_{k;\,2}(u,v)$ из формулы (23) и пользуясь при этом (16), (18), (20) — (22), (24) и элементарной формулой

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 (1+u+v)^k \left[(1+u)(1+v)\right]^{n-k-1} = \\ = \frac{-(n-1)^2(1+u+v)^{n+2}}{u^3\,v^3} + \\ + \frac{(2n^2-2n-1)(1+u)(1+v)(1+u+v)^{n+1}}{u^3\,v^3} - \\ - \frac{n^2(1+u+v)^n(1+u)^2(1+v)^2}{u^3\,v^3} + \\ + \frac{(1+u)^n(1+v)^n(1+u+v)^2}{u^3\,v^3} + \\ + \frac{(1+u)^{n+1}(1+v)^{n+1}(1+u+v)}{u^3\,v^3},\end{aligned} \tag{25}$$

получаем

$$\begin{aligned}\Phi_{n;\,3}(u,v) = n^3(1+u)^n(1+v)^n - \\ - (3n^2-3n+1)\frac{(1+u)^n(1+v)^n - (1+u+v)^n}{uv} - \\ - 3\sum_{k=1}^{n-1} W_k(u,v)\left[(1+u)(1+v)\right]^{n-k-1} - \\ - 3\sum_{k=1}^{n-1} (4k-1)\,\theta_k(u,v)\left[(1+u)(1+v)\right]^{n-k-1}.\end{aligned} \tag{26}$$

Для исследования формулы (26) необходимо видоизменить выражение для $\Phi'_n(u,v)$ и $W_n(u,v)$. Оставляя пока в стороне вторую задачу как более трудную, преобразуем $\Phi'_n(u,v)$ к форме явного алгебраического выражения от u и v.

Для этого нужно найти, прежде всего, явные выражения для производящих функций $\varphi_{n;\,d}(x)$ чисел $C_k^{n;\,d}$. Докажем сначала формулы:

$$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+2} = \varphi_n(x) + 2x\varphi_{n-1}(x) + \varphi_n(x)\sqrt{1+4x}, \quad (27)$$

$$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+2} = \varphi_n(x) + 2x\varphi_{n-1}(x) - \varphi_n(x)\sqrt{1+4x}, \quad (28)$$

где $\varphi_n(x) = \varphi_{n;\,1}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k^{n;\,1} x^k$.

Функция $\varphi_n(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) + x\varphi_{n-2}(x) \quad (29)$$

(см. формулу (15) цитированной работы).

Поэтому правые части доказываемых равенств (27) и (28) удовлетворяют тому же соотношению, как и линейные комбинации $\varphi_n(x)$ и $\varphi_{n-1}(x)$ с постоянными относительно n коэффициентами. Непосредственной элементарной подстановкой убеждаемся в том, что и левые части (27), (28) удовлетворяют соотношению (29). Далее, так как левые и правые части (27) и (28) удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению и совпадают при $n = 0$ и $n = 1$, то равенства (27) и (28) доказаны.

Докажем теперь формулу

$$\varphi_{n;\,d}(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+d+2}}{(\sqrt{1+4x})^{d+1}} \left[1-\left(\frac{-x}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^2}\right)^{q+2}\right]^{d-r} \times$$
$$\times \left[1-\left(\frac{-x}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^2}\right)^{q+3}\right]^{r} + \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+d+2}}{(-\sqrt{1+4x})^{d+1}} \times$$
$$\times \left[1-\left(\frac{-x}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^2}\right)^{d+2}\right]^{d-r} \times$$
$$\times \left[1-\left(\frac{-x}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^2}\right)^{q+3}\right]^{r}, \tag{30}$$

где $q = \left[\,\frac{n}{d}\,\right]$ и $r = n - q\,d,\ n = q\,d + r.$

Для доказательства этой формулы подставим в формулу

$$\varphi_{n;\,d}(x) = \sum_{s=0}^{n+d} C(s\,|\,m_1,\,m_2,\,\ldots,\,m_d)(-x)^s \varphi_{n+d-2s}(x) \tag{31}$$

[формула (22) моей цитированной выше работы], где $C\,(s\,|\,m_1,\,m_2,\,\ldots,\,m_d) = C(s\,|\,n,\,d)$ означает число всех разложений числа s на d слагаемых следующего вида : $s = z_1 + z_2 + \ldots + z_d$ $(0 \leqslant z_i \leqslant m_i + 1,$ $i = 1,\,2,\ldots,\,d)$, где $m_i = \left[\dfrac{n+i-1}{d}\right]$, $(i = 1,\,2,\,\ldots,\,d)$. Производящая функция чисел $C(s\,|\,n,\,d)$ очевидно равна

$$f_{n;\,d}(z) = \sum_{s=0}^{n+d} C(s\,|\,n,\,d) z^s = \prod_{s=1}^{d} (1 + z + z^2 + \ldots + z^{m_i+1}) =$$
$$= \frac{(1-z^{q+2})^{d-r}(1-z^{q+3})^r}{(1-z)^d}, \tag{32}$$

так как среди m_i имеется ровно $d - r$ чисел, равных $q + 1$. На основании (28), (29), (31) и (32) имеем теперь

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+2}\right];$$

$$\varphi_{n;\,d}(x) = \sum_{s=0}^{n+d} C(s\,|\,n,d)\frac{(-x)^s}{\sqrt{1+4x}}\times$$

$$\times\left[\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+2+d-2s} - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+2+d-2s}\right)\right] =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+2+d}}{\sqrt{1+4x}} f_{n;\,d}\left(\frac{-x}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^2}\right) -$$

$$- \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+2+d}}{\sqrt{1+4x}} f_{n;\,d}\left(\frac{-x}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^2}\right).$$

После элементарных преобразований, как легко видеть, последнее соотношение переходит в формулу (30). Другое[1], удобное для определения $S^{n;\,3}_{k_1,\,k_2}$ выражение для $\Phi'_n(u,v)$, мы получим, если докажем формулу

$$(1+u+v)^n\varphi_{n-1}\left(-\frac{uv}{(1+u+v)^2}\right) = \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n} D^n_{k_1,k_2}u^{k_1}v^{k_2}, \qquad (33)$$

где

$$D^n_{k_1,k_2} = C^{n-k_1}_{k_2}\,C^{n-k_2}_{k_1}.$$

Легко показать, пользуясь правилом треугольника Паскаля $C^{m-1}_k + C^{m-1}_{k-1} = C^m_k$, соотношение

$$D^n_{k_1,k_2} = D^{n-1}_{k_1,k_2} + D^{n-1}_{k_1-1,k_2} + D^{n-1}_{k_1,k_2-1} - D^{n-2}_{k_1-1,k_2-1}. \qquad (34)$$

[1]Формула (33) была мною получена на основании интересных соображений, любезно сообщенных мне В. П. Симоновым.

Умножая обе части соотношения (34) на $u^{k_1}v^{k_2}$ и суммируя по всем неотрицательным значениям k_1, k_2, получим для суммы

$$V_n(u,v)=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}D^n_{k_1,k_2}u^{k_1}v^{k_2}$$

рекуррентное соотношение

$$V_n(u,v)=(1+u+v)V_{n-1}(u,v)-uvV_{n-2}(u,v).$$

Так как тому же соотношению удовлетворяет и

$$\psi_n(u,v)=(1+u+v)^n\varphi_{n-1}\left(-\frac{uv}{(1+u+v)^2}\right)$$

[в чем нетрудно убедиться на основании (29)] и так как совершенно очевидно, что $V_1(u,\,v)=\psi_1(u,\,v)=1{+}u{+}v$, $V_2(u,\,v)=\psi_2(u,\,v)=1+$ $+\,2n+2v+uv+u^2v^2$, то имеем при всяком $n>0$: $V_n(u,\,v)=\psi_n(u,\,v)$, так как две функции $\psi_n(u,\,v)$, $V_n(u,\,v)$, удовлетворяющие одному и тому же рекуррентному соотношению и совпадающие при $n=1,\,2$, должны совпадать при всех положительных значениях. Таким образом, равенство (33) доказано. Мы видим, что выражение

$$\psi_n(u,\,v)=(1+u+v)^n\varphi_{n-1}\left(-\frac{uv}{(1+u+v)^2}\right),$$

имеющее смысл[1] при всяком n, имеет очень простые коэффициенты при $n>0$. Кроме того, на основании формулы (16) цитированной работы

$$\varphi_{-m}(x)=-\frac{\varphi_{m-4}(x)}{(-x)^{m-2}}$$

[1]См. цитированную работу. Рекуррентное соотношение (29) позволяет определить $\varphi_n(x)$ при $n=0,\,-1,\,-2,\,\ldots$.

имеем при

$$x = -\frac{uv}{(1+u+v)^2}$$
$$\psi_{-n}(u,v) = -\frac{\psi_{n-1}(u,v)}{(u\,v)^{n-1}}. \qquad (35)$$

Умножая далее формулу (17) цитированной работы $\varphi_{m_1}(x)\varphi_{m_2}(x) = \sum\limits_{\mu=0}^{m_2+1} \varphi_{m_1+m_2+1-2\mu}(x)\cdot(-x)^{\mu}$ на $\varphi_{m_3}(x)$ и пользуясь той же формулой, получим

$$\varphi_{m_1}(x)\varphi_{m_2}(x)\varphi_{m_3}(x) =$$
$$= \sum_{\mu_1=0}^{m_2+1}\sum_{\mu_2=0}^{m_3+1}(-x)^{\mu_1+\mu_2}\varphi_{m_1+m_2+m_3+2-2(\mu_1+\mu_2)}(x).$$

Продолжая этот процесс дальше, получим

$$\varphi_{m_1}(x)\varphi_{m_2}(x)\ldots\varphi_{m_s}(x) = \sum_{\mu_1=0}^{m_2+1}\sum_{\mu_2=0}^{m_3+1}\cdots\sum_{\mu_s=0}^{m_s+1}(-x)^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{s-1}}\times$$
$$\times\varphi_{m_1+m_2+\ldots+m_s+s-1-2(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{s-1})}(x)$$

или

$$\varphi_{m_1}(x)\varphi_{m_2}(x)\ldots\varphi_{m_s}(x) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n+s-1-m_1} C(\nu\,|\,m_2,m_3,\ldots,m_s)(-x)^{\nu}\varphi_{n+s-1-2\nu}(x), \qquad (36)$$

где $C(u\,|\,m_2,\,m_3,\,\ldots,\,m_s)$ равно числу решений уравнения $u = z_1 + {}+ z_2 + \ldots + z_{s-1}$ в целых z_i, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant z_i \leqslant m_{i+1}+1$ $(i = 1, 2, \ldots s-1)$ и $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_s$.

Подобно тому, как в цитированной работе была доказана формула (22) из (19), получим

$$\varphi_{n;\,d}(x) = \sum_{s=0}\overline{C}(s\,|\,n,d)(-x)^{s}\varphi_{m+d-1-2s}(x), \qquad (37)$$

где

$$\overline{C}(s\,|\,n,\,d) = C(s\,|\,m_2,\,m_3,\,\ldots,\,m_d); m_i = \left[\frac{n+i-1}{d}\right] (i=2,\,3,\,\ldots,\,d),$$

при $d>1$, $\overline{C}(0\,|\,n,\,1) = 1$,

$$\sum_{s=0} \overline{C}(s\,|\,n,d)z^s = \overline{f}_{n;d}(z) = \frac{(1-z^{q+2})^{d-r-1}(1-z^{q+3})^r}{(1-z)^{d-1}}.$$

На основании (21), (31), (36) и (37) имеем

$$\begin{aligned}
\Phi_n'(u,v) &= n(1+u+v)^n + \frac{1}{uv}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=1} C(s\,|\,m,n+1-m) = \\
&= u^s\,v^s\psi_{n+2-2s}(u,v) - \\
&- \sum_{m=1}^{n}\sum_{s=0}\overline{C}(s\,|\,m-1,n+1-m)u^s\,v^s\psi_{n-2s}(u,v) - \\
&- \frac{1}{u\,v}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=1}\overline{C}(s\,|\,m+1,n+1-m)u^s\,v^s\psi_{n+2-2s}(u,v) + \\
&+ \frac{1}{u\,v}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=1}\overline{C}(s\,|\,m,n+1-m)u^s\,v^s\psi_{n+1-2s}(u,v) - \\
&- \frac{1}{u\,v}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=1} C(s\,|\,m-1,n+1-m)u^s\,v^s\psi_{n+1-2s}(u,v)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&\Phi_n'(u,v) = n(1+u+v)^n + \sum_{m=1}^{n}\sum_{s=0}\Big[C(s+1\,|\,m,n+1-m) - \\
&- \overline{C}(s\,|\,m-1,n+1-m) - \overline{C}(s+1\,|\,m+1,n+1-m)\Big]u^s\,v^s \times \\
&\times\;\psi_{n-2s}(u,v) + \sum_{m=1}^{n}\sum_{s=1}\Big[\overline{C}(s+1\,|\,m,n+1-m) - \\
&- C(s+1\,|\,m-1,n+1-m)\Big]u^s\,v^s\psi_{n-1-2s}(u,v).
\end{aligned} \tag{38}$$

Выражение (38) для $\Phi_n'(u,v)$ удобнее других в том отношении, что в него входят $\psi_n(u,v)$, коэффициенты которых легко найти по формуле (13).

В тех членах (38), в которых индексы при $\psi_n(u,v)$ отрицательные, мы легко найдем коэффициенты, выразив $\psi_n(u,v)$ с отрицательным индексом через $\psi_n(u,v)$ с положительным индексом на основании (35), и, таким образом, определим $S'^{\,n;\,1}_{k_1,k_2}$ в виде сравнительно простого выражения.

14. Применение функционального анализа к вопросам распределения простых чисел

В беседе со мной в 1935 г. Л. Г. Шнирельман сообщил мне о своих соображениях по поводу возможных применений функционального анализа к вопросам теории распределения простых чисел, а также указал на то обстоятельство, что ряд числовых тождеств, связанных с распределением чисел, может быть получен путем рассмотрения введенной им «функциональной» дзета-функции. Целью настоящей работы является изложение идей Л. Г. Шнирельмана и дальнейшее их развитие и обобщение, к которому я недавно пришел. Рассмотрим семейство функций F, определенных на области B. (Термин «область» понимается здесь просто в смысле любого множества вещественных или комплексных чисел). Рассмотрим последовательность дистрибутивных функциональных операторов L_1, $L_2, \ldots$, отображающих функции семейства F в семейство F и обладающих сверх того свойством $L_n L_m = L_{n,m}$ $(n = 1, 2, \ldots; m = 1, 2, \ldots)$, которое мы в дальнейшем будем называть M-свойством. Например, рассматривая в области $(-\infty, \infty)$ множество функций, обладающих тем свойством, что вместе с $f(x)$, $f(nx)$, где n — любое целое положительное число, принадлежит тому же семейству (т.е. из $f(x) \in F$ следует $f(nx) \in F$), можем положить $L_n f(x) = f(nx)$.

Тогда очевидно имеем

$$L_n(L_m f(x)) = L_n f(m\,x) = f(nm\,x) = L_{nm} f(x),$$

$$\text{т.е. } L_n L_m = L_{nm}.$$

Также можно взять операторы $L_n f(x) = \chi(n) f(nx)$, где $\chi(n)$ — характер Дирихле для модуля k и F таково, что из $f(x) \in F$ следует $\chi(n) f(nx) \in F$. Из данной последовательности операторов, обладающих M-свойством, можно получить другие последовательности, обладающие тем же свойством, на основании теоремы: если L_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ есть последовательность операторов, обладающая M-свойством, то и $L'_n = A L_n A^{-1}$, где A и A^{-1} — два взаимно обратных линейных функциональных оператора, отображающих F само на себя, также образует последовательность, обладающую M- свойством:

$$L'_n L'_m = A L_n A^{-1} A L_m A^{-1} = A L_n L_m A^{-1} = A L_{nm} A^{-1} = L'_{nm}.$$

Приведем примеры последовательностей функциональных операторов, обладающих M-свойством:

$$L_n f(x) = f(n^\alpha\, x) \;\; \alpha \lesseqqgtr 0, \;\; L_n f(x) = f(x + a \log n), \;\; L_n f(x) = f(x^n),$$

$$L_n f(x) = f(nx - (n-1)a),$$

$$L_n f(x) - \int\limits_0^x f'(x^n) dx, \;\; L_n f(x) = f(\varphi(n\psi(x)), (\varphi\psi(x)) = x),$$

определенных, разумеется, на соответствующим образом подобранных множествах F. Большое количество примеров можно получить на основании того замечания, что последовательность функциональных операторов

$$L_n = n^\lambda = e^{\lambda \log n} = 1 + \frac{\log n}{1!}\lambda + \frac{(\log n)^2}{2!}\lambda^2 + \ldots \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где λ есть произвольный линейный функциональный оператор, обладает M- свойством, если при этом все ряды, здесь рассматриваемые:

$$L_n f(x) = f(x) + \frac{\log n}{1!}\lambda f(x) + \frac{(\log n)^2}{2!}\lambda^2 f(x) + \ldots,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log m)^k}{k!}\lambda^k (L_n f(x)), \quad (f(x) \in F,\ \lambda^3 f(x) = \lambda(\lambda f(x)), \ldots),$$

будут абсолютно сходящимися и полученное применение операций λ^p $(p = 1, 2, \ldots)$ к рассматриваемым рядам предполагается законным. В этих предположениях проверка M- свойства совершается формально так же, как проверка элементарного соотношения $n^\mu\, m^\mu = (n\, m)^\mu$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{k!}\mu^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\log m)^l}{l!}\mu^l = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log n\, m)^k}{k!}\mu^k,$$

где μ — число.

Этим способом можно получить и ранее рассмотренные примеры. Например, для $f(x)$, разлагающейся в ряд Тейлора

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \ldots,$$

имеем

$$L_n f(x) = f(x + a\log n) = e^{\log n\, a \frac{d}{dx}} f(x) = n^{a \frac{d}{dx}} f(x).$$

Далее для аналитической $f(x)$

$$L_n f(x) = f(n\, x) = e^{\log n\, x \frac{d}{dx}} f(x),\ L_n f(x) = f(x^n) =$$
$$= e^{\log n\, x \log x \frac{x}{dx}} f(x) = n^{x \log x \frac{x}{dx}} f(x),\ L_n f(x) = e^{\log n^{\Delta}} f(x) =$$
$$= n^{\Delta} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{k!}\Delta^k f(x),\ (\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)).$$

Рассмотрим теперь функциональный оператор следующего вида, определенный на функциональном множестве F :

$$\zeta(s, L) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{n^s},$$

на основании следующего соотношения:

$$\zeta(s, L) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n f(x)}{n^s},$$

где ряд справа предполагается абсолютно сходящимся для $R(s) > \sigma_0$ и последовательность L_n обладает M- свойством.

Оператор $\zeta(x, L)$, таким образом, определен для всех $f(x)$ рассматриваемого семейства F и для всех значений комплексного параметра $s = \sigma + ti$, лежащих правее линии $\sigma = \sigma_0$. В частности, при соответствующих ограничениях легко определяется функциональный оператор

$$\zeta(s+\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-\lambda}}{n^s},$$

где λ — некоторый дистрибутивный функциональный оператор и $n^{-\lambda} = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{(-\log n)^p}{p!} \lambda^p$, причем легко видеть, что для $L_n = n^{-\lambda}$ M- свойство выполняется. В частности, при соответствующих ограничениях для F имеем при $\lambda f(x) = -x f'(x)$ или $\lambda = -x \frac{d}{dx}$:

$$\zeta(s+\lambda) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n\,x)}{n^s}.$$

Так же точно для $\lambda = -x \log x \frac{d}{dx}$ имеем [на основании$f(x^n) = e^{\log n \, \log x \frac{d}{dx}} f(x)$]

$$\zeta(s+\lambda)f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x^n)}{n^s}.$$

Приложения рассматриваемой здесь функциональной дзета-функции основано на следующем замечании: если на функциональном множестве F определена последовательность функциональных операторов $L_1, L_2, \ldots,$ обладающая M-свойством, $L_n\, L_m = L_{nm}$ и такая, что из $f(x) \in F$ следует, что $L_n(L_m f(x)) = L_{n\,m} f(x) \in F$. Если, кроме того, для всех значений комплексного параметра s, вещественная часть которого больше σ_0, и для любой $f(x)$ из F ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{L_n f(x)}{n^s} = \zeta(s, L) f(x)$ абсолютно сходится и дает функцию, принадлежащую к некоторому семейству F'. Если далее для каждого $R(s) > \sigma_0$ и каждой $f(x) \in F$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\log n}{n^s} L_n f(x) = -\zeta'(s, L)$, очевидно сходящийся, дает функцию от x, принадлежащую семейству F'', а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu(n)}{n^s} L_n f(x) = \zeta^{-1}(s, L) f(x)$, сходящийся на том же функциональном множестве F, дает функцию, принадлежащую F'', и почленное применение операторов к рассматриваемым рядам законно, то тогда справедливо следующее тождество:

$$\zeta'(s, L) \cdot \zeta(s, L)^{-1} f(x) = \sum \frac{\Lambda(n)}{n^s} L_n f(x) \tag{1}$$

для каждой $f(x) \in F$. Это тождество является обобщением тождества Эйлера для дзета-функции и доказывается совершенно аналогичным образом на основе M-свойства для L_n и тождества

$$\sum_{d/n} \log d\, \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \Lambda(n).$$

Вывод формулы (1) опускаем ввиду его полной очевидности. Так же точно легко доказать тождество

$$\zeta^{-1}(s,L)\,\zeta(s,L)f(x)=f(x), \tag{2}$$

оправдывающее обозначение $\zeta^{-1}(s,L)$.

Разумеется, произведение $\zeta\,'(s,L)$ на $\zeta^{-1}(s,L)$ нужно понимать в смысле композиции операторов. Для случая

$$L_n f(x)=e^{\log n\, x\log x\frac{d}{dx}}f(x)=f(x^n)=n^{-\lambda}f(x)=n^{x\ \log x\frac{d}{dx}}f(x), s=0,$$

получим $\zeta(\lambda)\varphi(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(x^n)$, следовательно, для $\varphi(x)=x$, $\zeta(\lambda)\varphi(x)=\frac{x}{1-x}$.

Следовательно,

$$\zeta^{-1}(\lambda)\frac{x}{1-x}=\zeta^{-1}(\lambda)\zeta(\lambda)x=x.$$

Поэтому тождество (1) дает для

$$\zeta(s,L)=\zeta(\lambda),\ f(x)=\frac{x}{1-x}$$

в этом случае

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{m=1}^{\infty}\log m\,x^m, \tag{3}$$

т.е. известное тождество для ряда Ламберта, которое, таким образом, получилось из обобщённого тождества Эйлера (1). Это рассуждение не только дает новый вывод тождества (3), не только связывает неожиданным образом давно известное тождество (3) с тождеством Эйлера, но и дает надежду изучить ряд Ламберта

$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ методами теории дзета-функции на основе равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \frac{\zeta'}{\zeta}(\lambda) \frac{x}{1-x} \quad (\lambda = -x \log x \, \frac{d}{dx}),$$

так как (как увидим ниже) свойства функции ζ от «функционального» аргумента совпадают со многими свойствами обычной дзета-функции. Для функциональной дзета-функции для случая $L_n = n^{-\lambda} = e^{-\lambda \log n}$ (след. $\zeta(s, L) = \zeta(s+\lambda)$) возможно найти в некоторых случаях аналитическое продолжение $\zeta(s+\lambda)$ внутрь «критической полосы» аналогично тому, как это делается в теории обычной дзета-функции. Прежде всего, определяя L_u для любого $u > 0$ (не только целого) формулой

$$L_u f(x) = u^{-\lambda} f(x) = e^{-\lambda \log u} f(x) = f(x) - \frac{\log u}{1!} \lambda f(x) + \ldots,$$

имеем тождество, аналогичное известному тождеству из теории обычной дзета-функции:

$$\begin{aligned} &\zeta(s+\lambda) f(x) = \zeta(s, L) f(x) = \\ &\qquad = \frac{s+\lambda}{s+\lambda-1} f(x) - (s+\lambda) \int_1^{\infty} \frac{u-[u]}{u^{s+1}} L_u f(x) \, du \end{aligned} \tag{4}$$

(см., например, [37]), где

$$\frac{s+\lambda}{s+\lambda-1} f(x)$$

определено как

$$(s+\lambda) \int_1^{\infty} \frac{1}{u^s} L_u f(x) du = (s+\lambda) \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{s+\lambda}} f(x) du$$

и $[u]$ означает целую часть u.

При этом делаются следующие предположения: $u^\lambda f(x) = O(u^{\sigma+\varepsilon})$, для каждой $f(x)\in F$, операцию λ можно переносить через знак интегралов для случая $R(s)>\sigma_0+1$ (дающего абсолютную сходимость всех интегралов), причем, естественно, значения этих интегралов и подынтегральных выражений предполагаются принадлежащими области определения оператора λ (иначе говоря, все выражения, входящие в формулу, предполагаются имеющими смысл).

Кроме того, равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\log n)^k}{k!}\lambda^{k+1}f(x)=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\log n)^k}{k!}\lambda^k f(x)\quad (u>0,\ f(x)\in F)$$

предполагается справедливым, т.е. предполагается, что к равномерно сходящемуся ряду для $u^{-\lambda}f(x)$ можно почленно применить операцию λ. Последнее будет, наверное, выполнено, если операцию λ можно применять почленно к абсолютно сходящимся рядам или тогда, когда в результате ее применения получится абсолютно сходящийся ряд. Для доказательства формулы отметим, что

$$\frac{d}{du}\left[\frac{1}{u^{s+\lambda}}f(x)\right]=\frac{d}{du}\left[\frac{1}{u^s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\log u)^k}{k!}\lambda^k f(x)\right]=$$
$$=-\frac{s}{u^{s+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\log u)^k}{k!}\lambda^k f(x)-\frac{1}{u^{s+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\log u)^{k-1}}{k!}k\lambda^k f(x)=$$
$$=-(s+\lambda)\frac{1}{u^{s+\lambda+1}}f(x).$$

Рассматривая следующий интеграл, получим формулу (4):

$$(s+\lambda)\int_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+1+\lambda}}f(x)du = \int_1^\infty (s+\lambda)\frac{u-[u]}{u^{s+1+\lambda}}f(x)du =$$

$$= (s+\lambda)\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+\lambda}}f(x)du - \int_1^\infty (s+\lambda)\frac{[u]}{u^{s+1+\lambda}}f(x)du =$$

$$= (s+\lambda)\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+\lambda}}f(x)du - \int_1^\infty [u]\frac{d}{du}\left[\frac{1}{u^{s+1}}f(x)\right]du =$$

$$= (s+\lambda)\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+\lambda}}f(x)du - \int_1^\infty \frac{d}{du}\left[\frac{1}{u^{s+\lambda}}f(x)\right]du-$$

$$-2\int_2^3 \frac{d}{du}\left[\frac{1}{u^{s+\lambda}}f(x)\right]du - \ldots = (s+\lambda)\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+\lambda}}f(x)du-$$

$$-\left[\left(\frac{1}{2^{s+\lambda}}-\frac{1}{1^{s+\lambda}}\right)+2\left(\frac{1}{3^{s+\lambda}}-\frac{1}{2^{s+\lambda}}\right)+\ldots\right]f(x) =$$

$$= (s+\lambda)\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+\lambda}}f(x)du - \zeta(s+\lambda)f(x) \quad \textit{ч. т. д.}$$

Выражение

$$\varphi(x)\frac{s+\lambda}{s+\lambda-1}f(x) = (s+\lambda)\int_1^\infty \frac{du}{u^{s+\lambda}}f(x)du,$$

входящее в формулу (4), является при $R(x) > \sigma_0+1$ частным решением функционального уравнения

$$(s+\lambda-1)\varphi(x) = (s+\lambda)f(x), \tag{5}$$

в самом деле:

$$(s+\lambda-1)\varphi(x) = (s+\lambda)\int\limits_1^\infty (s+\lambda-1)\frac{du}{u^{s+\lambda}} f(x) =$$
$$= -(s+\lambda)\int\limits_1^\infty \frac{d}{du}\left[\frac{1}{u^{s+\lambda-1}}\right] f(x) = (s+\lambda)f(x).$$

Второй член правой части формулы (4) имеет смысл не при $R(s) >$ $> \sigma_0 + 1$, но и не при $R(s) > \sigma_0$, если оператор λ приложим к интегралу $\int\limits_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+\lambda+1}} du$, при этом получается аналитическая от s функция, и если при этом первый член правой части этой формулы аналитически продолжаем внутрь полосы $\sigma_0 < R(s) \leqslant \sigma_0 + 1$, то тогда формула (4) дает аналитическое продолжение функциональной дзета-функции $\zeta(x+\lambda)$, определенной первоначально в области $R(s) > \sigma_0 + 1$, внутрь этой полосы. Вопрос об аналитическом продолжении функциональной дзета-функции, таким образом, связан с аналитическим продолжением одного из решений функционального уравнения (5) по параметру s. Возьмем, в частности, случай, когда F есть множество функций определенных и регулярных, т.е. неограниченно дифференцируемых и разлагающихся в ряд Тейлора, причем положим $\lambda = -x \log \frac{d}{dx}$. В этом случае для $u \geqslant 1$ и $u^{-\lambda}(x) = f(x^u)$ формула (1) приобретает вид

$$\zeta(s+\lambda)f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{f(x^n)}{n^s} =$$
$$= \frac{s+\lambda}{s+\lambda-1} f(x) - (s+\lambda)\int\limits_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+1}} f(x^u) du, \tag{6}$$

где

$$\frac{s+\lambda}{s+\lambda-1} f(x) = (s+\lambda) \int\limits_1^\infty \frac{du}{u^s} f(x^u) du =$$

$$= \left(s - x \log x \frac{d}{dx}\right) \int\limits_1^\infty \frac{du}{u^s} f(x^u) = -\left(s - x \log x \frac{d}{dx}\right) \int\limits_0^x \frac{(\log x)^{s-1} f(z)}{z (\log z)^s} dz$$

является решением линейного дифференциального уравнения

$$(s+\lambda-1) y = (s+\lambda) f(x) \qquad \left(\lambda = -\log x \frac{d}{dx}\right)$$

и может быть получено из общего интеграла. Здесь $R(s) > 1$. Умножая обе части формулы (6) на $\dfrac{\zeta'}{\zeta}(s+\lambda)\dfrac{s+\lambda-1}{s+\lambda}$ и пользуясь коммутативностью всех имеющихся здесь операторов, получим

$$\frac{s+\lambda-1}{s+\lambda} \zeta'(s+\lambda) f(x) = \frac{s+\lambda-1}{s+\lambda} \sum_{n=1}^\infty \frac{\log n f(x^n)}{n^s} =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n) f(x^n)}{n^s} - (s+\lambda-1) \sum_{n=1}^\infty \int\limits_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+1}} \sum \frac{f(x^{nu}) \Lambda(n)}{n^s}.$$

Здесь $\dfrac{s+\lambda-1}{s+\lambda} = (s+\lambda-1)(s+\lambda)^{-1}$, причем $(s+\lambda)^{-1}$ понимается как оператор, обратный к $s+\lambda$ слева, т.е. удовлетворяющий условию $(s+\lambda)^{-1}[(s+\lambda) y(x)] = y(x)$.

Таким оператором $(s+\lambda)^{-1}$ будет в случае, если интегралы

$$\int\limits_0^k (\log t)^{-s} \frac{y(t)}{t \log t} dt \text{ и } \int\limits_0^x (\log t)^{-s} y'(t) dt$$

существуют и $[(\log x)^{-s} y(x)]_{x=0} = 0$, т.е.

$$(s+\lambda)^{-1} y(x) = -(\log x)^s \int\limits_0^x (\log t)^{-s} \frac{y(t)}{t \log t} dt. \tag{7}$$

В самом деле:

$$(s+\lambda)^{-1}[(s+\lambda)y(x)] = -(\log x)^s \int\limits_0^x (\log t)^{-s}\ \frac{s\,y(t) - \log t\ \nu'(t)}{t\log t} dt =$$

$$= (\log x)^s \int\limits_0^x d((\log t)^{-s} y(t)) = y(x).$$

Легко также путем простых выкладок убедиться в том, что построенный здесь оператор $(s+\lambda)^{-1}$ является также обратным правым к $(s+\lambda)$, т.е.

$$(s+\lambda)[(s+\lambda)^{-1}y(x)] =$$

$$= \Big(s - x\log x\frac{d}{dx}\Big)\Big[-(\log x)^s \int\limits_0^x (\log t)^{-s} \frac{y(t)}{t\ \log t} dt\Big] = y(x),$$

легко проверить коммутативность оператора $\dfrac{s+\lambda-1}{s+\lambda} = (s+\lambda-1)(s+\lambda)^{-1} = 1-(s+\lambda)^{-1}$ с оператором L_n $(L_n y(x) = n^{-\lambda} y(x) = y(x^n))$ при всяком n, откуда автоматически вытекает коммутативность оператора $\dfrac{s+\lambda-1}{s+\lambda} = (s+\lambda-1)(s+\lambda)^{-1} = 1-(s+\lambda)^{-1}$ со всеми фигурирующими здесь «функционально-операторными» рядами Дирихле. Также легко доказывается, что операторы $(s+\lambda)$ и L_n коммутируют. Здесь предполагается, что условия существования интегралов

$$\int\limits_0^x (\log t)^{-s} \frac{y(t)}{t\ \log t} dt;\quad \int\limits_0^x (\log t)^{-s} \frac{y'(t)}{t\ \log t} dt;\quad [(\log t)^{-s} y(x)]_{x=0} = 0$$

выполняются для

$$y(x) = (s+\lambda-1)^{-1} f(x) = \int\limits_1^\infty \frac{f(x^u)du}{u^s}$$

и для

$$y(x) = \int_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+1}} f(x^u)du.$$

В этом случае получим следующее тождество:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s} f(x^n) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\log n}{n^s} \Big[(\log x)^s \int_0^x \frac{f(t^u)}{t \log t} (\log t)^{-s} dt + f(x^n)\Big] + \\ + \Big[(s-1) - x \log x \frac{d}{dx}\Big] \int_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+1}} \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s} f(x^{nu}) du. \tag{8}$$

Полагая здесь $s = 0$, $f(x) = x$, что возможно, так как формула (8), доказанная нами для $R(s) > 1$, справедлива в силу принципа аналитического продолжения и в этом случае. Тогда, обозначая через $\Phi(x)$ сумму $\sum\limits_{n=1}^\infty \Lambda(n) x^n$, получим

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^\infty \log n \Big[x^n + \int_0^x t^{n-1} \frac{dt}{\log t}\Big] - \\ - \Big[1 + x \log x \frac{d}{dx}\Big] \int_1^\infty \frac{u-[u]}{u} \Phi(x^u) du. \tag{9}$$

Вывод формулы (6) можно провести почти дословно, опустив предположение о неограниченном дифференцировании функции $f(x)$ и заменив его предположением о существовании только первой производной. Из формулы (4) получим также, при соответствующих ограничениях, полагая $\lambda = x \frac{d}{dx}$, $n^\lambda f(x) = f(n\, x)$, следующую формулу:

$$\zeta(s+\lambda)f(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n\,x)}{n^s}=\frac{s+\lambda}{s+\lambda-1}f(x)-$$
$$-(s+\lambda)\int\limits_1^{\infty}\frac{u-[u]}{u^{s+1}}f(u\,x)du, \tag{10}$$

где

$$\frac{s+\lambda}{s+\lambda-1}f(x)=(s+\lambda)\int\limits_1^{\infty}\frac{f(u\,x)}{u^s}du,$$

справедливую также, как легко видеть, в предположении существования только первой производной. Здесь предполагается: $f(u\,x) = O(u^{\sigma_0})$ при $\geqslant 1$ и $R(s) > \sigma_0 + 1$. Формула (10), подобно предыдущей, может быть, в некоторых частных случаях использована для аналитического продолжения по s функции $\zeta(s+\lambda)f(x)$ внутрь полосы $\sigma_0 < R(s) \leqslant \sigma_0 + 1$. Это будет, наверное, если

$$\frac{s+\lambda}{s+\lambda-1}f(x)=(s+\lambda)\int\limits_1^{\infty}\frac{f(u\,x)}{u^s}du$$

аналитически продолжаема внутрь указанной полосы и если также

$$(s+\lambda)\int\limits_1^{\infty}\frac{u-[u]}{u^{s+1}}f(u\,x)du$$

аналитически продолжаема внутрь этой полосы.

Последнее условие не является само собой разумеющимся: хотя интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{u-[u]}{u^{s+1}}f(u\,x)du$ сходится и в указанной полосе $(s+\lambda)\int\limits_1^{\infty}\frac{u-[u]}{u^{s+1}}f(u\,x)du$ может и не существовать, так как $\lambda = x\dfrac{d}{dx}$, а интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+1}} f(u\,x)dx$ может не иметь производной по x при $\sigma_0 < R(s) \leqslant \sigma_0 + 1$. Из существования и равномерной сходимости интеграла будет всегда следовать его дифференцируемость по x, если рассматриваемая область изменения есть плоскость комплексного переменного, а $f(x)$ есть регулярная аналитическая функция комплексного переменного x. Если $\lambda' = B\lambda B^{-1}$, где B есть некоторый дистрибутивный оператор, то легко видеть, что $L'_u = u^{\lambda'} = Bu^{\lambda}B^{-1} = BL_uB^{-1}$, так как $\lambda'^{\,k} = B\lambda^k B^{-1}$ и

$$u^{\lambda'} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\log u)^k}{k!} \lambda'^{\,k} = B\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\log u)^k}{k!} \lambda^k\Big) B^{-1}.$$

Таким образом, от любой из рассмотренных формул можно перейти ко многим, преобразовывая λ и L_u, входящие в эти формулы, при помощи произвольного линейного оператора B. Например, если $B^{-1}f(x) = f(\varphi(x))$, где $\varphi(x)$ — заданная функция, имеющая обратную в данной области, то $Bf(x) = f(\Psi(x))$, где $\varphi(\Psi(x)) = x(\Psi(x))$, и тогда, если $\lambda = x\frac{d}{dx} L_u f(x) = f(u\,x)$, имеем

$$\lambda' = B\lambda B^{-1} = -\Psi(x)\varphi'(\Psi(x))\frac{d}{dx} = -\frac{\Psi(x)}{\Psi'(x)}\frac{d}{dx}$$

и

$$L'_u f(x) = BL_uB^{-1}f(x) = f(\varphi(u\Psi(x))).$$

Формула (4) в применении к случаю $\lambda = \lambda'$ и $L = L'_u$ дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\varphi(n\,\Psi(x)))}{n^s} = \Big(s - \frac{\Psi(x)}{\Psi'(x)}\frac{d}{dx}\Big) \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{u^s} f(\varphi(u\,\Psi(x)))du -$$

$$-\Big[s - \Psi(x)\varphi'(\Psi(x))\frac{d}{dx}\Big] \int\limits_1^{\infty} \frac{u-[u]}{u^{s+1}} f(\varphi(u\,\Psi(x)))du$$

или

$$\begin{aligned} \zeta(s+\lambda')f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\varphi(n\,\Psi(x)))}{n^s} = \frac{s+\lambda'}{s+\lambda'-1} f(x) - \\ - (s+\lambda') \int\limits_1^{\infty} \frac{u-[u]}{u^{s+1}} L'_u f(x) du. \end{aligned} \tag{11}$$

Умножаем обе части последнего тождества (в смысле композиции преобразований) на $-\dfrac{s+\lambda'-1}{s+\lambda'}\dfrac{\zeta'(s+\lambda')}{\zeta(s+\lambda')}$, где $\dfrac{s+\lambda'-1}{s+\lambda'}$ есть оператор, обратный к $\dfrac{s+\lambda'}{s+\lambda'-1}$ (здесь $\dfrac{s+\lambda'-1}{s+\lambda'}$ понимается как оператор $(s+\lambda'-1)(s+\lambda')^{-1}$, где $(s+\lambda')^{-1}$ означает оператор, обратный слева к $s+\lambda'$, т.е. $(s+\lambda')^{-1}[(s+\lambda')y(x)] = y(x)$).

Таким оператором будет для любого $y(x)$, для которого интегралы $\displaystyle\int\limits_{\varphi(-\infty)}^{x} \Psi(t)^{-s-1}\Psi'(t)\,y(t)dt$ и $\displaystyle\int\limits_{\varphi(-\infty)}^{x} \Psi(t)^{-s}y'(t)dt$ будут сходящимися и для которых $\Big[\Psi(x)^{-s}y(x)\Big]_{x=\varphi(-\infty)}$ следующий оператор:

$$(s+\lambda)^{-1}y(x) = -\Psi(x)^s \int\limits_{\varphi(-\infty)}^{x} \Psi(t)^{-s-1}\Psi(t)\,y(t)dt,$$

как в этом нетрудно убедиться, производя элементарные выкладки, аналогичные ранее проделанным. Также легко убедиться в коммутативности всех фигурирующих здесь операторов между собою, и, пользуясь коммутативностью всех фигурирующих здесь операторов, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}f(\varphi(n\,\Psi(x)))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}\Big[f(\varphi(n\,\Psi(x)))+$$
$$+(\Psi(x))^s\int\limits_{\varphi(-\infty)}^{x} f(\varphi(n\,\Psi(x))\Psi(x)^{-s}\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)}dx)\Big]+\tag{12}$$
$$+\Big(s-1-\frac{\Psi(x)}{\Psi'(x)}\frac{d}{dx}\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\frac{u-[u]}{u}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}f(\varphi(n\,u\,\Psi(x)))\Big]du.$$

В случае $\varphi=(x)=\Psi(x)=x$ получим, в частности:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}f(n\,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}\Big[f(n\,x)+x^s\int\limits_{\infty}^{x} f(n\,x)\,x^{-s-1}dx\Big]+\\+\Big(s-1-x\frac{d}{dx}\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\frac{u-[u]}{u}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}f(n\,u\,x)du,\end{aligned}\tag{13}$$

где $f(x)$ — любая функция, имеющая первую производную, $\lim\limits_{i\to-\infty}\Big[f(t)\,t^{-1}\Big]=0$ и такая, что все ряды и интегралы, входящие в формулу, сходятся абсолютно и равномерно в отношении рассматриваемой области, в частности, при $R(s)\geqslant 1+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, $x<0$.

Еще специальнее, в случае $f(x)=\sin x\,e^{\delta x}$, $R(s)\geqslant 1+\varepsilon$, $x<0$, получаем после небольших упрощений

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\sin(nx)\,e^{nx\delta}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^s}\left[\sin nx\,e^{nx\delta}+|x|^s\int\limits_{-x}^{\infty}\sin nx\,e^{-nx\delta}x^{-s-1}dx\right]+\tag{14}$$
$$+\Big(s-1-x\frac{d}{dx}\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\frac{u-[u]}{u}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}e^{nxu\delta}\sin(nux)\right]du.$$

При $-1 < R(s) < 0$, выражая x^{-s-1} в форме $\dfrac{1}{\Gamma(s+1)}\int\limits_0^\infty e^{-tx}t^s dt$ и производя перемену в порядке интегрирования:

$$|x|^s \int\limits_1^\infty \sin nx e^{nx\delta} x^{-s-1} dx =$$
$$= \frac{|x|^s}{\Gamma(s+1)} \int\limits_0^\infty \frac{e^{xt+xn\delta}[n\cos nx - (t+n\delta)\sin(nx)]}{(t+n\delta)^2+n^2} t^s dt. \tag{15}$$

Правая часть равенства (15) дает аналитическое продолжение по левой части в области $R(s) > -1$. Положим, для сокращения:

$$\begin{aligned}\Phi_n(x,x,\delta) &= |x|^s \int\limits_{-x}^\infty \sin nx\, x^{-s-1} e^{-nx\delta} dx = \\ &= \frac{|x|^s}{\Gamma(s+1)} \int\limits_0^\infty \frac{e^{x(t+n\delta)}(n\cos nx - (t+n\delta)\sin nx)}{(t+n\delta)^2+n^2} t^s dt.\end{aligned} \tag{16}$$

Очевидно, что обе части формулы (16) определяют $\Phi_n(x,s,\delta)$ при $x < 0$, $\delta > 0$ как целую функцию от s.

Формула (16) теперь приобретает вид

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s} e^{nx\delta}\sin(nx) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\log n}{n^s}\Big[\sin nx\, e^{nx\delta} + \Phi_n(x,s,\delta)\Big] + \\ &+ \sum_{n=1}^\infty \int\limits_1^\infty \frac{u-[u]}{u}\Big[(s-1)e^{nux\delta}\sin(nux) - x\,nu\delta\sin(nux)e^{nux} - \\ &- nux\cos(nux)e^{nux\delta}\Big]du.\end{aligned} \tag{17}$$

Умножая обе части последнего равенства на $\sin x$ и интегрируя в пределах от -2π до $-\pi$, получим после элементарных упрощений

$$\delta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{s-1}}\frac{2n\,[(-1)^{n-1}e^{-n\pi\delta}-e^{-2n\pi\delta}]}{[(n-1)^2+n^2\delta^2][(n+1)^3\,n^2\delta^2]}=$$
$$=\delta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^{s-1}}\frac{2n\,[(-1)^{n-1}e^{-n\pi\delta}-e^{-2n\pi\delta}]}{[(n-1)^2+n^2\delta][(n+1)^2+n^2\delta]}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}\int\limits_{-2\pi}^{-\pi}\Phi_n(x,s,\delta)\sin x\,dx+ \tag{18}$$
$$+\int\limits_1^{\infty}\frac{u-[u]}{u}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}F_n(s,\delta,u)\frac{\Lambda(n)}{n^s}\Big]du.$$

Здесь $F_n(s,\delta,u)$ для сокращения положено вместо громоздкого, но не элементарного выражения, возникающего в процессе интегрирования. Переходя в формуле (18) к пределу при $\delta\to 0$ и замечая, что левая часть и первая сумма правой части равенства (18) стремятся при $\delta\to 0$ к нулю, получим

$$\lim\int\limits_1^{\infty}\frac{u-[u]}{u}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}F(s,\delta,u)\right]du=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}\frac{1}{\Gamma(s+1)}\times$$
$$\times\int\limits_{-2\pi}^{-\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{xt}(n\,\cos nx-t\,\sin nx)}{t^2+n^2}|x|^s\sin x\,t^s dxdt. \tag{19}$$

Другие примеры последовательностей функциональных операторов, обладающих M-свойством, получим, полагая:

$$L_nf(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\log n)^k}{k!}K^{(k)}(x,t)f(t)dt,$$

где $K^{(k)}(x,t)$ означает последовательные итерации заданного ядра $K(x,t)$. Полагая

$$\sum_{m\sim 1}^{\infty}\frac{(-\log n)^m}{m!}K^{(m)}(x,y)=K_n(x,y),$$

получаем

$$L_n f(x) = f(x) + \int_a^b K_n(x,\, t) f(t) dt.$$

Пользуясь известным свойством итерированных ядер

$$\int_a^b K^{(p)}(x,t) K^{(q)}(t,y) ds = K^{(p+q)}(x,y),$$

легко доказать здесь наличие M- свойства. Получая

$$(-\lambda) f(x) = \int_a^b K(x,t) f(t) dt,$$

имеем

$$(-\lambda)^m f(x) = \int_a^b K^{(m)}(x,t) f(t) dt.$$

Легко видеть, что тогда

$$L_n f(x) = n^{-\lambda} f(x) = f(x) + \int_a^b K_n(x,t) f(t) dt,$$

откуда M- свойство становится очевидным.

Здесь $\zeta(s+\lambda) f(x)$ равно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n f(x)}{n^s} = \zeta(s) f(x) + \int_a^b H(x,t,s) f(t) dt$$

и

$$\zeta\,'(s+\lambda) f(x) = \zeta\,'(s) f(x) + \int_a^b G(x,t,s) f(t) dt,$$

где

$$H(x,t,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_n(x,y)}{n^s} \quad \text{и} \quad G(x,t,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}K_n(x,y).$$

Тождество Эйлера для функциональной дзета-функции дает

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}\Big[\varphi_s(x)+\int\limits_a^b K_n(x,t)\varphi_s(t)dt\Big]=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\Big[f(x)+\int\limits_a^b K_n(x,t)f(t)dt\Big],$$

где $f(x)$ — некоторая данная функция, для которой рассматриваемые здесь ряды сходятся абсолютно равномерно, а $\varphi_s(x)$ есть решение интегрального уравнения

$$\varphi_s(x)+\int\limits_a^b H(x,t,s)\varphi_s(x)dt=f(x),$$

причем очевидно, что

$$\varphi_s(x)=\frac{1}{\zeta(s)}f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\int\limits_a^b K_n(x,t)f(t)dt.$$

Еще один пример функциональной дзета-функции получим, полагая

$$L_nf(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^k}{k!}f(s+k\omega); \quad \zeta(s+\lambda)f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_nf(x)}{n^s},$$

где ω — заданное число.

Функциональное уравнение для функциональной дзета-функции

Рассмотрим дистрибутивный функциональный оператор, определенный на функциональном множестве F, отображающий множество F в множество F. Положим, как и выше,

$$L_u f(x) = u^{-\lambda} f(x) = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\lambda^k f(x)}{k!} \Big(-\log u \Big)^k,$$

где $u > 0$, λ, $f(x) \in F$, и предположим, что ряд, записанный справа, сходится абсолютно и почленное применение к нему операции $\lambda^m \, (m \geqslant 1)$ всегда законно. Кроме того, допустим, что для любой $f(x) \in F$

$$L_u f(x) = O(u^{\sigma_0}) \quad \text{и} \quad L_u f(x) \in F.$$

Тогда ряд: $\zeta(s+\lambda) f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{L_n f(x)}{n^s}$ будет сходящимся при $R(s) > \sigma_0 + 1$, $f(x) \in F$, и мы предположим здесь, как и всюду раньше, что к этому ряду можно почленно применять операторы λ^m, L_u, и что сумма этого ряда входит в F.

Предположим далее

$$L_u f(x) = O(u^{-\sigma_1})$$

при $u \to 0$, где $\sigma_1 > 0$ и $f(x) \in F$. Введем линейный функциональный оператор $\Gamma(s+\lambda)$, определив его формулой

$$\Gamma(s+\lambda) f(x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{\,s+\lambda-1} f(x) dt = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{\,s-1} L_{\frac{1}{t}} f(x) dt.$$

Очевидно, что $\Gamma(s+\lambda)$ всегда имеет смысл при $R(s)>\sigma_1$. Легко доказать формулу

$$\Gamma\Big(\frac{s+\lambda}{2}\Big)\frac{L_n f(x)}{n^s}=\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\int\limits_0^\infty e^{-\pi n^2 t}t^{\frac{\lambda+s}{2}-1}f(x)dt, \qquad (20)$$

при $R(s)>\sigma_1$, предположив, что оператор $\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}=\pi^{\frac{s}{2}}L_{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}$ можно переносить через знаки последнего интеграла. В самом деле

$$\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\int\limits_0^\infty e^{-\pi n^2 t}t^{\frac{s}{2}-1}L_{t^{-\frac{1}{2}}}f(x)dt=\int\limits_0^\infty e^{-\pi n^2 t}\pi^{\frac{s}{2}}t^{\frac{s}{2}-1}L_{(\pi t)^{-\frac{1}{2}}}f(x)dt.$$

Подстановкой $\pi n^2 t=t'$ получим далее:

$$\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\int\limits_0^\infty e^{-\pi n^2 t}t^{\frac{s}{2}-1}L_{t^{-\frac{1}{2}}}f(x)dt=\frac{1}{n^s}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\frac{s}{2}-1}L_{t^{-\frac{1}{2}}}L_n f(x)dt=$$
$$=\frac{1}{n^s}\Gamma\Big(\frac{s+\lambda}{2}\Big)L_n f(x) \quad \text{и т.д.}$$

Здесь мы двукратно использовали M-свойство: $L_a\,L_b=L_{ab}$.

Предполагая законность почленного применения операторов $\Gamma\left(\dfrac{s+\lambda}{2}\right), \pi^{\frac{s+\lambda}{2}}$ к рассматриваемым рядам, получим путем суммирования обеих частей равенства (20) по n от единицы до бесконечности:

$$\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)f(x)=\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\int\limits_0^\infty \Theta(t)t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt, \qquad (21)$$

где $\Theta(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2 t}$. На основании известного функционального уравнения для тэта-функции имеем

$$\Theta(t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t}}\,\Theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

Отсюда получаем

$$\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)f(x)=\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\int\limits_0^1\Theta(t)\,t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)\,dt+$$

$$+\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\int\limits_0^\infty\Theta(t)\,t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)\,dt=\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\left(-\frac{1}{s+\lambda}+\frac{1}{s-1+\lambda}\right)f(x)+$$

$$+\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\int\limits_0^1\Theta\left(\frac{1}{t}\right)\,t^{\frac{s-1+\lambda}{2}}f(x)\,dt+\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\int\limits_1^\infty\Theta(t)\,t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)\,dt.$$

Здесь $\left(-\frac{1}{s+\lambda}+\frac{1}{s-1+\lambda}\right)f(x)=\frac{1}{(s+\lambda)(s-1+\lambda)}f(x)$ означает интеграл $\int\limits_0^1\left[-\frac{1}{2}t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}+\frac{1}{2}t^{\frac{s-1+\lambda}{2}-1}\right]f(x)\,dt$, являющийся, как нетрудно видеть, одним из решений функционального уравнения

$$(s+\lambda)(s+\lambda-1)y(x)=f(x). \tag{22}$$

Производя замену переменной интегрирования: $t'=\frac{1}{t}$, получим

$$\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)f(x)=\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x)+$$
$$+\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\int\limits_1^\infty\Theta(t)\left(t^{\frac{1-s+\lambda}{2}-1}+t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}\right)f(x)\,dt, \tag{23}$$

$$\pi^{-\frac{s+\lambda}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)f(x)-\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x)=$$
$$=\int\limits_1^\infty\Theta(t)\left[t^{\frac{1-s-\lambda}{2}-1}+t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}\right]f(x)\,dt. \tag{24}$$

Последний интеграл существует во всей плоскости комплексного переменного s, так как $\Theta(t)$ убывает при $t\to 0$ по показательному закону и представляет поэтому аналитическое продолжение оператора

$$\pi^{-\frac{s+\lambda}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)-\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}$$

на всю плоскость. Предполагая, что оператор

$$\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}=-\frac{1}{(s+\lambda)(1-s-\lambda)}$$

может быть аналитически продолжен на всю плоскость комплексного переменного (т.е., предполагая, что $\dfrac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x) = F(x,s)$ продолжаемо по s на всю плоскость s при любой $f(x)\in F$), получим аналитическое продолжение $\pi^{-\frac{s+\lambda}{2}}\Gamma\left(\dfrac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)$. Если мы предложим, что не только произведение $\Gamma\left(\dfrac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)$, но и отдельные сомножители $\Gamma\Big(\dfrac{s+\lambda}{2}\Big)$ и $\zeta(s+\lambda)$ продолжаемы и что, кроме того, существует $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)}$, как регулярный[1] оператор, приложимый к $\Gamma\left(\dfrac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)$ и обратный $\Gamma\left(\dfrac{s+\lambda}{2}\right)$, то, умножая обе части формулы (24) на $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)}\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}$, получим формулу, дающую аналитическое продолжение $\zeta(s+\lambda)$ во всю плоскость комплексного переменного s. Заменяя в предыдущих рассуждениях оператор λ на $-\lambda$ и комплексный параметр s на $1-s$ и предполагая при этом, что все предыдущие условия выполнены: $\Gamma\left(\dfrac{1-s-\lambda}{2}\right)$ аналитически продолжаем на всю плоскость s на соответствующем функциональ-

[1]Оператор A_s, определенный на F, мы называем регулярным, если для любой $f(x)$ он является регулярной (голоморфной) функцией от s.

ном множестве и т.д., получим

$$\pi^{-\frac{1-s-\lambda}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)\zeta(1-s-\lambda)f(x)-$$
$$-\left[\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}\right]^{*} f(x)=\int\limits_{1}^{\infty}\Theta(t)\left[t^{\frac{1-s-\lambda}{2}-1}+t^{\frac{s+\lambda}{2}}\right]f(x)dt, \tag{25}$$

где $\left[\dfrac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}\right]^{*} f(x)$ означает или значения суммы интегралов $-\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} t^{\frac{1-s-\lambda}{2}-1} f(x)dt+\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} t^{\frac{-s-\lambda}{2}-1} f(x)dt$ или, если, по крайней мере, один из интегралов перестает сходиться, сумму аналитических продолжений слагаемых этой суммы, подобно тому, как через $\dfrac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x)$ была обозначена сумма двух интегралов и аналитическое продолжение этой суммы

$$\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x)=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} t^{\frac{s+\lambda}{2}-1} f(x)dt+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} t^{\frac{s+\lambda-1}{2}} f(x)dt.$$

Заметим, что в общем случае, $\dfrac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x)$ и $\left[\dfrac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}\right]^{*} f(x)$ не равны тождественно, как это будет, если λ — число.

Сопоставляя формулы (24) и (25), получим функциональное уравнение для функциональной дзета-функции, аналогичное функциональному уравнению Римана для обычной дзета-функции Римана:

$$\pi^{-\frac{s+\lambda}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)-\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}=$$
$$=\pi^{-\frac{1-s-\lambda}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)\zeta(1-s-\lambda)-\left[\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}\right]^{*}. \tag{26}$$

Это уравнение приобретает простой вид, полностью аналогичный виду функционального уравнения для обычной дзета-функции:

$$\pi^{-\frac{s+\lambda}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)=\pi^{-\frac{1-s-\lambda}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)\zeta(1-s-\lambda) \tag{27}$$

в случае, если

$$\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x)=\left[\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}\right]^{*}f(x),$$

т.е. если

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{s+\lambda-1}{2}-1}f(x)dt=\\
&=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{1-s-\lambda}{2}-1}f(x)dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{-\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt,
\end{aligned} \tag{28}$$

где значения интегралов понимаются обычно, если интегралы сходятся, и как аналитические продолжения интегралов в случае их расходимости.

Подставляя $t=\dfrac{1}{t'}$ в интегралы правой части равенства (28), убеждаемся, что оно принимает вид

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt-\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt+\\
&+\frac{1}{2}\int\limits_2^1 t^{\frac{s+\lambda-1}{2}-1}f(x)dt+\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty t^{\frac{s+\lambda-1}{2}-1}f(x)dt=0.
\end{aligned}$$

Заметим, что сумму интегралов $\int\limits_0^1 t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt+\int\limits_1^\infty t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt$ нельзя, вообще говоря, обозначить как интеграл $\int\limits_0^\infty t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt$. Это можно сделать, если у областей первоначального определения интегралов $\int\limits_0^1 t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt$ и $\int\limits_1^\infty t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt$ (до аналитического продолжения) есть общая часть, т.е. если существует область значений, в которой интеграл $\int\limits_0^\infty t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt$ будет сходиться. Это последнее обстоятельство не всегда имеет место: $\int\limits_0^\infty t^s dt$ расходится при любом s, в то время как интегралы $\int\limits_0^1 t^s dt$ и $\int\limits_1^\infty t^s dt$ сходятся в соответствующих областях и продолжаемы на всю плоскость. Предполагая существование области сходимости у интеграла $\int\limits_0^\infty t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt$ и определяя $\Phi(f(x), s)$ как значение этого интеграла или его аналитического продолжения, мы можем условие, при котором уравнение (26) принимает формулу (27), записать в виде условия

$$\Phi(f(x), s) - \Phi(f(x), s-1) = 0 \quad (f(x) \in F). \tag{29}$$

Нетрудно убедиться путем элементарных выкладок, что все операторы, входящие в формулы (26) и (27), между собой коммутируют. Для любого регулярного, в данной части плоскости комплексного переменного, линейного оператора A_s (т.е. для любого линейного оператора, для которого $A_s f(x)$ при $f(x) \in F$ будет регулярной функцией комплексного параметра s) можно определить также регулярный и линейный в той же части плоскости s оператор A'_s по формуле

$$A'_s f(x) = \frac{d}{ds}\, A_s f(x).$$

При этом при ограничениях весьма общего характера легко вывести правило дифференцирования:

$$(A_s B_s)' = A_s' B_s + A_s B_s'.$$

В самом деле

$$A_{s+\Delta_s} B_{s+\Delta_s} f(x) - A_s B_s f(x) = A_{s+\Delta_s} \left[B_s f(x) + \Delta B_s f(x) \right] -$$
$$-A_s B_s f(x) = A_{s+\Delta_s} B_s f(x) + A_{s+\Delta_s} \left[\Delta B_s f(x) \right] - A_s B_s f(x) =$$
$$= \Delta A_s \left[B_s f(x) \right] + A_{s+\Delta_s} \left[\Delta B_s f(x) \right].$$

Отсюда

$$\frac{(A_{s+\Delta_s} B_{s+\Delta_s} - A_s B_s) f(x)}{\Delta s} = \frac{\Delta A_s \left[B_s f(x) \right]}{\Delta s} + A_{s+\Delta_s} \left[\frac{\Delta B_s f(x)}{\Delta s} \right].$$

Устремляя здесь Δs к нулю, получаем требуемый результат[1]. Предполагая условие (29) выполненным и допуская, что регулярные и коммутирующие со всеми здесь рассматриваемыми операторами, операторы $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)}$ и $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)}$, обратные к $\Gamma\left(\dfrac{s+\lambda}{2}\right)$ и $\Gamma\left(\dfrac{1-s-\lambda}{2}\right)$, существуют, мы убеждаемся из формулы (27), что если для $\zeta(s+\lambda)$ в некоторой области существует обратный оператор, то в той же области существует и регулярный оператор, обратный к $\zeta(1-s-\lambda)$ в той же области. В частности, для $\zeta(s+\lambda)$ существует обратный оператор в области $R(s) < -\sigma$, а для $\zeta(s-\lambda)$ — в области $R(s) > \sigma_1 + 1$ и $R(s) < -\sigma_0$. Вопрос о существовании обратного к $\zeta(s+\lambda)$ регулярного оператора в «критической полосе» $-\sigma_1 \leqslant R(s) \leqslant \sigma_0 + 1$ не менее труден в общем случае, чем вопрос о нулях дзета-функции Римана. Дифференцируя обе части формулы (27) по s, пользуясь при этом выведенным выше правилом дифференцирования произведения и умножая результат дифференцирования на оператор, обратный к обеим частям равенства (27), получим функциональное уравнение для логарифмической производной

[1] Здесь предполагается, что предельный переход $\lim A_{s+\Delta_s} \left[\frac{\Delta B_s f(x)}{\Delta s} \right] = A_s \left[B_s' f(x) \right]$ законен, что является дополнительным допущением.

функциональной дзета-функции:

$$\frac{\zeta'(s+\lambda)}{\zeta(s+\lambda)}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)}=\log\pi-\frac{\zeta'(1-s-\lambda)}{\zeta(1-s-\lambda)}-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)}. \tag{30}$$

Заметим, что здесь $\dfrac{1}{\zeta(s+\lambda)}$ и $\dfrac{1}{\zeta(s-\lambda)}$ в областях $R(s)<-\sigma$ и $R(s)<-\sigma_0$ не могут быть рассматриваемы, вообще говоря, как аналитические продолжения этих функций из области их первоначального определения, как это имеет место для прямых дзета-функций. Это будет верно, если критические полосы, через которые прямые дзета-функции могут быть, при всех сделанных выше предположениях, продолжены, аналитические не содержат купюр для обратных дзета-функций, т.е. если существует для каждой $f(x)\in F$ по крайней мере одна линия, пересекающая критическую полосу, по которой можно продолжить $\dfrac{1}{\zeta(s+\lambda)}f(x)$, $\dfrac{1}{\zeta(1-s-\lambda)}f(x)$ по s. Предложение о возможности аналитического продолжения $\Gamma\left(\dfrac{s+\lambda}{2}\right)$ и $\Gamma\left(\dfrac{1-s-\lambda}{2}\right)$ на всю плоскость комплексного переменного фактически во многих конкретных случаях выполняется, причем большую роль играет здесь функциональное уравнение для «функциональной» гамма-функции $\Gamma(s+\lambda+1)=(s+\lambda)\Gamma(s+\lambda)$, которое нетрудно доказать. Предположение о существовании $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)}$ и $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)}$ также часто фактически выполняется, так что перечисленные выше ограничения гораздо менее узки, чем это может показаться. Соотношение (30) в случае, если и $\dfrac{\zeta'(s+\lambda)}{\zeta(s+\lambda)}f(x)$, и $\dfrac{\zeta'(1-s-\lambda)}{\zeta(1-s-\lambda)}f(x)$ могут быть разложены в сходящийся ряд, дает тождество, связывающее два ряда и распространенное на простые числа, является неистощимым источником для получения таких тождеств. Для логарифмической производной функциональной дзета-функции справедлива для многих выборов λ формула Дирихле

$$\frac{\Gamma'(s+\lambda)}{\Gamma(s+\lambda)}f(x)=\int\limits_0^\infty\left\{e^{-t}f(x)-\frac{1}{(1+t)^{s+\lambda}}f(x)\right\}\frac{dt}{t}, \tag{31}$$

где, как и всюду, $\dfrac{\Gamma'(s+\lambda)}{\Gamma(s+\lambda)}$ $=\Gamma'(s+\lambda)\Gamma(s+\lambda)^{-1}$ есть результат композиции оператора $\Gamma'(s+\lambda)$ с оператором, обратным к $\Gamma(s+\lambda)$. В частности, формула справедлива в данной области значений s, если интеграл правой части формулы сходится абсолютно в указанной части плоскости и $\Gamma(s+\lambda)\int\limits_0^\infty\left[e^{-t}f(x)-\dfrac{1}{(1+t)^{s+\lambda}}f(x)\right]\dfrac{dt}{t}$ всегда принадлежит области определения оператора $\dfrac{1}{\Gamma(s+\lambda)}$.

Тогда формула (31) Дирихле выводится путем, совершенно аналогичным выводу обычной формулы Дирихле. Применим теперь все предыдущие рассуждения к случаю

$$\lambda=-x\frac{d}{dx},\qquad L_u f(x)=f(ux).$$

В этом случае

$$\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)f(x)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\frac{s}{2}}f\left(x\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt,\tag{32}$$

$$\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)f(x)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\frac{s}{2}-1}f\left(x\sqrt{t}\right)dt.\tag{33}$$

Операторы $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)}$ и $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)}$ означают соответственно решение уравнений

$$\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\frac{s}{2}-1}y\left(x\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt=f(x)\tag{34}$$

и

$$\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\frac{1-s}{2}-1}y\left(x\sqrt{t}\right)dt=f(x)\tag{35}$$

и их аналитическое продолжение.

Оба уравнения легко сводятся к уравнению Лапласа:

$$\int\limits_0^\infty e^{-tu} y(t)dt = f(u)$$

(см. [29]).

Можно показать, что в указанном случае $\lambda = -x\dfrac{d}{dx}$ условия приложимости формулы (27), как правило, выполняются, кроме условия (29), которое представляет собой специальное ограничение, накладываемое на функцию $f(x)$. Здесь оно имеет вид

$$\int\limits_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} f\left(x\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt,$$

(где $\int\limits_0^\infty$ понимается, как сумма $\int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty$, а каждый из последних интегралов понимается или обычно в случае сходимости, или как аналитическое продолжение), есть всегда периодическая, с периодом 1 функция от s. Особо интересен при этом случай, когда существует область совместной сходимости рядов: $\sum\limits_{n=1}^\infty \dfrac{f(nx)}{n^s}\Lambda(n)$ и $\sum\limits_{n=1}^\infty \dfrac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{n^s}\Lambda(n)$. Тогда при наличии всех вышеперечисленных условий получается простое соотношение между этими рядами и интегралами

$$\int\limits_0^\infty \left[e^{-t} f(x) - \frac{1}{(1+t)^{\frac{s}{2}}} f(x\sqrt{1+t})\right] \frac{dt}{t},$$

$$\int\limits_0^\infty \left[e^{-t} f(x) - \frac{1}{(1+t)^{\frac{1-s}{2}}} f\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right)\right] \frac{dt}{t}.$$

На детальном рассмотрении подобных тождеств я думаю остановиться в следующей работе. Замечу только, что условие дифференцируемости не существенно, так как фактически приходится рассматривать не $\lambda = -x\dfrac{d}{dx}$, а $L_u f(x) = f(ux)$.

Если мы умножим обе части равенства (26) на $(s+\lambda)(s+\lambda-1)$ и допустим при этом, что операторы $(s+\lambda)$ и $(s+\lambda-1)$ можно переносить через знак $\dfrac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x)$ и $\left[\dfrac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}\right]^{*}f(x)$, то получим

$$(s+\lambda)(s+\lambda-1)\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x)=$$

$$=(s+\lambda)(s+\lambda-1)\left[-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{s-1+\lambda}{2}-1}f(x)dt\right]=$$

$$=(s+\lambda)(s+\lambda-1)\left[-\int\limits_0^1 t^{s+\lambda-1}f(x)dt+\int\limits_0^1 t^{s+\lambda-2}f(x)dt\right]=$$

$$=-(s+\lambda-1)\int\limits_0^1(s+\lambda)t^{s+\lambda-1}f(x)dt+$$

$$+(s+\lambda)\int\limits_0^1(s+\lambda-1)t^{s+\lambda-2}f(x)dt=$$

$$=-(s+\lambda-1)\int\limits_0^1 d\left[t^{s+\lambda}f(x)\right]+(s+\lambda)\int\limits_0^1 d\left[t^{s+\lambda-1}f(x)\right]=f(x).$$

Аналогичным образом получим

$$(s+\lambda)(s+\lambda-1)\left[\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}\right]^{*}f(x)=f(x).$$

Следовательно, помножая (26) на $(s+\lambda)(s+\lambda-1)$, получим

$$(s+\lambda)(s+\lambda-1)\zeta(s+\lambda)\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\pi^{-\frac{s+\lambda}{2}}=$$

$$=(s+\lambda)(s+\lambda-1)\zeta(1-s-\lambda)\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)\pi^{\frac{1-s-\lambda}{2}}. \qquad (36)$$

Взяв логарифмическую производную от обеих частей этого равенства, получим (30). Неудобство последнего рассуждения связано с необходимостью предполагать, что все слагаемые обеих частей равенства

$$\pi^{-\frac{1-\lambda}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)f(x)-\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x)=$$
$$\pi^{-\frac{1-s-\lambda}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)\zeta(1-s-\lambda)f(x)-\left[\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}\right]^{*}f(x)$$

входят в область определения оператора $(s+\lambda)(s+\lambda-1)$, и при этом оператор $\dfrac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}$ приложим ко всем рассматриваемым здесь функциям и коммутирует со всеми здесь фигурирующими операторами.

В случае $\lambda=-x\dfrac{d}{dx}$ это рассуждение позволит нам в известных случаях доказать (36) и, следовательно, (30), пользуясь (26) без дополнительного ограничения, накладываемого равенством (29), но зато при этом придется вводить дополнительные ограничения другого порядка, в частности, рассмотрение $(s+\lambda)(s+\lambda-1)$ требует двукратной дифференцируемости $f(x)$, в то время как формула (30) может быть доказана в некоторых случаях без предположений о дифференцируемости, если (29) имеет место.

Особенно интересно было бы доказать законность формулы (30) для случая, когда $f(x)$ обращается в нуль при достаточно больших и достаточно малых значениях x. Тогда $(L_n f(x)=f(nx))$ формула (30) дала бы соотношение между конечными суммами, распространенными на простые числа, и интегралами, не связанными с простыми числами. Можно во всех рассматриваемых случаях взять вместо $\zeta(s+\lambda)$ функцию $L(s+\lambda,\chi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\chi(n)}{n^{s+\lambda}}$, где χ — характер Дирихле по модулю K, и доказать функциональное уравнение, выражающее $L(s+\lambda,\chi)$ через $L(1-s-\lambda,\overline{\chi})$, и «функциональную» гамма-функцию. (ср. [14, с. 486]). Отмечу, что в этой работе основная мысль: рассмотреть тождество Эйлера для функциональных операторов — принадлежит проф. Шнирельману, все конкретные формулы и все дальнейшие соображения, здесь рассмотренные, даны автором настоящей работы.

15. Об одном специальном семействе бесконечных унитарных матриц

(Представлено академиком П. М. Виноградовым 20. XII 1945)

В моей работе [65] я доказываю, между прочим, следующее предложение.

Теорема. *Матрица* C_ω *с элементами*

$$c_{ik} = \frac{\omega(k)}{\sqrt{\sigma\,\Omega(i)}} = \sum_{d/(i,k)} \mu\Big(\frac{i}{d}\Big)|\,\omega(d)|^{-2},$$

где $\omega(n)$ *удовлетворяет условиям*

$$\omega(n) \neq 0, \quad \omega(a\,b) = \omega(a)\,\omega(b), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\omega(n)|^2 < \infty$$

и где

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} |\,\omega(n)|^2,$$

$$\Omega(n) = \sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big)|\,\omega(d)|^{-2} = |\,\omega(n)|^{-2} \prod_{p/n} (1 - |\,\omega(p)|^2),$$

унитарна , т.е.

$$C_\omega^*\,C_\omega = C_\omega\,C_\omega^* = E.$$

Здесь $E = \|\delta_{i\,k}\|$ — единичная матрица, и операция * переводит любую матрицу $A = \|a_{i\,k}\|$ в $A^* = \|a^*_{i\,k}\|$, где $a^*_{i\,k} = \overline{a}_{k\,i}$.

Можно показать, что условие $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\,\omega(n)|^2 < \infty$ эквивалентно условиям:

1) $|\,\omega(p)| < 1$ (p — любое простое число);
2) $\sum\limits_{p} |\,\omega(p)|^2 < \infty$, где p пробегает все простые числа.

Так как всякая мультипликативная функция определяется однозначно через ее значения в простых числах, то матрица C_ω зависит от параметров x_1, x_2, …, где $x_i = \omega(p_i)$, p_1, p_2, … — последовательность всех простых чисел. Таким образом, $c_{i\,k} = c_{i\,k}(x_1,\, x_2,\, \ldots)$, где

$x_1,\ x_2,\ \ldots$ — любые комплексные числа, удовлетворяющие условиям: 1) $0 < |x_i| < 1$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$; 2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\,x_i\,|^2 < \infty$. Это бесконечнопараметрическое семейство бесконечных унитарных матриц отличается от семейства унитарных матриц, даваемого методом *Cayley*, тем, что семейство *Cayley* охватывает практически все унитарные матрицы, а рассматриваемое здесь семейство состоит из матриц весьма специального качества с сугубо арифметическими свойствами. Кроме того, указанный здесь метод построения унитарных матриц не имеет, в отличие от метода *Cayley*, конечномерного аналога.

Полагая $\omega(n) = |\,\omega(n)|e^{i\,\vartheta_n}$, имеем, очевидно, $C_\omega = M_\vartheta C_{|\,\omega(n)|}$, где диагональная матрица M_ϑ имеет элементы $m_{i\,k} = \delta_{i\,k}\, e^{i\,\vartheta_k}$. Отсюда видно, что достаточно изучить семейство C_ω, где $\omega(n) > 0$. Поэтому во всем дальнейшем будем считать параметры $x_1,\ x_2,\ \ldots$ положительными. Тогда, как показано в [65],

$$\frac{\partial C_\omega}{\partial x_r} = C_\omega\, H_r, \qquad \frac{\partial C_\omega}{\partial x_r} = \widetilde{H}_r\, C_\omega,$$

где матрица $H_r = \|h^r_{i\,k}\|$ определена следующим образом: $h^r_{i\,k} = 0$, если отношение i/k не имеет формы p_r^λ, где p_r — r-е по счету простое число в последовательности всех простых чисел $p_1 < p_2 < \ldots$, а λ — число целое, положительное, отрицательное или равное нулю; $h^r_{i\,k} = \operatorname{sgn}\lambda\, x_r^{|\lambda|-1}$, если $i/k = p_r^\lambda$. Аналогично, $\widetilde{H}_r = \|\widetilde{h}^r_{i\,k}\|$, где $\widetilde{h}^r_{i\,k} = 0$, если i/k не имеет формы p_r^λ, и $\widetilde{h}^r_{i\,k} = \operatorname{sgn}\lambda\, x_r^{|\lambda|-1}$, если $i/k = p_r^\lambda$ и при этом $p_r/i,\ p_r/k$. Далее, $\widetilde{h}^r_{i\,k} = \operatorname{sgn}\lambda \dfrac{x_r^{|\lambda|-1}}{\sqrt{1-x_r^2}}$, если $i/k = p_r^\lambda$ и, по крайней мере, одно из чисел $i,\ k$ не делится на p_r. Таким образом, «левая и правая логарифмические производные» матрицы C_ω по параметру x_r содержат большое количество нулей и зависят только от x_r, что совершенно не видно a priori, а вытекает из довольно сложных выкладок.

Из предыдущих соотношений вытекает также $C_\omega\, H_r = \widetilde{H}_r\, C_\omega$ или $\widetilde{H}_r = C_\omega\, H_r\, C_\omega^{-1}$.

Полагая $x_i = x_i(t)$, где $x_i(t)$ — любые дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям $0 < x_i(t) < 1$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i(t)^2 < \infty$, получим однопараметрическое семейство ортогональных матриц $C_t =$

$= C_{\omega\,(n,t)}$, для которого имеем

$$\frac{dC_t}{dt} = \frac{\partial C_t}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial C_t}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots = C_t\Big(H_1\frac{dx_1}{dt} + H_2\frac{dx_2}{dt} + \ldots\Big) = C_t H,$$

а также $\frac{dC_t}{dt} = \widetilde{H}C_t$, где $\widetilde{H} = \widetilde{H}_1\frac{dx_1}{dt} + \widetilde{H}_2\frac{dx_2}{dt} + \ldots$.

Матрица $H = \|h_{i\,k}(t)\|$ имеет элементы $h_{i\,k}(t) = \sum\limits_{r=1}^{\infty} h^r_{i\,k}\dfrac{dx_r}{dt} = 0$, если i/k не является степенью простого числа, и $h_{i\,k}(t) =$ $= \operatorname{sgn}\lambda x_s^{|\lambda|-1}\frac{dx_s}{dt}$, если $i/k = p^\lambda$, где λ — положительное, отрицательное или равное нулю число, p — простое число и s — его номер в последовательности всех простых чисел, расположенных в возрастающем порядке. Точно так же $\widetilde{H} = \|\widetilde{h}_{i\,k}(t)\|$, где $\widetilde{h}_{i\,k}(t) = 0$, если $h_{i\,k}(t) = 0$ и $\widetilde{h}_{i\,k}(t) = \operatorname{sgn}\lambda x_r^{|\lambda|-1}\frac{dx_r}{dt}$, если $i/k = p_r^\lambda$, $p_r/(i,k)$, и $\widetilde{h}_{i\,k}(t) = \operatorname{sgn}\lambda\dfrac{x_r^{|\lambda|-1}}{\sqrt{1-x_r^2}}\dfrac{dx_r}{dt}$, если $i/k = p_r^\lambda$, p_r не делит (i,k).

Из соотношений $\frac{dC_t}{dt} = C_t\,H$ и $\frac{dC_t}{dt} = \widetilde{H}C_t$ следует $C_t^*\frac{dC_t}{dt} = H$, $\frac{dC_t}{dt}C_t^* = \widetilde{H}$, откуда вытекают своеобразные соотношения ортогональности: $\sum\limits_{r=1}^{\infty} c_{r\,i}\dfrac{dc_{r\,k}}{dt} = 0$, если i/k не является целой степенью простого числа, и $\sum\limits_{r=1}^{\infty} c_{i\,r}\dfrac{dc_{k\,r}}{dt} = 0$ в этом же случае.

Из рассматриваемого здесь семейства нельзя выделить ни одной унитарной группы вида e^{Bt}, где B — постоянная эрмитова матрица, никаким выбором функций $x_i(t)$, так как равенство $C_t = e^{Bt}$ дает после дифференцирования по t: $C_t^*\frac{dC_t}{dt} = \frac{dC_t}{dt}C_t^* = B$; в то же время, как указано выше, $C_t^*\frac{dC_t}{dt} = H$, $\frac{dC_t}{dt}C_t^* = \widetilde{H}$, а H и $\widetilde{H}$, очевидно, не равны между собой и не равны постоянным матрицам ни при каком выборе $x_i(t)$.

Уже этот факт подчеркивает весьма специальный характер рассматриваемого семейства матриц. К этому семейству матриц я пришел, исходя из вопросов теории чисел, но полагаю, что оно заслуживает интереса и со стороны его аналитической и алгебраической структуры.

16. On one-parameter groups of linear transformations. 1

During recent years papers by E. Hille [11], [12], N. Dunford [4], A. E. Taylor [27], M. H. Stone [25] and others, appeared, chiefly in the "Annals of Mathematics," dealing with the study of operational one parameter groups and with the theory of sets of linear transformations, depending analytically upon a parameter. I have come independently to analogous investigations, attempting to solve some arithmetical questions. The problems and their treatment are quite original, although they have some points in common with those of the cited works. Let us consider a one parameter set of linear operations L_u defined on a linear space F of functions, which in turn are defined on a real or complex domain D. Furthermore, let the family L_u satisfy the following set of postulates:

(1) L_u is defined for all $u > 0$ and $L_u(F) \subset F$ for all $u > 0$.
(2) $L_1 = E$ where E is the identity operation, defined by
$Ef(x) = f(x)$ for all $f(x) \in F$.
(3) $L_u L_v = L_{uv}$ for all positive u, v (M-property or group property).
(4) L_u is differentiable at the point $u = 1$, i.e.

$$[\frac{\partial}{\partial u} L_u f(x)]_{u=1} \text{ exists for all } f(x) \in F.$$

We introduce for every linear transformation A_u the linear transformation $(d/du)A_u$ or A'_u defined by $((d/du)A_u)f(x) = (\partial/\partial u)(A_u f(x))$. The postulate (4) states that $\lambda = [(d/du)L_u]_{u=1}$ is a linear operator defined on the whole set F. We shall call this set of postulates S_1. For some purposes we shall add to the set S_1, the postulate $\lambda F \subset F$, $\lambda L_u = L_u \lambda$ and so get the set S_2. We shall call the set of all L_u a one parameter S_1 or S_2 group of linear transformations respectively. This definition differs [12, p. 6] only slightly from the definition of the one parameter differentiable groups linear transformations, namely in the definition of $(d/du)A_u$ and in that we do not suppose the existence of a norm.

If we introduce the postulate:

(1') L_u is defined for all $u > 0$ and $\sum_{0<u} L_u(F) = F$; the sets of postulates (1), (2), (3) and (1'), (3) are equivalent, i.e. from (1'), (3) follows (1), (2), (3) and vice versa. For from (3) we conclude that

$L_1 L_u(f(x)) = L_u f(x)$ for all $f(x) \in F$, i.e., L_1 leaves all $L_u f(x)$ invariant. Then using (1') one sees that L_1 leaves all functions of F invariant and hence $L_1 = E$. The converse is also true, for from (1), (2), (3) it follows that every L_u maps F on itself and therefore $L_u(F) = F$. From (1), (2), (3), (4) it follows that L_u is everywhere differentiable and that $(d/du)L_u = (1/u)\lambda L_u$, for

$$\left(\frac{d}{du}L_u\right) f(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{L_{u(1+\epsilon)} - L_u}{\epsilon u} f(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{L_{1+\epsilon} - L_1}{\epsilon u} L_u f(x) = \\ = \frac{1}{u}\lambda L_u f(x).$$

In the same manner we have:

$$\frac{d}{du} L_u f(x) = \lim_{\epsilon\to 0} L_u \frac{L_{1+\epsilon} - L_1}{\epsilon u} f(x) = \frac{1}{u} L_u \lambda f(x).$$

If we make the hypothesis that $\lim\limits_{\epsilon\to 0}$ and L_u commute with each other and $\lambda F \subset F$, we have

$$u\frac{d}{du}L_u = \lambda L_u \tag{1}$$

and

$$u\frac{d}{du}L_u = L_u \lambda \tag{2}$$

where (1) follows from S_1 and (2) follows from S_2.

The third postulate is, of course, the familiar one parameter group postulate $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta}$ (see E. Hille, loc. cit.) disguised through change of parameter $\alpha = \log u$. We prefer our form, the cause of which will be seen later. We can modify our definition of derivative and differentiability for a Banach or a Hilbert space F by defining $(d/du)L_u f(x)$ to be $\lim \|[(L_{u+h} - L_u)/h]f(x) - (d/du)L_u f(x)\| = 0$ as is done in the cited papers. (S_1' and S_2' conditions.) If in S_1 we replace the condition $u > 0$ by $u \geqq$ and in S_2 the condition $u > 0,\ v > 0$ by $u \geqq 1,\ v \geqq 1$, also if the condition of differentiability is added for all $u \geqq 1$, we get new sets of postulates which will be denoted by $\bar{S}_1$ and $\bar{S}_2$ (the case of a differentiable half group).

If in S_1, S_2 we replace $u > 0$, etc., by the condition for all complex $u \neq 0$ etc., we obtain sets to be denoted by S_1^* and S_2^*. These sets will imply the differentiability of L_u at all points of the complex u-plane with the exception of $u = 0$. Furthermore (1) is given by S_1^* and (1), (2) by

S_2^*. Differentiability at the point $u = 1$ is to be understood in the sense adopted in the theory of functions of a complex variable, as the existence of $\lim_{\epsilon \to 0}[(L_{1+\epsilon} - L_1)/\epsilon]f(x)$, not depending upon the way in which $\epsilon \to 0$. From S_1^* then follows the existence of such a derivative at all non-zero points of the complex plane as well as postulate (1) ((1) and (2) in the S_2-case). We infer from this that $L_u f(x) = f(x,\ u)$ is holomorphic as a function of u on the whole u-plane with the possible exceptions of $u = 0$ and $u = \infty$, for all $f(x) \in F$ and all $x \in D$. The point $u = 0$ is generally a branch point of this function.

In all cases it is convenient to introduce the notation $L_u = u^\lambda$, for then (3) and (1) shall take the natural form $u^\lambda v^\lambda = (uv)^\lambda$ and $(d/du)u^\lambda = \lambda u^{\lambda-1}$. Introducing the notation $u^{s+\lambda} = u^s u^\lambda$, where s is an arbitrary complex constant, we get easily $(d/du)u^{s+\lambda} = (s+\lambda)u^{s+\lambda-1}$. From

$$\frac{d}{du}u^{s+\lambda} = (s+\lambda)u^{s+\lambda-1} \tag{3}$$

follows immediately

$$\int_a^b (s+\lambda)u^{s+\lambda-1}du = b^{s+\lambda} - a^{s+\lambda}, \tag{4}$$

or if λ commutes with the integral sign

$$(s+\lambda)\int_a^b u^{s+\lambda-1}du = b^{s+\lambda} - a^{s+\lambda}. \tag{5}$$

In a still more general case, if $(s+\lambda)^{-1}$ exists in some part of F and $(b^{s+\lambda} - a^{s+\lambda})f(x)$ lies in the domain of its definition,

$$\int_a^b u^{s+\lambda-1}f(x) = \frac{b^{s+\lambda} - a^{s+\lambda}}{s+\lambda}f(x) \tag{6}$$

where $((b^{s-\lambda} - s^{s+\lambda})/(s+\lambda))f(x)$ is defined as $(s+\lambda)^{-1}(b^{s+\lambda} - a^{s+\lambda}) \times$ $\times\ f(x)$. The integration of a transformation T_u is always meant in the sense

$$\left(\int_A T_u du\right) f(x) = \int_A T_u f(x) du.$$

We have found several methods of constructing examples of differentiable groups and half groups.

METHOD A.

If λ is given, we define $u^\lambda f(x)$ as an ordinary sum of a series: $\sum_{k=0}^{\infty}((\log u)^k/k!)\lambda^k f(x)$; supposing $\sum_{k=0}^{\infty}(\log u)^k/k!)\lambda^k f(x)$ to be absolutely convergent for all complex $u \neq 0$ and its sum to belong to F. We suppose, further, that

$$\lambda^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log u)^k}{k!}\lambda^k f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log u)^k}{k!}\lambda^{k+p} f(x) \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

(the postulate of extended linearity of λ^p), and that the double series: $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}((\log u)^k/k!)((\log v)^l/l!))\lambda^{k+l} f(x)$ is also absolutely convergent, i.e., is absolutely convergent for all $f(x) \in F$, $x \in D$. Here we presuppose tacitly that $\lambda(F) \subset F$, for otherwise λ^2, λ^3, ... could not have any sense whatever. The S_2^* conditions are then clearly fulfilled. Practically we make use of this method in the following manner: we find some subspace F' of F on which the above mentioned convergence conditions are fulfilled and then try to find some direct expression for the sum $\sum_{k=0}^{\infty}((\log u)^k/k!)\lambda^k f(x)$ which has a sense on the whole of F and which may fulfill one of our sets of postulates. In this case we take this expression as an extended definition of $u^\lambda f(x)$ on F. In some cases we do not need this extension, for instance, for $\lambda f(x) = \int_a^b k(x,\ t) f(t) dt$, where $K(x,\ t)$ and all $f(x)$ are continuous, for then all series are convergent and termwise application of λ^p to them is justifiable. The whole theory developed here may be characterized as investigation of an exponential function of a linear transformation $\alpha\lambda$, where α is a variable complex number and λ a given linear transformation, and such an extension of this exponential function which does not impair the most important properties of the exponential function, enumerated in our postulates. In the S_2 or S_2^* case we have after iterated application of (2):

$$\left(\frac{d}{d\log u}\right)^n L_u = \left(\frac{d}{d\log u}\right)^n u^\lambda = u^\lambda \lambda^n \tag{7}$$

and hence:

If $L_u f(x) = u^\lambda f(x)$ *is developable in a Taylor's series of the form* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\log u)^k$ *this series can be only*

$$e^{\lambda \log u} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}((\log u)^k/k!)\lambda^k f(x).$$

For $\lambda = d/dx$, we have

$$u^{d/dx} f(x) = e^{\log u (d/dx)} f(x) = f(x + \log u)$$

(Leibnitz's symbolical form of Taylor's expansion). We can choose

$$L_u f(x) = f(x + \log u)$$

as a direct definition of $u^{d/dx}$ not only for functions developable in Taylor's series, but for all differentiable functions. For analytical functions $f(x)$ we have

$$f(xu) = \sum_{k=0}^{\infty}((\log u)^k/k!)(x(d/dx))^k f(x)$$

and therefore we can define $u^{x(d/dx)} f(x)$ as $f(ux)$ for all differentiable functions. We get in this way the following examples

	D	λ	L_n	F	S
A$_1$)	D_1	$a\dfrac{d}{dx}$	$L_u f(x) = f(x + \log u^a)$	F_1	S_1
A$_2$)	D_2	$ax\dfrac{d}{dx}$	$L_u f(x) = f(u^a x)$	F_2	S_2
A$_3$)	D_1	∇h	$L_u f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(\log u)^k}{k!} \times$ $\times f(x + kh)$	F_3	S_2
A$_4$)	D_2	$ax\dfrac{d}{dx}$	$L_u f(x) = f(x) +$ $+\int_0^x \dfrac{d}{dt} I_0(2\sqrt{t \log u} f(x - t)dt;$ $I_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!^2}\left(\dfrac{t}{2}\right)^{2k}$	F_4	S_2
A$_5$)	D_3	$a\dfrac{d}{dx}$	$L_u f(x) = f(x + \log u^a)$	F_5	S_2^*

where F_1 is the space of all differentiable functions; F_2 consists of all indefinitely differentiable functions; F_3 of all bounded functions, F_4 of all integrable functions, F_5 of all integral functions, $D_1 = (-\infty, \infty)$, $D_2 = (0, \infty)$, $D_3 =$ the whole complex x-plane.

METHOD B.

This method permits us to construct from a given L_u another L_u. If α effects the one-one mapping of F on F^* and thus has an inverse α^{-1}, we can assert that L_u^* defined through $L_u^* = \alpha L_u \alpha^{-1}$ satisfies the S-conditions, if L_u satisfies them and if transformation of L_u with α does not impair the differentiability at the point $u = 1$. We have only to prove 3). We have:

$$L_u^* L_v^* = \alpha L_u \alpha^{-1} \alpha L_v \alpha^{-1} = \alpha L_u L_v \alpha^{-1} = \alpha L_{uv} \alpha^{-1} = L_{uv}^*.$$

If the differentiation of L_u can be effected under the sign of the α-transformation, we get $\lambda^* = \alpha\lambda\alpha^{-1}$, where λ^* is an infinitesimal operator of L_u^* , i.e., $\lambda^* = [(d/du)L_u^*]_{u=1}$. We have in this case $u^{\alpha\lambda\alpha^{-1}} = \alpha u^{\lambda}\alpha^{-1}$. Thus we have for instance for α, defined by $\alpha^{-1}f(x) = f(e^x)$, mapping the class F of all differentiable functions defined on $(-\infty, \ \infty)$ on the class F' of all differentiable functions defined on $(0, \ \infty)$, and for L_u defined on F' by $L_u f(x) = f(x + \log u)$:

$$L_u^* f(x) = \alpha L_u \alpha^{-1} f(x) = f(ux) = u^{\alpha(d/dx)\alpha^{-1}} f(x)$$

or $u^{x(d/dx)} f(x) = f(ux)$.

Applying the same transformation once more, we get $u^{x \log x (d/dx)} f(x) = f(x^u)$, etc.

If $\alpha f(x) = \exp\left(-\int_0^x \varphi(t)dt\right) f(x)$, we have $\alpha(d/dx)\alpha^{-1} = d/dx + \varphi(x)$,

$$u^{(d/dx)+\varphi(x)} f(x) = \alpha u^{(d/dx)} \alpha^{-1} f(x) = \\ = \exp\left(\int_x^{x+\log u} \varphi(t)dt\right) f(x + \log u),$$

where $\varphi(x)$ is a given continuous function. For

$$\alpha f(x) = f(\theta(x)), \ \alpha^{-1} f(x) = f(\psi(x)) = f(\theta^{-1}(x)),$$

where $\theta(x)$ is a given function differentiable together with $\theta^{-1}(x)$, effecting a one to one correspondence between D and a certain D', and

$L_u = u^{x(d/dx)}$, F consisting of all differentiable functions, defined on $D = (0,\ \infty)$, we have

$$\alpha \frac{d}{dx}\alpha^{-1} = \frac{\theta(x)}{\theta'(x)}\frac{d}{dx},\ u^{(\theta(x)/\theta'(x))(d/dx)}f(x) = f(\chi(u\theta(x))).$$

Examples:

$$u^{a(x)(d/dx)+b(x)}f(x) = \exp\left(\int_{\theta(x)}^{\theta(x)+\log u}\varphi(t)dt\right) f(\psi(\theta(x)+\log x)),$$

$$\theta(x) = \int_0^x \frac{dx}{a(x)},\ \psi(x) = \theta^{-1}(x),\ \varphi(x) = b(\psi(x)), \qquad (B_1)$$

$$L_u f(x) = \int_0^x f'(x^u)dx. \qquad (B_2)$$

In the last example F consists of all differentiable functions defined on $(0,\ \infty)$ such that $f(0) = 0$. We have here:

$$\alpha^{-1}f(x) = f'(x),\ \alpha f(x) = \int_0^x f(x)dx,\ L_u = \alpha u^{x\log x(d/dx)}\alpha^{-1}.$$

METHOD C.

This method is based on the following remark: If $K(u,\ v)$ satisfies the relation

$$\int_0^\infty K(u_1,\ v)K\left(u_2,\ \frac{w}{v}\right)\frac{dv}{v} = K(u_1u_2,\ w) \qquad (8)$$

for all u_1 , u_2, $w > 0$, if L_u has the M-property, if $\int_0^\infty K(u,\ v)L_v f(x)dv$ converges, if $\int_0^\infty K(u,\ v)L_v f(x)dv \in F$ for each $f(x) \in F$, and if L_a can always be effected under the sign of the last integral, the double integral for $L_u^*L_v^*f(x)$ being always absolute convergent, where $L_u^*f(x)$ means $\int_0^\infty K(u,\ v)L_v f(x)dv$, then L_u^* has also the M-property. We deduce that easily from the following computation:

$$\begin{aligned} L_a^* L_b^* f(x) &= \int_0^\infty K(a, v) L_v L_b^* f(x) = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty K(a, u) K(b, v) L_u L_v f(x) du dv = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty K(a, u) K(b, v) L_{uv} f(x) du dv. \end{aligned}$$

Or, changing the variables of integration and using (8) we get $L_a^* L_b^* f(x) = L_{ab}^* f(x)$ q. e. d.

If $\int_0^\infty K(u, v) L_v f(x) dv$ has a derivative and $\int_0^\infty K(1, v) L_v f(x) dv = f(x)$, then L_u^* forms an S_1 group, with λ^* defined by $\lambda^* f(x) = [(d/du) \int_0^\infty K(u, v) L_v f(x) dv]_{u=1}$. For each $K(u, v)$ satisfying (8) and the condition of absolute convergence of $\int_0^\infty K(u, v) v^s dv$, we can prove immediately that $\Phi(u) = \int_0^\infty K(u, v) v^s dv$ satisfies the functional equation $\Phi(a)\Phi(b) = \Phi(ab)$ and therefore in case of continuity of $\Phi(u)$, according to Cauchy's theorem, $\Phi(u) = u^\alpha$. If $\int_0^\infty K(u, v) v^s dv$ converges absolutely in some half-plane or some strip of the s-plane, we have in that domain: $\int_0^\infty K(u, v) v^s dv = u^{\alpha(s)}$ with a holomorphic $\alpha(s)$ whence we can in some cases find $K(u, v)$. It is reasonable to expect that this relation holds not only for numerical values, but for many operator-values too, or that $\lambda^* = \alpha(\lambda)$ with some natural definition of $\alpha(\lambda)$.

This expectation is always found to be justified in all our subsequent examples. In many cases $K(u, v)$ satisfies the above mentioned conditions, i.e. the relation (8) or $\int_0^\infty K(u, v) L_v f(x) dv \in F$ etc., only for some restricted range of values of u and therefore gives us only some subgroup L_u^* and in order to get the whole group we must add to our method some process of continuation, as will be the case in all the following instances. As examples of $K(u,\,v)$ we mention

$$K_1(u,\,v)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\log u}}e^{-(\log^2 v)/(4\log u)}\frac{1}{v},$$

$$K_2(u,\,v)=\frac{1}{2\pi}\Gamma(-\log u+i\log v)(-\log u)^{\log u-i\log v}\frac{1}{v}\ (0<u<1),$$

$$K_3(u,\,v)=\frac{\log u}{\pi}\frac{1}{v(\log^2 u+\log^2 v)}\ (u>1).$$

These $K(u,\,v)$ transform the group L_u into half groups defined on $(1,\,\infty)$, $(0,\,1)$, $(1,\,\infty)$, respectively. We have for suitably restricted numerically valued λ $\int_0^\infty K_1(u,\,v)v^\lambda dv=u^{\lambda^2}$, $\int_0^\infty K_2(u,\,v)v^\lambda dv=$ $=u^{-i\lambda+e^{i\lambda}}$, $\int_0^\infty K_3(u,\,v)v^\lambda dv=u^{i\lambda}$ which relations are found to be true for many operator-valued λ too. The second relation can be transformed into the following form:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\log u-\infty i}^{-\log u+\infty i}\Gamma(s)(-\log u)^{-s}e^{-\lambda is}ds=u^{e^{\lambda i}}\ (0<u<1). \tag{9}$$

The Mellin formula (9) leads us to investigating a linear transformation T_u defined by $T_uf(x)=(1/2\pi i)\int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\Gamma(s)(-\log u)^{-s}e^{-\lambda s}f(x)ds$ for u^λ defined as an analytic group, i.e. as a set of transformations satisfying S_1^* and where the inequalities $e^{-\lambda s}f(x)=O\{\exp[(\frac{1}{2}\pi-\epsilon)|s|]\}$, $(f(x)\in F)$ are supposed to be satisfied. The above mentioned properties of $K_2(u,\,v)$ guarantee the M-property of T_u. Differentiating $T_uf(x)$ with respect to u under the integral sign, using the well known identity $s\Gamma(s)=\Gamma(s+1)$, and applying Cauchy's theorem of residues to the rectangle $(1+\infty i,\,1-\infty i,\,2+\infty i,\,2-\infty i)$, we get $u(d/du)T_u=T_ue^\lambda$ or, if e^λ can be effected under the integral sign, $u(d/du)T_u=e^\lambda T_u$. We have in this case:

$$\frac{1}{2\pi}i\int_{1-\infty:}^{1+\infty i}\Gamma(s)(-\log u)^{-i}e^{-\lambda s}du=u^{e^\lambda}\ (0<u<1) \tag{10}$$

in the sense given by our axiomatics, which may be regarded as an operational analogon of Mellin's formula. In the same way we get for every λ permutable with the sign of integration involved in the definition of u^{λ^2}, if $u^\lambda f(x)=O(\exp|\log u|^{2-\epsilon})$ for $u\to 0,\,\infty$, $\epsilon>0$, $u^{\lambda^2}f(x)=$

$= \int_0^\infty K(u, v) v^\lambda f(x) dv \quad (u > 1)$, where only differentiation under the integral sign and subsequent integration by parts is needed. Adding to the definition of u^{λ^2}, $1^{\lambda^2} = E$, we get a halfgroup u^{λ^2} from every group u^λ satisfying the condition given above. Introducing $t = \log v / \sqrt{2 \log u}$ as a new variable of integration, we get

$$u^{\lambda^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2/2)} \exp t\sqrt{2 \log u} dt \tag{11}$$

which has a sense for all complex $u \neq 0$, if u^λ defines an analytic group and where u^{λ^2} is itself an analytic group corresponding to λ^2, if $u^\lambda f(x) = O(\exp |\log u|^{2-\epsilon})$ $(\epsilon > 0)$ etc. are satisfied for complex u. In case of analyticity of u^λ the continuation of u^{λ^2} may therefore be effected through mere change of variable of integration.

For $\lambda = d^2/dx^2$ we have

$$u^{(d^2/dx^2)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2/2)} f(x + \sqrt{2 \log u} t) dt, \tag{12}$$

F consisting of all integral functions satisfying:

$$f(z) = O(e^{|z|^{2-\epsilon}}) \ (|z| \to \infty, \ \epsilon > 0).$$

If all $f(z)$ are periodic with a period 1, we have

$$u^{(d^2/dx^2)} f(x) = \int_0^1 \theta_3(x - t, \, 4 \log u) f(t) dt, \tag{13}$$

where $\theta_3(t, p) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 p} \cos 2\pi n t$ is the well known Jacobi theta function. A method of solving the integral equation $\int_0^1 \theta_3(x - t, \, 4 \log u) f(t) dt = F(x)$ by applying to both sides of it the transformation $u^{-(d^2/dx^2)}$ is evident. The following examples may be mentioned:

$$u^{(d^2/dx^2)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} t^2} f(x + t\sqrt{2 \log u}) dt, \tag{C_1}$$

$$\begin{aligned} u^{e^{h(d/dx)}} f(x) &= u^{\nabla h} f(x) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \Gamma(s) (-\log u)^{-s} f(x - hs) ds \end{aligned} \tag{C_2}$$

with u^λ defined on corresponding functional spaces.

METHOD D.

This method is closely related to the method C. If a function $\varphi(x, u)$ has for its Laplace transform $\int_0^\infty \varphi(x, u)e^{-xs}dx$ a function of the form $u^{\alpha(s)}$ with $\alpha(s)$ not depending on u, the Laplace transform of the “Faltung” $f(x) \star \varphi(x, u)$ is $f^*(s)u^{\alpha(s)}$ where $f^*(s) = \int_0^\infty e^{-xs}f(x)dx$. The Laplace transform of $f(x) \star \varphi(x, u) \star \varphi(x, v)$ is $f^*(s)u^{\alpha(s)}v^{\alpha(s)}$ and $f(x)\star\varphi(x, uv)$ has the same Laplace transform. From the unicity theorem in the theory of Laplace transformations, we have $f(x) \star \varphi(x, u) \star \star\varphi(x, v) = f(x) \star \varphi(x, uv)$. Or, introducing the notation $L_u f(x) = = f(x) \star \varphi(x, u)$, we have $L_u L_v = L_{uv}$. The corresponding λ may be evaluated as $[(d/du)L_u]_{u=1}$. We get, in this way, many examples of groups and half-groups using formulae such as are to be found, for instance, in Doetsch’s book *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation.*

The formula

$$\int_0^\infty e^{-sx}\frac{x^{\log u-1}}{\Gamma(\log u)}dx = u^{-\log s}$$

shows that we can take the expression $x^{\log u-1}/\Gamma(\log u)$ for $\varphi(x, u)$. Let us put $l_s f(x) = \int_0^\infty e^{-xs}f(x)dx$. We mention here the following examples

	$\varphi(x,\, u)$	$l_s(\varphi(x,\, u))$	L_u
D$_1$)	$\dfrac{x^{-1+\log u}}{\Gamma(\log u)}$	$u^{-\log s}$	$G_u f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\log u)} \times$ $\times \int_0^x (x-t)^{-1+\log u} f(t)dt;\ G_1 = E$
D$_2$)	$\dfrac{\log u}{2\sqrt{\pi} x^{3/2}} e^{-(\log^2 u/4x)}$	$u^{-\sqrt{s}}$	$A_u f(x) = \dfrac{\log u}{2\sqrt{\pi}} \times$ $\times \int_0^x e^{-(\log^2 u/4t)} t^{-3/2} \times$ $\times f(x-t)dt;\ A_1 = E$
D$_3$)	$\log u \dfrac{J_{\log u}(ax)}{x}$	$u^{\log[(\sqrt{s^2+a^2}-s)/a]}$	$B_u f(x) = \log u \times$ $\times \int_0^x \dfrac{J_{\log u}(at)}{t} f(x-t)dt$
D$_4$)	$\dfrac{\sqrt{2}a\pi}{\Gamma(\log u)} x^{-\frac{1}{2}+\log u} J_{-\frac{1}{2}+\log u}(ax)$	$u^{\log[2a/(a^2+s^2)]}$	$C_u f(x) = \dfrac{\sqrt{2a\pi}}{\Gamma(\log u)} \times$ $\times \int_0^x J_{-\frac{1}{2}+\log u}(at) t^{-\frac{1}{2}\log u} \times$ $\times f(x-t)dt;\ C_1 = E$
D$_5$)	$\left(\dfrac{x}{\log u}\right)^{(-1+\log u)/2} J_{-1+\log u}(2\sqrt{x \log u})$	$u^{(-1/s)-\log s}$	$D_u f(x) = f(x) \bigstar \varphi(x,u)$ $(u > 1);\ D_1 = E$

The corresponding λ for the examples are given by

$$\lambda_1 f(x) = (\log x + C) f(x) + \int_0^x \log(1 - \frac{t}{x}) f'(t) dt,$$

$$\lambda_2 f(x) = -\sqrt{\frac{d}{dx}} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi x}} f(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x (t^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) f'(x-t) dt,$$

$$\lambda_3 f(x) = \int_0^x \frac{1}{t} (J_0(at) - 1) f(x-t) dt + \\ + (\log \frac{ax}{2} + C) f(x) + \int_0^x \log(1 - \frac{t}{x}) f'(t) dt$$

where C is Euler's constant. The space F may consist of all continuous functions defined on $(0, \infty)$. Our examples yield differentiable half groups defined for $u \geq 1$. G_u is of course the well known fractional integration of order $\log u$ as given by Riemann and Liouville [12].

The following example, closely related to D_1 , gives us a group defined for all $u \gtrless 0$

$$\mathfrak{L}_u f(x) = \frac{1}{\Gamma(1 + i \log u)} \int_0^x (x-t)^{i \log u} f'(t) dt \tag{D_6}$$

where F consists of all differentiable functions with integrable $|f'(t)|$ satisfying the conditions $f(0) = f'(0) = 0$, defined on $(0, 1)$. Here is $\mathfrak{L}_u = u^\lambda$ with

$$\lambda f(x) = i(\log + C) f(x) + i \int_0^x \log(1 - \frac{t}{x}) f(t) dt$$

in the sense of S_1. As another example of the same kind we mention

$$L_u f(x) = u^\lambda f(x) = \int_0^x J_0[2\sqrt{\log u (x-t)}] f'(t) dt \tag{D_7}$$

with $\lambda = -\int_0^x f(t) dt$ where $f(x)$ is differentiable and vanishes at $x = 0$.

In quite an analogous manner, we have for L_u defined by $L_u f(x) = f(x) + f(x) \star \psi(x,\, u)$:

$$L_u L_v f(x) = f(x) + f(x) \star \psi(x,\, u) + f(x) \star \psi(x,\, v) + \\ + f(x) \star \psi(x,\, u) \star \psi(x,\, v)$$

and therefore $l_s(L_uL_vf(x)) = l_s(f(x))[1 + l_s(\psi(x, u))][1 + l_s(\psi(x, v))]$.

The Laplace transforms of $L_uL_vf(x)$ and $L_{uv}f(x)$ coincide if $1 + l_s(\psi(x, u)) = u^{\alpha(s)}$ with $\alpha(s)$ not depending on u as will be the case for $\psi(x, u) = (d/dx)J_0(2\sqrt{x \log u})$ where $\alpha(s) = -(1/s)$.

We have using the last remark

$$L_uf(x) = u^\lambda f(x) = f(x) + \int_0^x \frac{d}{dt}J_0(2\sqrt{t \log u})f(x-t)dt \qquad (D_8)$$

where

$$\lambda f(x) = -\int_0^x f(t)dt.$$

METHOD E.

If $A_u = u^\lambda$ and $B_u = u^\mu$ form two given groups or half groups in the sense attributed to this term by one of our S postulates, and if A_u and B_v commute with each other for all pairs u, v, the transformation C_u defined as A_uB_u forms a differentiable group or half group, if it is differentiable. We have only to prove the M-property, which is done in the following way:

$$C_uC_v = A_uB_uA_vB_v = A_uA_vB_uB_v = A_{uv}B_{uv} = C_{uv}.$$

The differentiability of A_uB_v follows in many cases from the differentiability of A_u and B_v and even the well known rule of differentiation $(A_uB_u)' = A'_uB_u + A_uB'_u$ is valid under assumptions of a very general character. If λ, μ, A_u, B_u commute with each other and the said differentiation rule holds, we have

$$u\frac{d}{du}C_u = \lambda A_uB_u + A_u\mu B_u = (\lambda + \mu)C_u, \text{ i.e. } u^\lambda u^\mu = u^{\lambda+\mu}.$$

The generalization for more than two commutable factors is evident. This method yields the following examples:

$$u^{\Delta_n}f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 + \sqrt{2\log u}\,t_1, \ldots, x_n + \sqrt{2\log u}\,t_n)\times \qquad (E_1)$$
$$\times\, e^{-\frac{1}{2}(t_1^2+\ldots+t_n^2)}dt_1dt_2 \ldots dt_n,$$

$$\Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_{\mathrm{n}}^2} \text{ (see example C}_1\text{)},$$

$$u^{(d^2/dx^2)+b(d/dx)+\nabla_h} f(x) = \frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \Gamma(z) \times \\ \times (-\log u)^{-s} e^{-(t^2/2)} f(x + t\sqrt{2\log u} - hz) dt dz \tag{E_2}$$

$$\nabla_h f(x) = f(x+h) \text{ (see } \mathrm{C}_1), \ \mathrm{A}_5), \ \mathrm{C}_2)),$$

$$u^{\nabla h_1 + \nabla h_2 + \dots + \nabla h_n} f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \cdots \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \Gamma(z_1) \cdots \Gamma(z_n) \times \\ \times (-\log u)^{-s_1 - \dots - s_n} f(x - h_1 z_1 - \dots - h_n z_n) dz_1 \cdots dz_n. \tag{E_3}$$

We define the transformation of E_1) on F consisting of all functions of n real variables $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ satisfying the relation $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = O(\exp(|x_1|^{2-\epsilon} + |x_2|^{2-\epsilon} + \dots + |x_n|^{2-\epsilon}))$, the first and second derivatives of which satisfy the same relation. We get, in this way, a half group u^{Δ_n} defined for all $u \geqq 1$. In order to obtain the group u^{Δ_n} we must take for $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ all integral functions of n complex variables satisfying the asymptotic relation mentioned above. For the sake of brevity we omit the characterization of spaces on which the transformations of E_2) and E_3) are defined.

METHOD F.

By this method, we obtain from a given L_u defined for all complex $u \neq 0$ and satisfying S_2^*, another group of the same kind which is based on the formula:

$$u^{\lambda n} = \int_0^{\infty} Y_n(t) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp(\rho^k t \sqrt[n]{n \log u} \lambda) dt, \tag{14}$$

where $\rho = e^{(2\pi i/n)}$ and $Y_n(t)$ is a solution of the differential equation $y^{(n-1)}(t) = (-1)^{n-1} t y(t)$ normed in such a way that $\int_0^{\infty} Y_n(t) dt = 1$. It is easy to see that $Y_n(t)$, defined by

$$Y_n(x) = \frac{n^{\frac{1}{2}+(1/n)}}{i(2\pi)^{(n+1)/2}} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{n}\right)\cdots$$

$$\cdots\Gamma\left(s+\frac{n-2}{n}\right)\left(\frac{x}{n^{(n-1)/n}}\right)^{-ns} ds =$$

$$= \frac{n^{\frac{1}{2}+(1/n)}}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-u_1-u_2-\cdots-u_{n-2}-(x^n/n^{n-1}u_1u_2\cdots u_{n-2})}\times$$

$$\times\, u_1^{(1/n)-1} u_2^{(2/n)-1} \cdots u_{n-2}^{(n-2)/n-1} du_1 du_2 \cdots du_{n-2} =$$

$$= \frac{n^{1+(1/n)}}{\pi} \mathfrak{F}\left(\omega \int_0^\infty e^{-t^n-\omega n^{(1/n)}xt} dt\right),$$

where $\omega = e^{2\pi i/n}$ and $\mathfrak{F}(z) = (z-\overline{z})/2i$ denotes the imaginary part of z, satisfies these conditions. We have namely

$$\int_0^\infty Y_n(t)dt = 1, \tag{15}$$

$$Y^{(n-1)}(t) = (-1)^{n-1} t Y_n(t). \tag{16}$$

We have further

$$Y_n^{(k)}(x) = 0(\exp(-c_n x^{n/(n-1)})) \tag{17}$$

for $k = 0, 1, \cdots, n-1$, $x \to +\infty$, where $c_n > 0$ is a constant depending only on n. For brevity's sake, we omit the proof of (15), (16), and (17). The first $Y_n(t)$ are

$$Y_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t/2)},\ Y_3(t) = \frac{\sqrt{3t}}{\pi} K_{-\frac{1}{2}}(\frac{2}{3}t^{3/2}),$$

$$Y_4(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-u^4-(t^2/4u^2)} du,$$

where $K_{-\frac{1}{2}}(x)$ is Macdonald's function from the theory of Bessel functions. The formula (14) which is valid for all numerical values of λ, is easily deducible for operator-valued λ's if the following conditions are satisfied:

a) u^λ forms an analytic group and therefore $u^\lambda f(x) = f(x, u)$ is a holomorphic function of u, with possible exception of the origin, for each $f(x) \in F$,

b) $\lambda^p e^{t\lambda} f(x) = O(\exp \epsilon |t|^{n/(n-1)})$ for each $\epsilon > 0$ and each $f(x) \epsilon F$, $p = 0, 1, 2, \dots ,$

c) λ^p and u^λ commute with T_u, where T_u is defined by

$$T_u f(x) = \int_0^\infty Y_n(t) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp(\lambda \sqrt[n]{n \log u} t \rho^k) f(x) dt, \ \rho = e^{2\pi i/n}.$$

The condition c) supposes that $T_u f(x) \in F$ for each $f(x) \in F$. Using (15) we immediately have $T_1 = E$. Differentiating under the integral sign, we have

$$u \frac{\partial}{\partial u} T_u f(x) = \frac{1}{(\sqrt[n]{n \log u})^{n-1}} \times$$
$$\times \int_0^\infty t Y_n(t) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda \exp(\lambda \sqrt[n]{n \log u} t \rho^k) f(x) dt.$$

Inserting $Y_n^{(n-1)}(t)(-1)^{n-1}$ for $tY_n(t)$, integrating $n-1$ times by parts and using $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \rho^{pk} = 0$ $(p = 1, 2, \dots, n-1)$ and b), c), (17), we get $u(\partial/\partial u) T_u f(x) = \lambda^n T_u f(x)$. For $C_u f(x) = (T_u T_a - T_{ua}) f(x)$ we have therefore $(\partial/\partial \log u) C_u f(x) = \lambda^n C_u f(x)$ and $((\partial/\partial \log u)^k C_u f(x) = = \lambda^{nk} C_u f(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. In virtue of $T_1 = E$, $C_1 = 0$, from which we conclude that $[((\partial/\partial \log u))^k C_u f(x)]_{u=1}^{=0} = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$; $C_u f(x)$ being an analytic function of u, we have identically $C_u = 0$ and the M-property is established. For F consisting of integral functions $f(x)$ satisfying the asymptotic relation $f(x) = O[\exp(\epsilon |x|^{n/(n-1)})]$ for each, $\epsilon > 0$, we have

$$u^{d^n/dx^n} f(x) = \int_0^\infty Y_n(t) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + \rho^k \sqrt[n]{n \log u} t) dt. \qquad (F_1)$$

Using E$_1$), we get

$$\begin{aligned} u^{\Delta_n^m} f(x_1, x_2, \dots x_n) &= \int_0^\infty Y_m(t) \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \times \\ \times \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty & f(x_1 + \sqrt{2t} t_1 (m \log u)^{1/2m} \omega^k, \dots \\ \dots, x_n &+ \sqrt{2t} t_n (m \log u)^{1/2m} \omega^k) dt dt_1 \cdots dt_n \end{aligned} \qquad (F_2)$$

where $\omega = e^{\pi i/m}$ and $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are integral functions satisfying the evident asymptotic restrictions.

For λ, μ commuting with each other we have $u^{\lambda\mu} = u^{\frac{1}{2}(\lambda+\mu)^2} \times \times u^{-\frac{1}{2}(\lambda-\mu)^2}$ and therefore we can in some cases find $u^{\lambda\mu}$ if we know u^{λ} and u^{μ}, using our preceding methods. We can further find $u^{\lambda^p\mu^q}$ using the last remark and the Method F, if the conditions sufficient for its application are satisfied. Combining our last two methods, we can find $u^{\mathfrak{P}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)}$ knowing u^{λ_1}, u^{λ_2}, $\ldots$, u^{λ_n}, where λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n are commutable with each other and $\mathfrak{P}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ is an arbitrary polynomial with constant coefficients. We can find for instance

$$u^{\mathfrak{P}((\partial/\partial x_1),(\partial/\partial x_2),\ldots,(\partial/\partial x_n))}$$

defined on a space F consisting of integral functions $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ satisfying some asymptotic conditions, using F_1) and noting the commutability of $(\partial/\partial x_1)$, $(\partial/\partial x_2)$, $\ldots$, $(\partial/\partial x_n)$.

METHOD G.

This method, which of course is not new and is well known from the theory of Sophus Lie, is given by the following consideration: if a differentiable one parameter Lie group A_u defined on n-dimensional Euclidean space R_n is given, $A_u A_v = A_{uv}$, then the operation L_u defined on the space of all differentiable functions $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ by $L_u f(P) = f(A_u P)$, $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, satisfies the S_1 system of postulates. We have then

$$L_u L_v f(P) = L_u f(A_v P) = f(A_u A_v P) = f(A_{uv} P) = L_{uv} f(P).$$

We have further $L_u = u^{\lambda}$, where λ is an infinitesimal Lie operator of A_u. In the case of the one-dimensional translation group given by $x' = x + \log u$, we obtain example A_1).

For the case of the two-dimensional rotation group

$$x' = x \cos\log u - y \sin\log u, \ y' = x \sin\log u + y \cos\log u,$$

we have $L_u f(x, y) = f(x \cos\log u - y \sin\log u, \, x \sin\log u + y \cos\log u) = = u^{\lambda} f(x, y)$ with $\lambda = x(\partial/\partial y) - y(\partial/\partial x)$ (Example G_1).

Noting the commutability of $\Delta = (\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2)$ with λ and L_u of G_1 and using the Method E we can find u^{λ} with $\lambda = x(\partial/\partial y) - -y(\partial/\partial x) + (\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2)$. Using the Method F we can find

$u^{x(\partial/\partial y)-y(\partial/\partial x)^n}$ and so on. Transforming $u^{x(\partial/\partial y)-y(\partial/\partial x)}$ with α defined by $\alpha f(x, y) = \phi(x, y)f(x, y)$, where $\phi(x, y)$ is a given nowhere vanishing differentiable function, we have

$$\mu = \alpha\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\alpha^{-1} = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + \\ + \phi(x, y)^{-1}(y\phi'_x(x, y) - x\phi'_y(x, y))$$

whence we can find u^μ as $\alpha L_u \alpha^{-1}$ (see Method B).

METHOD H.

The idea of this method is given in E. Hille's work (l. c.). If $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, $\ldots$ form an orthonormal system [1] on an interval l, let the integral operation L_u be defined by $L_u f(x) = \int_l K(u, x, t)f(t)dt$, where $K(u, x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u^{\lambda_n}\psi_n(x)\psi_n(t)$ and $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ is a given sequence of complex numbers. This satisfies the M-conditions $L_u L_v = L_{uv}$ if all series are absolutely convergent and term by term integration in l is justified. Practically all of these conditions are fulfilled only for some restricted range of values of u, and the present method yields only a half group from which the whole group may be obtained in some cases by a process of continuation. If there exists a transformation λ, transmutable with $\int_l$ which can be applied to our series termwise and for which the relations $\lambda\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ are satisfied, we have $\lambda L_u f(x) = \int_l \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u^{\lambda_n}\psi_n(x)\psi_n(t)f(t)dt$. We have the some expression for $u(d/du)L_u f(x)$ if the differentiation d/du can be effected under the integral sign $\int_l$ and applied termwise to our series. If $\psi_n(x)$ are Hermitean functions

$$\psi_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} e^{(x^2/2)}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

then using the well known differential equations for $\psi_n(x)$ we have $\lambda\psi_n(x) = -(2n+1)\psi_n(x)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ with $\lambda = (d^2/dx^2) - x^2$. We

[1] i.e. $\int_l \psi_i(x)\psi_k(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq k, \\ 1 & \text{if } i = k. \end{cases}$

have then

$$u^{(d^2/dx^2)-x^2} f(x) = \int_0^\infty K(u,\, x,\, t) f(t) dt$$

where

$$K(u,\, x,\, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{-2n-1} \psi_n(x) \psi_n(y).$$

Using a result of F. G. Mehler (see N. Wiener, *The Fourier integral and certain of its applications*, p. 62) we have

$$K(u,\, x,\, x) = \frac{u}{\sqrt{\pi(u^4-1)}} \exp\left(-\frac{(x^2+y^2)(1+u^4) - 4xyu^2}{2(u^4-1)}\right),$$

$$L_u f(x) = u^{(d^2/dx^2)-x^2} f(x) = \frac{u}{\sqrt{\pi(u^4-1)}} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x^2+y^2)(1+u^4) - 4xyu^2}{2(u^4-1)}\right) f(y) dy \quad (u > 1)$$
$$\text{(example } H_1\text{)}$$

where $f(x)$ are functions satisfying the condition $f(x) = O(\exp \epsilon x^2))$, $\epsilon > 0$, for $x \to \pm\infty$. Putting $L_1 = E$ we have L_u defined for $u \geqq 1$. L_u forms a half-group corresponding to $\lambda = (d^2/dx^2) - x^2$ in the sense given by the $\bar{S}_1$ postulates. If all $f(x)$ are twice differentiable and $f^{(k)} = O(\exp(\epsilon x^2))$, $k = 0,\, 1,\, 2$, the $\bar{S}_2$ postulates are also satisfied. Transforming $\lambda = (d^2/dx^2) - x^2$ and $L_u = u^\lambda$ with α defined by $\alpha f(x) = e^{-(x^2/2)} f(x)$ and noting $\alpha\lambda\alpha^{-1} = (d^2/dx^2) - 2x(d/dx) - 1$ (see Method B) we have,

$$u^{(d^2/dx^2)-x^2} f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(u^4-1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{u^4-1}\right) f\left(\frac{y}{u^2}\right) dy \tag{18}$$

for all $u > 1$. Substituting $t = \sqrt{2/u^4-1}(x-y)$ we get

$$u^{(d^2/dx^2)-x^2} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2/2)} f\left(\frac{x}{u^2} - \frac{t}{u^2}\sqrt{\frac{u^4-1}{2}}\right) dt. \tag{19}$$

The last expression has a sense for all complex u on the space of all integral functions $f(x)$ of the complex variable x, satisfying the condition

$f(x) = O(\exp(\epsilon|x|^2))$ for all complex x and gives a group corresponding to $\lambda = (d^2/dx^2) - 2x(d/dx)$ in the sense of S_2^*, which may be verified by straightforward calculation. We can prove that $u^{(d^2/dx^2)-x^2}$ commutes with the Fourier transformation T and $u^{(d^2/dx^2)-2x(d/dx)}$ with $T' = e^{(x^2/2)}Te^{-(x^{2/2})}$ where

$$Tf(x) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}f(y)dy,$$
$$T'f(x) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(x+iy)^2}f(y)dy.$$

We have here on corresponding spaces

$$u^\lambda f(x) = \frac{u^\beta}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{4} - \left(\frac{t}{2}u^{2\beta} - x\sqrt{\frac{\beta}{2}(u^{4\beta}-1)}\right)^2\right)\times$$

$$\times f\left(xu^{2\beta} - \sqrt{\frac{u^{4\beta}-1}{2\beta}t}\right)dt,\ \lambda = \frac{d^2}{dx^2} - \beta^2x^2, \qquad (H_2)$$

$$u^\lambda f(x) = \frac{2u^{2\beta}}{u^4-1}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{u^4-1}\right)(xy)^{-\beta}I_\beta\left(\frac{2xy}{u^4-1}\right)f\left(\frac{y}{u^2}\right)ydy,$$
$$\lambda = \frac{d^2}{dx} - 2x\frac{d}{dx} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{\beta^2}{x^2},\quad u>1 \qquad (H_3)$$

$$u^\lambda f(x) = \int_{-1}^{1} K(x,\,y,\,u)f(y)dy,\ \lambda = (1-x^2)\frac{d^2}{dx} - 2x\frac{d}{dx},\ u>1, \qquad (H_4)$$

where $K(u,\,x,\,y) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)u^{-n(n+1)}P_n(x)P_n(y)$, where the $P_n(x)$ are Legendre polynomials: $P_n(x) = (1/2^n n!)(d^n/dx^n)(x^2-1)$, and $I_\beta(x)$ are Bessel functions. Combining our methods we can get many new examples. Using H$_1$) and Method E, we can find, for instance, u^λ with $\lambda = (\partial^2/\partial x_1^2) + (\partial^2/\partial x_2^2) + \ldots + (\partial^2/\partial x_n^2) - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2$ and so on.

Having found u^λ for many λ we can find some partial solutions of linear functional equations of the form $(s+\lambda)y = f(x)$ determining $y = y(x)$ as

$$y(x) = (s+\lambda)^{-1}f(x) = -\int_1^\infty u^{s+\lambda-1}f(x)du \text{ or } \int_0^1 u^{s+\lambda-1}f(x)du,$$

the justification of this procedure being evident in corresponding cases. Thus using F$_2$), we can find partial solutions of $(\Delta_n^m + s)y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Using E$_2$) we can find some solution of $((d^2/dx^2)+b(d/dx)+ +\nabla_h + s)y(x) = f(x)$ where s is a complex number and $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(x)$ satisfy some asymptotic restrictions. After having found t^λ we can find other operator-valued functions of a numerical variable and especially the gamma function and Dirichlet series which are expressed in terms of t^λ in the simplest manner possible. We put

$$\Gamma(s+\lambda)f(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s+\lambda-1}f(x)dt,$$

$$\zeta(s+\lambda)f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{s+\lambda}}f(x)$$

and so on.

In the second part of this paper the author intends to publish the questions connected with the theory of these functions with their applications to the theory of prime numbers.

VARIOUS REMARKS.

Introducing polar coordinates $t = \rho\cos\varphi$, $\tau = \rho\sin\varphi$ in

$$u^{(\partial^2/\partial x^2)+(\partial^2/\partial y^2)}f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \exp(-\frac{t^2+\tau^2}{2})\times$$
$$\times f(x+\sqrt{2\log u}t, y+\sqrt{2\log u}\tau)dtd\tau,$$

we have

$$u^\Delta f(x, y) = \int_0^\infty e^{-(\rho^2/2)}M(\rho\sqrt{2\log u}, f, x, y)\rho d\rho,$$

where

$$M(r, f, P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_P + r\cos\varphi, y_P + r\sin\varphi)d\varphi$$

is the mean-value of f on the circle with radius r, whose center lies at P. For all integral functions of two complex variables satisfying the relation $f(x,\, y) = O(\exp \epsilon(|x|^2 + |y|^2))$ we have therefore

$$f(x,\, y) + \frac{\log u}{1!}\Delta f(x,\, y) + \frac{\log^2 u}{2!}\Delta^2 f(x,\ y) + \cdots = \\ = \int_0^\infty M(r\sqrt{2\log u},\, f,\, x,\, y)e^{-(r^2/2)}rdr$$

from which follows at once the Gauss' mean-value theorem for harmonic functions satisfying the said asymptotic relation. The same reasoning permits us to find other mean-value theorems characteristic for solutions of the differential equations of the form $\Delta^2 u = 0$, $\Delta u + x(\partial u/\partial x) + {}$ $+ y(\partial u/\partial y) = 0$, $\Delta u + x^2 u = 0$. If the integral $\displaystyle\int_0^\infty L_u A L_u^{-1} f(x)(du/u^\sigma)$ has a sense and L_v can be effected under the sign of this integral we have for

$$\begin{aligned} Bf(x) &= \int_0^\infty L_u A L_u^{-1} f(x)(du/u^\sigma), \\ L_v B L_v^{-1} f(x) &= \int_0^\infty L_{uv} A L_{uv}^{-1} f(x) du/u^\sigma = \\ &= v^{1-\sigma}\int_0^\infty A_u A L_u^{-1} f(x) du/u^\sigma = v^{1-\sigma} Bf(x), \\ L_v B L_v^{-1} &= B v^{1-\sigma}. \end{aligned}$$

For $\sigma = 1$ we have here a method of constructing operators commutable with all L_u which is perhaps worth while mentioning in view of Method E.

The correspondence $u \to L_u$ is always a homomorphism and all u for which $L_u = E$ form a subgroup H of the group G consisting of all positive or all complex numbers u with ordinary definition of multiplication. The group G/H and the operator group L are isomorphic. The group H, in view of the continuity of L_u, either coincides with G or is a discrete subgroup of G. In the case of G consisting of all positive numbers, H, being discrete, must be $H = (\ldots,\, e^{-2\omega},\, e^{-\omega},\, 1,\, e^{\omega},\, e^{2\omega},\, \ldots)$. Our present investigation can be in some sense characterized as an operational generalization of S. Lie's theory in the special case of one-parametric groups. A further generalization can be obtained if we introduce the set of transformations $L(u_1, u_2, \dots, u_n)$ satisfying the relation $L(a_1, a_2, \dots, a_n)L(b_1, b_2, \dots, b_n) = L(c_1, c_2, \dots, c_n)$ where the c_i are some functions of a_i, b_i.

We shall for some purposes introduce the transformations L_u for which L_aL_b depends on ab. We shall use, further, the M-pairs of linear transformations L_u and L_u^* satisfying the condition $L_aL_b^* = L_{ab}L_1^*$.

For instance for operations L_u and L_u^* defined by $L_uf(x) = f(x) \star \varphi(x, u)$ and $L_u^*f(x) = f(x) \star \psi(x, u)$ with $\varphi(x, u)$ and $\psi(x, u)$ having for their corresponding Laplace transforms $l_s(\varphi(x, u)) = A(s)u^{\alpha(s)}$ and $l_s(\psi(x, u)) = B(s)u^{\beta(s)}$ where $A(s)$, $B(s)$, $\alpha(s)$, $\beta(s)$ depend only on s, we have then $L_uL_v = L_{uv}L_1$, $L_u^*L_v^* = L_{uv}^*L_1^*$, $L_uL_v^* = L_{uv}L_1^*$. The transformations L_u and L_u^* satisfy both the extended M-condition $L_uL_v = L_{uv}L_1$, $L_u^*L_v^* = L_{uv}^*L_1^*$ and for an M-pair. For G_u of the example D$_1$ and for G_u^* defined by $G_u^*f(x) = \int_0^x t^{(\log u/2)} \times J_{\log u}(2\sqrt{t})f(t-x)dt$ we have, apart from $G_uG_v = G_{uv}$, also $G_u^*G_v^* = G_{uv}^*G_1^*$ and $G_u^*G_v = G_{uv}^*$ which follows from the formulae

$$l_s\left(\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) = s^{-\alpha} \text{ and } l_s(x^{\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{x})) = s^{-\alpha-1}e^{-(1/s)}.$$

For H_u defined by

$$H_uf(x) = \int_{\log u}^x J_0(\sqrt{t^2 - \log^2 u})f(x-t)dt$$

for $x \geqq \log u$ and $H_uf(x) \equiv 0$ for $x < \log u$ we have $H_aH_b = H_{ab}H_1$. We shall use further the notion of the M-sequence of linear transformations L_1, L_2, L_3, …, satisfying the conditions $L_iL_k = L_{ik}$ for each pair i, k of positive integers and $L_1 = E$. It is evident that if L_1, L_2, … form an M-sequence the same is true of L_1', L_2', … where $L_n' = \chi(n)L_n$ if $\chi(n)$ denotes Dirichlet's character modulo κ.

17. К вопросу о распределении простых чисел

В моей работе [65] я доказываю, между прочим, следующее тождество:

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n B_n}{\varphi_s(n)}, \tag{1}$$

где

$$s > 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 < \infty, \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2 < \infty, \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},$$

$\varphi_s(n) = \sum\limits_{d/n}\mu(\frac{n}{d})d^s = n^s\prod\limits_{p/n}(1-\frac{1}{p^s})$ — функция Лиувилля,

$$A_n = \sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)a_d^*, \quad B_n = \sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)b_d^*,$$

причем

$$a_d^* = n^{\frac{s}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{kn}}{k^{\frac{s}{2}}}, \quad b_d^* = n^{\frac{s}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{kn}}{k^{\frac{s}{2}}}.$$

Использование частных случаев указанного тождества приводит, как мне удалось показать, к выводу асимптотических теорем теории чисел.

Изложению одного из этих результатов и посвящена настоящая статья.

Здесь будут приняты следующие обозначения: $\mu(n)$ — функция Мёбиуса; $\sum\limits_{d/n}$ означает, что сумма распространена по всем делителям n; $\prod\limits_{p/n}$ означает, что произведение распространено по всем простым делителям n; $\sum\limits_{\rho(n)}$ показывает, что суммирование распространено по всем $\varphi(n)$ первообразным корням n-й степени из единицы;

$$P_n(x) = \prod_{d/n}(1-x^d)^{\mu(\frac{n}{d})} = \prod_{\rho(n)}(1-\rho x)$$

— полином деления окружности;

$$Q_n(x) = -\mu(n)x - \frac{P_n'(x)}{P_n(x)}x = -\mu(n)x + \sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\frac{dx^d}{1-x^d} =$$

$$= -\sum_{\rho(n)}\Big(\frac{x}{x-\rho} + \bar{\rho}x\Big) = \sum_{\rho(n)} \frac{\rho^2 x^2}{1-\rho x};$$

$$\varphi(n) = \varphi_1(n) = n\prod_{p/n}\Big(1-\frac{1}{p}\Big);\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n}\Lambda(n)x^n;\ H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k};$$

$F_m(u)$ — число бесквадратных чисел, не превосходящих u и взаимно простых с $m; \nu(m)$ — число простых делителей m;

$$R_m(u) = \sum_{\substack{k\le u\\(k,m)=1}} \frac{\mu(k)^2}{\varphi(k)};\ \ T_m(u) = \sum_{\substack{k\le u\\(k,m)=1}} \frac{\mu(k)^2}{k};$$

x — комплексное число, по модулю не превосходящее единицы.

Дальнейшее изложение основано на применении следующей теоремы Харди – Литтлвуда:

Из соотношения

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n = A,$$

где $c_n \ge 0$, *следует, что*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} c_n = A,$$

на изучении тождества

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi(m)}{m}\Lambda(m)x^m = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}Q_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}\sum_{\rho(n)}\frac{\rho^2x^2}{1-\rho x} \tag{2}$$

и на некоторых элементарных арифметических оценках.

Докажем тождество (2). Сначала докажем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}Q_n(x)\quad (|x|<1).$$

Рассмотрим его частную сумму

$$S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}Q_n(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}\left\{\sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\frac{dx^d}{1-x^d}-\mu(n)x\right\}=$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}c_m^N x^m.$$

Очевидно, $c_1^N=0$. Для c_m^N имеем при $m>1$

$$c_m^N=\sum_{d/m}\mu(d)\sum_{\substack{n\le\frac{N}{d}\\(n,m)=1}}\frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)}=\sum_{d/m}\mu(d)R_m\Big(\frac{N}{d}\Big).\tag{3}$$

В самом деле, коэффициент при x^m в $\frac{dx^d}{1-x^d}$ равен $d\varepsilon_m^d$, где $\varepsilon_k^i=\begin{cases}1, & \text{если } i/k,\\ 0, & \text{если } i\nmid k.\end{cases}$ Поэтому

$$c_m^N=\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}\sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)d\varepsilon_m^d=\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}\sum_{d/(m,n)}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)d=$$
$$=\sum_{D/m}\sum_{\substack{n\le\frac{N}{D}\\(n,\frac{m}{D})=1}}\frac{\mu(nD)}{\varphi(nD)}\sum_{d/D}\mu\Big(n\frac{D}{d}\Big)d=$$
$$=\sum_{D/m}\sum_{\substack{n=1\\(n,D)=1\\(n,\frac{m}{D})=1}}\frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)}\frac{\mu(D)}{\varphi(D)}\sum_{d/D}\mu\Big(\frac{D}{d}\Big)d=$$
$$=\sum_{D/m}\mu(D)\sum_{\substack{n=1\\(n,m)=1}}^{\frac{N}{D}}\frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)}=\sum_{D/m}\mu(D)R_m\Big(\frac{N}{D}\Big).$$

Здесь использовано следующее соотношение:

$$\frac{\mu(kl)}{\varphi(kl)}=\begin{cases}0, \text{ если } (k,l)>1,\\ \frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\cdot\frac{\mu(l)}{\varphi(l)}, \text{ если } (k,l)=1\end{cases}$$

и очевидное равенство

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{D/m} \sum_{\substack{n=1 \\ (n, \frac{m}{D})=1}}^{\frac{N}{D}} a_{nD},$$

справедливое для любых m, N, a.

Преобразуем теперь выражение для $R_m(N)$:

$$R_m(N) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,m)=1}}^{N} \frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)} = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,m)=1}}^{N} \frac{\mu(n)^2}{n} \prod_{p/n} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ (n,m)=1}}^{N} \frac{\mu(n)^2}{n} \sum_{d/n} \frac{\mu(d)^2}{\varphi(d)} = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,m)=1}}^{N} \frac{\mu(l)^2}{\varphi(l)} \sum_{\substack{n \le N \\ (n,m)=1 \\ n \equiv 0 \pmod{l}}} \frac{\mu(n)^2}{n} =$$

$$= \sum_{\substack{l=1 \\ (l,m)=1}}^{N} \frac{\mu(l)^2}{\varphi(l)} \sum_{\substack{n \le \frac{N}{l} \\ (n,m)=1}} \frac{\mu(nl)^2}{nl} = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,m)=1}}^{N} \frac{\mu(l)^2}{l\varphi(l)} \sum_{\substack{n \le \frac{N}{l} \\ (n,ml)=1}} \frac{\mu(n)^2}{n}$$

и окончательно получим

$$R_m(N) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,m)=1}}^{N} \frac{\mu(l)^2}{l\varphi(l)} T_{ml}\left(\frac{N}{l}\right) \tag{4}$$

(ср. преобразование в статье Ландау [17]). Далее имеем

$$T_m(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}(F_m(n) - F_m(n-1)) = \sum_{n=1}^{N} \frac{F_m(n)}{n(n+1)} + \frac{F_m(N)}{N+1} \tag{5}$$

и (ср. [14, с. 633])

$$F_m(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,m)=1}}^{n} \mu(k)^2 = \sum_{\substack{k \le n \\ (k,m)=1}} \sum_{d/k} \mu(\sqrt{d}) =$$

$$= \sum_{\substack{l=1\\(l,m)=1}}^{n} \mu(\sqrt{l}) \sum_{\substack{(k,m)=1\\k\equiv 0 \pmod{l}}}^{k\le n} 1 = \sum_{(l,m)=1}^{l\le n} \mu(\sqrt{l}) \sum_{\substack{(k,m)=1\\k\le \frac{n}{l}}} 1 =$$

$$= \sum_{\substack{l=1\\(l,m)=1}}^{n} \mu(\sqrt{l})\varphi\left(\frac{n}{l}, m\right) = \sum_{\substack{l\le\sqrt{n}\\(l,m)=1}} \mu(l)\varphi\left(\frac{n}{l^2}, m\right),$$

где $\mu(u)$ определена при целом u, как обычно, а при нецелом u мы полагаем $\mu(u) = 0$, $\varphi(x, m) = \sum\limits_{d/m} \mu(d)[\frac{x}{d}]$ — число чисел, не превосходящих x и взаимно простых с m. Очевидно,

$$\varphi(x, m) = \sum_{d/m} \mu(d)\left[\frac{x}{d}\right] = -\sum_{d/m} \mu(d)\left(\frac{x}{d} - \left[\frac{x}{d}\right]\right) + \frac{x}{m}\sum_{d/m}\mu(d)\frac{m}{d} =$$

$$= \frac{\varphi(m)}{m}x - \sum_{d/m}\mu(d)\left(\frac{x}{d} - \left[\frac{x}{d}\right]\right) = \frac{\varphi(m)}{m}x + \Psi_m(x),$$

$$\Psi_m(x) = -\sum_{d/m}\mu(d)\left(\frac{x}{d} - \left[\frac{x}{d}\right]\right).$$

Далее, полагая

$$a_m^n = -\frac{\varphi(m)}{m} n \sum_{\substack{l=[\sqrt{n}]+1\\(l,m)=1}}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l^2} + \sum_{\substack{l\le\sqrt{n}\\(l,m)=1}} \mu(l)\Psi_m\left(\frac{n}{l^2}\right), \tag{6}$$

получим

$$F_m(n) = \sum_{\substack{l\le\sqrt{n}\\(l,m)=1}} \frac{\varphi(m)}{m} n \frac{\mu(l)}{l^2} + \sum_{\substack{l\le\sqrt{n}\\(l,m)=1}} \mu(l)\Psi_m\left(\frac{n}{l^2}\right) =$$

$$= \frac{\varphi(m)}{m} n \sum_{\substack{l=1\\(l,m)=1}}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l^2} - \frac{\varphi(m)}{m} n \sum_{\substack{l=[\sqrt{n}]+1\\(l,m)=1}}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l^2} +$$

$$+ \sum_{\substack{l\le\sqrt{n}\\(l,m)=1}} \mu(l)\Psi_m\left(\frac{n}{l^2}\right),$$

$$F_m(n) = \frac{6n}{\pi^2}\prod_{p/n}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} + a_m^n = \frac{6n}{\pi^2}\prod_{p/m}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} + O(\sqrt{n}2^{\nu(m)}), \tag{7}$$

или, учитывая равенства (5) и (7),

$$T_m(N) = \sum_{n=1}^{N}\frac{F_m(n)}{n(n+1)} + \frac{F_m(N)}{N+1} = \frac{6}{\pi^2}\prod_{p/m}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} +$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\frac{a_m^n}{n(n+1)} + \frac{F_m(N)}{N+1} = \frac{6}{\pi^2}\prod_{p/m}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}\lg N + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m^n}{n(n+1)} +$$
$$+\frac{6}{\pi^2}\prod_{p/m}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}E - \frac{6}{\pi^2}\frac{1}{N+1}\prod_{p/m}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} +$$
$$+\frac{a_m^N}{N+1} - \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{a_m^n}{n(n+1)} + \frac{6}{\pi^2}\prod_{p/m}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}\{H_{N+1} - E - \lg N\},$$

$$T_m(N) = \frac{6}{\pi^2}\prod_{p/m}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}\lg N + B_m + O\left(\frac{2^{\nu(m)}}{\sqrt{N}}\right), \tag{8}$$

где

$$B_m = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m^n}{n(n+1)} + \frac{6}{\pi^2}\prod_{p/m}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}E,\ \ B_m = O(2^{\nu(m)}).$$

Из (4) и (8) имеем

$$R_m(N) = \sum_{\substack{l=1\\(l,m)=1}}^{N}\frac{\mu(l)^2}{l\varphi(l)}T_{ml}\left(\frac{N}{l}\right) =$$
$$= \frac{6}{\pi^2}\sum_{\substack{l=1\\(l,m)=1}}^{N}\frac{\mu(l)^2}{l\varphi(l)}\prod_{p/ml}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}\lg\frac{N}{l} +$$
$$+\sum_{\substack{l=1\\(l,m)=1}}^{N}\frac{\mu(l)^2 B_{ml}}{l\varphi(l)} + O\left(\sum_{l=1}^{N}\frac{\mu(l)^2 2^{\nu(ml)}}{\sqrt{lN}\varphi(l)}\right) =$$

$$= \frac{6}{\pi^2}\prod_{p/m}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}\lg N \sum_{\substack{l=1\\(l,m)=1}}^{N}\frac{\mu(l)^2}{l\varphi(l)}\prod_{p/l}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} -$$

$$-\frac{6}{\pi^2}\prod_{p/m}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}\sum_{\substack{l=1\\(l,m)=1}}^{N}\frac{\mu(l)^2\lg l}{l\varphi(l)}\prod_{p/l}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} +$$

$$+\sum_{\substack{l=1\\(l,m)=1}}^{N}\frac{\mu(l)^2}{l\varphi(l)}B_{ml} + O\left(\frac{2^{\nu(m)}}{\sqrt{N}}\right) =$$

$$= \frac{6}{\pi^2}\prod_{p/m}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}\lg N \sum_{\substack{l=1\\(l,m)=1}}^{\infty}\frac{\mu(l)^2}{l\varphi(l)}\prod_{p/l}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} +$$

$$+ L_m + O\left(\frac{2^{\nu(m)}}{\sqrt{N}}\right);$$

$$L_m = \sum_{\substack{l=1\\(l,m)=1}}^{\infty}\frac{B_{ml}}{l\varphi(l)}\mu(l)^2 -$$

$$-\frac{6}{\pi^2}\prod_{p/m}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}\sum_{\substack{l=1\\(l,m)=1}}^{\infty}\frac{\mu(l)^2\lg l}{l\varphi(l)}\prod_{p/l}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1};$$

$$R_m(N) = \prod_{p/m}\left(1-\frac{1}{p}\right)\lg N + L_m + O\left(\frac{2^{\nu(m)}}{\sqrt{N}}\right). \tag{9}$$

При этом использованы следующие соотношения:

$$|\Psi_m(x)| = \left|\sum_{d/m}\mu(d)\left(\frac{x}{d}-\left[\frac{x}{d}\right]\right)\right| \le \sum_{d/m}\left|\mu\left(\frac{n}{d}\right)\right| = 2^{\nu(m)},$$

$$\sum_{\substack{l=N+1\\(l,m)=1}}^{\infty}\frac{\mu(l)^2}{l\varphi(l)}B_{ml} = O\left(2^{\nu(m)}\frac{\lg N}{N}\right) = O\left(\frac{2^{\nu(m)}}{\sqrt{N}}\right),$$

$$\lg N\sum_{\substack{l=N+1\\(l,m)=1}}^{\infty}\frac{\mu(l)^2}{l\varphi(l)}\prod_{p/l}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} = O\left(\frac{\lg N}{N}\right) = O\left(\frac{2^{\nu(m)}}{\sqrt{N}}\right),$$

$$\sum_{\substack{l=N+1\\(l,m)=1}}^{\infty} \frac{\mu(l)^2}{l\varphi(l)} \lg l \prod_{p/l}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} = O\left(\frac{\lg N}{N}\right) = O\left(\frac{2^{\nu(m)}}{\sqrt{N}}\right),$$

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,m)=1}}^{\infty} \frac{\mu(l)^2}{l\varphi(l)} \prod_{p/l}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_{p\nmid m}\left(1+\frac{1}{p\varphi(p)}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}\right) =$$

$$= \prod_{p\nmid m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \prod_{p/m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}\prod_{p/m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right).$$

Далее из равенств (3) и (9) имеем

$$c_m^N = \sum_{d/m} \mu(d) R_m\left(\frac{N}{d}\right) = \frac{\varphi(m)}{m}\sum_{d/m}\mu(d)\lg\frac{N}{d} +$$
$$+ L_m\sum_{d/m}\mu(d) + O\left(\frac{2^{\nu(m)}}{\sqrt{N}}\sum_{d/m}\mu(d)^2\sqrt{d}\right),$$

$$c_m^N = \frac{\varphi(m)}{m}\Lambda(m) + O\left(4^{\nu(m)}\sqrt{\frac{m}{N}}\right), \tag{10}$$

где

$$\sum_{d/m}\mu(d)\lg\frac{N}{d} = \Lambda(m), \quad \sum_{d/m}\mu(d) = 0,$$

$$\sum_{d/m}\mu(d)^2\sqrt{d} < \sqrt{m}\sum_{d/m}\mu(d)^2 = \sqrt{m}2^{\nu(m)}.$$

Отсюда получим

$$S_N(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi(m)}{m}\Lambda(m)x^m + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=1}^{\infty}4^{\nu(m)}\sqrt{m}|x|^m\right). \tag{11}$$

Кроме того, так как

$$\sigma_M = \sum_{m=1}^{M} 4^{\nu(m)}\sqrt{m} = \sum_{m=1}^{M}\sqrt{m}\sum_{d/m}\mu(d)^2 3^{\nu(d)} =$$

$$= \sum_{l=1}^{M}\mu(l)^2 3^{\nu(l)} \sum_{\substack{m\le M\\ m\equiv 0 \pmod l}} \sqrt{m} \le$$

$$\le \sum_{l=1}^{M} 3^{\nu(l)}\sqrt{l}\sum_{m=1}^{\frac{M}{l}}\sqrt{m} = O\biggl(M^{\frac{3}{2}}\sum_{l=1}^{M}\frac{1}{l}3^{\nu(l)}\biggr),$$

$$\sum_{l=1}^{M}\frac{3^{\nu(l)}}{l} = \sum_{l=1}^{M}\frac{1}{l}\sum_{d/l}2^{\nu(d)}\mu(d)^2 \le \sum_{k=1}^{M}2^{\nu(k)}\sum_{\substack{l\le M\\ l\equiv 0 \pmod k}}\frac{1}{l} =$$

$$= \sum_{k=1}^{M}\frac{2^{\nu(k)}}{k}\sum_{l=1}^{\frac{M}{k}}\frac{1}{l} = O\biggl(\lg M\sum_{k=1}^{M}\frac{2^{\nu(k)}}{k}\biggr),$$

$$\sum_{k=1}^{M}\frac{2^{\nu(k)}}{k} = \sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k}\sum_{d/k}\mu(d)^2 = \sum_{l=1}^{M}\mu(l)^2\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\frac{M}{l}}\frac{1}{k} = O(\lg^2 M),$$

то

$$\sigma_M = O(M^{\frac{3}{2}}\lg^3 M)$$

и

$$\sum_{m=1}^{\infty}4^{\nu(m)}\sqrt{m}|x|^m = O\biggl(\frac{-\lg^3(1-|x|)}{(1-|x|)^{\frac{3}{2}}}\biggr). \tag{12}$$

Теперь из (11) и (12) следует, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi(m)}{m}\Lambda(m)x^m = \sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}Q_n(x) + O\biggl(\frac{-\lg^3(1-|x|)}{\sqrt{N(1-|x|)^3}}\biggr), \tag{13}$$

откуда тождество (2) становится очевидным.

Оценка (13) недостаточна для получения теоремы, эквивалентной теореме о распределении простых чисел в прогрессиях:

$$\lim_{x\to\exp(2\pi i\frac{l}{k})}(1-|x|)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi(m)}{m}\Lambda(m)x^m = \lim_{r\to 1}(1-r)f(re^{2\pi i\frac{l}{k}}) = \frac{\mu(k)}{\varphi(k)}. \tag{14}$$

Достаточной была бы следующая оценка:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi(m)}{m}\Lambda(m)x^m=\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}Q_n(x)+O\left(\frac{-\lg^3(1-|x|)}{\lg^3 N\lg\lg N\sqrt{N(1-|x|)^3}}\right). \tag{15}$$

В самом деле, как нетрудно доказать, вдоль луча $x=re^{2\pi i\frac{l}{k}}$, $0\le r\le$ ≤ 1, $(k,l)=1$, справедлива оценка, равномерная относительно r :

$$\sum_{n=1}^{N}{}'\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}Q_n(x)=O(N), \tag{16}$$

где штрих при $\sum$ означает, что слагаемое, соответствующее $n=k$, пропущено. Тогда, на основании соотношений (15) и (16) имеем

$$\left(x=r\exp\left(2\pi i\frac{l}{k}\right),\ (l,k)=1,\ f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi(m)}{m}\Lambda(m)x^m\right):$$

$$\begin{aligned}(1-|x|)f(x)=\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}(1-|x|)Q_k(x)+O(N(1-|x|))+\\+O\left(\frac{-\lg^3(1-|x|)}{\lg^3 N\lg\lg N\sqrt{N(1-|x|)}}\right)\end{aligned} \tag{17}$$

и, полагая $N=\left[\frac{1}{(1-|x|)\lg\lg(1-|x|)^{-1}}\right]$, получаем

$$\begin{aligned}(1-|x|)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi(m)}{m}\Lambda(m)x^m=\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}(1-|x|)Q_k(x)+\\+O\left(\left\{\lg\lg\frac{1}{1-|x|}\right\}^{-\frac{1}{2}}\right).\end{aligned} \tag{18}$$

Далее, замечая, что $\lim\limits_{x\to\exp(2\pi i\frac{l}{k})}(1-|x|)Q_k(x)=1$, выводим следующее соотношение $((k,l)=1)$:

$$\lim_{x\to\exp(2\pi i\frac{l}{k})}(1-|x|)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi(m)}{m}\Lambda(m)x^m=\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}. \tag{19}$$

Отсюда уже легко получить теорему Адамара — Валле Пуссена.

В самом деле, при выводе соотношения (19) предполагалось, что $(k,l)=1$. Для любых k,l имеем

$$\lim_{r\to 1}(1-r)f(re^{2\pi i\frac{l}{k}})=\frac{\mu\left(\frac{k}{(k,l)}\right)}{\varphi\left(\frac{k}{(k,l)}\right)}. \tag{20}$$

Далее ($(a,m)=1$),

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\sum_{n\equiv a\pmod m}\Lambda(n)\frac{\varphi(n)}{n}r^n=$$

$$=\frac{1}{m}\lim_{r\to 1}(1-r)\sum_{g=1}^{m}f(re^{2\pi i\frac{g}{m}})e^{-2\pi i\frac{ag}{m}}=$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{g=1}^{m}e^{-2\pi i\frac{ag}{m}}\Psi\left(\frac{m}{(g,m)}\right)=\frac{1}{m}\sum_{d/m}\sum_{\substack{g\le m\\(g,m)=d}}e^{-2\pi i\frac{ag}{m}}\Psi\left(\frac{m}{d}\right)=$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{d/m}\Psi\left(\frac{m}{d}\right)\sum_{\substack{g'=1\\(g',m')=1}}^{m'}e^{-2\pi i\frac{ag'}{m'}}=\frac{1}{m}\sum_{d/m}\Psi\left(\frac{m}{d}\right)\mu\left(\frac{m}{d}\right)=$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{d/m}\mu(d)\Psi(d)=\frac{1}{m}\prod_{p/m}(1-\Psi(p))=\frac{1}{m}\prod_{p/m}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)=\frac{1}{\varphi(m)},$$

где для сокращения положено $\Psi(u)=\frac{\mu(u)}{\varphi(u)}$, $m'=\frac{m}{(m,g)}$, $g'=\frac{g}{(m,g)}$. Из только что полученной формулы

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\sum_{n\equiv a\pmod m}\frac{\varphi(n)}{n}\Lambda(n)r^n=\frac{1}{\varphi(m)},\ (a,m)=1, \tag{21}$$

очевидным образом следует

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\sum_{n\equiv a\pmod m}\Lambda(n)r^n=\frac{1}{\varphi(m)},\ (a,m)=1, \tag{22}$$

а отсюда, на основании теоремы Харди — Литтлвуда выводим, что

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\equiv a\pmod m}^{n\le N}\Lambda(n)=\frac{1}{\varphi(m)}. \tag{23}$$

Докажем оценку (16). Мы имеем

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{N}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}Q_n(x)=\sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{N}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{dx^d}{1-x^d}-x\sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{N}\frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)}.$$

Отсюда видно, что достаточно установить следующую оценку:

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{N}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{dx^d}{1-x^d}=O(N)$$

$$\left(0\leq|x|\leq 1,\ \arg x=2\pi\frac{l}{k},\ (k,l)=1\right).$$

Далее

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{N}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}V_n(x)=\sum_{n\not\equiv 0\ (\bmod k)}^{n\leq N}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}V_n(x)+$$

$$+\sum_{\substack{n\equiv 0\ (\bmod k)\\ n\neq k}}^{n\leq N}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}\left\{\sum_{\substack{d/n\\ d\equiv 0\ (\bmod k)}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{dr^d}{1-r^d}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{d/n\\ d\not\equiv 0\ (\bmod k)}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{dx^d}{1-x^d}\right\}=$$

$$=\sum_{\substack{n=1\\ n\not\equiv 0\ (\bmod k)}}^{N}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}V_n(x)+k\sum_{\substack{n\equiv 0\ (\bmod k)\\ n\neq k}}^{n\leq N}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}V_{\frac{n}{k}}(r^k)+$$

$$+\sum_{\substack{n\equiv 0\ (\bmod k)\\ n\neq k}}^{n\leq N}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}\sum_{\substack{d/n\\ d\not\equiv 0\ (\bmod k)}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{dx^d}{1-x^d},$$

где для сокращения положено $V_n(x)=\sum\limits_{d/n}\mu(\frac{n}{d})\frac{dx^d}{1-x^d}$. Очевидно,$x^h=$ $=r^h$, если k/h, и

$$\sum_{\substack{d/n\\ d\equiv 0\ (\bmod k)}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{dr^d}{1-r^d}=\sum_{d'/n'}\mu\left(\frac{n'}{d'}\right)\frac{d'kr^{d'k}}{1-r^{d'k}}=kV_{n'}(r^k),$$

где $n' = \frac{n}{k}$, $d' = \frac{d}{k}$. Из простых геометрических соображений очевидно, что $\min|1-x^d| \geq \frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}}$, если $d \not\equiv 0 \pmod{k}$. Отсюда имеем

$$\left|\sum_{\substack{d/n\\ d\not\equiv 0\ (\bmod\ k)}} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{dx^d}{1-x^d}\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}}\sum_{d/n} d = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}}\sigma(n),$$

$$\left|\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{dx^d}{1-x^d}\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}}\sigma(n) \quad \text{при} \quad n \not\equiv 0 \ (\bmod\ k).$$

Далее $(n > 1)$

$$V_n(r) = \sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{dr^d}{1-r^d} = \sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\left(\frac{dr^d}{1-r^d} - \frac{r}{1-r}\right) =$$

$$= -\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{1+2r+\cdots+(d-1)r^{d-1}}{1+r+\cdots+r^{d-1}}$$

или, так как $\frac{1+2r+\cdots+(d-1)r^{d-1}}{1+r+\cdots+r^{d-1}} \leq d$,

$$V_n(r) \leq \sigma(n).$$

Здесь всюду $\sigma(n) = \sum\limits_{d/n} d$. Теперь очевидно, что

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}V_n(x) = O\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)}\sigma(n)\right) = O(N),$$

так как

$$\sum_{n=1}^{N}\mu(n)^2\frac{\sigma(n)}{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{N}\mu(n)^2\prod_{p/n}\frac{1+\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\mu(n)^2\prod_{p/n}\left(1+\frac{2}{p}\right)\prod_{p/n}\left(1+\frac{2}{p^2+p-2}\right) <$$

$$< c\sum_{n=1}^{N}\mu(n)^2\sum_{d/n}\frac{2^{\nu(d)}}{d} \leq c\sum_{n=1}^{N}\sum_{d/n}\frac{2^{\nu(d)}}{d} =$$

$$= c\sum_{l=1}^{N}\frac{2^{\nu(l)}}{l}\left[\frac{N}{l}\right] < cN\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2^{\nu(l)}}{l^2} = CN.$$

Таким образом, остается необоснованной только оценка (15), где, конечно, вместо $\lg\lg N$ достаточно иметь любую функцию от N, растущую до бесконечности при $N \to \infty$.

Следовательно, незначительное усиление оценок (13) или (16) дает теорему о распределении простых чисел в прогрессиях. Мне удалось доказать оценки, достаточные для обоснования предельного перехода в формуле (14), но при помощи более сложных соображений, чем те, которые были приведены выше.

Таким образом, можно элементарно доказать, что

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi(m)}{m} \Lambda(m) x^m$$

выражается как сумма главных частей, характеризующих поведение $f(x)$ при приближении x к точкам $\exp(2\pi i R)$, где R — любое рациональное число; но доказательство того, что слагаемые этой суммы действительно дают эти особенности, затруднительно, ввиду отсутствия равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} (1 - |x|) Q_n(x)$$

вдоль луча $\arg x = 2\pi R$, и вызывает необходимость в использовании предложений не менее тонких, чем те, которые обычно применяются в доказательстве теоремы о распределении простых чисел. Иначе обстоит дело во многих других случаях.

Так, конкретизируя в (1) константы $a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$, мне удалось получить тождества типа

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m = \sum_{m=1}^{\infty} d_m Q_m(x),$$

где d_m настолько быстро стремится к нулю, что равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n (1 - |x|) Q_n(x)$ в круге $|x| \leq 1$ становится очевидной, и поэтому непосредственно видна законность почленного предельного перехода при $x \to \exp\bigl(2\pi i \frac{l}{k}\bigr)$. Так, достаточно положить

$d_n = O(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}})$, так как

$$(1-|x|)\left|\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{dx^d}{1-x^d}\right| \leq (1-|x|)\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)^2\frac{d|x|^d}{1-|x|^d} =$$

$$= \sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)^2\frac{d|x|^d}{1+|x|+\cdots+|x|^{d-1}} \leq \sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)^2 = 2^{\nu(n)},$$

а ряд $C\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\nu(n)}}{n^{1+\varepsilon}}$, мажорантный для $\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_n(1-|x|)Q_n(x)$, сходится. Далее, как и выше, находим $\left((a,m)=1,\ F(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx^n\right)$

$$\lim_{x\to\exp(2\pi i\frac{l}{k})}(1-|x|)\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n = d_{\frac{k}{(k,l)}},$$

$$\lim_{r\to1}(1-r)\sum_{n\equiv a \pmod m}c_nr^n = \lim_{r\to1}(1-r)\frac{1}{m}\sum_{g=1}^{m}e^{-2\pi i\frac{ag}{m}}(Fre^{2\pi i\frac{g}{m}}) =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{g=1}^{m}e^{-2\pi i\frac{ag}{m}}d_{\frac{m}{(g,m)}} = \frac{1}{m}\sum_{\delta/m}\mu(\delta)d_\delta.$$

Например, легко получить, что

$$\zeta(s)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varphi_{s-1}(n)}{n^{s-1}}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)}Q_n(x), \tag{24}$$

откуда, полагая $\lambda(1,s)=0$, $\lambda(n,s)=\zeta(s)\prod\limits_{p/n}(1-\frac{1}{p^{s-1}})$ при $n>1$, имеем

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\equiv l \pmod k}^{n\leq N}\lambda(n,s) = \frac{k^{s-1}}{\varphi_s(k)}\prod_{p/(k,l)}\left(1-\frac{1}{p^{s-1}}\right). \tag{25}$$

Интересно отметить, что $\lambda(n,s)\to\Lambda(n)$ при $s\to1$. Мы видим, что теорема Адамара — Валле Пуссена получается из этой элементарно доказанной формулы, если только установить, что

$$\lim_{s\to1}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\equiv l \pmod k}^{n\leq N}\lambda(n,s) = \lim_{N\to\infty}\lim_{s\to1}\frac{1}{N}\sum_{n\equiv l \pmod k}^{n\leq N}\lambda(n,s). \tag{26}$$

Это последнее равенство уже не удается доказать элементарными средствами.

Полагая в соотношении (24) $s = 2$ и дифференцируя по x, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)x^n = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi_2(n)} \sum_{\rho(n)} \frac{\rho x}{(1-\rho x)^2}, \tag{27}$$

откуда легко выводим

$$\lim_{x \to \exp(2\pi i \frac{l}{k})} (1-|x|)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)x^n = \frac{6}{\pi^2} \frac{\mu(k)}{\varphi_2(k)}, \tag{28}$$

а из (28) уже легко следует

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n \equiv l \pmod{k}}^{n \leq N} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} \frac{k}{\varphi_2(k)} \prod_{p/(k,l)} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{29}$$

Так просто и элементарно удается доказать многие асимптотические формулы без использования ряда Дирихле и характеров Дирихле, которые, казалось бы, необходимы в этих вопросах. Достаточно указать, что обычный простой и элементарный вывод формулы

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}$$

не проще, чем указанный здесь вывод более общего результата. Интересно, что во многих случаях функции типа $\sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m$ с арифметически заданными коэффициентами выражаются в виде суммы «главных частей» характеризующих поведение функции на границе в точках $x = \exp(2\pi i R)$, причем в большинстве случаев такие результаты получаются просто и элементарно. Так, равенство (27) показывает не только то, что функция $\sum_{n=1}^{N} \varphi(n)x^n$ удовлетворяет соотношению (28), но и то, что она является простейшей из функций, удовлетворяющих (28), подобно тому как $\operatorname{ctg} \pi z$ является простейшей из функций, имеющих целые числа простыми полюсами с вычетами, равными единице.

Функция $\lambda(n, s)$, выведенная выше, во многих отношениях подобна функции Мангольдта, в которую она переходит при $s \to 1$.

Легко доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\lambda(n,s)}{n^z}=-\zeta(s)\frac{L(z+s-1,\chi)-L(z,\chi)}{L(z+s-1,\chi)}. \tag{30}$$

Если в тождестве (2) заменить x^n на $\frac{1}{n^z}$, где $\mathcal{R}(z)>1$, то мы получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n}\frac{\Lambda(n)}{n^z}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\zeta(z)\frac{\varphi_{1-z}(n)}{\varphi(n)}-\frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)}\right\}. \tag{31}$$

Подставляя $\frac{\chi(n)}{n^z}$ вместо x^n, где $\chi(n)$, как и выше, — характер Дирихле по некоторому данному модулю k, выводим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n}\frac{\Lambda(n)}{n^z}\chi(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\mu(n)L(z,\chi)}{\varphi(n)}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\chi(d)d^{1-z}-\frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)}\right\}. \tag{32}$$

Равенства (31) и (32) доказываются аналогично тождеству (2), и из них можно вывести (2) путем трансформации Меллина.

Следует отметить еще такие формулы:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\varphi_{1-z}(n)}{\varphi(n)n^s}=\zeta(z)\frac{\zeta(s+1)}{\zeta(2s+2)}\prod_p\left(1-\frac{p^{2-z}-1}{(p-1)(p^{s+1}+1)}\right)=\\&=\zeta(z)\zeta(s+1)A(s,z),\\&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)n^s}=\frac{\zeta(s+1)}{\zeta(2s+2)}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p^{s+1}+1)(p-1)}\right)=\zeta(s+1)B(s).\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Легко доказать, что

$$\left.\begin{gathered}\lim_{z\to1}\zeta(z)\zeta(s+1)A(s,z)=1,\ \lim_{s\to0}\zeta(z)A(s,z)=1,\\ \lim_{s\to0}B(s)=1,\\ \lim_{s\to0}\zeta(s+1)(\zeta(z)A(s,z)-B(s))=\\ =\frac{d}{ds}(\zeta(z)A(s,z)-B(s))\Big|_{s=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n}\frac{\Lambda(n)}{n^z}.\end{gathered}\right\} \tag{34}$$

Формула

$$\sum_{\substack{n=1\\(n,m)=1}}^{\infty}\frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)n^s}=\frac{\zeta(s+1)}{\zeta(2s+2)}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p^{s+1}+1)(p-1)}\right)\times$$
$$\times\prod_{p/m}\frac{(p-1)p^s}{p^{s+1}-p^s+1}=\zeta(s+1)B(s)\theta_m(s), \tag{35}$$

$$\theta_m(s)=\prod_{p/m}\frac{(p-1)p^s}{p^{s+1}-p^s+1},$$

которая легко доказывается, может быть использована для получения предыдущих оценок.

Согласно обычным приемам аналитической теории чисел, имеем:

$$\sum_{\substack{n\le\frac{N}{d}\\(n,m)=1}}\frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)}\lg\frac{N}{dn}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-\infty i}^{2+\infty i}\zeta(s+1)B(s)\theta_m(s)\frac{N^s}{d^s}\frac{ds}{s^2},$$

$$\sum_{d/m}\mu(d)\sum_{\substack{n\le\frac{N}{d}\\(n,m)=1}}\frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)}\lg\frac{N}{dn}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-\infty i}^{2+\infty i}\zeta(s+1)B(s)\theta_m(s)\frac{\varphi_s(m)}{m^s}N^s\frac{ds}{s^2}=$$
$$=\frac{\varphi(m)}{m}\Lambda(m)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac12-\infty i}^{-\frac12+\infty i}\zeta(s+1)B(s)\theta_m(s)\frac{\varphi_s(m)}{m^s}N^s\frac{ds}{s^2}=$$
$$=\frac{\varphi(m)}{m}\Lambda(m)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac12-\infty i}^{-\frac12+\infty i}\zeta(s+1)B(s)\psi_m(s)N^s\frac{ds}{s^2}, \tag{36}$$

$$\psi_m(s)=\theta_m(s)\frac{\varphi_s(m)}{m^s}=\prod_{p/m}\left(1-\frac{p}{p^{s+1}-p^s+1}\right).$$

Для дальнейшего необходима оценка суммы $\sum\limits_{m\equiv l \pmod k}^{m\leq M} \psi_m(s)$ при $\mathcal{R}(s) = -\frac{1}{2}$, которая может быть осуществлена путем рассмотрения ряда Дирихле:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)\psi_m(s)}{m^z} = \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p)\psi_p(s)}{p^z} + \frac{\chi(p^2)\psi_{p^2}(s)}{p^{2z}} + \cdots \right) =$$
$$= \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p)}{p^z - \chi(p)} \frac{p^{s+1} - p^s + 1 - p}{p^{s+1} - p^s + 1}\right),$$

откуда легко получить обычными методами:

$$\sum_{m\equiv l \ (\bmod k)}^{m\leq M} \psi_m(s) = O(M^{1-\sigma} e^{-\sqrt{\lg M}}), \tag{37}$$

где $\sigma = \mathcal{R}(s) < 0$, а из (36) и (37) легко следует

$$\sum_{m\equiv l \ (\bmod k)}^{m\leq M} c_m^N = \sum_{m\equiv l \ (\bmod k)}^{m\leq M} \frac{\varphi(m)}{m} \Lambda(m) + O\left(\frac{M^{\frac{3}{2}}}{N^{\frac{1}{2}}} e^{-\sqrt{\lg M}}\right),$$

а отсюда оценка (15) становится очевидной.

Предыдущие соображения допускают существенное обобщение.

Если дана некоторая произвольная числовая последовательность $E : n_1, n_2, n_3, ...$ и если $\{F(x)\}_E$ означает выбрасывание из ряда $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ всех членов с индексами, не входящими в E, то тогда мы имеем

$$\{f(x)\}_E = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi(n_i)}{n_i} \Lambda(n_i) x^{n_i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \{Q_n(x)\}_E, \tag{38}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(n_i, s) x^{n_i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)} \{Q_n(x)\}_E \quad (s > 1). \tag{39}$$

В тех случаях когда $\sum\limits_{\substack{i=1 \\ n_i\equiv l \pmod k}}^{\infty} r^{n_i} \sim \frac{\alpha}{k} \frac{1}{1-r}$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x^{n_i}$ голоморфна в круге $|x| \leq 1$ всюду, кроме $x = 1$, формулы (38) и (39) могут быть использованы с целью получения асимптотических теорем для сумм

$$\sum_{n_i \equiv l \pmod k}^{n_i \le N} \Lambda(n_i) \quad \text{и} \quad \sum_{n_i \equiv l \pmod k}^{n_i \le N} \lambda(n_i, s).$$

Ввиду неабсолютной сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} Q_n(x)$ равенство (38) нуждается в доказательстве, которое аналогично доказательству тождества (2); равенство (39) очевидно.

Дальнейшее изложение зависит от оценок

$$\sum_{n_i \equiv l \pmod k}^{n_i \le M} \psi_{n_i}(s), \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \{Q_n(x)\}_E,$$

которые проводятся индивидуально для каждой специальной последовательности. Лучше обстоит дело в случае использования равенства (39), так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)} \{Q_n(x)\}_E (1 - |x|)$ сходится, как легко видеть, всегда равномерно.

Если $n_i = ik + l,\ (i, k) = 1$, то из (38) получим

$$\begin{aligned} \sum_{n \equiv l \pmod k} \Lambda(n) \frac{\varphi(n)}{n} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \sum_{\substack{d/n \\ (d,k)=1}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{d x^{\rho_{k,l,d}}}{1 - x^{[k,d]}} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \sum_{\substack{d/n \\ (d,k)=1}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{d x^{\rho_{k,l,d}}}{1 - x^{kd}}, \end{aligned} \tag{40}$$

где $[k, d] = \frac{kd}{(k,d)}$ — общее наименьшее кратное k и d, $\rho_{k,l,d}$ — наименьшее положительное значение m, удовлетворяющее сравнениям $m \equiv l \pmod k$ и $m \equiv 0 \pmod d$.

Также очевидно,

$$\sum_{n \equiv l \pmod k} \frac{\varphi_{s-1}(n)}{n^{s-1}} \zeta(s) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)} \sum_{\substack{d/n \\ (d,k)=1}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{x^{\rho_{k,l,d}}}{1 - x^{[k,d]}}. \tag{41}$$

Легко видеть, что

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\sum_{\substack{d/n\\(d,k)=1}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{dx^{\rho_{k,l,d}}}{1-x^{kd}}=$$
$$=\frac{1}{k}\sum_{\substack{d/n\\(d,k)=1}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)=\begin{cases}0, & \text{если } n\nmid k,\\ \mu(n), & \text{если } n/k,\end{cases}$$

откуда

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\sum_{n\equiv l \pmod k}\frac{\varphi_{s-1}(n)}{n^{s-1}}\zeta(s)x^n=\frac{1}{k}\sum_{n/k}\frac{\mu(n)^2}{\varphi_s(n)}=\frac{k^{s-1}}{\varphi_s(k)}. \tag{42}$$

Из (40) следует формально аналогично формула (21), но почленный предельный переход при $r\to 1$ нуждается в специальном обосновании, подобном указанному выше.

Относительно формул (2) и (24) можно заметить следующее. Предельным случаем (24) при $s\to 1$ является не формула

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}Q_n(x),$$

как можно было бы предположить, а (2).

Можно показать, что

$$\lim_{s\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)}Q_n(x)\neq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}Q_n(x),$$

но

$$\lim_{s\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n,s)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)x^n.$$

Теорема Адамара — Валле Пуссена может быть также получена как следствие оценки

$$F_s(x)-F(x)=O\left((s-1)\frac{1}{1-|x|}\right), \tag{43}$$

где

$$F_s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n,s)x^n,\quad F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)x^n.$$

Эту оценку мне удалось доказать вдоль каждого луча $\arg x = 2\pi\frac{l}{k}$ и тем самым дать еще одно доказательство теоремы о распределении простых чисел в прогрессиях.

В самом деле, тогда

$$\limsup_{x\to\exp(2\pi i\frac{l}{k})} (1-|x|)|F_s(x)-F(x)| \leq A(s-1), \tag{44}$$

откуда

$$\limsup_{x\to\exp(2\pi i\frac{l}{k})} \left|(1-|x|)F(x) - \frac{\mu(k)}{\varphi_s(k)}\right| \leq A(s-1),$$

$$\lim_{r\to 1}(1-r)F\left(re^{2\pi i\frac{l}{k}}\right) = \frac{\mu(k)}{\varphi(k)}.$$

Для обоснования соотношения (44) достаточно было бы показать, что

$$\sum_{n\equiv l \pmod k}^{n\leq N} (\lambda(n,s)-\Lambda(n)) = (s-1)\sum_{n\equiv l \pmod k}^{n\leq N} \lambda'(n,s_1) = O(s-1)N \tag{45}$$

равномерно относительно s, где $1\leq s\leq 2,\ 1\leq s_1\leq s$. Очевидно, достаточно доказать, что

$$\sum_{n\equiv l \pmod k}^{n\leq N} \frac{d}{ds}\lambda(n,s) = O(N) \tag{46}$$

равномерно в $1\leq s\leq 2$ при любых взаимно простых k и l.

Укажем схему доказательства соотношения (46) при $k=1$. Очевидно,

$$\lambda(n,s) = \zeta(s)\frac{\varphi_{s-1}(n)}{n^{s-1}} = \zeta(s)\sum_{d/n}\frac{\mu(d)}{d^{s-1}} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}\sum_{d/n}\frac{d\mu(d)}{d^s} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_{n,m}}{m^s},$$

$$c_{n,m} = \sum_{d/(n,m)}\mu(d)d,\ \sigma_n(u) = \sum_{m\leq u}c_{n,m} = \sum_{d/n}\mu(d)d\left[\frac{u}{d}\right],$$

где $n > 1$. Формула

$$\lambda(n,s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{n,m}}{m^s}$$

справедлива и в предельном случае $s = 1$, т.е.

$$\Lambda(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{d/(n,m)} d\mu(d)}{m}.$$

Далее

$$\lambda(n,s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}(\sigma_n(m) - \sigma_n(m-1)) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_n(m)\left(\frac{1}{m^s} - \frac{1}{(m+1)^s}\right) = s\int\limits_1^{\infty} \frac{\sigma_n(u)}{u^{s+1}}du,$$

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda(n,s) = \sum_{n=2}^{N} \lambda(n,s) = s\int\limits_1^{\infty} \frac{S_N(u)}{u^{s+1}}du,$$

$$S_N(u) = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n(u) = -\sum_{n=1}^{N} \sum_{d/n} \mu(d)d\left(\frac{u}{d} - \left[\frac{u}{d}\right]\right) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{N} \left[\frac{N}{k}\right]\mu(k)k\left(\frac{u}{k} - \left[\frac{u}{k}\right]\right).$$

Очевидно, что $S_N(u)$ ограничена, как функция от u. Кроме того, $(1 \le s \le 2)$,

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda(n,s) \le 2\int\limits_1^{\infty} \frac{|S_N(u)|}{u^2}du, \quad \left|\sum_{n=1}^{N} \lambda'_s(n,s)\right| \le 2\int\limits_1^{\infty} \frac{1+\lg u}{u^2}|S_N(u)|du. \tag{47}$$

Оценка (46) отсюда может быть получена, правда, путем громоздких преобразований, основанных на многократном применении формулы Дирихле:

$$\sum_{k=1}^{N} \left[\frac{N}{k}\right] f(k) = -[\sqrt{N}]F(\sqrt{N}) + \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \left[\frac{N}{k}\right] f(k) + \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} F\left(\frac{N}{k}\right),$$

где $F(v) = \sum\limits_{k \le v} f(k)$.

В заключение отметим формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) x^n = \zeta(s)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)} \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_{p/n} \frac{\lg p}{1 - p^{-s}} \right) \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{d^s x^d}{1 - x^d}, \tag{48}$$

которая делает вероятным отношение (44) и из которого (23) может быть строго получено путем рассмотрения дополнительных соображений.

Из общего тождества (1) можно получить также

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2-s} f_{s-1}(x^n) = \zeta(s)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_s(n)} \left(\sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{d x^d}{1 - x^d} \right)^2, \tag{49}$$

где

$$f_{s-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{s-1}(n)}{n^{s-1}} x^n,$$

откуда, по принципу обращения Мёбиуса,

$$f_{s-1}(x)^2 = \zeta(s)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) \frac{m^{2-s}}{\varphi_s(n)} V_n(x^m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_s(n)} W_n(x), \tag{50}$$

где

$$V_n(x) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{d x^d}{1 - x^d}, \; W_n(x) = \zeta(s)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) m^{2-s} V_n(x^m).$$

Далее $\left(\rho = \exp\left(2\pi i \frac{l}{k}\right)\right)$

$$\lim_{x \to \rho} (1 - |x|)^2 W_n(x) = \zeta(s)^{-1} \lim_{x \to \rho} (1 - |x|)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) m^{2-s} V_n(x^m)^2 =$$

$$= \zeta(s)^{-1} \lim_{x \to \rho} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) m^{2-s} \left(\frac{1 - |x|}{1 - |x|^m} \right)^2 \{(1 - |x|)^m V_n(x^m)\}^2 =$$

$$= \sum_{\substack{m=1 \\ \frac{k}{(m,k)} = n}}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^s} \zeta(s),$$

откуда имеем

$$\lim_{x\to\rho}(1-|x|)^2 W_n(x)=0,\ \text{если}\ \ n\nmid x,$$

$$\lim_{x\to\rho}(1-|x|)^2 W_n(x)=\sum_{(m,k)=\frac{k}{n}}\mu(m)m^{-s}\zeta(s)^{-1}=\mu\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n^s}{\varphi_s(k)}\zeta(s)^{-2},$$

если n/k. Следовательно,

$$W_n(x)\sim\zeta(s)^{-2}\sum_{k\equiv 0\pmod n}\mu\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n^s}{\varphi_s(k)}V_k(x)^2=$$

$$=\zeta(s)^{-2}\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\frac{n^s}{\varphi_s(kn)}V_{kn}(x)^2\ \ (x\to\exp(2\pi iR)),$$

R — любое рациональное число.

Эти соображения приводят к рассмотрению ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)^2}\left(x\frac{d}{dx}\right)V_n(x)$$

и более общих рядов

$$\frac{1}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)^k}{\varphi(n)^k}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{k-1}V_n(x)=\Phi_k(x)$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)^k}{\varphi(n)^k}V_n(x)^k=\Psi_k(x)$$

и их разложений в степенные ряды, так как асимптотика, например $\Phi_k(x)$ при приближении x к точкам $\exp(2\pi iR)$ (R — рационально), такая же, как у $(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)x^n)^k$.

Естественно возникает вопрос о связи указанных рядов с проблемой Гольдбаха. Если мы сделаем допущение, что в данном случае из одинаковой асимптотики ряда во всех точках $x=\exp\left(2\pi i\frac{l}{k}\right)$ следует одинаковая асимптотика коэффициентов ряда, то получим

$$A_k(n)\sim c_k\frac{n^{k-1}}{\lg^k n}\prod_{p/n}\left(1+\frac{1}{(p-1)^k}\right)^{-1}\prod_{p/n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^{k-2}}\right),$$

$$\text{если } k \equiv 1 \pmod{2},$$

$$A_k(n) \sim c'_k \frac{n^{k-1}}{\lg^k n} \prod_{p/n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^k}\right)^{-1} \prod_{p/n} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^{k-1}}\right),$$

$$\text{если } k \equiv 0 \pmod{2},\ n \equiv 0 \pmod{2},$$

где $A_k(n)$ — число представлений числа n в виде суммы k простых слагаемых.

В самом деле:

$$\frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)^k}{\varphi(n)^k} \left(x \frac{d}{dx}\right)^{k-1} V_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^k x^n,$$

где

$$b_n^k = c_k n^{k-1} \prod_{p/n} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^k}\right)^{-1} \prod_{p/n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^{k-1}}\right),$$

$$\text{если } k \equiv 1 \pmod{2};$$

$$b_n^k = c'_k n^{k-1} \prod_{\substack{p/n \\ p>2}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^k}\right)^{-1} \prod_{p/n} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^{k-1}}\right),$$

$$\text{если } k \equiv 0 \pmod{2},\ n \equiv 0 \pmod{2};$$

$$b_n^k = 0,\ \text{если } k \equiv 0 \pmod{2},\ n \equiv 1 \pmod{2};$$

$$c_k = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{p} \left(1 + \frac{\mu(p)^{k+1}}{(p-1)^k}\right),\ c'_k = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{p>2} \left(1 + \frac{\mu(p)^{k+1}}{(p-1)^k}\right).$$

Интересны случаи $k = 2,\ k = 3$;

$$b_n^2 = \gamma n \prod_{\substack{p/n \\ p>2}} \left(1 + \frac{1}{p-2}\right),\ \text{если } n \equiv 0 \pmod{2},$$

$$b_n^2 = 0, \text{если } n \equiv 1 \pmod{2}$$

и

$$b_n^3 = \delta n^2 \prod_{p/n} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right),\ \text{если } n \equiv 1 \pmod{2},$$

$$b_n^3 = 0,\ \text{если } n \equiv 0 \pmod{2},$$

где

$$\gamma = \prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right), \ \delta = \frac{1}{2}\prod_{p}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right).$$

Предположение, что

$$b_n^3 \sim \lg^3 n A_3(n) \text{ при } n \to \infty,$$

совпадает с формулой, предложенной Харди — Литтльвудом и доказанной И. М. Виноградовым в его знаменитой работе [28].

Предположение, что

$$b_n^2 \sim \lg^2 n A_2(n) \text{ при } n \to \infty,$$

дает формулу

$$A_2(n) = \gamma \frac{n}{\lg^2 n} \prod_{\substack{p/n \\ p>2}}\left(1 + \frac{1}{p-2}\right),$$

совпадающую с формулой, не строго полученной В. И. Романовским.

18. Ряды Фурье по одной специальной ортогональной системе

(Представлено действ. членом АН УзССР В. И. Романовским)

В моей работе [65] доказывается, что если α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$ образуют полную ортонормированную систему Гильбертова пространства H, то и ψ_1, ψ_2, $\psi_3, \ldots$, где

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\sigma\,\Omega(n)}} \sum_{d/n}^{\infty} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) f_d,\ \omega(a,b) = \omega(a)\,\omega(b),\ \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \Big|\omega(k)\Big|^2 < \infty,$$

$$\Omega(n) = \sum_{d/n}^{\infty} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) \Big|\omega(d)\Big|^{-2} = \Big|\omega(n)\Big|^{-2} \prod_{p/n} \Big(1 - \Big|\omega(p)\Big|^2\Big),$$

$$f_n = \overline{\omega(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)\,\alpha_{kn}$$

также образует полную ортонормированную систему H.

Возьмем в качестве полной ортонормированной системы $L^2\,(0,\infty)$ систему $\alpha_n(x) = e^{-\frac{x}{2}}\,L_{n-1}(x)$, где

$$L_n(x) = e^x\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^n\,e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,C_n^k\,n(n-1)\ldots(n-k+1)\,x^k$$

— полином Лагерра. Известно, что (см. пример: Гильберт — Курант «Методы математической физики», с. 81)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x)\,t^k = \frac{t}{1-t} e^{-\frac{x}{2}\frac{1+t}{1-t}}, \tag{1}$$

где $|t| < 1$.

Очевидно, что полагая $t = re^{i\varphi}$ и отделяя вещественную часть от мнимой, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin k\,\varphi\ \alpha_k(x) = I\Big(\frac{t}{1-t} e^{-\frac{x}{2}\frac{1+t}{1-t}}\Big).$$

Далее, как известно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\varphi}{k} = -\pi\Big(\frac{\varphi}{2\pi} - \Big[\frac{\varphi}{2\pi}\Big] - \frac{1}{2}\Big).$$

Отсюда, полагая $\varphi = 2\pi\Theta$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k} \alpha_{kn}(x) = -2\pi \int_0^1 \left(n\Theta - \left[n\Theta\right] - \frac{1}{2}\right) \times$$
$$\times I\left(\frac{re^{2\pi i\Theta}}{1 - re^{2\pi i\Theta}} e^{-\frac{x}{2}\frac{1+re^{2\pi i\Theta}}{1-re^{2\pi i\Theta}}}\right) d\Theta. \tag{2}$$

Здесь можно обосновать предельный переход при $r \to 1$.

Полагая в (2) $r = 1$, получим после несложных преобразований

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{kn}(x)}{k} = -\pi \int_0^1 \left(n\Theta - \left[n\Theta\right] - \frac{1}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\pi\Theta - \pi\Theta\right)}{\sin\pi\Theta} d\Theta. \tag{3}$$

Далее $\left(\omega(n) = \frac{1}{n}\right)$

$$f_n(x) = -\pi n \int_0^1 \left(n\Theta - \left[n\Theta\right] - \frac{1}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\pi\Theta - \pi\Theta\right)}{\sin\pi\Theta} d\Theta. \tag{4}$$

Для соответствующей ортонормированной системы $\psi_n(x)$ получаем

$$\psi_n(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{\zeta(2)\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d(x) =$$
$$= -\frac{\sqrt{6}}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\pi\Theta - \pi\Theta\right)}{\sin\pi\Theta} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d\left(d\Theta - \left[d\Theta\right] - \frac{1}{2}\right) d\Theta, \tag{5}$$

где

$$\varphi_2(n) = \Omega(n) = n^2 \prod_{p/n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \quad \zeta(2) = \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

На основании указанной выше общей теоремы функции, определяемые равенством (5), образуют полную ортонормированную систему пространства $L^2\,(0, \infty)$.

Вводя обозначения $K(x,\Theta) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\ \operatorname{ctg}\pi\Theta\ -\pi\Theta\right)}{\sin\pi\Theta}$,

$$\beta_n(\Theta) = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\,d\Big(d\Theta-\Big[d\Theta\Big]-\frac{1}{2}\Big),$$

имеем

$$\psi_n(x) = \int\limits_0^1 K(x,\Theta)\,\beta_n(\Theta)d\Theta. \tag{6}$$

В работе [64] и «Докладах Академии наук СССР» [61–63] мною было показано, что $\beta_n(\Theta)$ образуют ортонормированную систему $L^2\,(0,1)$. Таким образом, преобразование (6) с ядром $K\,(x,\Theta)$ переводит ортогональную систему $\beta_n(\Theta)$ пространства $L^2\,(0,1)$ в ортогональную систему $\psi_n(x)$ пространства $L^2\,(0,\infty)$.

Очевидно, что интеграл в (6) не является абсолютно сходящимся. Для коэффициентов Фурье любой функции $F(x)\in L^2\,(0,\infty)$ имеем

$$(F,\psi_n) = \int\limits_0^\infty F(x)\,\psi_n(x)dx = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^1 F(x)\,K(x,\Theta)\,\beta_n(\Theta)d\Theta dx. \tag{7}$$

В случае, если можно переставить порядок интегрирования в (7), имеем

$$(F,\psi_n) = \int\limits_0^1 F^*(\Theta)\,\beta_n(\Theta)d\Theta, \tag{8}$$

где

$$F^*(\Theta) = \int\limits_0^\infty F(x)\,K(x,\Theta)dx.$$

Иными словами, коэффициенты Фурье по системе $\psi_n(x)$ функции $F(x)$ совпадают с коэффициентами Фурье функции $F^*(\Theta) = \int\limits_0^\infty K(x,\Theta)F(x)dx$ по системе $\beta_n(\Theta)$. Конечно, здесь необходимо строгое обоснование равенства (3), прежде всего для обычного для теории рядов Фурье толкования суммы ряда как «суммы в среднем». Это строгое обоснование можно дать, используя аппарат теории аналитических функций. Рассмотрим случай $F^3(x) = e^{-ax}$. Тогда

$$F^*(\Theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^\infty e^{-ax} \cos\left(\frac{x}{2}\,\operatorname{ctg}\pi\Theta\, - \pi\Theta\right) \operatorname{cosec}\pi\Theta\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\operatorname{ctg}\pi\Theta \int\limits_0^\infty e^{-ax} \omega s\Big(\frac{x}{2}\,\operatorname{ctg}\pi\Theta\Big) dx -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^\infty e^{-ax} \sin\left(\frac{x}{2}\,\operatorname{ctg}\pi\Theta\right) dx = -\frac{\sqrt{2}(2a+1)}{4a^2 + \operatorname{ctg}^2\pi\Theta}\operatorname{ctg}\pi\Theta;$$

$$(F, \psi_n) = -\sqrt{24}\,\frac{(2a+1)}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \times$$
$$\times \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{ctg}\pi\Theta}{4a^2 + \operatorname{ctg}^2\pi\Theta} \sum_{d/n}^\infty \mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\, d\Big(d\Theta - \Big[d\Theta\Big] - \frac{1}{2}\Big) d\Theta. \tag{9}$$

Равенство Парсеваля здесь имеет вид

$$\frac{1}{a(2a+1)^2} = 48 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\varphi_2(n)} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{ctg}\pi\Theta}{4a^2 + \operatorname{ctg}^2\pi\Theta} \sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) d\Big(d\Theta - \Big[d\Theta\Big] - \frac{1}{2}\Big) d\Theta \right\}^2. \tag{10}$$

Учитывая (см. *l. c.*)

$$\sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\Big(d\Theta - \Big[d\Theta\Big] - \frac{1}{2}\Big) = \sum_{d/n} \varphi\Big(\frac{n}{d}\Big)\, d\Big(\Theta\varphi(d) - \varphi(d\Theta, d) - \frac{1}{2}\,\delta_d^{'}\Big),$$

где $\varphi(m, n)$ означает число чисел, взаимно простых и не превосходящих m, $\varphi(n) = \varphi(n, n)$,

$$\delta_d^{'} = \begin{cases} 1, \text{ если } d = 1, \\ 0, \text{ если } d > 1. \end{cases}$$

$$\sqrt{\varphi_2(n)}\,(F,\psi_n) = -\sqrt{24}\,(2a+1)\times$$
$$\times\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{ctg}\pi\Theta}{4a^2+\operatorname{ctg}^2\pi\Theta}\sum_{d/n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)d\Big(\Theta\varphi(d)-\varphi(d\Theta,d)-\frac{1}{2}\,\delta_d^{'}\Big)d\Theta, \tag{11}$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(F,\psi_n)\sqrt{\varphi_2(n)}}{n^s} = -\sqrt{24}\,(2a+1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi(m)}{m^s}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s-1}}\times$$
$$\times\int\limits_0^1\frac{\operatorname{ctg}\pi\Theta}{4a^2+\operatorname{ctg}^2\pi\Theta}\Big(\Theta\varphi(m)-\varphi(m\,\Theta,m)-\frac{1}{2}\,\delta_d^{'}\Big)d\Theta. \tag{12}$$

Учитывая $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\pi\Theta-\pi\Theta\right)}{\sin\pi\Theta}d\Theta=0$, имеем

$$f_n(x) = \; -\pi n\int\limits_0^1(n\Theta-[n\Theta])\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\;\operatorname{ctg}\pi\Theta-\pi\Theta\right)}{\sin\pi\Theta}d\Theta,$$

откуда легко видеть, что

$$f_n(x) = \mathrm{O}(n^2).$$

В самом деле:

$$\int\limits_0^1(n\Theta-[n\Theta])\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\;\operatorname{ctg}\pi\Theta\;-\pi\Theta\right)}{\sin\pi\Theta}d\Theta = \int\limits_0^{1/n}+\int\limits_{\frac{n-1}{n}}^{1}+\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{n-1}{n}} =$$

$$= n\int\limits_0^{1/n}\cos\left(\frac{x}{2}\;\operatorname{ctg}\pi\Theta\;-\pi\Theta\right)\frac{\Theta}{\sin\pi\Theta}d\Theta-$$

$$-\int\limits_{\frac{n-1}{n}}^{1}\cos\left(\frac{x}{2}\;\operatorname{ctg}\pi\Theta\;-\pi\Theta\right)\frac{n\Theta-(n-1)}{\sin(\pi\Theta-\pi)}d\Theta+\int\limits_{1/n}^{\frac{n-1}{n}} =$$

$$= n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\cos\left(\frac{x}{2}\;\operatorname{ctg}\pi\Theta\;-\pi\Theta\right)\frac{\Theta}{\sin\pi\Theta}d\Theta-$$

$$-\,n\int\limits_{\frac{n-1}{n}}^{1}\cos\left(\frac{x}{2}\ \operatorname{ctg}\pi\Theta\ -\pi\Theta\right)\frac{\Theta-1}{\sin\pi(\Theta-1)}d\Theta+$$
$$+\int\limits_{\frac{n-1}{n}}^{1}\cos\left(\frac{x}{2}\ \operatorname{ctg}\pi\Theta\ -\pi\Theta\right)\frac{d\Theta}{\sin\pi\Theta}+$$
$$+\int\limits_{1/n}^{\frac{n-1}{n}}(n\Theta-[n\Theta])\cos\left(\frac{x}{2}\ \operatorname{ctg}\pi\Theta\ -\pi\Theta\right)\frac{d\Theta}{\sin\pi\Theta}.$$

Первые два интеграла ограничены ввиду $\left|\dfrac{\Theta}{\sin\pi\Theta}\right|<4$ при $\left|\Theta\right|<\dfrac{\pi}{2}$.

Что касается третьего, то

$$\int\limits_{\frac{n-1}{n}}^{1}\cos\left(\frac{x}{2}\ \operatorname{ctg}\pi\Theta\ -\pi\Theta\right)\frac{d\Theta}{\sin\pi\Theta}=\int\limits_{\frac{n-1}{n}}^{1}\operatorname{ctg}\pi\Theta\cos\left(\frac{x}{2}\ \operatorname{ctg}\pi\Theta\right)d\Theta+$$
$$+\int\limits_{\frac{n-1}{n}}^{1}\sin\left(\frac{x}{2}\ \operatorname{ctg}\pi\Theta\right)d\Theta.$$

Производя подстановку $y=\operatorname{ctg}\pi\Theta$ и интегрирование по частям, получим

$$\pi\int\limits_{\frac{n-1}{n}}^{1}\cos\left(\frac{x}{2}\ \operatorname{ctg}\pi\Theta\ -\pi\Theta\right)\frac{d\Theta}{\sin\pi\Theta}=\int\limits_{-\infty}^{\operatorname{ctg}\pi\frac{n-1}{n}}\cos\left(\frac{xy}{2}\right)\frac{ydy}{1+y^2}+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\operatorname{ctg}\pi\frac{n-1}{n}}\sin\left(\frac{xy}{2}\right)\frac{dy}{1+y^2}=-\frac{2}{x}\int\limits_{-\infty}^{\operatorname{ctg}\pi\frac{n-1}{n}}\frac{y}{1+y^2}d\sin\frac{xy}{2}+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\operatorname{ctg}\pi\frac{n-1}{n}}\sin\frac{xy}{2}\frac{dy}{1+y^2}=-\frac{2}{x}\sin\left(\frac{x}{2}\ \operatorname{ctg}\pi\frac{n-1}{n}\right)\sin\left(2\pi\frac{n-1}{n}\right)+$$

$$+\frac{2}{x}\int\limits_{-\infty}^{\operatorname{ctg}\pi\frac{n-1}{n}}\Big(\frac{1}{1+y^2}-\frac{2y^2}{(1+y^2)^2}\Big)\sin\frac{xy}{2}dy+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\operatorname{ctg}\pi\frac{n-1}{n}}\sin\frac{xy}{2}\,\frac{dy}{1+y^2}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Что касается интеграла $\int\limits_{1/n}^{\frac{n-1}{n}}$, то очевидно, что $\int\limits_{1/n}^{\frac{n-1}{n}}=\mathrm{O}\,(n^2)$.

Так как далее

$$\sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)f_d(x)=\mathrm{O}\left(\sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)^2d^2\right)=\mathrm{O}\,(n^2),\ \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(n)}}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

то $\psi_n(x)=\mathrm{O}\,(n)$ равномерно по отношению x в (ε,∞).

Таким образом, имеем следующий итог: функции

$$f_n(x)=\,-\pi n\int\limits_0^1\Big(n\Theta-\Big[n\Theta\Big]-\frac{1}{2}\Big)\cos\Big(\frac{x}{2}\,\operatorname{ctg}\pi\Theta\,-\pi\Theta\Big)\frac{d\Theta}{\sin\pi\Theta}=$$

$$=\,-n\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{n}{\pi}\operatorname{arcctg}y-\Big[\frac{n}{\pi}\operatorname{arcctg}y\Big]-\frac{1}{2}\Big)\frac{y\,\cos\frac{xy}{2}+\sin\frac{xy}{2}}{1+y^2}dy \tag{13}$$

обладают арифметическим свойством, состоящим в том, что их ортонормирование, по Шмидту, совершается по формуле

$$\psi_n(x)=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)f_d(x).$$

Здесь

$$\int\limits_0^\infty\psi_n(x)\,\psi_m(x)dx=\begin{cases}1,\ \text{если } n=m,\\ 0,\ \text{если } n\neq m,\ \psi_n(x)=\mathrm{O}(n).\end{cases}$$

Легко преобразовать предыдущее равенство к виду

$$f_n(x) = \; -n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{n}{\pi}\operatorname{arcctg} y - \left[\frac{n}{\pi}\operatorname{arcctg} y\right] - \frac{1}{2}\right)\frac{e^{\frac{ixy}{2}}}{y+i}dy$$

или

$$f_n(x) = n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{n}{\pi}\operatorname{arcctg} 2y - \left[\frac{n}{\pi}\operatorname{arcctg} 2y\right] - \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-xyi}}{y-\frac{i}{2}}dy, \tag{14}$$

откуда

$$n\left(\frac{n}{\pi}\operatorname{arcctg} 2y - \left[\frac{n}{\pi}\operatorname{arcctg} 2y\right] - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, e^{xyi}dx. \tag{15}$$

Отсюда видно, что системы функций $\beta_n\left(\frac{n}{\pi}\operatorname{arcctg} 2y\right)\frac{1}{y-\frac{i}{2}}$ и $\psi_n(x)$ образуют ортонормированные системы пространства $L^2\,(0,\infty)$, переходящие одна в другую при помощи трансформации Фурье.

19. Числа Фарея и распределение простых чисел

В моей работе [61] доказывается, что функции $\psi_n(x)$, определенные в интервале $(0,1)$ равенствами

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) d\Big(dx - [dx] - \frac{1}{2}\Big) =$$

$$= \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) d\left(x\,\varphi(d) - \varphi(dx,\, d) - \frac{1}{2}\,\delta_n^1\right), \qquad (1)$$

образуют в $(0,1)$ ортонормированную систему. Здесь $[x]$ означает целую часть x, $\mu(n)$ — известная функция Мёбиуса, $\varphi(m,\, n)$ — число чисел, не превосходящих m и взаимно простых с n, $\varphi(n) = \varphi(n,\, n)$ — функция Эйлера,

$$\varphi_2(n) = \sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) d^2 = n^2 \prod_{p/n} \Big(1 - \frac{1}{p^2}\Big), \qquad \delta_n^1 = \begin{cases} 1, \text{ если } n = 1, \\ 0, \text{ если } n > 1. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{\sqrt{12}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varphi_2(n)}\psi_n(x)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\,\varphi(n) - \varphi(nx,\, n) - \frac{1}{2}\,\delta_n^1}{n^{s-1}}$$

$$\Big(Re(s) > 2\Big).$$

Или, так как $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$,

$$\frac{1}{\sqrt{12}} \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varphi_2(n)}\psi_n(x)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\,\varphi(n) - \varphi(nx,\, n) - \frac{1}{2}\,\delta_n^1}{n^{s-1}}, \quad (2)$$

где $Re(s) > 2$. Область обычной сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varphi_2(n)}\psi_n(x)}{n^s}$ будет $Re(s) > 2$, так как $\varphi_2(n) = \mathrm{O}(n^2)$, $\psi_n(x) = \mathrm{O}(\log\log n)$, но область сильной сходимости в смысле метрики Гильбертова пространства $L_2(0,1)$ будет $Re(s) > \dfrac{3}{2}$. Поэтому, умножая обе части равенства

(2) на $f(x)$, где $f(x)$ — любая определенная в $(0,1)$ функция с суммируемым квадратом, и интегрируя по x от 0 до 1, мы получим слева ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{\varphi_2(n)}(f,\,\psi_n)}{n^s}$, сходящийся в области $Re(s) \geqslant \dfrac{3}{2}+\varepsilon$ абсолютно и равномерно. Применяя неравенства Шварца, неравенство Бесселя и очевидное неравенство $\varphi_2(n) \leqslant n^2$, имеем

$$\Bigl|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varphi_2(n)}(f,\,\psi_n)}{n^s}\Bigr|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_2(n)}{|n^s|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \Bigl|(f,\,\psi_n)\Bigr|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \zeta(2\sigma-2)\int\limits_0^1 \Bigl|f(x)\Bigr|^2 dx \leqslant \zeta(1+2\varepsilon)\|f\|^2 \leqslant \frac{3}{2}\|f\|^2$$

$$(\text{здесь}\,\sigma \geqslant Re(s) \geqslant \frac{3}{2}+\varepsilon). \tag{3}$$

Вводя обозначения $a_n(x) = x\,\varphi(n) - \varphi(nx,\,n) - \frac{1}{2}\,\delta_n^1$, $A_u(x) = \sum\limits_{n\leqslant u} a_n(x)$, $A_0(x) = 0$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{12}}\frac{\zeta(s)}{\zeta(s-1)}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varphi_2(n)}(f,\,\psi_n)}{n^s} = \sum_{n=1} \frac{(f,\,a_n)}{n^{s-1}} =$$

$$= \sum \frac{(f,\,A_n)-(f,\,A_{n-1})}{n^{s-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(f,\,A_n)\Bigl(\frac{1}{n^{s-2}} - \frac{1}{(n+1)^{s-1}}\Bigr) =$$

$$= (s-1)\sum_{n=1}^{\infty}(f,\,A_n)\int\limits_n^{n+1} u^{-s}du = (s-1)\int\limits_1^{\infty} \frac{(f,\,A_n)}{u^s}du. \tag{4}$$

Согласно известному результату теории рядов Дирихле

$$(f,\,A_u) = \frac{1}{2\pi t}\int\limits_{(\mathcal{D})} \frac{1}{\sqrt{12}}\,\frac{\zeta(s)}{\zeta(s-1)}\,\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varphi_2(n)}(f,\,\psi_n)}{n^s}\,\frac{u^{s-1}}{s-1}ds. \tag{5}$$

Обе формулы выведены в предположении $Re(s) > 2$.

Если мы примем гипотезу Римана, то из (3), (5) обычным образом следует

$$\left|(f,\, A_u)\right| < C\, u^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \sqrt{\int\limits_0^1 \left|f(x)\right|^2 dx} = C\left\|f\right\| u^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \tag{6}$$

где C зависит только от ε. Трудности, связанные с переносом пути интегрирования в (5) влево до линии $Re(s) = \dfrac{3}{2} + \varepsilon$, можно обойти обычным образом. Наоборот, если неравенство $\left|(f,\, A_u)\right| < C\, u^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ справедливо хотя бы для одной квадратинтегрируемой $f(x)$, для которой ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varphi_2(n)}(f,\, \psi_n)}{n^s}$, сходящийся в области $Re(s) > \frac{3}{2}$, не имеет корней, являющихся корнями $\zeta(s-1)$, то тогда гипотеза Римана верна, так как правая часть (4), в силу $\left|(f,\, A_u)\right| < C\, u^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, регулярна в области $Re(s) > \dfrac{3}{2}$ и поэтому $\zeta(s-1)$ не может иметь корней, которые могли бы нарушить регулярность левой части равенства. Функций, для которых $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varphi_2(n)}(f,\, \psi_n)}{n^s}$ не имеет корней, можно указать сколько угодно; достаточно взять, например, $f(x) = \psi_m(x)$ $(m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots)$.

Таким образом, имеем теорему 1: *гипотеза Римана верна тогда и только тогда, когда для любой $f(x) \in L_2(0,1)$ верно неравенство*

$$\left|(f,\, A_u)\right| < C(\varepsilon)\sqrt{\int\limits_0^1 \left|f(x)\right|^2 dx}\ u^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

при любом $\varepsilon > 0$, где $C(\varepsilon)$ зависит только от ε.

Нетрудно видеть, что в приведенных сейчас рассуждениях содержится теорема: *гипотеза Римана верна тогда и только тогда, когда для некоторой $f(x) \in L_2(0,1)$, для которой*
$\displaystyle\Bigl|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varphi_2(n)}(f,\, \psi_n)}{n^{s+1}}\Bigr| + |\zeta(s)|$ *не имеет корней в области* $Re(s) > \dfrac{1}{2}$, *справедлива оценка* $\left|(f,\, A_u)\right| < C\, u^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Очевидно, что неравенство $\left|(f,\, A_u)\right| \leqslant C\left\|f\right\| u^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ справедливо для всех $f(x) \in L_2(0,1)$ тогда и только тогда, когда оно справедливо для $f(x)=A_u(x)$, так как тогда $(A_u,\,A_u)=\|A_u\|^2\leqslant C(\varepsilon)\|A_u\|\,u^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $\|A_u\|\leqslant C(\varepsilon)u^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ и, в силу неравенства Шварца, $\Big|(f,\,A_u)\Big|\leqslant\|f\|\times$ $\times\,\|A_u\|\leqslant C(\varepsilon)\|f\|\,u^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Таким образом, получаем теорему 2: *гипотеза Римана эквивалентна утверждению*

$\int\limits_0^1 A_n(x)^2dx=\mathrm{O}(n^{1+\varepsilon})\quad(\varepsilon>0)$. Но $A_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k(x)=xN-$ $-N(x)-\dfrac{1}{2}$, где $N=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi(k)$, $N(x)=N(n,\,x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi(kx,\,k)$ и где, следовательно, $N(x)$ означает число несократимых дробей интервала $(0,\,x)$ со знаменателями, не превосходящими n, а $N=N(1)$ — число всех таких дробей в интервале $(0,1)$. Повторяя несложные выкладки, приведенные у Ландау [15, vol. 2, p. 173], легко получим

$$\|A_n\|^2=\int\limits_0^1\left(xN-N(x)-\frac{1}{2}\right)^2dx=\frac{1}{12}+N\sum_{\nu=1}^{N}\delta_\nu^2,\ \text{где}\ \delta_\nu=r_\nu-\frac{\nu}{N}$$

и где $r_1,r_2,\ldots,r_n$ — все несократимые дроби интервала $(0,1)$ со знаменателями, не превосходящими n, расположенные в возрастающем порядке (числа Фарея). Учитывая $N\sim\dfrac{3}{\pi^s}n^2$, легко получаем результат Франеля: оценка $\sum\limits_{\nu=1}^{N}\delta_\nu^2=\mathrm{O}\left(n^{-1+\varepsilon}\right)$ есть эквивалент гипотезы Римана. Оценка $\int\limits_0^1 f(x)A_n(x)dx=\mathrm{O}\left(n^{\frac{1}{2}-\eta}\right)$ $(\eta>0)$ возможна, очевидно, только для $f(x)\in L_2(0,\,1)$, для которой $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{\varphi_2(n)}(f,\,\psi_n)}{n^s}$ имеет все корни $\zeta(s)$ своими корнями (делится на $\zeta(s)$). Только для таких f угол между f и A_n может достаточно быстро стремиться к прямому, точнее $\dfrac{(f,\,A_n)}{\|f\|\|A_n\|}=\mathrm{O}\left(n^{-\vartheta}\right)$, где $\vartheta>0$.

Легко вычислить $(f', A_n) = \int\limits_0^1 A_n(x)f'(x)dx$ следующим образом:

$$\int\limits_0^1 f'(x)\Big(xN - N(x) - \frac{1}{2}\Big)dx = -N\int\limits_0^1 f(x)dx + \sum_{\nu=1}^{N} f(r_\nu),$$

где $f(0) = 0$ и где последний член суммы $\sum\limits_{\nu=1}^{N} f(r_\nu)$ умножен на $\frac{1}{2}$.

Отсюда указанная выше теорема 1 дает: *гипотеза Римана верна тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_0^1 f(x)dx - \frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} f(r_\nu) = \mathrm{O}\,(N^{-\frac{3}{4}+\varepsilon}) \tag{7}$$

для любой $f(x)$ с суммируемым квадратом модуля производной или хотя бы для некоторой $f(x)$, такой, что $f'(x) \in L_2(0,1)$, $\Big|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\varphi_2(n)}(f,\,\psi_n)}{n^{s+1}}\Big| + \Big|\zeta(s)\Big| > 0$ в области $Re(s) > \frac{1}{2}$. В частности, для $f(x) = x^2 - x$, для которой $f'(x) = 2(x - \frac{1}{2}) = 2\psi_1(x)$, получим:

$$\int\limits_0^1 (x^2 - x)dx - \frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N}(r_\nu^2 - r_\nu) = \mathrm{O}\,(N^{-\frac{3}{4}+\varepsilon}),$$

есть эквивалент гипотезы Римана.

Так же точно $\frac{1}{3} - \frac{1}{N}\sum\limits_{\nu=1}^{N} r_\nu^2 = \mathrm{O}\,(N^{-\frac{3}{4}+\varepsilon})$ есть эквивалент гипотезы Римана. Обозначая через a' произведение различных простых чисел, входящих в a, и учитывая $\sum\limits_{\substack{k=1\\(k,\,a)=1}}^{a-1} k^2 = \Big(\frac{a^2}{3} + \frac{\mu(a')\,a'}{6}\Big)\varphi(a)$, имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} r_\nu^2 = \frac{1}{N}\sum_{a=1}^{n}\Big(\frac{1}{3} + \frac{\mu(a')\,a'}{6\,a^2}\Big)\varphi(a) = \frac{1}{3} + \frac{1}{N}\sum_{a=1}^{n}\frac{\mu(a')\,a'}{6\,a^2}\varphi(a).$$

Поэтому

$$\sum_{a=1}^{n} \frac{\mu(a')\, a'}{a^2} \varphi(a) = \mathrm{O}\,(N^{\frac{1}{4}+\varepsilon}) = \mathrm{O}\,(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

есть эквивалент гипотезы Римана. Если обозначить буквой Θ верхнюю грань вещественных частей корней $\zeta(s)$, то легко видеть, что для любой $f(x)$, где $f'(x) \in L_2(0,\,1)$, имеем $\int\limits_0^1 f(x)dx - \dfrac{1}{N}\sum\limits_{\nu=1}^{N} f(r_\nu) = \mathrm{O}\,(N^{-1+\frac{\Theta}{2}+\varepsilon})$, что эквивалентно с $\int\limits_0^1 A_n(x)^2dx = \mathrm{O}\,(N^{\Theta+\varepsilon})$, $\sum\limits_{\nu=1}^{N} \delta_\nu^2 = \mathrm{O}\,(N^{-1+\Theta+\varepsilon}) = \mathrm{O}\,(n^{-2+2\Theta+\varepsilon})$.

Тривиальный факт $\Theta \geqslant 1$ дает $\sum\limits_{\nu=1}^{N} \delta_\nu^2 = \mathrm{O}\,(n^{\varepsilon})$.

Теорема Адамара дает $\sum\limits_{\nu=1}^{N} \delta_\nu^2 \to 0$, теорема де Ла Валле Пуссена — $\sum\limits_{\nu=1}^{N} \delta_\nu^2 = \mathrm{O}\,(e^{-\alpha\sqrt{\log n}})$.

Легко видеть также, что, если верно

$$\Bigl|\int\limits_0^1 f(x)A_u(x)dx\Bigr| \leqslant C_f\, u^{\Theta+\varepsilon} \tag{8}$$

для всех $f(x) \in L_2(0,\,1)$, то верно также

$$\Bigl|\int\limits_0^1 f(x)A_u(x)dx\Bigr| \leqslant C(\varepsilon)\sqrt{\int\limits_0^1 \bigl|f(x)\bigr|^2 dx}\; u^{\Theta+\varepsilon}, \tag{9}$$

где $C(\varepsilon)$ зависит только от $\varepsilon > 0$, так как из неравенства (8) следует, что верхняя грань вещественных частей корней $\zeta(s)$ не больше Θ, что видно уже, если взять $f(x) = \psi_2(x) = x - \dfrac{1}{2}$, а из последнего обстоятельства легко вывести неравенство (9).

Подставляя в равенство (2) $s = s_1$ и $s = s_2$, перемножая образующиеся равенства, интегрируя по x от 0 до 1, учитывая ортонормированность $\psi_n(x)$ и равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-2)}{\zeta(s)}$, получим

$$\frac{1}{12}\,\frac{\zeta(s_1)\,\zeta(s_2)\,\zeta(s_1+s_2-2)}{\zeta(s_1-1)\,\zeta(s_2-1)\,\zeta(s_1+s_2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(a_n,\,a_m)}{n^{s_1-1}\,m^{s_2-1}}, \tag{10}$$

откуда следует

$$\frac{1}{12}\,\frac{\zeta(s_1)\,\zeta(s_2)\,\zeta(s_1+s_2-2)}{\zeta(s_1-1)\,\zeta(s_2-1)\,\zeta(s_1+s_2)} = \\ = (s_1-1)(s_2-1)\int\limits_1^{\infty}\int\limits_1^{\infty} \frac{(A_u,\,A_v)}{u^{s_1}\,v^{s_2}}dudv, \tag{11}$$

а также $\Bigl(A_u(x) = \sum\limits_{n\leqslant u} a_n(x)\Bigr)$,

$$(A_u,\,A_v) = -\frac{1}{24\pi^2}\int\limits_{(s)}\int\limits_{(s)} \frac{\zeta(s_1)\,\zeta(s_2)\,\zeta(s_1+s_2-2)}{\zeta(s_1-1)\,\zeta(s_2-1)\,\zeta(s_1+s_2)}\times \\ \times\frac{u^{s_1-1}}{s_1-1}\,\frac{v^{s_2-1}}{s_2-1}ds_1ds_2, \tag{12}$$

предполагая, что u, v — не целые. В формулах (11), (12) теорема Франеля, так сказать, записана в явном виде. Скалярное произведение $(A_u,\,A_v)$ может быть также вычислено на основании равенства Парсеваля $(A_u,\,A_v) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_u,\,\psi_n)(A_v,\,\psi_n)$. На этой основе легко получим предложение:

$$\sum_{n=1}^{u}\Bigl(\sum_{k\leqslant \frac{u}{n}} \varphi_{-1}(k)\Bigr)^2 = \mathrm{O}\,(u^{1+\varepsilon}), \tag{13}$$

есть эквивалент гипотезы Римана.

Здесь $\varphi_{-1}(n) = \sum\limits_{d/n} \mu\Bigl(\frac{n}{d}\Bigr)d^{-1} = \mu(n')\frac{\varphi(n)}{n^2}n'$, где n' — произведение всех различных простых делителей n.

Все предыдущие соображения могут быть значительно обобщены, если рассмотреть ортонормированную систему $\psi_{n;\,k}(x)$ $(n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots)$, полученную мною в указанной работе, где

$$\psi_{n;\,k}(x) = \frac{1}{\gamma_k\sqrt{\varphi_{2k}(n)}}\sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)d^k\,B_k(dx - [dx]),$$

где

$$\gamma_k = \Big\{\frac{k!^2}{(2k)!}\Big|B_{2k}\Big|\Big\}^{\frac{1}{2}},\quad \varphi_{2k}(n) = n^{2k}\prod_{p/n}\Big(1 - \frac{1}{p^{2k}}\Big) = \sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)d^{\,2k},$$

$B_k(t)$ — k-й полином Бернулли, B_{2k} — число Бернулли.

Согласно известным свойствам полиномов Бернулли $B_k(t+h) = B_k(t) + C_k^1\,B_{k-1}(t)\,h + \ldots + C_k^k\,h^k$.

Подставляя $t = -[dx]$, $h = dx$, получим

$$\sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)d^k\,B_k(dx - [dx]) = \sum_{p=0}^{k}C_k^p\,x^p\sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)d^{k+p}\,B_{k-p}(-[dx])$$
$$(B_0(t) \equiv 1).$$

Сумма $F_p(t) = \sum_{d/n}\mu\Big(\dfrac{n}{d}\Big)d^{k+p}\,B_{k-p}(-[dt])$ может испытывать приращение только при прохождении t через рациональное число $\dfrac{a}{q}$, где $(a,\, q) = 1$, $n \equiv \mathrm{O}\,(\mathrm{mod}\,q)$.

Учитывая известную формулу $B_\nu(t+1) - B_\nu(t) = \nu\,t^{\nu-1}$, легко видеть, что это приращение равно

$$(-1)^{k-p}\sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)d^{k+p}\,(k-p)\Big(\frac{ad}{q}\Big)^{k-p-1} = (-1)^{k-p}(k-p)\,a^{k-p-1}\times$$
$$\times q^{k+p}\sum_{d/n'}\mu\Big(\frac{n'}{d'}\Big)d'^{\,2k-1} = (-1)^{k-p}\,(k-p)\,a^{k-p-1}\,q^{k+p}\,\varphi_{2k-1}\Big(\frac{n}{q}\Big)$$

$$\Big(n' = \frac{n}{q},\quad \varphi_r(n) = \sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)d^r = n^r\prod_{p/n}\Big(1 - \frac{1}{p^2}\Big),\quad k > p \geqslant 0\Big).$$

Суммируя по всевозможным $(a,\,q)=1$, $a\leqslant qx$, а затем по всем q/n, получим в качестве полного приращения суммы $F_p(t)$ в интервале $(0,\,x)$:

$$(-1)^{k-p}(k-p)\sum_{q/k}\varphi_{2k-1}\Big(\frac{n}{q}\Big)\,q^{k+p}\,\sigma_{k-p-1}(qx,\,q),$$

где $\sigma_\mu(m,\,n)$ означает сумму μ-х степеней всех чисел, взаимно простых с n и не превосходящих m. Вводя обозначения $t_\nu(x,\,q)= = \dfrac{\sigma_\nu(qx,\,q)}{q^\nu}$, заменяя q на d и учитывая $F_p(0)=B_{k-p}\,\varphi_{k+p}(n)$, получим

$$F_p(x)=(-1)^{k-p}(k-p)\sum_{d/n}\varphi_{2k-1}\Big(\frac{n}{d}\Big)d^{2k-1}\,t_{k-p-1}(x,\,d)+$$
$$+B_{k-p}\,\varphi_{k+p}(n),\qquad(0\leqslant p<k).$$

Окончательно получим, учитывая $(k-p)C_k^p=k\,C_{k-1}^p$ $(p\leqslant k-1)$,

$$\sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)d^k\,B_k(dx-[dx])=k\sum_{p=0}^{k-1}C_{k-1}^p(-1)^{k-p}\,x^p\sum_{d/n}\varphi_{2k-1}\times$$
$$\times\Big(\frac{n}{d}\Big)^{2k-1}t_{k-p-1}(x,\,d)+\sum_{p=0}^{k}C_k^p\,B_{k-p}\,\varphi_{k+p}(n)x^p=\sum_{d/n}\varphi_{2k-1}\times$$
$$\times\Big(\frac{n}{d}\Big)^{2k-1}(x^k\,\varphi(d)-k\,C_{k-1}^0\,x^{k-1}\,t_0(x,\,d)+\ldots\pm k\,C_{k-1}^{k-1}\,t_{k-1}(x,\,d))+$$
$$+\sum_{p=0}^{k-1}C_k^p\,B_{k-p}\,\varphi_{k+p}(n)x^p.$$

Аналогично предыдущему, учитывая также $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_s(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s-r)}{\zeta(s)}$, получим

$$\gamma_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varphi_{2k(n)}}\psi_{n;\,k}(x)}{n^s} = \frac{\zeta(s-2k+1)}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^k\varphi(n) - k\,C_{k-1}^0\, x^{k-1}\times}{n^{s-2k+1}}$$

$$\frac{\times t_0(x,\,n) + \ldots \pm k\,C_{k-1}^{k-1}\, t_{k-1}(x,\,n) - \frac{k}{2}\delta_n'\, x^{k-1}}{n^{s-2k+1}} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{k-2} C_k^p\, B_{k-p} \frac{\zeta(s-k-p)}{\zeta(s)} x^p$$

или, обозначая

$$b_n(x) = x^k\, \varphi(n) - k\,C_{k-1}^0\, x^{k-1} t_0(x,\,n) + k\,C_{k-1}^1\, x^{k-1} t_1(x,\,n) -$$

$$- \ldots \pm k\,C_{k-1}^{k-1}\, t_{k-1}(x,\,n) - \frac{k}{2}\delta_n^1\, x^{k-1},$$

$$a_{n,\,k}(x) = \sum_{d/n} \varphi_{k-1}\Big(\frac{n}{d}\Big) d^{k-1}\, b_d(x) + \sum_{p=0}^{k-1} C_k^p\, B_{k-p}\varphi_p(n)\, x^p,$$

$$\gamma_k \frac{\zeta(s)}{\zeta(s-2k+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varphi_{2k}(n)}\, \psi_{n;\,k}(x)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(x)}{n^{s-2k+1}} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{k-1} C_k^p\, B_{k-p} \frac{\zeta(s-k-p)}{\zeta(s-2k+1)}\, x^p, \tag{14}$$

$$\gamma_k \frac{\zeta(s)}{\zeta(s-k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varphi_{2k}(n)}\, \psi_{n;\,k}(x)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{n^{s-k}}. \tag{15}$$

Область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n(x)}{n^{s-2k+1}}$ содержит $Re(s) > 2k$, так как $\psi_{n;\,k}(x) = \mathrm{O}\,(1)$, $\varphi_{2k} = \mathrm{O}\,(n^{2k})$.

Очевидно, что $t_0(x,\,n) = \varphi(nx,\,n)$ и что $t_\nu(x,\,n)$ означает сумму ν-х степеней всех несократимых дробей интервала $(0,\,x)$ со знаменателем, равным n, и поэтому

$$B_{u;\,k}(x) = \sum_{l=1}^{[u]} B_{l;\,k}(x) = Nx^k - k\,C_{k-1}^0\,N_0(x)\,x^{k-1} + \ldots \pm$$
$$\pm\, k\,C_{k-1}^{k-1} N_{k-1}(x) - \frac{k}{2}\,x^{k-1},$$
$$A_{u;\,k}(x) = \sum_{l=1}^{[u]} a_{l;\,k}(x) = M_k(u)x^k - k\,C_{k-1}^0\,x^{k-1} \sum_{r_\nu \leqslant x} M_{k-1}\Bigl(\frac{u}{q(r_\nu)}\Bigr)\times$$
$$\times\, q(r_\nu)^{k-1} + k\,C_{k-1}^1\,x^{k-1} \sum_{r_\nu \leqslant x} M_{k-1}\Bigl(\frac{u}{q(r_\nu)}\Bigr) q(r_\nu)^{k-1} r_\nu - \ldots \pm$$

$$\pm\, k\,C_{k-1}^{k-1} \sum_{r_\nu \leqslant x} M_{k-1}\Bigl(\frac{u}{q(r_\nu)}\Bigr) q(r_\nu)^{k-1} r_\nu^{k-1} + \sum_{p=0}^{k-1} C_k^p\,B_{k-p}\,M_p(u)\,x^p$$
$$\Bigl(M_\mu(u) = \sum_{k \leqslant u} \varphi_\mu(k)\Bigr),$$

где $N_0(x)$ означает число чисел Фарея r_ν, со знаменателями $q(r_\nu)$, не превосходящими n, содержащихся в $(0,\,x)$, $N_\nu(x)$ означает сумму ν-х степеней этих чисел; $N = N_0(1)$. Из формул (14), (15) вытекают аналогичные предыдущим соотношения и связи с той разницей, что $\|A_{u;\,k}\|^2$, $\|B_{u;\,k}\|^2$ не имеют при $k > 1$ столь простого толкования, как $\|A_u\|^2 = \|A_{u;\,1}\|^2 = \|B_{u;\,1}\|^2 = \frac{1}{12} + N\sum_{\nu=1}^{N} \delta_\nu^2$.

При $k = 2$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{180}}\,\frac{\zeta(s)}{\zeta(s-2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varphi_4(n)}\,\psi_n^k(x)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^*(x)}{n^{s-2}}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{\sqrt{180}}\,\frac{\zeta(s)}{\zeta(s-3)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varphi_4(n)}\,\psi_n^*(x)}{n^s} - \frac{1}{6}\,\frac{\zeta(s-2)}{\zeta(s-3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^*(x)}{n_{s-3}^{s-3}}, \tag{17}$$

где $a_n^*(x) = a_{n;\,2}(x)$, $b_n^*(x) = b_{n;\,2}(x)$, $\psi_n^*(x) = \psi_{n;\,2}(x)$.

Умножая обе части равенства на $f(x) \in L_2(0,\,1)$ и интегрируя в $(0,1)$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{180}}\,\frac{\zeta(s)}{\zeta(s-3)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\varphi_4(n)}\,(f,\,\psi_n^*)}{n^s}-\frac{1}{6}\,\frac{\zeta(s-2)}{\zeta(s-3)}(f,\,1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,\,b_n^*)}{n^{s-3}}=$$
$$=(s-3)\int\limits_1^{\infty}\frac{(f,\,B_u^*)}{u^{s-2}}du, \tag{18}$$

$$\frac{1}{\sqrt{180}}\,\frac{\zeta(s)}{\zeta(s-2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\varphi_4(n)}\,(f,\,\psi_n^*)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,\,a_n^*)}{n^{s-2}}=$$
$$=(s-2)\int\limits_1^{\infty}\frac{(f,\,A_u^*)}{u^{s-1}}du, \tag{19}$$

где $A_u^*(x)=\sum\limits_{k\leqslant u}a_k^*(x)=\sum\limits_{k\leqslant u}a_{k;\,2}(x)$, $B_u^*(x)=\sum\limits_{k\leqslant u}b_k^*(x)=\sum\limits_{k\leqslant u}b_{k;\,2}(x)$.

А также

$$\begin{aligned}B_u^*(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(s)}\Big\{\frac{1}{\sqrt{180}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\varphi_4(n)}\,\psi_n^*(x)}{n^s}-\\-\frac{1}{6}\,\frac{\zeta(s-2)}{\zeta(s)}\Big\}\frac{\zeta(s)}{\zeta(s-3)}\,\frac{u^{s-3}}{s-3}ds,\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}(f,\,B_u^*)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(s)}\Big\{\frac{1}{\sqrt{180}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\varphi_4(n)}(f,\,\psi_n^*)}{n^s}-\\-\frac{1}{6}\,\frac{\zeta(s-2)}{\zeta(s)}(f,\,1)\Big\}\frac{\zeta(s)}{\zeta(s-3)}\,\frac{u^{s-3}}{s-3}ds,\end{aligned} \tag{21}$$

$$(f,\,A_u^*)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(s)}\Big\{\frac{1}{\sqrt{180}}\frac{\zeta(s)}{\zeta(s-2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\varphi_4(n)}\,(f,\,\psi_n^*)}{n^s}\Big\}\frac{u^{s-2}}{s-2}ds. \tag{22}$$

Из формул (17) — (19) видно, что из любой из оценок

$$\Big|(f,\,B_u^*)\Big|<C_{\varepsilon,\,f}\,u^{\frac{1}{2}+\varepsilon};\quad\Big|(f,\,A_u^*)\Big|<C_{\varepsilon,\,f}\,u^{\frac{1}{2}+\varepsilon};\quad\Big(f(x)\in L_2(0,\,1)\Big)$$

следует гипотеза Римана и из гипотезы Римана следует $\left|B_u^*(x)\right| < C_\varepsilon\, u^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $\left|(f,\, B_u^*)\right| < C_\varepsilon \left\|f\right\| u^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $\left|(f,\, A_u^*)\right| < C_\varepsilon \left\|f\right\| u^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Так же, как и выше, $\left\|A_u^*\right\| = \mathrm{O}\,(u^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$, $\left\|B_u^*\right\| = \mathrm{O}\,(u^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ есть эквивалент гипотезы Римана.

Вычисление $\left\|B_u^*\right\|^2 = \int\limits_0^1 B_u^*(x)^2 dx = \int\limits_0^1 \Big\{x^2 \sum\limits_{r_\nu \leqslant 1} 1 - 2x \sum\limits_{r_\nu \leqslant x} 1 \;+ + 2\sum\limits_{r_\nu \leqslant x} r_\nu - x\Big\}^2 dx$, $\left\|A_u^*\right\|^2 = \int\limits_0^1 A_u^*(x)^2 dx = \int\limits_0^1 \Big\{x^2 \sum\limits_{r_\nu \leqslant 1} M_1\Big(\dfrac{u}{q_\nu}\Big)\, q_\nu - - 2x \sum\limits_{r_\nu \leqslant x} M_1\Big(\dfrac{u}{q_\nu}\Big)\, q_\nu + 2\sum\limits_{r_\nu \leqslant x} M_1\Big(\dfrac{u}{q_\nu}\Big)\, q_\nu r_\nu + \dfrac{1}{6} - M_1(u)\, x\Big\}^2 dx$, где $r_\nu = \dfrac{p_\nu}{q_\nu}$ — ν-е число Фарея, соответствующее u, совершается так же, как в случае Франеля, путем разбиения интервала интегрирования на интервалы $(0,\, r_1)$, $(r_1,\, r_2)$, $\ldots$, $(r_{n-1},\, r_n)$.

Выражение $\left\|B_u^*\right\|^2$ получится в виде довольно сложного многочлена четвертой степени от $\delta_1,\, \delta_2,\, \ldots, \delta_k$.

При k растущих получаются все более и более сложные многочлены от δ_i, оценка которых связана с гипотезой Римана. Таким образом, теорема Франеля есть только простейший случай из бесконечной серии аналогичных предложений. Так как в случае $k > 1$ область $Re(s) > k+1$ содержится в $Re(s) > 2k - \dfrac{1}{2}$, то из гипотезы Римана вытекает не только $\left\|B_{u;\,k}\right\| = \mathrm{O}\,(u^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$, но даже $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} \left|B_{u;\,k}(x)\right| = \mathrm{O}\,(u^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$.

Так как из $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} \left|B_{u;\,k}(x)\right| = \mathrm{O}\,(u^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ следует $\left\|B_{u;\,k}\right\| = \mathrm{O}\,(u^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$, то $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} \left|B_{u;\,k}(x)\right| = \mathrm{O}\,(u^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ при $k > 1$ есть также эквивалент гипотезы Римана. В частности,

$$x^2 N - 2xN_0(x) + 2N_1(x) - x = x^2 \sum_{r_\nu \leqslant 1} 1-$$

$$-2x \sum_{r_\nu \leqslant x} 1 + 2 \sum_{r_\nu \leqslant x} r_\nu - x = \mathrm{O}\,(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

где оценка равномерна относительно x, есть эквивалент гипотезы Римана.

Перемножая равенства (15), (14) со значениями $s = s_1$, $s = s_2$, интегрируя по x от 0 до 1 и учитывая

$$(\psi_{n;\,k},\,\psi_{m;\,k}) = \delta_n^m, \quad (\psi_{n;\,r},\,1) = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_r(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-r)}{\zeta(s)},$$

получим

$$\gamma_k^2\, \frac{\zeta(s_1)\,\zeta(s_2)\,\zeta(s_1+s_2-2k)}{\zeta(s_1-k)\,\zeta(s_2-k)\,\zeta(s_1+s_2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(a_{n;\,k},\,a_{m;\,k})}{n^{s_1-k}\,m^{s_2-k}} =$$

$$= (s_1-k)(s_2-k) \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} \frac{(A_{u;\,k},\,A_{v;\,k})}{u^{s_1-k+1}\,v^{s_2-k+1}}\,dudv, \tag{23}$$

$$\frac{1}{180}\,\frac{\zeta(s_1)\,\zeta(s_2)\,\zeta(s_1+s_2-4)}{\zeta(s_1-3)\,\zeta(s_2-3)\,\zeta(s_1+s_2)} + \frac{1}{36}\,\frac{\zeta(s_1-2)\,\zeta(s_2-2)}{\zeta(s_1-3)\,\zeta(s_2-3)} =$$

$$= (s_1-3)(s_2-3) \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} \frac{(B_u^*,\,B_v^*)}{u^{s_1-2}\,v^{s_2-2}}\,dudv, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}(B_u^*,\,B_v^*) = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{(s)}\int\limits_{(s)} \Big\{ \frac{1}{180}\,\frac{\zeta(s_1)\,\zeta(s_2)\,\zeta(s_1+s_2-4)}{\zeta(s_1-3)\,\zeta(s_2-3)\,\zeta(s_1+s_2)} + \\ + \frac{1}{36}\,\frac{\zeta(s_1-2)\,\zeta(s_2-2)}{\zeta(s_1-3)\,\zeta(s_2-3)} \Big\} \frac{u^{s_1-3}\,v^{s_2-3}}{(s_1-3)(s_2-3)}\,ds_1 ds_2\end{aligned} \tag{25}$$

и также

$$(A_{u;\,k,\,A_{v;\,k}}) = -\gamma_k^2\,\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{(2k)}\int\limits_{(2k)}\frac{\zeta(s_1)\,\zeta(s_2)\,\zeta(s_1+s_2-2k)}{\zeta(s_1-k)\,\zeta(s_2-k)\,\zeta(s_1+s_2)}\times$$

$$\times\,\frac{u^{s_1-k}\,v^{s_2-k}}{(s_1-k)(s_2-k)}\,ds_1ds_2. \tag{26}$$

Вычисляя

$$\frac{1}{2}(f'',\,A_n^*) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 A_n^*(x)f''(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\Big\{x^2M_2(n) -$$

$$-2x\sum_{r_\nu\leqslant x}M_1\Big(\frac{n}{q_\nu}\Big)q_\nu + 2\sum_{r_\nu\leqslant x}M_1\Big(\frac{n}{q_\nu}\Big)q_\nu r_\nu - xM_1(n) + \frac{1}{6}\Big\}f'(x)dx$$

путем интегрирования по частям, получим

$$\frac{1}{2}(f'',\,A_n^*) = M_2(n)\Big\{\int\limits_0^1 f(x)dx - \sum_{\nu=1}^{N}\frac{M_1\big(\frac{n}{q_\nu}\big)q_\nu}{M_2(n)}f(r_\nu) +$$

$$+\,\frac{1}{2}f(0)\,\frac{M_1(n)}{M_2(n)} - \frac{1}{12}\,\frac{f'(0)}{M_2(n)}\Big\},$$

где $N = M_1(n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(k)$, $M_2(n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_2(k)$, $f''(x)$ — любая функция из $L_2(0,\,1)$ $\Big(f(1) = f'(1) = 0\Big)$. Таким образом, получаем: гипотеза Римана верна тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^1 f(x)dx - \sum_{\nu=1}^{N}\frac{M_1\big(\frac{n}{q_\nu}\big)q_\nu}{M_2(n)}f(r_\nu) + \frac{1}{2}f(0)\,\frac{M_1(n)}{M_2(n)} -$$

$$-\,\frac{1}{12}\,\frac{f'(0)}{M_2(n)} = \mathrm{O}\,(N^{-\frac{s}{4}+\varepsilon})$$

для всякой $f(x)$, для которой $\int\limits_0^1\Big|f'(x)\Big|^2dx$ существует. Так как $\dfrac{d}{dx}B_n^*(x) = 2\Big(xN - (\nu + \dfrac{1}{2})\Big)$ сохраняет свой знак в $(r_\nu,\,r_{\nu+1})$, если

$\dfrac{\nu+\frac12}{N}$ не принадлежит интервалу $(r_\nu,\, r_{\nu+1})$ и меняет свой знак с – на + в точке $\dfrac{\nu+\frac12}{N}$, если $r_\nu < \dfrac{\nu+\frac12}{N} < r_{\nu+1}$, то в первом случае $B_n^*(r_\nu) \leqslant B_n^*(x) \leqslant B_n^*(r_{\nu+1})$ или $B_n^*(r_\nu) \geqslant B_n^*(x) \geqslant B_n^*(r_{\nu+1})$ $(x \in (r_\nu,\, r_{\nu+1}))$, а во втором случае $B_n^*(r_\nu) \geqslant B_n^*(x) \geqslant B_n^*\Big(\dfrac{\nu+\frac12}{N}\Big)$, если $x \in \Big(r_\nu,\, \dfrac{\nu+\frac12}{N}\Big)$; $B_n^*\Big(\dfrac{\nu+\frac12}{N} \leqslant B_n^*(x) \leqslant B_n^*(r_{\nu+1})\Big)$, если $x \in \Big(\dfrac{\nu+\frac12}{N},\, r_{\nu+1}\Big)$, так как

$$
\begin{gathered}
B_n^*(r_\nu) = r_\nu^2\, N - 2r_\nu\, N(r_\nu) + 2\sum_{k=1}^{\nu} r_k - r_\nu = \\
= r_\nu^2\, N - 2\,\nu\, r_\nu + 2\sum_{k=1}^{\nu} r_k - r_\nu = 2\sum_{k=1}^{\nu} \delta_\nu + N\Big(\delta_\nu - \frac{1}{2N}\Big)^2 - \frac{1}{4N} = \\
= 2\delta_\nu - \frac{1}{4N} + N\Big(\delta_\nu - \frac{1}{2N}\Big)^2
\end{gathered}
$$

всегда, и

$$
\begin{gathered}
B_n^*\Big(\frac{\nu+\frac12}{N}\Big) = \frac{(\nu+\frac12)}{N} - 2\nu\,\frac{\nu+\frac12}{N} + 2\sum_{k=1}^{\nu} r_k - \frac{\nu+\frac12}{N} = \\
= 2\sum_{k=1}^{\nu}\delta_k - \frac{1}{4N} = 2\sigma_\nu - \frac{1}{4N}
\end{gathered}
$$

в случае, если $r_\nu \leqslant \dfrac{\nu+\frac12}{N} < r_{\nu+1}$. Таким образом, всегда $B_n^*(x)$ лежит между

$$
\begin{gathered}
\max\Big(2\sigma_\nu - \frac{1}{4N},\, 2\sigma_\nu + N\Big(\delta_\nu - \frac{1}{2N}\Big)^2 - \frac{1}{4N},\, 2\sigma_{\nu+1} + \\
+ N\Big(\delta_{\nu+1} - \frac{1}{2N}\Big)^2 - \frac{1}{4N},\, 2\sigma_{\nu+1} - \frac{1}{4N}\Big)
\end{gathered}
$$

и

$$\min\Bigl(2\sigma_\nu - \frac{1}{4N},\, 2\sigma_\nu + N\Bigl(\delta_\nu - \frac{1}{2N}\Bigr)^2 - \frac{1}{4N},\, 2\sigma_{\nu+1} + {} \\ {} + N\Bigl(\delta_{\nu+1} - \frac{1}{2N}\Bigr)^2 - \frac{1}{4N},\, 2\sigma_{\nu+1} - \frac{1}{4N}\Bigr),$$

где ν — номер того интервала $(r_\nu,\, r_{\nu+1})$, в который попадает x, и где $\sigma_\nu = \sum\limits_{k=1}^{\nu} \delta_k = \sum\limits_{k=1}^{\nu} \Bigl(r_k - \dfrac{k}{N}\Bigr)$. Отсюда, на основании предыдущего, следует предложение, аналогичное теореме Ландау[1]: *гипотеза Римана верна тогда и только тогда, когда* $\Bigl|\sum\limits_{k=1}^{\nu} \delta_k + \dfrac{N\,\delta_\nu^2}{2}\Bigr| < C(\varepsilon)\, n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ для всякого ν и $\Bigl|\sum\limits_{k=1}^{\nu} \delta_k\Bigr| < C(\varepsilon)\, n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, если $r_\nu \leqslant \dfrac{\nu + \frac{1}{2}}{N} < r_{\nu+1}$, где $\delta_\nu = r_\nu - \dfrac{\nu}{N}$, $r_1,\, r_2,\, r_3,\, \ldots, r_N$ — числа Фарея со знаменателями, не превышающими n. Очевидно, что подобных теорем можно, варьируя k в $A_{n,\,k}$, $B_{n,\,k}$, увеличивать неограниченно.

[1] Из $B_n^*(r_\nu) - B_n^*\Bigl(\dfrac{\nu + \frac{1}{2}}{N}\Bigr) = N\Bigl(\delta_\nu - \dfrac{1}{2N}\Bigr)^2$ следует, что необходимым условием справедливости гипотезы Римана является $N\,\delta_\nu^2 = \mathrm{O}\,(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ или $\delta_\nu = \mathrm{O}\,(n^{-\frac{s}{4}+\varepsilon})$ для случая $r_\nu \leqslant \dfrac{\nu + \frac{1}{2}}{N} < r_{\nu+1}$.

20. Об асимптотических теоремах теории чисел

В моей работе [65] я доказываю одно общее тождество

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty} a_k\, b_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_s(n)} A_n\, B_n, \tag{1}$$

где

$$s>1,\ \ A_n=\sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\,S_d,\ \ B_n=\sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\,S_d^{'},$$
$$S_n=n^{s/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{kn}}{k^{s/2}},\ \ S_n^{'}=n^{s/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{kn}}{k^{s/2}}.$$

Здесь всюду $\mu(n)$ функция Мёбиуса

$$\varphi_s(n)=\sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\,d^s=n^s\prod_{p/n}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big),$$

обобщённая по Лиувиллю функция Эйлера, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots$ — любые последовательности комплексных чисел со сходящейся суммой квадратов модулей. В настоящей заметке я вывожу различные предельные теоремы теории простых чисел. Рабочим аппаратом являются частные типы тождества (1), получающиеся путем конкретизации $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots$, и теорема Гарди — Литтльвуда: из соотношения $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n \sim \dfrac{A}{1-x}$ $(x\to 1-0)$ вытекает $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sim A_n$ $(n\to\infty)$, если все $c_n \geqslant 0$.

Полагая в (1) $a_n = \dfrac{\Lambda(n)}{n^{s/2}}$, $b_n = n^{s/2}x^n$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)x^n = -\zeta(s)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)} \Big(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \\ + \sum_{p/n} \frac{\log p}{1-p^{-s}}\Big) \sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) \frac{d^s\, x^d}{1-x^d} \tag{2}$$

$(|x| < 1, \ \ R(s) > 1).$

Полагая

$$b_n = n^{-s/2+1} F_{s-1}(x^n), \ \ F_z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_z(n)}{n^z} x^n, \ \ |x| < 1, \ \ s > 1,$$

получаем

$$S_n = n^{s/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{kn}}{k^{s/2}} = n \sum_{k=1}^{\infty} k^{1-s} F_{s-1}(x^{kn}) =$$

$$= n \sum_{k=1}^{\infty} k^{1-s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{s-1}(m)}{m^{s-1}} x^{mnk} =$$

$$= n \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{d/l} \varphi_{s-1}(d)}{l^{s-1}} x^{ln} = \frac{nx^n}{1-x^n},$$

$$B_n = \sum_{d/n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) \frac{dx^d}{1-x^d} = -x \frac{P_n'(x)}{P_n(x)}, \text{ где } P_n(x) = \prod_{d/n} (x^d - 1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$$

полином деления окружности. Далее для $a_n = \dfrac{\Lambda(n)}{n^{s/2}}$,

$$A_n = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \sum_{p/n} \frac{\log p}{1-p^{-s}},$$

для $a_n = \delta_n^2$, $A_n = \mu(n)$, где $\delta_1^1 = 1$, $\delta_n^1 = 0$ при $n > 1$.

Подставляя эти данные в формулу (1), имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{s-1}}F_{s-1}(x^n) = -\zeta(s)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)}\Big(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)+ \\ +\sum_{p/n}\frac{\log p}{1-p^{-s}}\Big)\sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\frac{dx^d}{1-x^d}, \tag{3}$$

$|x|<1$, $s>1$ или

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n,s)x^n =$$

$$=\zeta(s)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)}\Big(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)+\sum_{p/n}\frac{\log p}{1-p^{-s}}\Big)\frac{x\,P_n^{'}(x)}{P_n(x)} = \tag{3'}$$

$$=\zeta(s)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)}\Big(-\log n+\frac{L_n^{'}}{L_n}(s)\Big)\sum_{i=1}^{\varphi(n)}\frac{x}{x-\rho_i^{(n)}},$$

где $\rho_i^{(n)}$ — все первообразные корни n-й степени из единицы, $L_n(s)=\prod_{p/n}\Big(1-\dfrac{1}{p^s}\Big)\zeta(s)$ — ряд Дирихле, соответствующий главному характеру по модулю n, и где

$$\Lambda(n,s)=\frac{1}{n^{s-1}}\sum_{d/n}\Lambda\Big(\frac{n}{d}\Big)\varphi_{s-1}(d)=\frac{d}{ds}\frac{\varphi_{s-1}(n)}{n^{s-1}}.$$

Далее

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_{s-1}(n)}{n^{s-1}}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)}\sum_{d/n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\frac{dx^d}{1-x^d}=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)}\sum_{i=1}^{\varphi(n)}\frac{x}{x-\rho_i^{(n)}}$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n,s) = -\zeta(s)x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi_s(n)}\sum_{i=1}^{\varphi(n)}\frac{x}{x-\rho_i^{(n)}}, \tag{4}$$

где $\lambda(n,s)=\zeta(s)\dfrac{\varphi_{s-1}(n)}{n^{s-1}}$ при $n>1$; $\lambda(1,s)=0$. Вытекающие из (3) и (4) соотношения:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\exp\left(2\pi i\frac{l}{k}\right)}&(1-|x|)\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n,s)x^n=\\&=-\frac{\mu(k)}{\varphi_s(k)}\zeta(s)^{-1}\Big(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)+\sum_{p/k}\frac{\log p}{1-p^{-s}}\Big),\end{aligned}\tag{5}$$

$$\exp\left(2\pi i\frac{l}{k}\right)=e^{2\pi i\frac{l}{k}},\quad (k,l)=1,$$

и

$$\lim_{x\to\exp\left(2\pi i\frac{l}{k}\right)}(1-|x|)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n,s)x^n=\frac{\mu(k)}{\varphi_s(k)},\ ((k,\,l)=1)\tag{6}$$

интересны тем, что они являются аналогами известного предложения

$$\lim_{x\to\exp\left(2\pi i\frac{l}{k}\right)}(1-|x|)\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)x^n=\frac{\mu(k)}{\varphi(k)},\ ((k,\,l)=1)\,,\tag{7}$$

которое является, как легко показать, эквивалентом теоремы Адамара — Валле Пуссена. Легко видеть, что $\lim\limits_{s\to1}\Lambda(n,\,s)=\Lambda(n)$, $\lim\limits_{s\to1}\lambda(n,\,s)=\Lambda(n)$. Таким образом, теорема Валле Пуссена сводится к обоснованию перестановки пределов в выражении $(1-|x|)\times$ $\times\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Lambda(n,\,s)x^n$ при $s\to1$, $x\to e^{2\pi i\frac{l}{k}}$. Легко видеть, что на основании (6)

$$(1-r)\sum_{n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}\lambda(n,\,s)r^n=\frac{1}{k}(1-r)\sum_{m=1}^{k}e^{-2\pi i\frac{ml}{k}}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n,\,s)\Big(re^{2\pi i\frac{m}{k}}\Big)^n\to$$

$$\to \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\pi i\frac{ml}{k}} \frac{\mu\Big(\frac{k}{(m,\,k)}\Big)}{\varphi_s\Big(\frac{k}{(m,\,k)}\Big)} = \frac{1}{k}\sum_{d/k}\sum_{m\leqslant k(m,\,k)=d} e^{-2\pi i\frac{ml}{k}} \frac{\mu\Big(\frac{k}{(m,\,k)}\Big)}{\varphi_s\big(\frac{k}{(m,\,k)}\big)} =$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{d/k}\frac{\mu(d)}{\varphi_s(d)}\,S_d(l) = \frac{1}{k}\prod_{p/k}\Big(1-\frac{1}{\varphi_s(p)}\,S_p(l)\Big) =$$

$$= \frac{k^{s-1}}{\varphi_s(k)}\prod_{p/(k,\,l)}\Big(1-\frac{1}{p^{s-1}}\Big)$$

при $s \to 1$, где $S_d(l)$ сумма Рамануджана — сумма l-х степеней первообразных корней порядка d. Так как все $\lambda(n,\,s)$ неотрицательны, имеем согласно указанной выше теореме

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\le N\\ n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}}\lambda(n,\,s) = \frac{k^{s-1}}{\varphi_s(k)}\prod_{p/(k,\,l)}\Big(1-\frac{1}{p^{s-1}}\Big), \tag{8}$$

где

$$s>1,\ \lambda(l,\,s)=0,\ \lambda(n,\,s)=\zeta(s)\prod_{p/n}\Big(1-\frac{1}{p^{s-1}}\Big)\quad (n>1).$$

Так же точно имеем

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\le N\\ n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}}\Lambda(n,\,s) = \frac{d}{ds}\frac{1}{\zeta(s)}\frac{k^{s-1}}{\varphi_s(k)}\prod_{p/(k,\,l)}\Big(1-\frac{1}{p^{s-1}}\Big), \tag{9}$$

где

$$s>1,\ \ \Lambda(n,\,s)=\frac{d}{ds}\frac{\varphi_{s-1}(n)}{n^{s-1}}.$$

Очевидно, что теорема Валле Пуссена о распределении простых чисел в прогрессии является предельным случаем как формулы (8), так и формулы (9) при $s \to 1$ и сводится, таким образом, к обоснованию перестановки пределов в выражениях

$$\lim_{s\to1}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)\\ n\leqslant N}}\Lambda(n,\,s),\qquad \lim_{s\to1}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{N\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)\\ n\leqslant N}}\lambda(n,\,s).$$

Легко видеть также, что теорема Валле Пуссена равносильна соотношениям:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)\\ n\leqslant N}}\left\{\frac{\varphi_{s-1}(k)}{k^{s-1}}\lambda(n,\,s)-\varphi(k)\Lambda(n)\right\}=0 \tag{10}$$

$$((k,\,l)=1,\ \ s<1),$$

$$\lim_{s\to 1}\overline{\lim_{N\to\infty}}\left|\sum_{\substack{n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)\\ n\leqslant N}}\lambda(n,\,s)-\Lambda(n)\right|\frac{1}{N}=0, \tag{11}$$

$$\lim_{s\to 1}\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\left|\sum_{\substack{n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)\\ n\leqslant N}}\Lambda(n,\,s)-\Lambda(n)\right|=0. \tag{12}$$

Достаточно доказать, что

$$\lim_{s\to 1}\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\left|\sum_{\substack{n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)\\ n\leqslant N}}\left\{\frac{\varphi_s(k)}{k^{s-1}}\lambda(n,\,s)-\varphi(k)\,\Lambda(k)\right\}\right|=0, \tag{13}$$

так как тогда

$$\frac{1-\mathrm{O}\,(s-1)}{\varphi_s(k)}\leqslant\underline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)\\ n\leqslant N}}\Lambda(n)\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)\\ n\leqslant N}}\Lambda(n)\leqslant\frac{1+\mathrm{O}\,(s-1)}{\varphi_s(k)},$$

где $\mathrm{O}\,(s-1)\to 0$, если $s\to 1$, откуда теорема о распределении простых чисел в прогрессиях становится очевидной. Что касается доказательства (10) и (13), то оно не представляет затруднения, если ввести производящий ряд Дирихле

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^2}\Big\{\lambda(n,\,s)\frac{\varphi_s(k)}{k^{s-1}}-\varphi(k)\,\Lambda(n)\Big\}=\Phi(z,\,s,\,\chi)=$$
$$=\frac{\varphi_s(k)}{k^{s-1}}\Big(\frac{L(z,\,\chi)}{L(z+s-1,\,\chi)}-1\Big)-\varphi(k)\,\frac{L'}{L}(z,\,\chi),$$

где χ — характер Дирихле по модулю k. Легко убедиться, что все $\Phi(z,\,s,\,\chi)$ голоморфны в точке $z=1$, а следовательно, во всей полуплоскости $R(z)\geqslant 1$. Вывод формулы (13) тогда обычным образом сводится к оценке интеграла

$$\frac{1}{\varphi(k)}\int\limits_{(a)}\sum_{\chi}\Phi(z,\,s,\,\chi)\,\chi(l)^{-1}\frac{N^z}{z^2}dz=$$
$$=\sum_{\substack{n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)\\ n\leqslant N}}\Big\{\lambda(n,\,s)\frac{\varphi_s(k)}{k^{s-1}}-\varphi_k\,\Lambda(n)\Big\}\log\frac{N}{k},$$

но интересно, что только для доказательства (10) нужно брать $a=1$, а для (13) достаточно положить $a=1+\dfrac{1}{\log N}$. Таким образом, для доказательства теоремы Валле Пуссена нужно знать только оценки роста $L(z,\,\chi)$, $L'(z,\,\chi)$, $L''(z,\,\chi)$, $L^{-1}(z,\,\chi)$ в области $R(z)>1$ и совсем не требуется $L(1+iy)\neq 0$, $y\lesseqgtr 0$. Интересно, что для доказательства (8) и (9) совсем не нужно теории характеров Дирихле, так как доказательство основного тождества (1) не требует теории характеров.

Полагая в (4) $s=2$, дифференцируя по x, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)x^n=\zeta(2)^{-1}\sum\frac{\mu(n)}{\varphi_2(n)}\sum_{i=1}^{\varphi(n)}\frac{\chi\overline{\rho_i^{(n)}}}{(1-\chi\overline{\rho_i^{(n)}})^2},\tag{14}$$

где $\rho_i^{(n)}$ — как и всюду, первообразные корни n-й степени из единицы.

Отсюда легко следует

$$\lim_{x\to e^{2\pi i\frac{l}{k}}}(1-|x|)^2\sum_{\substack{n=1\\(k,\,l)=1}}^{\infty}\varphi(n)x^n=\frac{6}{\pi^2}\frac{\mu(k)}{\varphi_2(k)}\tag{15}$$

и далее

$$\lim_{x\to e^{2\pi i\frac{l}{k}}}(1-r)^2\sum_{n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}\varphi(n)r^n=\frac{6}{\pi^2}\frac{k}{\varphi_2(k)}\prod_{p/(k,\,l)}\Big(1-\frac{1}{p}\Big),\tag{16}$$

откуда, на основании известного обобщения теоремы Харди — Литтлвуда, следует:

$$\sum_{\substack{n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)\\ n\leqslant N}}\varphi(n)\sim N^2\frac{3}{\pi^2}\frac{k}{\varphi_2(k)}\prod_{p/(k,\,l)}\Big(1-\frac{1}{p}\Big).\tag{17}$$

Так же точно можно получить:

$$\sum_{\substack{n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)\\ n\leqslant N}}c(n)\sim N\frac{\zeta(6)}{\zeta(2)\zeta(3)}\prod_{p/k}\frac{1+\frac{1}{p^3}}{1-\frac{1}{p^2}}\prod_{p/(k,\,l)}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{1-\frac{1}{p^2}}{1+\frac{1}{p^3}},\tag{18}$$

где $c(n)=\prod\limits_{p/n}\dfrac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}}$. Последнее соотношение интересно тем, что его не удается получить обычными методами, ввиду того, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{c(n)}{n^z}\chi(n)$ не удается выразить через $L(z,\,\chi)$.

21. Аналитические функции целого аргумента

Всякую функцию от двух целых аргументов можно мыслить как функцию от целого комплексного аргумента $x + yi = z$, где x, y — целые рациональные числа.

Настоящая работа посвящена исследованию класса функций, имеющих то же отношение к дискретным процессам суммирования и взятия конечных разностей, какое имеют аналитические функции к процессам интегрирования и дифференцирования.

Введем следующие определения. Два целых комплексных числа z_1 и z_2 назовем соседними, если $z_1 - z_2$ равно одному из чисел $1, \ -1, \ i, \ -i$. Иными словами, числа называются соседними, если они отвечают вершинам одного и того же элементарного квадрата основной решетки, образованной точками с целочисленными координатами.

Последовательность целых гауссовых чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$ назовем контуром, если $z_1, z_2; z_2, z_3; \ldots; z_{n-1}, z_n$ образуют пары соседних точек. Если, кроме того, z_n, z_1 являются также соседними точками, то контур назовем замкнутым. Сумму

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}(f(z_k) + f(z_{k+1}))(z_{k+1} - z_k)$$

назовем S-интегралом от $f(z)$ и обозначим $\int\limits_{\Gamma} f(z)\Delta z$, где Γ — рассматриваемый контур.

Совокупность всех точек, находящихся внутри и на границе замкнутого контура, назовем областью, ограниченной контуром.

Функцию $f(z)$ назовем аналитической в области D, если S-интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в области D, равен нулю. Для этого достаточно, чтобы S-интеграл, взятый по любому элементарному квадрату решетки, был равен нулю. Вычислим S-интеграл на границе элементарного квадрата, причем для упрощения обозначений возьмем квадрат Q с вершинами (0; 0), (0; 1), (1; 1), (1; 0) и введем обозначения $f(0) = f_{00},\ f(1) = f_{10},\ f(i) = f_{01},\ f(1+i) = f_{11}$, тогда

$$\begin{aligned}\int\limits_Q f(z)\triangle z &= \frac{f_{00}+f_{10}}{2} + \frac{f_{10}+f_{11}}{2}i - \frac{f_{11}+f_{01}}{2} - \frac{f_{01}+f_{00}}{2}i = \\ &= \frac{i-1}{2}\Big[(f_{11}-f_{00}) - i(f_{10}-f_{01})\Big].\end{aligned} \tag{1}$$

Условие аналитичности на элементарном квадрате Q выразится в виде $f_{11} - f_{00} = i(f_{10} - f_{01})$ или в общем виде

$$f_{x+1,y+1} - f_{x,y} = i(f_{x+1;y} - f_{x,y+1}), \tag{2}$$

или, умножая обе части этого соотношения на $1 - i$,

$$f_{x+1,y+1} - f_{x+1,y} + f_{x,y+1} - f_{x,y} = i(f_{x+1,y+1} - f_{x,y+1} + f_{x+1,y} - f_{x,y}), \tag{3}$$

где $f_{x,y} = f(x+iy)$. Задание аналитической функции равносильно заданию последовательности с двумя индексами x, y, удовлетворяющей рекуррентному соотношению (2).

Вводя обозначения:

$$D_x g(x,y) = \frac{1}{2}(g(x+1,y+1) - g(x,y+1) + g(x+1,y) - g(x,y)),$$

$$D_y g(x,y) = \frac{1}{2i}(g(x+1,y+1) - g(x+1,y) + g(x,y+1) - g(x,y)),$$

$$D_\xi g(x,y) = \frac{1}{1+i}(g(x+1,y+1) - g(x,y)),$$

$$D_\eta g(x,y) = \frac{1}{i-1}(g(x,y+1) - g(x+1,y)),$$

сможем соотношения (2) и (3) записать следующим образом:

$$D_\xi f = D_\eta f,\ D_x f = D_y f. \tag{4}$$

Далее легко показать, что

$$D_\xi f = D_\eta f = D_x f = D_y f. \tag{5}$$

Здесь операции D_x и D_y аналогичны дифференцированию по направлению оси x и оси y соответственно, D_ξ, D_η аналогичны дифференцированию по направлению биссектрисы первого и второго координатного угла. Равенства (4) и (5) показывают, что отображение $w = f(z)$ обладает следующим свойством конформности: диагонали основного квадрата сети переходят на плоскости w в равные по длине и перпендикулярные отрезки, и геометрические суммы образов сторон квадрата, параллельных оси x и оси y, являются равными по длине и перпендикулярными отрезками. Сеть единичных квадратов переходит, таким образом, в совокупность четырехугольников с равными и перпендикулярными диагоналями, точнее, вершины сети основных квадратов переходят в вершины сети указанных четырехугольников. Геометрические полусуммы противоположных сторон этих четырехугольников, отвечающие числам $D_x f,\ iD_y f$, также равны по длине и перпендикулярны, и отношение длин этих полусумм к длине диагонали равно $1 : \sqrt{2}$, как у их прообразов — элементарных квадратов сети. Вводя обозначения:

$\delta_x f = D_x f,\ \delta_y f = iD_y f,\ \delta_\xi f = (1+i)D_\xi f,\ \delta_\eta f = (i-1)D_\eta f,$
$p(x,y) = R(f(z)),\ q(x,y) = J(f(z))$, получим

$$\delta_x p = \delta_y q,\ \delta_y p = -\delta_x q, \tag{6}$$

а также

$$\delta_\xi p = \delta_\eta q,\ \delta_\eta p = -\delta_\xi q. \tag{7}$$

Таковы аналоги конформности отображения и условий Коши — Римана для изучаемых здесь функций.

Аналогично тому, что делается в теории обычных аналитических функций, мы расширяем определение аналитических функций, допуская существование отдельных элементарных квадратов, на вершинах которых не выполнены соотношения (2). Такие элементарные квадраты назовем особыми. Они будут аналогами особых точек в теории обычных аналитических функций. Очевидно, что S-интеграл, взятый по любому замкнутому контуру, будет равен сумме всех S-интегралов, взятых по границе особых квадратов, находящихся внутри контура.

Квадрат с вершинами в точках $z,\ z+1,\ z+i,\ z+1+i$ обозначим Q_z, а значение S-интеграла от $f(z)$ по границе Q_z назовем вычетом $f(z)$ на квадрате Q_z.

Этот вычет обозначим символом $\mathrm{Res}(f, Q_z)$. Очевидно, что интеграл по замкнутому контуру равен сумме вычетов на всех особых элементарных квадратах, находящихся в области, ограниченной контуром. Очевидно, что

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f(z), Q_{z_0}) = \int\limits_{Q_{z_0}} f(z)\Delta z = \\ = \frac{i-1}{2}(f(z_0+1+i) - f(z_0) + if(z_0+i) - if(z_0+1)).\end{aligned} \tag{8}$$

Если в некоторой области D аналитическая функция $f(z)$ не имеет особых квадратов, то $f(z)$ назовем голоморфной в области D. Если $f(z)$ голоморфна в области D, то S-интеграл от $f(z)$ не зависит от пути интегрирования, а только от начала и конца интегрирования, пока путь интегрирования лежит в области D. Очевидно, что в этом случае достаточно указывать начальную и конечную точку пути S-интегрирования.

Очевидно также, что $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\Delta z$ есть однозначная функция от переменной z в области D. Можно показать, что $F(z)$ будет также голоморфной в области D функцией. Достаточно проверить соотношение (2) для $F(z)$, которое имеет вид

$$F(z+1+i) - F(z) = i(F(z+1) - F(z+i)).$$

Но

$$\begin{aligned}F(z+1+i) - F(z) = \int\limits_{z}^{z+1+i} f(z)\Delta z = \frac{1}{2}(f(z) + f(z+1)) + \\ + \frac{i}{2}(f(z+1) + f(z+1+i)),\end{aligned}$$

$$F(z+1) = F(z) + \int\limits_{z}^{z+1} f(z)\Delta z = F(z) + \frac{1}{2}(f(z) + f(z+1)),$$

$$F(z+i) = F(z) + \int\limits_{z}^{z+i} f(z)\Delta z = F(z) + \frac{i}{2}(f(z) + f(z+i)),$$

$$F(z+1)-F(z+i)=\frac{1}{2}(f(z)+f(z+1)-if(z)-if(z+i)),$$

$$\text{поэтому}\quad F(z+1+i)-F(z)-i\,F(z+1)+i\,F(z+i)=$$

$$=\frac{i}{2}(f(z+1+i)-f(z)-if(z+1)+if(z+i)).$$

Таким образом, получаем предложение: *S-интеграл от аналитической функции есть функция аналитическая.* Это предложение позволяет из одного примера аналитической, в установленном здесь смысле слова, функции получать все новые примеры путем последовательных S-интегрирований.

Очевидно, что

$$\begin{aligned}\int\limits_0^z f(z)\Delta z=\sum_{k=0}^{x} f(k)+i\sum_{r=1}^{y} f(x+ir)-\frac{1}{2}f(0)-\frac{1+i}{2}f(x)-\\ -\frac{i}{2}f(x+yi).\end{aligned}\tag{9}$$

Далее легко убедиться, что $f(z)=z$ будет аналитической, в нашем смысле слова, функцией целого комплексного аргумента.

Но $\int\limits_{z_0}^{z} z\Delta z=\sum\limits_{k=0}^{N-1}\frac{z_k+z_{k+1}}{2}(z_{k+1}-z_k)=\frac{z_N^2}{2}=\frac{z^2}{2}$, $(z_0=0, z_N=z)$, поэтому z^2 будет также аналитической. Далее согласно (9)

$$\int\limits_0^z z^2\Delta z=\sum_{k=0}^{x} k^2+i\sum_{l=1}^{y}(x+il)^2-\frac{1+i}{2}x^2-\frac{i}{2}(x+iy)^2=\frac{z^3}{3}+\frac{\bar z}{6}.$$

Таким образом, следующей простейшей аналитической функцией будет не z^3, а $z^3+\frac{\bar z}{2}$. Легко показать, что $\int\limits_0^z(z^3+\frac{\bar z}{2})\Delta z=\frac{1}{4}(z^4+2z\bar z)$ и т.д. Последовательность степеней z, играющая фундаментальную роль в теории аналитических функций непрерывного аргумента, не годится для изучения аналитических функций целого аргумента, так как только первая и вторая степень z будут аналитическими в установленном выше смысле. Вместо них появляются «символические степени z» $z^{(n)}$, где $z^{(1)} = z$, а последующие определяются по формуле $\int\limits_0^z z^{(n)}\Delta z = \frac{z^{(n+1)}}{n+1}$, причем $z^{(2)} = z^2,\ z^{(3)} = z^3 + \frac{\bar{z}}{2},\ z^{(4)} = z^4 + 2z\bar{z}$ и т.д.

Вместо рядов типа Тейлора появляются ряды вида $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3(z^3 + \frac{\bar{z}}{2}) + \ldots$, которые в случае сходимости всегда дают аналитическую функцию. Легко убедиться, что сумма любого просто сходящегося ряда аналитических функций целого аргумента есть функция аналитическая. Можно указать пока следующие операции, дающие аналитические функции из аналитических функций: умножение на константу, сдвиг аргумента, суммирование и интегрирование.

Произведение и отношение аналитических функций дают, как правило, функцию неаналитическую, точно так же, как взятие аналитической функции от любой (целочисленной) аналитической функции. Эти операции должны быть заменены для построения полной теории другими близкими к ним аналитическими операциями. Можно развить теорию аналитических функций, заданных в точках $z = \xi\ (a + bi)$, где $a,\ b$ — целые рациональные числа. При $\xi \to 0$ мы получим в пределе обычные аналитические функции. Разумеется, не всегда этот переход можно осуществить и не всегда можно обосновать. Кроме того, не все аналитические функции дискретного переменного имеют предел и не все имеют аналоги в теории аналитических функций непрерывного переменного. В известном смысле слова можно сказать, что мир аналитических функций целого аргумента богаче, чем мир аналитических функций непрерывного аргумента. Развиваемая теория может быть приложена к вычислению сумм, подобно тому, как обычная теория аналитических функций прилагается к вычислению интегралов.

Общее согласно (4) и (5) значение $D_x f,\ D_y f,\ D_\xi f,\ D_\eta f$ обозначим Df и назовем, естественно, производной. Легко, после несложных элементарных выкладок, доказать формулу

$$D\int_a^z f(z)\Delta z = \frac{1}{4}\{f(z) + f(z+1) + f(z+i) + f(z+1+i)\}, \qquad (10)$$

являющуюся аналогом известного правила дифференцирования определенного интеграла по верхнему пределу.

Аналитическое продолжение состоит в последовательном определении $f_{a+1,y+1}$ по $f_{x,y},\ f_{x+1,y},\ f_{x,y+1}$ на основании (2). Допустим, что $f(z)$ задана во всех целых точках, лежащих на сторонах первого координатного угла, и определим ее как аналитическую функцию во всех целых точках этого угла. Для этого нужно решить разностное уравнение [см. (2)]

$$f_{m+1,n+1} - f_{m,n} + if_{m,n+1} - if_{m+1,n} = 0 \qquad (11)$$

при граничных условиях $f_{m,0} = a_m$ $(m = 0, 1, 2, ...)$ и $f_{0,n} = b_n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ $a_0 = b_0 = a$, где a_m, b_n — заданные числа. Естественно воспользоваться здесь классическим методом производящих функций. Умножая (11) на $u^m v^n$, суммируя по m, n от нуля до бесконечности и вводя обозначения:

$$\Phi(u,v) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f_{m,n}u^m v^n,\ \ g(u) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m u^m = \Phi(u,0),$$

$$h(v)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n v^n=\Phi(0,v),$$

получим

$$\frac{\Phi(u,v)-g(u)-h(v)+a}{uv}-\Phi(u,v)+$$
$$+i\frac{\Phi(u,v)-g(u)}{v}-i\frac{\Phi(u,v)-h(v)}{u}=0$$

или

$$\Phi(u,v)=\frac{g(u)(1+iu)+h(v)(1-iv)-a}{1+i(u-v)-uv}, \tag{12}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} f_{m,n}=f(m+ni)=-aK_{mn}+\sum_{\mu+\mu_1=m}K_{\mu n}(a_{\mu_1}+ia_{\mu_1-1})+\\ +\sum_{\nu+\nu_1=n}K_{n\nu}(b_{\nu_1}-ib_{\nu_1-1}), \end{aligned} \tag{13}$$

где константы K_{mn} определяются формулой

$$(1+i(u-v)-uv)^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}K_{mn}u^m v^n \tag{14}$$

и где $a_{-1}=0,\ b_{-1}=0.$

Вводя обозначение $K(m+ni)=K_{mn}$, получим формулу

$$\begin{aligned} f(z)=-f(0)K(z)+\sum_{\nu=0}^{Re(z)}K(z-\nu)(f(\nu)+if(\nu-1))+\\ +\sum_{\nu=0}^{J(z)}K(z-\nu i)(f(i\nu)+if(\nu i-i)), \end{aligned} \tag{15}$$

выражающую значения функции, голоморфной в области $Re(z)\geq 0$, $J(z)\geq 0$, через значения ее на границе этой области и через специальную функцию $K(z)$, определяемую соотношением $K(m+ni)=$ $=K_{mn}$, где K_{mn} — коэффициент при $u^m v^n$ в разложении

$(1+i(u-v)-uv)^{-1}$ по степеням u, v, откуда видна особая роль этой функции в изучаемом здесь вопросе. В дальнейшем мы дополнительно полагаем $K(m+ni)=0$, если $n<0$ или $m<0$, и тогда (15) перепишется в виде

$$\begin{aligned} f(z) = -f(0)K(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} K(z-\nu)(f(\nu)+if(\nu-1)) + \\ + \sum_{\nu=0}^{\infty} K(z-\nu i)(f(\nu i)-if(\nu i - i)). \end{aligned} \tag{16}$$

Для случая функции, неголоморфной в области $R(z) \geq 0,\ J(z) \geq$ ≥ 0, формула (16) должна быть видоизменена. Например, если $Q_{x_0+y_0 i}$ является единственным особым квадратом $f(z)$, имеем

$$f_{m+1,n+1} - f_{m,n} + if_{m,n+1} - if_{m+1,n} = C\delta_{x_0}^m \delta_{y_0}^n, \tag{17}$$

где $\delta_i^k = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k \end{cases}$ (символ Кронекера). Аналогично предыдущему получим

$$\begin{aligned} f(z) = -f(0)K(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} K(z-\nu)(f(\nu)+if(\nu-1)) + \\ + \sum_{\nu=0}^{\infty} K(z-\nu i)(f(\nu i)-if(\nu i - i)) + CK(z - z_0 - 1 - i) \end{aligned} \tag{18}$$

для функции, имеющей Q_{z_0} единственным особым квадратом с вычетом $\frac{1-i}{2}c$. В частности, функция $F(z) = (1+i)\ k\ (z-1-i)$ будет простейшим примером функции, обращающейся в нуль на сторонах первого координатного угла и имеющей квадрат с вершинами $0,\ 1,\ i,\ 1+i$, единственным особым квадратом с вычетом, равным единице.

Очевидно $\{1-(vi-ui+uv)\}^{-1}=\sum\limits_{r=1}^{\infty}(-iu+iv+uv)^r$, откуда

$$K(x+iy)=i^{y-x}\sum_{r=0}\left(\begin{array}{c} r \\ 2r-x-y \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 2r-x-y \\ r-y \end{array}\right) \tag{19}$$

или

$$K(x+iy)=i^{y-x}\sum_{r=\max(x,y)}^{x+y}\frac{r!}{(x+y-r)!(r-x)!(r-y)!}. \tag{19$'$}$$

Формула (18), естественно, может быть обобщена на случай, когда $f(z)$ имеет в области $R(z)\geq 0,\ J(z)\geq 0$ n особых элементарных квадратов $Q_{z_1},\ Q_{z_2},...,Q_{z_n}$ с вычетами $C_1,C_2,...,C_n$ следующим образом:

$$\begin{gathered} f(z)=-f(0)K(z)+\sum_{\nu=0}^{\infty}K(z-\nu)(f(\nu)+if(\nu-1))+\\ +\sum_{\nu=0}^{\infty}K(z-\nu i)(f(\nu i)-if(\nu i-i))+(1+i)\sum_{k=1}^{n}C_kK(z-z_k-1-i), \end{gathered} \tag{20}$$

где $f(-1),\ f(-i)$ должны быть заменены нулём.

Формула (16) может быть легко преобразована к форме

$$\begin{gathered} f(z)=-f(0)K(z)+\sum_{\nu=0}^{\infty}(K(z-\nu)+iK(z-\nu-1))f(\nu)+\\ +\sum_{\nu=0}^{\infty}(K(z-i\nu)-iK(z-\nu i-i))f(\nu i)=\int\limits_0^{\infty}(K(z-\zeta)+\\ +iK(z-\zeta-1))f(\zeta)\Delta\zeta-\int\limits_0^{\infty i}(iK(z-\zeta)+\\ +K(z-\zeta-i))f(\zeta)\Delta\zeta+\frac{i}{2}f(0)(K(z-1)-K(z-i)), \end{gathered} \tag{21}$$

где интеграл от 0 до ∞ взят по оси x, интеграл от 0 до ∞i — по оси y. Очевидно, что для всех z, принадлежащих четырехугольнику $0 \leq R(z) \leq m$, $0 \leq J(z) \leq n$, формула (21) может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{i}{2} f(0)(K(z-1) - K(z-i)) + \frac{1}{2} f(m)(K(z-m)+ \\ + iK(z-m-1)) - \frac{i}{2} f(ni)(iK(z-ni) - K(z-ni-i))+ \\ + \int\limits_0^m (K(z-\zeta) + iK(z-\zeta-1)) f(\zeta)\Delta\zeta- \\ - \int\limits_0^{ni} (iK(z-\zeta) + K(z-\zeta-i)) f(\zeta)\Delta\zeta, \end{aligned} \tag{22}$$

где первый S-интеграл взят по горизонтали, второй — по вертикали.

Вообще, применяя предыдущую формулу к $f(a+z)$ и заменяя затем z на $z-a$, получим

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{i}{2} f(c)(K(z-c-1) - K(z-c-i))+ \\ + \frac{1}{2} f(c+m)(K(z-c-m) + iK(z-c-m-i))- \\ - \frac{i}{2} f(c+ni)(iK(z-c-ni) - K(z-c-ni-i))+ \\ + \int\limits_c^{c+m} (K(z-\zeta) + iK(z-\zeta-1)) f(\zeta)\Delta\zeta+ \\ + \int\limits_c^{c+ni} (iK(z-\zeta) + K(z-\zeta-i)) f(\zeta)\Delta\zeta, \end{aligned} \tag{23}$$

где $R(c) \leq R(z) \leq R(c) + m$, $J(c) \leq J(z) \leq J(c) + n$. Первая часть равенства (23) при $R(z) < R(c)$ или $J(z) < J(c)$ равна нулю, так как $K(u) = 0$ при $R(u) < 0$ и при $J(u) < 0$ по определению.

Формулы (21), (22), (23) являются некоторыми аналогами интегральной формулы Коши и могут служить основой для построения других формул, которые более аналогичны формуле Коши. Аналогия нарушается здесь наличием безынтегрального члена и тем, что интеграл берется не по замкнутому контуру.

Показательная функция

Уравнение (2) в конечных разностях можно решать также методом подстановки. Если мы будем искать решение в форме $f(z) = a^x b^y$, то получим $b = \frac{1+ai}{a+i}$. Отсюда очевидно, что $f(z) = (\frac{2+c}{2-c})^x \times (\frac{2+ci}{2-ci})^y$ является аналитической функцией целого аргумента, не имеющей особых квадратов, если $c \neq \pm 2$, $c \neq \pm 2i$. Обозначим ее через $E(c,z)$ и вычислим S-интеграл $\int\limits_0^z E(c,z)\Delta z$, воспользовавшись формулой (9).

После соответствующих выкладок получим

$$\int\limits_0^z E(c,z)\Delta z = \frac{E(c,z)-1}{c}. \tag{24}$$

Легко доказать формулу

$$E(c,z) = 1 + c\int\limits_0^z \Delta z + c^2 \int\limits_0^z \int\limits_0^{z_1} \Delta z \Delta z_1 + c^3 \int\limits_0^z \int\limits_0^{z_1} \int\limits_0^{z_2} \Delta z \Delta z_1 \Delta z_2 + \ldots, \tag{25}$$

показывающую большую аналогию между рассматриваемой здесь функцией целого аргумента и показательной функцией непрерывного аргумента.

Если воспользоваться ранее введёнными здесь символическими степенями $z^{(n)}$, определяемыми соотношениями $z^{(0)} = 1$, $\int\limits_0^z z^{(n)}\Delta z =$

$= \frac{z^{n+1}}{n+1}$, то формулу (25) можно переписать в следующем виде:

$$E(c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} z^{(n)}. \tag{26}$$

Теперь легко найти $z^{(n)}$, разлагая $E(c, z)$ в ряд по степеням c, используя биномиальный ряд. Вводя обозначения:

$\Pi_0(x) = 1,\ \Pi_k(x) = x(x-1)...(x-k+1) \quad (k > 0),$

$\Pi_0^*(x) = 1,\ \Pi_k^*(x) = x(x+1)...(x+k-1) \quad (k > 0),$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Pi_k(x) \Pi_{n-k}^*(x),\ C_n^0 = 1,\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

получаем

$$z^{(n)} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k P_k(x) P_{n-k}(y) i^{n-k}, \tag{27}$$

откуда получим, в частности, $z^{(3)} = z^3 + \frac{\bar{z}}{2},\ z^{(4)} = z^4 + 2z\bar{z}$.

Ряд (26), в отличие от обычного показательного ряда, сходится лишь при $|c| < 2$, что указывает на быстрый рост $z^{(n)}$ при возрастании n. Таким образом, $E(c, z)$ при $|c| > 2$ является примером голоморфной во всей плоскости функции, не разлагающейся в степенной ряд. Дифференцируя формулу (24) и учитывая (10), получим

$$DE(c, z) = \frac{c}{4}(E(c, z) + E(c, z+1) + E(c, z+i) + E(c, z+1+i)) \tag{28}$$

или

$$DE(c, z) = \frac{4c}{(2-c)(2-ci)} E(c, z). \tag{29}$$

Вводя обозначения $E^*(c, z) = (-1)^{x+y} E(c, \bar{z}),\ c^* = \frac{4}{c}$, легко убеждаемся в справедливости соотношения

$$E(c, z) = E^*(c^*, z), \tag{30}$$

откуда при $|c| > 2$

$$E(c,z) + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{-n}}{n!} z^{*(n)}, \tag{31}$$

где $z^{*(0)} = (-1)^{x+y} - 1$, $z^{*(n)} = (-1)^{x+y} 4^n \bar{z}^{(n)}$, $(n > 0)$. Из (24) и (31) вытекает следующее соотношение:

$$\int\limits_0^z z^{*(n)} \Delta z = n z^{*(n-1)} \quad (n > 0), \tag{32}$$

$$\int\limits_0^z z^{*(0)} \Delta z = -z. \tag{33}$$

Таким образом, $E(c,z)$ при $|c| < 2$ разлагается в ряд по $z^{(n)}$, а при $|c| > 2$ — в ряд по $z^{*(n)}$.

Очевидно, что ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n z^{(n)} + b_n z^{*(n)})$ всегда дает аналитическую функцию в области этого ряда.

Из формул (10), (26), (29), (31) вытекают следующие правила дифференцирования:

$$Dz^{(n)} = \frac{n}{4}\{z^{(n-1)} + (z+1)^{(n-1)} + (z+i)^{(n-1)} + (z+1+i)^{(n-1)}\}, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} Dz^{*(n)} = \frac{1}{4(n+1)}\{&z^{*(n+1)} + (z+1)^{*(n+1)} + \\ &+ (z+i)^{*(n+1)} + (z+1+i)^{*(n+1)}\}, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} Dz^{(n)} &= n a_0 z^{(n-1)} + n(n-1) a_1 z^{(n-2)} + \ldots + n! a_{n-1} z^{(0)} = \\ &= n z^{(n-1)} + (1+i)\frac{n(n-1)}{2} z^{(n-2)} + \ldots, \end{aligned} \tag{36}$$

где a_k определяется формулой $(1 - \frac{c}{2})^{-1}(1 - \frac{ci}{2})^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k c^k$, $a_k = \frac{1+i}{2}(\frac{1}{2})^k + \frac{1-i}{2}(\frac{i}{2})^k$.

Легко убедиться в том, что если $f(z)$ есть аналитическая функция целого аргумента, то $f(\frac{z}{\varepsilon})$, определенная в точках сети $\varepsilon(a+bi)$, где a, b — целые рациональные числа, будет аналитической на этой сети, в том смысле, что интегральная сумма $\sum\limits_{k=1}^{N} f_1(z_k)\Delta z_k$, взятая но замкнутому контуру, равна нулю.

При $\varepsilon \to 0$ многие выражения вида $h(\varepsilon)f(\frac{z}{\varepsilon})$ переходят в обычные аналитические функции непрерывного аргумента, причем, интегральные суммы переходят в интегралы, условия (5) переходят в обычные условия Коши — Римана. В частности, $\varepsilon^n(\frac{z}{\varepsilon})^{(n)} \to z^n$, $E(c\varepsilon, \frac{z}{\varepsilon}) \to e^{cz}$, т.е. символические степени переходят в обычные, «показательная функция» $E(c, z)$ переходит в обычную показательную функцию. Функции $z^{*(n)}$, введенные выше, очевидно, ни к какому пределу стремиться не могут и не имеют аналогов в теории обычных аналитических функций. Легко показать, что если $f(z)$ есть аналитическая функция целого аргумента, то $(-1)^{x+y}f(\bar{z})$ будет также аналитической. Можно показать, что если $f(z)$ разлагается в ряд по $z^{(n)}$, то $(-1)^{x+y}f(\bar{z})$ разлагается в ряд по $z^{*(n)}$. Функции $z^{*(n)}$ являются некоторым необходимым дополнением к символическим степеням $z^{(n)}$.

Одним из препятствий к развитию полной аналогии развиваемой здесь теории с теорией аналитических функций является неаналитичность произведения аналитических, функций и, следовательно, зависимость S-интеграла $\int f(z)g(z)\Delta z$ от пути интегрирования. Этот недостаток до некоторой степени восполняется существованием следующей теоремы:

Интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)\Delta g(z)$ *равен нулю, если* Γ — *замкнутый контур,* *внутри которого $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны, и где «интеграл Стилтьеса» $\int f(z)\Delta g(z)$ понимается как сумма*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(z_{k-1})+f(z_k)}{2}(g(z_k)-g(z_{k-1})).$$

Здесь $z_0, z_1, ..., z_n$ — последовательные точки, образующие контур Г. Очевидно, достаточно доказать предложение для элементарного контура γ, состоящего из точек $z, z+1, z+i, z+1+i$. Но тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\Delta g(z) = \frac{1}{2}\{(f(z+1)-f(z+i))(g(z+1+i)-g(z))- \\ -(f(z+1+i)-f(z))(g(z+1)-g(z+i))\}. \tag{37}$$

Очевидно, $\int\limits_{\gamma} f(z)\Delta g(z) = 0$, так как условия аналитичности (2) могут быть записаны в виде $f(z+1+i)-f(z) = i(f(z+1)-f(z+i))\times$ $\times\, g(z+1+i)-g(z) = i(g(z+1)-g(z+i))$.

Если на γ аналитична только $f(x)$, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\Delta g(z) = \frac{1}{2i}(f(z+1+i)-f(z))(g(z+1+i)- \\ -g(z)+ig(z+i)-ig(z+1)) \tag{38}$$

или

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\Delta g(z) = \frac{i-1}{2}(f(z+1+i)-f(z))\,\mathrm{Res}(g(z), Q_z). \tag{39}$$

Очевидно, что интеграл $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\Delta g(z)$ есть однозначная функция z, если путь интеграции проходит всегда в односвязной области голоморфности функций $f(z)$, $g(z)$. Легко найти значение интеграла $\int\limits_{0}^{z} f(z)\Delta g(z)$, интегрируя по оси x от нуля до x, а затем по вертикали от x до $x+iy$.

Очевидно,

$$\int\limits_0^z f(z)\Delta g(z) = \frac{1}{2}(f(z)g(z) - f(0)g(0)) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{x} f(k-1)g(k) - \\ - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{x} f(k)g(k-1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{y} f(x+ki-i)g(x+ki) - \\ - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{y} f(x+ki)g(x+ki-i). \tag{40}$$

Если $f(z)$ голоморфна в области $D, z \in D$, функция $g(u)$ голоморфна всюду, кроме квадрата $(0,\ 1,\ i,\ 1+i)$, и имеет на нем вычет, равный единице, то на основании (39) имеем

$$f(z+1+i) - f(z) = \frac{2}{i-1}\int\limits_{Q_z} f(\zeta)\Delta g(\zeta - z). \tag{41}$$

Вследствие доказанной выше теоремы элементарный контур Q_z может быть заменен любым замкнутым контуром Γ, содержащим точку z и содержащимся в D. Тогда получим формулу

$$f(z+1+i) - f(z) = \frac{2}{i-1}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\Delta g(\zeta - z)$$

или

$$Df(z) = -\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\Delta g(\zeta - z), \tag{42}$$

где Γ — любой замкнутый контур, внутри которого $f(z)$ голоморфна, $g(z)$ — любая функция, голоморфная на всех элементарных квадратах, кроме Q_0, для которой $\mathrm{Res}(g(z), Q_0) = 1$. В качестве $g(z)$ можно взять, например, функцию $\frac{K(z)}{i-1}$, входящую в формулу (21). Формула (41) является аналогом интегральной формулы Коши: $f'(z) =$

$= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$ и имеет тесную связь с формулой (21). Легко вычислить «S-интеграл Стилтьеса» $\int\limits_0^z E(c_1,z)\Delta E(c_2,z)$, пользуясь формулой (40):

$$\int\limits_0^z E(c_1,z)\Delta E(c_2,z) = \frac{c_2}{c_1+c_2}(E(c_1,z)E(c_2,z)-1). \tag{43}$$

Последнее соотношение вполне аналогично элементарной формуле $\int\limits_0^z e^{c_1z}de^{c_2z} = \frac{c_2}{c_1+c_2}(e^{c_1z}e^{c_2z}-1)$.

Разлагая обе части равенства (43) по степеням c_2, на основании формул $\Delta E(c_2,z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_2n}{n!}\Delta z^{(n)}$, $\frac{c_2}{c_1+c_2} = \sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\frac{c_2}{c_1})^{m+1}$, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c_2 и заменяя c_1 на c, получим

$$\int\limits_0^z E(c,z)\Delta z^{(m)} = E(c,z)\times$$
$$\times\left(\frac{c^{-1}z^{(m-1)}}{(m-1)!} - \frac{c^{-2}z^{(m-2)}}{(m-2)!} + \ldots \pm \frac{c^{-m}z^{(0)}}{0!}\right)m! + c^{-m}m!(-1)^m. \tag{44}$$

Аналогично, разлагая обе части (44) по степеням, получим

$$\int\limits_0^z z^{(n)}\Delta z^{(m)} = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\frac{m!n!}{(n+k)!(m-k)!}z^{(n+k)}z^{(m-k)}. \tag{45}$$

Пользуясь (30) и (43), получим

$$\int\limits_0^z E(c_1,z)\Delta E^*(c_2,z) = \frac{4}{c_1c_2+4}(E(c_1,z)E^*(c_2,z)-1), \tag{46}$$

где $E^*(c,z) = (-1)^{x+y}E(c,\bar{z}) = E(\frac{4}{c},z)$, и также

$$\int\limits_0^z E^*(c_1,z)\Delta E^*(c_2,z) = \frac{c_1}{c_1+c_2}(E^*(c_1,z)E^*(c_2,z)-1). \tag{47}$$

Разлагая в (43) $E(c_2, z)$ по степеням $\frac{1}{c_2}$ по формуле (31) ($|c| > 4$), получим

$$\int\limits_0^z E(c,z)\Delta z^{*(m)} = m!E(c,z)\left(\frac{z^{*(m)}}{m!} - \frac{cz^{*(m-1)}}{(m-1)!} + ... \pm \frac{c^m z^{*(0)}}{0!}\right) - \\ - (-1)^m c^m m!. \tag{48}$$

Разлагая обе части этого соотношения в ряд по степеням c, легко получим формулу

$$\int\limits_0^z z^{(n)}\Delta z^{*(n)} = m!n!\left(\frac{z^{(n)}z^{*(m)}}{n!m!} - \frac{z^{(n-1)}z^{*(m-1)}}{(n-1)!(m-1)!} + ...\right) - (-1)^m m!\delta_m^n, \tag{49}$$

из формулы (43) следует $\int\limits_0^z E(c_1,z)\Delta E(c_2,z) + \int\limits_0^z E(c_2,z)\Delta E(c_1,z) =$ $= E(c_1,z)E(c_2,z) - 1$, откуда получаем

$$\int\limits_0^z z^{(n)}\Delta z^{(m)} + \int\limits_0^z z^{(m)}\Delta z^{(n)} = z^{(m)}z^{(n)} - \delta_n^0\delta_m^0$$

$$(\delta_0^0 = 1,\ \delta_n^0 = 0 \text{ при } n > 0).$$

Впрочем, последние два соотношения являются следствием из общей формулы $\int\limits_0^z f(z)\Delta g(z) + \int\limits_0^z g(z)\Delta f(z) = f(z)g(z) - f(0)g(0)$, которая легко может быть получена из (40).

Рассмотрим здесь еще один способ построения аналитических функций целого аргумента. Вводя обозначения $\frac{x+y}{2} = u$, $\frac{y-x}{2} = v$, выразим $f(z) = f(x,y)$ как функцию новых аргументов $u,\ v:\ f(z) =$ $= \varphi(u,v)$. Условия аналитичности (2) приобретают следующий вид:

$$\varphi(u+1,v) - \varphi(u,v) + i\left(\varphi\left(u+\frac{1}{2}, v+\frac{1}{2}\right) - \varphi\left(u+\frac{1}{2}, v-\frac{1}{2}\right)\right) = 0. \tag{50}$$

Вводя операторы $T_u F(u,v) = F(u+\frac{1}{2}, v) - F(u-\frac{1}{2}, v), T_v F(u,v) = F(u, v+\frac{1}{2}) - F(u, v-\frac{1}{2})$, запишем (50) в форме

$$T_u \varphi(u,v) = -i T_v \varphi(u,v). \tag{51}$$

Введем последовательность функций $a_0(u)$, $a_1(u)$, $a_2(u), \ldots$, $b_1(u), b_2(u), \ldots$: $a_n(u) = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(u + \frac{n-1}{2} - k)$, $b_n(u) = \frac{1}{a_n(u)}$. Очевидно, что

$$T_u a_n(u) = n a_{n-1}(u), \quad T_u b_n(u) = -n\, b_{n+1}(u). \tag{52}$$

Так как соотношение (51) подобно соотношению Коши — Римана для $\varphi(u,v)$, а $a_n(u)$ и $b_n(u)$ ведут себя по отношению к операции T_u, как и u^n, u^{-n} по отношению к дифференцированию по u, то мы вводим следующий прием: берем любую аналитическую в обычном смысле слова функцию от $u+iv$, разлагаем ее в ряд по степеням u, v и всюду заменяем неотрицательные степени u^n, v^m на $a_n(u)$, $a_m(v)$, а отрицательные степени u^{-n}, v^{-m} на $b_n(u)$, $b_m(v)$. Очевидно, что $a_n(u)$, $b_n(u)$ очень близки к символическим степеням u из теории конечных разностей. Этот прием позволяет найти последовательность аналитических полиномов

$$c_n(z) = (1+i)^n \sum_{k=0}^{n} c_n^k a_k(u) a_{n-k}(v) i^{n-k} =$$

$$= (1+i)^n \sum_{k=0}^{n} c_n^k a_k\left(\frac{x+y}{2}\right) a_{n-k}\left(\frac{y-x}{2}\right) i^{n-k}. \tag{53}$$

Очевидно $c_0(z) = 1$, $c_1(z)$, $c_2(z) = z^2$, $c_3(z) = z^3 + \frac{\bar{z}}{2}$. Полиномы $c_n(z)$ тесно связаны с введёнными выше символическими степенями $z^{(n)}$ и могут быть выражены через них.

Вводя обозначения $e(t,z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n c_n(z)}{n!}$, $F(t,u)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n a_n(u)}{n!}=1+$ $+\frac{tu}{1!}+\frac{t^2(u-\frac{1}{2})(u+\frac{1}{2})}{2!}+\ldots$, получим из (53)

$$e(t,z)=F\left((1+i)t,\frac{x+y}{2}\right)F\left((i-1)t,\frac{y-x}{2}\right). \tag{54}$$

Пользуясь (52), получим

$$tF(t,u)=T_uF(t,u)=F\left(t,u+\frac{1}{2}\right)-F\left(t,u-\frac{1}{2}\right). \tag{55}$$

Решение разностного уравнения (55) обычным методом подстановки дает $F(t,u)=C_1A^{2u}+C_2B^{2u}$, где A, B — корни уравнения $A^2-At-1=0$, откуда, так как $c_1=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{4}}}$, $c_2=0$,

$$F(t,u)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{4}}}\left(\frac{t}{2}+\sqrt{1+\frac{t^2}{4}}\right)^{2u},$$

$$e(t,z)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}\left(\frac{1+i}{2}t+\sqrt{1+\frac{it^2}{2}}\right)^{x+y}\left(\frac{i-1}{2}t+\sqrt{1-\frac{it^2}{2}}\right)^{y-x}. \tag{56}$$

Легко вывести следующие правила дифференцирования:

$$Dc_n(z)=nc_{n-1}\left(z+\frac{1+i}{2}\right), \tag{57}$$

$$De(t,z)=t\left(\frac{1+i}{2}t+\sqrt{1+\frac{t^2}{2}i}\right)e(t,z), \tag{58}$$

$$De(t,z)=te\left(t,z+\frac{1+i}{2}\right), \tag{59}$$

$$Dc_n(z)=nc_{n-1}(z)+n(n-1)b_1c_{n-2}(z)+\ldots+n!b_{n-1}c_0(z), \tag{60}$$

где b_k — коэффициенты ряда

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}b_kt^k=t\frac{1+i}{2}+\sqrt{1+\frac{t^2i}{2}}.$$

Легко установить также равенство

$$\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}e(t,z) = E(c,z), \tag{61}$$

если

$$t\left(\frac{1+i}{2}t+\sqrt{1+\frac{t^2 i}{2}}\right)= \frac{4c}{(2-c)(2-ci)}. \tag{62}$$

Функции $c_n(z)$ подобно $z^{(n)}$ являются аналогами степеней z в теории аналитических функций непрерывного аргумента.

Другой аналог степеней получим, разлагая $E_1(t,z) = E(c(t),z)$, где $c(t)$ определяется из соотношения

$$\frac{4c(t)}{(2-c(t))(2-ic(t))} = t, \tag{63}$$

в ряд по степеням t.

В результате формулы (29) получим

$$DE_1(t,z) = tE_1(t,z). \tag{64}$$

Определяя $c_n^*(z)$ по формуле: $E_1(t,z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^*(z)}{n!}t^n$ для $c_n^*(z)$, получим следующее правило дифференцирования:

$$Dc_n^*(z) = nc_{n-1}^*(z). \tag{65}$$

Функции $c_n^*(z)$ имеют наиболее простое правило дифференцирования, но наиболее сложное выражение.

Решая уравнение (63), получим

$$\begin{aligned} E_1(t,z) = \left(\frac{1-i}{2}t+\sqrt{1+(1+i)t-\frac{t^2 i}{2}}\right)^x \times \\ \times \left(\frac{i-1}{2}t+\sqrt{1+(1+i)t-\frac{t^2 i}{2}}\right)^y. \end{aligned} \tag{66}$$

Из (24) и (63) вытекает следующее соотношение:

$$\int\limits_0^z E_1(t,z)\Delta z = \frac{1}{2t}\left(1+\frac{1+i}{2}t+\sqrt{1+(1+i)t-\frac{t^2 i}{2}}\right)(E_1(t,z)-1). \tag{67}$$

Используя соотношения:

$$\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}e(t,z)=a^x b^y,\quad a=\frac{t(1+i)+\sqrt{4+2t^2 i}}{t(1-i)+\sqrt{4-2t^2 i}},$$

$$\frac{1+\frac{c}{2}}{1-\frac{c}{2}}=a,\quad e(t,z)=E(c,z)\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}},\text{ получим}$$

$$\int\limits_0^z e(t,z)\Delta z = \frac{\sqrt{1+\frac{t^2 i}{2}}+\sqrt{1-\frac{t^2 i}{2}}}{2t}(e(t,z)-e(t,0)). \tag{68}$$

Пользуясь обозначениями: $\frac{\sqrt{1+\frac{t^2 i}{2}}+\sqrt{1-\frac{t^2 i}{2}}}{2}=k_0+k_1 t+k_2 t^2+...$, $k_0=1$, $k_{2m+1}=0$, $k_{2m}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ m\end{pmatrix}\frac{i^m+(-1)^m}{2^{m+1}}$, получим из (68) на основании $e(t,z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}c_n(z)$, следующее правило интегрирования:

$$\int\limits_0^z c_n(z)\Delta z = \frac{c_{n+1}(z)-c_{n+1}(0)}{n+1}+k_1(c_n(z)-c_n(0))+nk_2(c_{n-1}(z)-$$
$$-c_{n-1}(0))+...+n!k_{n+1}(c_0(z)-c_0(0)). \tag{69}$$

Пользуясь рядом $\frac{1}{u+iv}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{v^n}{u^{n+1}}(-i)^n$, получим пример функции, удовлетворяющей соотношению $A(z+1+i)-A(z)+iA(z+i)-$ $-iA(z+1)=0$, заменяя в этом ряде v^n, u^{-n-1} на введенные выше $a_n(v)$,

$b_{n+1}(u)$. Так как $\frac{1}{u+iv}$ удовлетворяет обычным уравнениям Коши — Римана, то $A(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(v)b_{n+1}(u)(-i)^n$ удовлетворяет соотношениям (51), являющимся их конечно-разностными аналогами. Очевидно, $A(z+\alpha)$, где α — вещественное иррациональное число, а z принимает только целые значения, будет примером аналитической функции целого аргумента.

Сама

$$A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{y-x+n-1}{2}-k\right)\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{x+y+n}{2}-k\right)^{-1}(-1)^n$$

при целых x и y теряет смысл ввиду обращения в нуль $x+y+n-2k$ при соответствующих значениях $x,\ y,\ n,\ k$.

Для выяснения вопроса о сходимости ряда произведем следующие оценки:

$$a_{2m}(v)b_{2m+1}(u)=$$

$$=\frac{(v^2-(\frac{1}{2})^2)(v^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(v^2-(\frac{2m-1}{2})^2)}{u(u^2-1^2)(u^2-2^2)\dots(u^2-m^2)}=$$

$$=\pm\frac{(1-\frac{(2v)^2}{1^2})(1-\frac{(2v)^2}{3^2})\cdots(1-\frac{(2v)^2}{(2m-1)^2})}{u(1-\frac{u^2}{1^2})\cdots(1-\frac{u^2}{m^2})}\times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\cdots\left(1-\frac{1}{2m}\right)^2=$$

$$=O\left(\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{1}{2k}\right)^2\right)=O\left(\exp-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right)=O\left(\frac{1}{m}\right)\to O;$$

$$\frac{(\frac{2m-1}{2})^2-v^2}{m^2-u^2}<1\quad\left(m>v^2-u^2-\frac{1}{4}\right).$$

Аналогично $a_{2m-1}(v)b_{2m}(u)=O(\frac{1}{m})\to 0$, $\quad a_{2m_1-1}(v)b_{2m_1}(u)<$ $<a_{2m_2-1}(v)b_{2m_2}(u)\quad(m_1>m_2>m_0(u,v))$, откуда сходимость ряда становится очевидной. Очевидно, что

$$A(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m \frac{\Gamma(u + \frac{m+1}{2})\Gamma(v - \frac{m}{2})}{\Gamma(u - \frac{m-1}{2})\Gamma(v + \frac{m+2}{2})}.$$

Также, пользуясь аналитичностью $\log(u+iv) = \log u - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n} - \frac{v^n}{u^n}$ $(u = \frac{x+y}{2},\quad v = \frac{y-x}{2})$, получим функцию $B(x+iy) = F(u) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n} a_n(v) b_n(u)$, удовлетворяющую условиям (3), если $T_u F(u) = \frac{1}{u}$, т.е. если $F(u + \frac{1}{2}) - F(u - \frac{1}{2}) = \frac{1}{u}$.

В качестве $F(u)$ можно взять $F(u) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(u + \frac{1}{2})$. Тогда получим следующий результат:

$$B(z) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+y+1}{2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{y-x+n-1-2k}{x+y+n-1-2k}\right),$$

который удовлетворяет соотношению (3) и, следовательно, $B(z+\alpha)$, где α — иррационально, а z принимает лишь целые комплексные значения, будет примером аналитической функции целого аргумента, являющейся естественным аналогом логарифмической функции.

22. Об одном новом подходе к проблеме распределения простых чисел

В этой работе рассматривается новый подход к проблеме распределения простых чисел, основанный на известной теореме Вильсона: если p простое число, то $\frac{(p-1)!+1}{p}$ есть число целое.

Для дальнейшего нужна также следующая

Теорема 1. *Число* $\frac{(n-1)!}{n}$ *есть целое число, если* n *— составное, не равное 4.*

Объединяя теорему 1 с теоремой Вильсона, получим

Теорема 2.

$$\frac{(n-1)!}{n} \equiv -\frac{1}{n} \pmod 1, \text{ если } n \text{ — простое,}$$
$$\frac{(n-1)!}{n} \equiv 0 \pmod 1, \text{ если } n \text{ — составное, не равное } 4,$$
$$\frac{(n-1)!}{n} \equiv \frac{1}{2} \pmod 1, \text{ если } n = 4.$$

Теорема 1 для случая $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},\ k > 1$, очевидна, так как $p_1^{\alpha_1} < n,\ p_2^{\alpha_2} < n,\ \ldots,\ p_k^{\alpha_k} < n$; откуда $(n-1)! \equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha_1}}$, $(n-1)! \equiv 0 \pmod{p_2^{\alpha_2}},\ \ldots,\ (n-1)! \equiv 0 \pmod{p_k^{\alpha_k}}$, $(n-1)! \equiv 0 \pmod n$. В случае $n = p^\alpha$ воспользуемся известной теоремой: простое число p входит в $m!$ в степени $\sum\limits_{k=1}^{\infty} [\frac{m}{p^k}]$. Поэтому, где $(p^\alpha - 1)! \equiv 0 \pmod{p^\omega}$,

$$\omega = \sum_{k=1}^{\alpha-1} \left[\frac{p^\alpha - 1}{p^k}\right] = \sum_{k=1}^{\alpha-1} (p^{\alpha-k} - 1) = \frac{p^\alpha - 1}{p-1} - \alpha.$$

Теорема 1 теперь вытекает из очевидного неравенства $\sum\limits_{k=1}^{\alpha} (p^{\alpha-k} - 1) \geq \alpha$, если $p > 2,\ \alpha \geq 2$ или $p = 2,\ \alpha > 2$.

Для дальнейшего нужны следующие известные теоремы:

Теорема 3. *Из соотношения*

$$\int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx = g(s) \ (s = a + ti) \tag{1}$$

вытекает

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)x^{-s}ds = f(x), \tag{2}$$

и наоборот, если $\int_0^\infty |f(x)|x^{a-1}dx < \infty,\ \int_{-\infty}^{\infty} |g(a+ti)|dt < \infty,\ f(x),$ $g(a+ti)$ *измеримы (теорема Меллина).*

Вводя обозначения $L(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^{s-1}dx$ и

$$L^{-1}(g(s)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)x^{-s}ds,$$

очевидно, можем сформулировать теорему 3 следующим образом: операторы L и L^{-1} обратны друг другу.

Введем также операцию

$$f_1(x) \bigcirc f_2(x) = \int_0^\infty f_1\left(\frac{x}{t}\right)f_2(t)\frac{dt}{t},$$

которую будем называть логарифмическим свертыванием, а результат ее применения — логарифмической сверткой.

Известна также

Теорема 4.

$$L(f_1(x) \bigcirc f_2(x)) = L(f_1(x))L(f_2(x)) \tag{3}$$

(см., например, [47]).

Нетрудно доказать следующее утверждение

Теорема 5. *Аналитическая функция*

$$F(s) = \pi \csc \pi s \sin 2\pi \frac{\Gamma(s)}{s}$$

имеет в полуплоскости $R(s) > 0$ *особые точки только в нечетных простых числах, причем каждое простое число* $p > 2$ *является полюсом первого порядка с вычетом* $\sin \frac{2\pi}{p}$.

Эта теорема является очевидным следствием из теоремы 2. Вследствие известной оценки $\Gamma(s) = O(e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^{\sigma-\frac{1}{2}})$

$$\pi \csc \pi s \sin 2\pi \frac{\Gamma(s)}{s} = O(e^{-\frac{3\pi}{2}|t|}|t|^{\sigma-\frac{3}{2}})$$

$$(\sigma = R(s) = \text{const},\ t = J(s) \to \pm\infty).$$

Отметим дальше

Теорема 6. *Если* $f(s)$ *— любая голоморфная в полуплоскости* $R(s) > 0$ *функция, удовлетворяющая условию*

$$f(s) = O\left(e^{(\frac{3\pi}{2}-\varepsilon)|t|}\right),\ R(s) = \text{const},\ t = J(s) \to \pm\infty,$$

то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \pi \csc \pi s \sin 2\pi \frac{\Gamma(s)}{s} f(s) ds = \sum_{p \le N} \sin \frac{2\pi}{p} f(p) +$$

$$+\frac{1}{2i}\int\limits_{N+\frac{1}{2}-\infty i}^{N+\frac{1}{2}+\infty i} \csc \pi s \sin 2\pi \frac{\Gamma(s)}{s} f(s) ds, \tag{4}$$

где $0 < a < 3,\ N > 0$ *— любое целое число.*

Эту теорему легко доказать, применяя теорему Коши о вычетах к четырехугольнику с вершинами в точках $a+Ti,\ a-Ti,\ N+\frac{1}{2}-Ti,$

$N+\frac{1}{2}+Ti$ и устремляя T к бесконечности. Аналогично доказывается формула

$$\frac{1}{2ik}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\csc\frac{\pi(s-l)}{k}\sin\frac{2\pi\Gamma(s)}{s}f(s)ds=\sum_{\substack{p\,\leq\,N\\ p\,\equiv\,l\,\pmod k}}\sin\frac{2\pi}{p}f(p)+$$

$$+\frac{1}{2ik}\int\limits_{N+\frac{1}{2}-\infty i}^{N+\frac{1}{2}+\infty i}\csc\frac{\pi(s-l)}{k}\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}f(s)ds. \tag{5}$$

Здесь $\csc\frac{\pi(s-l)}{k}$ в правой полуплоскости имеет простые полюсы только в точках прогрессии $s=km+l$ $(m=0,1,2,...)$, а остальные множители голоморфны, причем $\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}$ уничтожает полюсы в точках прогрессии, являющихся составными числами, в силу теоремы 2.

Очевидно, что для формулы (5) оценка

$$f(s)=O\left(e^{(\frac{3\pi}{2}-t)|t|}\right)$$

должна быть заменена на

$$f(s)=O\left(\exp\left(\left(\frac{k+2}{2k}-\varepsilon\right)\pi|t|\right)\right).$$

Если $f(s)=O(s^{\varepsilon}),\ 0<\varepsilon<1$, при $s>0,\ s\to\infty$, то очевидно, что функции

$$\pi\csc\pi s\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}f(s)-\sum_{p}\sin\frac{2\pi}{p}f(p)\frac{1}{s-p},$$

$$\pi\csc\pi\frac{s-l}{k}\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}f(s)-k\sum_{p\equiv l\pmod k}\sin\frac{2\pi}{p}f(p)\frac{1}{s-p},$$

где в первом выражении суммирование распространено по всем простым числам, во втором — по всем простым числам прогрессии $p \equiv \equiv l (\mathrm{mod}\ k)$ являются голоморфными в правой полуплоскости.

Очевидно следующее обобщение изложенных результатов: если $h(s)$ — любая целая периодическая функция с периодом, равным единице, такая, что $h(0) = 0,\ g(s)$ — функция, голоморфная в правой полуплоскости, то функция

$$\pi \csc \pi s\ h\left(\frac{\Gamma(s)}{s}\right) g(s)$$

имеет в правой полуплоскости простые полюсы только в простых числах $s = p$ с вычетами $(-1)^p h(-\frac{1}{p}) g(p)$ и в точке $s = 4$ с вычетом $h(\frac{1}{2}) g(4)$. Так же точно функция $\pi \csc \pi \frac{s-l}{k} h(\frac{\Gamma(s)}{s})$ имеет в правой полуплоскости простые полюсы только в точке $s = p$, где p — простое число, содержащееся в прогрессии $p \equiv l\ (\mathrm{mod}\ k)$ и при $s = 4$, если 4 принадлежит этой прогрессии. Кроме того, если $g(s)$ удовлетворяет оценке $g(s) = O(e^{(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon)|t|})$ при $R(s) = \sigma = \mathrm{const},\ J(s) = t \to \pm\infty$, то

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i} \int\limits_{1-\infty i}^{1+\infty i} \csc \pi s\ h\left(\frac{\Gamma(s)}{s}\right) g(s) ds &= h\left(\frac{1}{2}\right) g(4) + \\ &+ h\left(\frac{1}{2}\right) g(2) - \sum_{2<p\leq N} h\left(-\frac{1}{p}\right) g(p) + \\ &+ \frac{1}{2i} \int\limits_{N+\frac{1}{2}-\infty i}^{N+\frac{1}{2}+\infty i} \csc \pi s\ h\left(\frac{\Gamma(s)}{s}\right) g(s) ds,\end{aligned} \tag{6}$$

а также, если

$$g(s) = O\left(\exp\left(\left(\frac{k+2}{2k} - \varepsilon\right)\pi|t|\right)\right)\ (t = J(s) = t \to \pm\infty,\ R(s) =$$

$$= \mathrm{const});\ 2 \not\equiv l\ (\mathrm{mod}\ k),\ 4 \not\equiv l\ (\mathrm{mod}\ k),$$

$$\frac{1}{2i}\int\limits_{1-\infty i}^{1+\infty i}\csc\pi\frac{s-l}{k}h\left(\frac{\Gamma(s)}{s}\right)g(s)ds=-k\sum_{\substack{p\equiv l\ (\bmod k)\\ 2<p\le l}}h\left(-\frac{1}{p}\right)g(p)+$$

$$+\frac{1}{2i}\int\limits_{N+\frac{1}{2}-\infty i}^{N+\frac{1}{2}+\infty i}\csc\pi\frac{s-l}{k}h\left(\frac{\Gamma(s)}{s}\right)g(s)ds. \qquad (7)$$

Интересен был бы случай, когда интегралы $\int\limits_{N+\frac{1}{2}-\infty i}^{N+\frac{1}{2}+\infty i}$ в правых частях формул (6), (7) стремятся к нулю при $N\to\infty$, так как тогда получилось бы выражение для бесконечных рядов, распространенных по простым числам в виде интеграла от аналитической функции.

Ввиду изложенного очевидна важность исследования функций $h\left(\frac{\Gamma(s)}{s}\right)$ для случая голоморфной периодической $h(s)$, имеющей периодом единицу, например для случая $h(s)=\sin 2\pi s$. Формула (5) дает

$$L^{-1}\left(\pi\csc\pi s\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}\cdot\frac{1}{s^a}\right)=\frac{1}{2i}\int\limits_{1-\infty i}^{1+\infty i}\csc\pi s\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}\cdot\frac{x^{-s}}{s^a}ds=$$

$$=\sum_{2<p\le N}\frac{x^{-p}}{p^a}\sin\frac{2\pi}{p}+\frac{1}{2i}\int\limits_{N+\frac{1}{2}-\infty i}^{N+\frac{1}{2}+\infty i}\csc\pi s\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}\cdot\frac{x^{-s}}{s^a}ds,$$

откуда

$$L^{-1}_{(x\to\infty)}\left(\pi\csc\pi s\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}\cdot\frac{1}{s^a}\right)=\sum_{2<p\le N}\frac{x^{-p}}{p^a}\sin\frac{2\pi}{p}+O(x^{-N-1}). \qquad (8)$$

Таким образом, функция $H_a(x)$, определяемая формулой

$$H_a(x)=\frac{1}{2i}\int\limits_{1-\infty i}^{1+\infty i}\csc\pi s\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}\cdot\frac{x^{-s}}{s^a}ds,$$

имеет следующее асимптотическое разложение:

$$H_a(x) \sim \sum_{p>2} \sin \frac{2\pi}{p} \frac{x^{-p}}{p^a}, \tag{9}$$

где суммирование распространено по всем нечетным простым числам.

Ряд, стоящий в правой части формулы (9), хотя и является сходящимся при $x > 1$, является только асимптотическим рядом. Относительно разности $H_a(x) - \sum\limits_{p>2} \sin \frac{2\pi}{p} x^{-p}$ можно утверждать только, что она стремится к нулю при $x \to \infty$ быстрее любой отрицательной степени x.

Если a — целое число, то $V_a(s) = \frac{\pi \csc \pi s}{s^a} \sin 2\pi \frac{\Gamma(s)}{s}$ будет во всей плоскости комплексного переменного s однозначной аналитической функцией, имеющей только простые полюсы в простых числах и изолированные существенно особые точки в $s = 0, \ s = -1, \ s = -2, \ \ldots$. Применяя теорему Коши о вычетах к четырехугольнику $(1 + Ti,$ $1 - Ti, \ -N - \frac{1}{2} + Ti, \ -N - \frac{1}{2} - Ti)$ и устремляя T к бесконечности, получим аналогично предыдущему

$$\begin{aligned} H_a(x) = L^{-1}(V_a(s)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{1-\infty i}^{1+\infty i} V_a(s) x^{-s} ds = \\ = \sum_{k=0}^{N} p_k(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-N-\frac{1}{2}-\infty i}^{-N-\frac{1}{2}+\infty i} V_a(s) x^{-s} ds, \end{aligned} \tag{10}$$

где $p_0(x), \ p_1(x), \ p_2(x), ..., p_N(x)$ — вычеты $V_a(s) \ x^{-s}$ в точках $s = 0$, $-1, -2, ..., -N$. Здесь, в отличие от предыдущего, интеграл в правой части равенства стремится к нулю при $N \to \infty$. В самом деле

$$\Gamma\left(-N - \frac{1}{2} + ti\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + ti)}{(-\frac{1}{2} + ti)(-\frac{3}{2} + ti)\cdots(-N - \frac{1}{2} + ti)} = \\ = O\left(\frac{1}{(N-1)!} e^{-\frac{3\pi}{2}|t|}\right),$$

$$\sin 2\pi \frac{\Gamma(-N - \frac{1}{2} + ti)}{-N - \frac{1}{2} + ti} = O\left(\frac{1}{N!} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right),$$

$$V_a\left(-N - \frac{1}{2} + ti\right) = O\left(\frac{1}{N! N^a} e^{-\frac{3\pi}{2}|t|}\right).$$

Очевидно, что

$$p_n(x) = \frac{1}{2i} \oint\limits_{|s+n|=\rho} \csc \pi s \sin 2\pi \frac{\Gamma(s)}{s} \cdot \frac{x^{-s}}{s^a} ds = \\ = \frac{(-1)^n}{2i} \oint\limits_{|s|=\rho} \csc \pi s \sin 2\pi \frac{\Gamma(s-n)}{s-n} \cdot x^{-s+n} \frac{ds}{(s-n)^a},$$

где путь интеграции в первом интеграле — окружность радиуса $\rho < \frac{1}{2}$ с центром в точке $-n$, во втором — окружность радиуса $\rho < \frac{1}{2}$ с центром в начале координат. Устремляя в формуле (10) N к бесконечности, получим

$$H_a(x) = L^{-1}(V_a(s)) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) = \\ = \frac{1}{2i} \oint\limits_{|s|=\rho} \csc \pi s \; x^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(s-n)^a} \sin\left(2\pi \frac{\Gamma(s-n)}{s-n}\right) ds = \\ = \frac{1}{2i} \oint\limits_{|s|=\rho} \csc \pi s \; x^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(s-n)^a} \sin\left(\frac{2\pi^2 \csc \pi s}{(s+1)\Gamma(1-s+n)}\right) ds = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} \left(\log \frac{1}{x}\right)^m x^n, \tag{11}$$

где

$$C_{m,n}=\frac{1}{2im!}\oint\limits_{|s|=\rho} x^m\csc\pi s\sin\left(\frac{2\pi^2\csc\pi s}{(s-n)\Gamma(1-s+n)}\right)\frac{ds}{(s-n)^a}. \quad (12)$$

Отсюда и из (9) получим формулу

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}C_{m,n}\left(\log\frac{1}{x}\right)^m x^n\sim\sum_{p>2}\sin\frac{2\pi}{p}\frac{x^{-p}}{p^a}, \quad (13)$$

где справа суммирование распространено по всем нечетным простым числам и где $C_{m,n}$ определены формулой (12). Соотношение

$$F(x)\sim u_1(x)+u_2(x)+...$$

означает здесь серию соотношений

$$F(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)+O(u_{n+1}(x)) \quad (n=1,2,3,...)$$

при $x\to\infty$.

Для получения других выражений для $H_a(x)$ найдем

$$L^{-1}\left(s^{-a}\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\infty i}^{1+\infty i}s^{-a}\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}x^{-s}ds.$$

Очевидно,

$$L^{-1}\left(s^{-a}\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}\right)=-i\sum_{n\equiv 1 \pmod 2}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!}(2\pi)^{n-1}\times \\ \times\int\limits_{1-\infty i}^{1+\infty i}\frac{\Gamma(s)^n}{s^{n+a}}x^{-s}ds, \quad (14)$$

где $n\equiv 1 \pmod 2$ означает, что суммирование распространено по всем нечетным положительным n.

Законность почленного интегрирования ряда легко может быть обоснована.

Вычислим теперь $L^{-1}(\Gamma(s)^n)$, $L^{-1}(\frac{1}{s^{n+a}})$. Согласно теореме 4

$$L^{-1}(\Gamma(s)^n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\infty i}^{1+\infty i} \Gamma(s)^n x^{-s} ds =$$

$$= \underbrace{e^{-x} \bigcirc e^{-x} (+) ... \bigcirc e^{-x}}_{n \text{ раз}}.$$

Очевидно,

$$e_n(x) = L^{-1}(I(s)^n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\infty i}^{1+\infty i} \Gamma(s)^n x^{-s} ds =$$

$$= \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{t_1 t_2 \ldots t_{n-1}} - t_1 - \ldots - t_{n-1}\right)\frac{dt_1 \ldots dt_{n-1}}{t_1 \ldots t_{n-1}} \qquad (15)$$

при $n > 1$, $e_1(x) = e^{-x}$,

$$\int\limits_0^\infty e_n(x) x^{s-1} dx = \Gamma(s)^n. \qquad (16)$$

Легко показать, что $e_2(x) = 2K_0(2\sqrt{x})$, где $K_0(t)$ — известная цилиндрическая функция, пользуясь формулой Вороного

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\infty i}^{1+\infty i} \Gamma(s)^2 x^{-s} ds = 2K_0(2\sqrt{x})$$

или эквивалентной ей формулой

$$2\int\limits_0^\infty K_0(2\sqrt{x}) x^{s-1} dx = \Gamma(s)^2,$$

или известным интегральным представлением $2K_0(2\sqrt{x})$

$$2K_0(2\sqrt{x}) = \int\limits_0^\infty e^{-\frac{x}{t}-t}\frac{dt}{t}.$$

Из формулы

$$e_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\infty i}^{1+\infty i}\Gamma(s)^n x^{-s}ds \tag{17}$$

вытекает, что $y = e_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(-x\frac{d}{dx}\right)^n y = yx.$$

Как известно из теории бесселевых функций,

$$2K_0(2\sqrt{x}) = e_2(x) \sim \sqrt{\pi}e^{-2\sqrt{x}}x^{-\frac{1}{4}}\left(1 - \frac{1^2}{16}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot 16^2}x^{-1} - ...\right)$$

или

$$e_2(x) \sim \sqrt{\pi}e^{-2\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!^2}{2^{6k}k!^3}x^{-\frac{2k+1}{4}}. \tag{18}$$

Аналогичные разложения можно получить для

$$e_3(x) = 2\int\limits_0^\infty e^{-\frac{x}{t}}K_0(2\sqrt{t})\frac{dt}{t},$$

для

$$e_4(x) = 4\int\limits_0^\infty K_0\left(2\sqrt{\frac{x}{t}}\right)K_0(2\sqrt{t})\frac{dt}{t} \text{ и др.}$$

Известная формула $\int\limits_0^1(\log\frac{1}{x})^{p-1}x^{s-1}dx = \frac{\Gamma(p)}{s^p}$ показывает, что для функции $\Theta_n(x)$, определенной равенствами $\Theta_p(x) = \frac{(\log\frac{1}{x})^p}{\Gamma(p)}$ при $0 < x < 1$ и $\Theta_p(x) = 0$ при $x > 1$,

$$L(\Theta_p(x)) = \frac{1}{s^p}. \tag{19}$$

Из (16) и (19) следует, на основании теорем 6 и 4

$$\frac{\Gamma(s)^n}{s^{n+a}} = \int_0^\infty \psi_n(x)x^{s-1}dx, \text{ где } \psi_n(x) = e_n(x) \bigcirc \Theta_{n+p}(x) =$$

$$= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^1 \exp\biggl(-\frac{x}{t_1t_2\dots t_{n-1}\tau} -$$

$$- t_1 - t_2 - \dots - t_{n-1}\biggr)\frac{(\log\frac{1}{\tau})^{n+a}}{\Gamma(n+a)}\frac{dt_1dt_2\dots dt_{n-1}d\tau}{t_1t_2\dots t_{n-1}\tau},$$

где интегрирование по $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ происходит в пределах от 0 до ∞, а по τ — от 0 до 1. Отсюда

$$L^{-1}\biggl(s^{-a}\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}\biggr) = \sum_{n\equiv 1 \pmod 2}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!\Gamma(n+a)}(2\pi)^n\times$$

$$\times \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^1 \exp\biggl(-\frac{x}{t_1t_2\dots t_{n-1}\tau} - t_1 - t_2 - \dots - t_{n-1}\biggr)\times \tag{20}$$

$$\times\left(\log\frac{1}{\tau}\right)^{n+a}\frac{dt_1dt_2\dots dt_{n-1}d\tau}{t_1t_2\dots t_{n-1}\tau}.$$

Известная формула $\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x}dx = \pi\csc\pi s$ показывает, что $L(\frac{1}{1+x}) = \pi\csc\pi s$, откуда, на основании теоремы 4, следует

$$H_a(x) = L^{-1}\biggl(s^{-a}\pi\csc\pi s\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}\biggr) =$$

$$= \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m(2\pi)^{2m+1}}{(2m+1)!\Gamma(2m+1+a)}\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^1 \exp\biggl(-\frac{x}{t_1t_2\dots t_{2m+2}} -$$

$$-t_1 - t_2 - \dots - t_{2m}\biggr)\frac{(\log\frac{1}{t_{2m+2}})^{2m+1+a}}{t_1\dots t_{2m+2}(1+t_{2m+1})}dt_1\dots dt_{2m+2}, \tag{21}$$

где интегрирование по t_{2m+2} происходит от 0 до 1, а по всем остальным переменным — от нуля до бесконечности. Отсюда и из формулы

(9) следует соотношение

$$\sum_{n\equiv 1 \pmod 2} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2\pi)^n}{n!\Gamma(n+a)} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{t_1 t_2 \dots t_{n+1}} - t_1 - t_2 - \right.$$

$$\left. - \dots - t_{n+1}\right) \frac{(\log \frac{1}{t_{n+1}})^{n+a}}{t_1 t_2 \dots t_{n+1}(1+t_n)} dt_1 \dots dt_{n+1} \sim \sum_{p>2} \sin \frac{2\pi}{p} \cdot \frac{x}{p^a}. \quad (22)$$

Соотношение (22), подобно тождеству Эйлера, связывает ряд по всем целым числам с рядом по простым числам. Однако оно является только асимптотическим соотношением, и относительно разности между левой и правой частью формулы (22) можно утверждать только, что она при $x \to \infty$ стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени x. Так же точно, основываясь на легко доказываемой формуле

$$k\int_0^\infty \frac{x^{k-l+s-1}}{1+x^k} dx = L\left(\frac{kx^{k-l}}{1+x^k}\right) = -\pi \csc \pi \frac{s-l}{k}$$

$$(0 < l < k,\ l-k < Re(s) < l),$$

получим [ср. (5)]

$$\sum_{n\equiv 1 \pmod 2} \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n!\Gamma(n+a)} (2\pi)^n \times$$

$$\times \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^1 \exp\left(\frac{-x}{t_1 t_2 \dots t_n \tau} - t_1 - \dots - t_{n-1}\right) \times \quad (23)$$

$$\times \left(\log \frac{1}{\tau}\right)^{n+a} \frac{t_n^{k-l}}{1+t_n^k} \frac{dt_1 \dots dt_n d\tau}{t_1 \dots t_n \tau} \sim \sum_{p\ \equiv\ l \pmod k} \sin \frac{2\pi}{p} \frac{x^{-p}}{p^a}.$$

Очевидно, формулу (20) можно записать также следующим образом:

$$L^{-1}\left(s^{-a} \sin 2\pi \frac{\Gamma(s)}{s}\right) =$$

$$= \sum_{n\equiv 1 \pmod 2} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!\Gamma(n+a)}(2\pi)^n \int_0^1 e_n\left(\frac{x}{\tau}\right)\left(\log\frac{1}{\tau}\right)^{n+a-1}\frac{d\tau}{\tau},$$

откуда на основании $L^{-1}(\pi\csc\pi\frac{s-l}{k}) = -\frac{kx^{k-l}}{1+x^k}$,

$$L^{-1}\left(s^{-a}\pi\csc\pi\frac{s-l}{k}\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}\right) = k\sum_{n\equiv 1 \pmod 2}\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n!\Gamma(n+a)}\times$$

$$\times(2\pi)^n\int_0^\infty\int_0^1 e_n\left(\frac{x}{t\tau}\right)\frac{(\log\frac{1}{\tau})^{n+a-1}t^{k-l-1}}{(1+t^k)\tau}dtd\tau.$$

Вводя обозначения $\Phi_a(x,y) = \sum\limits_{n\equiv 1 \pmod 2}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!\Gamma(n+a)}e_n(x)y^n$, получим

$$\frac{1}{k}L^{-1}\left(s^{-a}\pi\csc\pi\frac{s-l}{k}\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}\right) =$$

$$= \frac{-1}{k}\int_0^\infty\int_0^1 \Phi_a\left(\frac{x}{t\tau}, 2\pi\log\frac{1}{\tau}\right)\frac{(\log\frac{1}{\tau})^{a-1}t^{k-l-1}}{(1+t^k)\tau}dtd\tau. \qquad (24)$$

Очевидно, что выражение $\frac{1}{s^a(s-m)}\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}$, где m — целое число, представляет функцию, голоморфную в правой полуплоскости, если m — составное или $m=2$, и имеет в точке $s=m$ единственный полюс с вычетом $-\frac{1}{m^a}\sin\frac{2\pi}{m}$, если m — нечётное простое число. Отсюда аналогично предыдущему

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^a(s-m)}\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}\right)\sim$$

$$\sim\begin{cases} -m^{-a}\sin\frac{2\pi}{m}x^{-m}, & \text{если } m \text{ — простое},\\ 0, & \text{если } m \text{ — составное},\end{cases}$$

если соотношение $f(x)\sim g(x)$ означает, что $f(x)-g(x)$ стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени x.

Легко показать, что

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-m}\right)=\begin{cases} x^{-m}, & \text{при } x \geq I, \\ 0, & \text{при } 0 < x < I, \end{cases}$$

и поэтому, если положить

$$W_a(x) = L^{-1}\left(s^{-a}\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}\right)= \\ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}\frac{x^{-s}}{s^a}ds,$$

то

$$\int\limits_1^\infty W_a\left(\frac{x}{t}\right)t^{-m-1}dt \sim \\ \sim \begin{cases} -\frac{1}{m^a}\sin\frac{2\pi}{m}x^{-m}, & \text{если } m \text{— простое число}, \\ 0, & \text{если } m \text{— составное число}. \end{cases}$$

Все предыдущие соображения допускают следующее очевидное обобщение: если в формуле (4) в качестве $f(s)$ возьмем $f(s) = = g(s)x^{-s}$, $g(s) = \int\limits_0^\infty F(t)t^{s-1}dt$, где $F(t)$ — любая непрерывная функция, удовлетворяющая оценкам: $F(t) = O(1)$ при $t \to 0$, $F(t) = = O(t^{-k})$ при $t \to \infty$, где k — любое число, то

$$L^{-1}\left(\pi\csc\pi s\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s}g(s)\right)=$$

$$= \sum_{n\equiv 1 \pmod 2}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2\pi)^n}{n!\Gamma(n+a)}\int\limits_0^\infty\dots\int\limits_0^\infty\int\limits_0^1\exp\left(-\frac{x}{t_1t_2\dots t_{n+2}}-t_1-\dots- \\ -t_{n-1}\right)\frac{\log(\frac{1}{t_{n+2}})^{n+a-1}}{1+t_n}F(t_{n+1})\frac{dt_1\dots dt_{n+2}}{t_1\dots t_{n+2}} \sim \sum_p \sin\frac{2\pi}{p}g(p)x^{-p}$$

и поэтому получаем следующую теорему:

Для любой непрерывной функции $F(x)$, стремящийся к нулю быстрее любой отрицательной степени x, когда $x \to \infty$, справедлива следующая формула:

$$\sum_{n\equiv 1 \pmod 2} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2\pi)^n}{n!\Gamma(n+a)} \int\limits_0^\infty \dots \int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 \exp\Bigl(-\frac{x}{t_1 t_2 \dots t_{n+2}} - t_1 - \dots -$$

$$-t_{n-1}\Bigr) \frac{F(t_n)}{1+t_{n+1}} \left(\log \frac{1}{t_{n+2}}\right)^{n+a-1} \frac{dt_1 \dots dt_{n+2}}{t_1 \dots t_{n+2}} \sim$$

$$\sim \sum_p \sin \frac{2\pi}{p} \int\limits_0^\infty F(t) t^{p-1} dt \frac{x^{-p}}{p^a}, \tag{25}$$

где n пробегает все нечетные целые положительные числа, а p — все простые числа.

Пользуясь ранее введёнными обозначениями, формулу (25) можно написать следующим образом:

$$\sum_{n\equiv 1 \pmod 2} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2\pi)^n}{n!\Gamma(n+a)} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 e_n\left(\frac{x}{t_1 t_2 t_3}\right) \frac{F(t_1)}{1+t_2} \times$$

$$\times \left(\log \frac{1}{t_3}\right)^{n+a-1} \frac{dt_1 dt_2 dt_3}{t_1 t_2 t_3} \sim \sum_p \sin \frac{2\pi}{p} \int\limits_0^\infty F(t) t^{p-1} dt \frac{x^{-p}}{p^a}. \tag{26}$$

Здесь $e_n(x)$ — «символические степени» функции e^{-x}, определяемые формулами (16), (17).

Очевидно также, что

$$\sum_{n\equiv 1 \pmod 2} \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}(2\pi)^n}{n!\Gamma(n+a)} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 e_n\left(\frac{x}{t_1 t_2 t_3}\right) \frac{F(t_1) t_2^{k-l}}{1+t_2^k} \times$$

$$\times \left(\log \frac{1}{t_3}\right)^{n+a-1} \frac{dt_1 dt_2 dt_3}{t_1 t_2 t_3} \sim \sum_{p\equiv l \pmod k} \sin \frac{2\pi}{p} \int\limits_0^\infty F(t) t^{p-1} dt \frac{x^{-p}}{p^a}. \tag{27}$$

Легко построить аналитическую функцию, имеющую в правой полуплоскости простые полюсы только в точках $s = p$, где p и $p+2$ — простые числа, и, таким образом, указать новый подход к «проблеме двойников».

Такой функцией будет $\pi \csc \pi s \sin 2\pi \frac{\Gamma(s)}{s} \sin 2\pi \frac{\Gamma(s+2)}{s+2}$. Вычет ее в точке $s = p$ очевидно равен $\sin \frac{2\pi}{p} \sin \frac{2\pi}{p+2}$.

Совершенно аналогично предыдущему получим

$$L^{-1}\left(\pi \csc \pi s \sin 2\pi \frac{\Gamma(s)}{s} \sin 2\pi \frac{\Gamma(s+2)}{s+2} \cdot \frac{f(s)}{s^a(s+2)^a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \pi \csc \pi s \sin 2\pi \frac{\Gamma(s)}{s} \sin 2\pi \frac{\Gamma(s+2)}{s+2} f(s) \times \tag{28}$$

$$\times \frac{x^{-s}}{s^a(s+2)^a} ds \sim -\sum_p{}' \sin \frac{2\pi}{p} \sin \frac{2\pi}{p+2} f(p) \frac{x^{-p}}{p^a(p+2)^a},$$

где $0 < a < 1$, $f(s)$ — любая функция, голоморфная в полуплоскости $Re(s) > 0$, удовлетворяющая оценке $f(s) = O(e^{(2\pi-\varepsilon)|t|})$, p пробегает все «двойники», т.е. простые числа, для которых $p+2$ также простое число. Теорема о «свертывании» дает

$$L^{-1}\left(\pi \csc \pi s \sin 2\pi \frac{\Gamma(s)}{s} \sin 2\pi \frac{\Gamma(s+2)}{s+2} \cdot \frac{1}{s^a(s+2)^a}\right) =$$

$$= L^{-1}(\pi \csc \pi s) \bigcirc L^{-1}\left(\sin 2\pi \frac{\Gamma(s)}{s} \frac{1}{s^a}\right) \bigcirc$$

$$\bigcirc L^{-1}\left(\sin 2\pi \frac{\Gamma(s+2)}{s+2} \frac{1}{(s+2)^a}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x} \bigcirc W_a(x) \bigcirc x^2 W_a(x), \tag{29}$$

где

$$W_a(x) = L^{-1}\left(s^{-a} \sin 2\pi \frac{\Gamma(s)}{s}\right) =$$

$$= \sum_{n\equiv l \pmod 2} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2\pi)^n}{n!\Gamma(n+a)} \int\limits_0^1 e_n\left(\frac{x}{t}\right)\left(\log\frac{1}{t}\right)^{n+a-1}\frac{dt}{t}.$$

Из (28) и (29) следует

$$\frac{1}{1+x} \bigcirc W_a(x) \bigcirc x^2 W_a(x) \sim$$
$$\sim -{\sum_p}' \frac{1}{p^a(p+2)^a} \sin\frac{2\pi}{p} \sin\frac{2\pi}{p+2} x^{-p}, \tag{30}$$

где p пробегает все «двойники». Совершенно аналогично, рассматривая $\pi \csc \pi s \sin 2\pi \frac{\Gamma(s)}{s} \sin 2\pi \frac{\Gamma(s+d)}{s+d}$, где d — данное целое положительное число, получим

$$\frac{1}{1+x} \bigcirc W_a(x) \bigcirc x^d W_a(x) \sim$$
$$\sim {\sum_p}' \frac{1}{p^a(p+d)^a} \sin\frac{2\pi}{p} \sin\frac{2\pi}{p+d} x^{-p}, \tag{31}$$

где p пробегает все такие простые числа, для которых $p+d$ также простое число. Аналогично можно доказать формулу

$$\frac{x^{k-l}}{1+x^k} \bigcirc W_a(x) \bigcirc x^d W_a(x) \sim$$
$$\sim {\sum_{p\equiv l \pmod k}}' \frac{1}{p^a(p+d)^a} \sin\frac{2\pi}{p} \sin\frac{2\pi}{p+d} x^{-p}, \tag{32}$$

где p пробегает все такие простые числа, для которых $p+d$ простое число и которые, кроме того, удовлетворяют сравнению $p \equiv l \pmod k$. Отсюда, в частности, следует $\frac{x^{k-l}}{1+x^k} \bigcirc W_a(x) \bigcirc$ $\bigcirc\, x^d W_a(x) = O(x^{-q})$, где q — наименьшее простое число с указанными свойствами. Если при данных k, l и d не существует простых чисел p таких, что $p \equiv l \pmod k$ и $p+d$ также простое, то

$$\frac{x^{k-l}}{1+x^k} \bigcirc W_a(x) \bigcirc x^d W_a(x) \sim 0, \text{т.е.}$$

$$\frac{x^{k-l}}{1+x^k} \bigcirc W_a(x) \bigcirc x^d W_a(x)$$

при $x \to \infty$ стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени x. Можно также доказать, аналогично тому, как была доказана формула (25):

$$\frac{x^{k-l}}{1+x^k} \bigcirc W_a(x) \bigcirc x^d W_a(x) \bigcirc F(x) \sim$$

$$\sim \sum_{p \equiv l \pmod k} \frac{\sin\frac{2\pi}{p}\sin\frac{2\pi}{p+d}}{p^a(p+d)^a} \int\limits_0^\infty F(t)t^{p-1}dt x^{-p} \tag{33}$$

для любой $F(x)$, непрерывной в интервале $(0, \infty)$ и удовлетворяющей условиям $F(x) = O(1)$ при $x \to 0$, $F(x) = O(x^{-k})$ при $x \to \infty$ и при любом k. Другие выражения для

$$L^{-1}\left(\pi \csc \pi s \sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s} \sin 2\pi\frac{\Gamma(s+2)}{s+2}\right)$$

можно получить, пользуясь тождеством

$$\cos 2\pi\left(\frac{\Gamma(s+2)}{s+2} - \frac{\Gamma(s)}{s}\right) - \cos 2\pi\left(\frac{\Gamma(s+2)}{s+2} + \frac{\Gamma(s)}{s}\right) =$$

$$= 2\sin 2\pi\frac{\Gamma(s)}{s} \sin 2\pi\frac{\Gamma(s+2)}{s+2} =$$

$$= \sum_{k \equiv 0 \pmod 2} \frac{(2\pi)^k(-1)^{\frac{k}{2}}}{k!}\left\{\left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s^2(s+1)}\right)^k - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s^2(s+1)}\right)^k\right\}\Gamma(s+2)^k,$$

умножая его на $\pi \csc \pi s$, применяя операцию L^{-1} почленно и учитывая, что согласно теореме о свертывании

$$L^{-1}(a_k(s)\Gamma(s+2)^k) = L^{-1}(a_k(s)) \bigcirc x^2 e_k(x),$$

где

$$a_k(s) = \left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s^2(s+1)}\right)^k - \left(\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s^2(s+1)}\right)^k.$$

Значение $L^{-1}(a_k(s)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\infty i}^{1+\infty i} a_k(s)x^{-s}ds$ можно легко вычислить, применяя теорему Коши о вычетах.

Вводя обозначение $b_k(x) = L^{-1}(a_k(s))$, получим

$$\sum_{n\equiv 0 \pmod 2} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(2\pi)^n}{n!} \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e_n\left(\frac{x}{t_1t_2t_3}\right)\frac{b_n(t_1)}{1+t_2}F(t_3)\frac{dt_1dt_2dt_3}{t_1^3t_2^3t_3^3} \sim$$

$$\sim -\sum_p \sin\frac{2\pi}{p}\sin\frac{2\pi}{p+2}x^{-p-2}\int\limits_0^\infty F(t)t^{p-1}dt, \tag{34}$$

где p пробегает все простые числа такие, что $p+2$ также простое число и где $F(x)$ — любая функция со свойствами, указанными при выводе (33).

* * *

В заключение укажем некоторые свойства функций $e_n(x)$, связь которых с теорией простых чисел выяснена выше. Очевидно,

$$\int\limits_0^\infty e_n\left(\frac{x}{t}\right)e_m(t)\frac{dt}{t} = e_{m+n}(x). \tag{35}$$

Далее, возводя обе части тождества Гаусса

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{k}\right)\cdots\Gamma\left(s+\frac{k-1}{k}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(k-1)}k^{\frac{1}{2}-ks}\Gamma(ks)$$

в n-ю степень, применяя к обеим частям равенства операцию L^{-1} и учитывая теорему о свертывании и формулы $L^{-1}(\Gamma(s)^n) = e_n(x)$,

$$L^{-1}\left(\Gamma\left(s+\frac{1}{k}\right)^n\right) = x^{\frac{1}{k}}e_n(x), \ldots,$$

$$L^{-1}\left(\Gamma\left(s+\frac{k-1}{k}\right)^{n}\right)= x^{\frac{k-1}{k}}e_n(x),$$

$$L^{-1}(k^{-kns}\Gamma(ks)^n) = \frac{1}{k}e_n(k^n \sqrt[k]{x}),$$

получим

$$e_n(x) \bigcirc x^{\frac{1}{k}}e_n(x) \bigcirc \ldots \bigcirc x^{\frac{k-1}{k}}e_n(x) =$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}(k-1)}e_n(K^n \sqrt[k]{x}). \tag{36}$$

Аналогично, другие свойства гамма-функции приводят к выводу соответствующих свойств функций $e_n(x)$. Как было указано выше, $e_2(x) = 2K_0(2\sqrt{x})$. Из формулы (8.19.6) [47, с. 316] следует

$$4\int\limits_0^\infty K_0(2\sqrt{x})^2 x^{s-1}dx = \frac{\Gamma(s)^4}{\Gamma(2s)},$$

откуда

$$L^{-1}(\Gamma(s)^4) = L^{-1}\left(\frac{\Gamma(s)^4}{\Gamma(2s)}\Gamma(2s)\right)= L^{-1}\left(\frac{\Gamma(s)^4}{\Gamma(2s)}\right)\bigcirc$$

$$\bigcirc L^{-1}(\Gamma(2s)) = 2K_0(2\sqrt{x})^2 \bigcirc e^{-\sqrt{x}}$$

или

$$e_n(x) = L^{-1}(\Gamma(s)^4) = 2\int\limits_0^\infty K_0\left(2\sqrt{\frac{x}{t}}\right)^2 e^{-\sqrt{t}}\frac{dt}{t}. \tag{37}$$

Очевидно также, что

$$e_3(x) = 2\int\limits_0^\infty K_0\left(2\sqrt{\frac{x}{t}}\right)e^{-t}\frac{dt}{t},$$

$$e_4(x) = 4\int\limits_0^\infty K_0\left(2\sqrt{\frac{x}{t}}\right)K_0(2\sqrt{t})\frac{dt}{t},$$

$$e_5(x) = 2\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K_0\left(2\sqrt{\frac{x}{t_1t_2}}\right)^2 e^{-\sqrt{t_1}-t_2}\frac{dt_1dt_2}{t_1t_2},$$

откуда вытекают асимптотические разложения для $e_3(x), e_4(x)$, $e_5(x)$, аналогичные (18).

Можно получить другое аналитическое выражение для $e_n(x)$, учитывая

$$e_n(x) = \lim_{\alpha\to 0}\int\limits_\alpha^\infty \dots \int\limits_\alpha^\infty e^{-\frac{x}{t_1t_2\dots t_{n-1}}} e^{-t_1}\dots e^{-t_{n-1}}\frac{dt_1}{t_1}\dots\frac{dt_{n-1}}{t_{n-1}}$$

и разлагая в интеграле множитель $e^{-\frac{x}{t_1t_2\dots t_{n-1}}}$ в бесконечный ряд:

$$e_n(x) = \lim_{\alpha\to 0}\sum_{m=0}^\infty \frac{(-x)^m}{m!}\left(\int\limits_\alpha^\infty e^{-t}\frac{dt}{t^{m+1}}\right)^{n-1}. \tag{38}$$

23. Пространство Гильберта и теория чисел

Часть вторая

(Представлено академиком И. М. Виноградовым)

Здесь рассматриваются приложения общих построений, развитых в первой части [65] этой работы, к конкретным вопросам теории чисел и теории ортогональных систем.

В первой части этой работы доказывалось, что если последовательность элементов пространства Гильберта обладает D_g-свойством, т.е. для нее $(f_n, f_m) = g((n, m))$, где (m, n) — общий наибольший делитель m и n, а $g(t)$ — данная функция от целого аргумента, то последовательность $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$, где $\gamma_n = \sum\limits_{d/n} \mu(\frac{n}{d}) f_d$, будет ортогональной.

Кроме того, если

$$(\gamma_n, \gamma_n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) = G(n) > 0,$$

то $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum\limits_{d/n} \mu(\frac{n}{d}) f_d$ образуют очевидно ортонормированную последовательность.

Настоящий параграф посвящен построению примеров последовательностей, обладающих D-свойством для случая, когда гильбертово пространство конкретизировано как пространство всех функций, определенных в данной области Δ, с суммируемым по Лебегу квадратом модуля.

Эти последовательности интересны как материал для построения ортонормированных последовательностей. Все возникающие при этом ортонормированные последовательности являются новыми, обладающими свойственным теоретико-числовым функциям «прыгающим» характером поведения.

Укажем два метода построения систем, обладающих D-свойством.

а) *Первый метод.* Первый пример последовательности, обладающей, согласно принятой здесь терминологии, D-свойством, а также первый пример приложения такой системы к теории чисел был дан Франэлем в его теореме о числах Фарея [15, с. 170]. В указанном месте доказывается, что

$$\int\limits_0^1 f_n(x) f_m(x) dx = (n, m)^2,$$

если

$$f_n(x) = \sqrt{12} n \left(nx - [nx] - \frac{1}{2} \right).$$

Эту формулу, а также вытекающие из нее арифметические следствия можно существенно обобщить.

Рассмотрим любую вещественную функцию $F(x)$, удовлетворяющую функциональному уравнению

$$F(mx) = m^{s-1} \sum_{k=0}^{m-1} F\left(x + \frac{k}{m} \right). \tag{1}$$

Тогда, очевидно, тому же уравнению будет удовлетворять и $\Phi(x) = F(x - [x]):$

$$\Phi(mx) = m^{s-1} \sum_{k=0}^{m-1} \Phi\left(x + \frac{k}{m} \right). \tag{2}$$

В самом деле (2) верно при $0 \leq x < \frac{1}{m}$, так как тогда оно совпадает с (1), но обе части равенства (2) имеют период, равный $\frac{1}{m}$, и, следовательно, (2) верно при любом x. Предполагая, что $\Phi(x)$ есть функция с суммируемым по Лебегу в интервале (0,1) квадратом модуля, вычислим $\int\limits_0^1 \Phi(mx)\Phi(nx)dx$.

Рассмотрим сначала случай $n=1$; тогда

$$\int\limits_0^1 \Phi(mx)\Phi(x)dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}} \Phi(mx)\Phi(x)dx.$$

Производя в каждом члене замену переменных $x = \frac{k}{m}+t$ и учитывая периодичность $\Phi(x)$ и (2), получаем

$$\int\limits_0^1 \Phi(mx)\Phi(x)dx = \int\limits_0^{\frac{1}{m}} \Phi(mt) \sum_{k=0}^{m-1} \Phi\left(t+\frac{k}{m}\right)dt =$$

$$= m^{1-s} \int\limits_0^{\frac{1}{m}} \Phi(mt)^2 dt = m^{-s} \int\limits_0^1 \Phi(t)^2 dt = Cm^{-s},$$

где

$$C = \int\limits_0^1 \Phi(t)^2 dt.$$

Рассмотрим случай $(n,m)=1$. Аналогично предыдущему, здесь

$$\int\limits_0^1 \Phi(mx)\Phi(nx)dx = \int\limits_0^{\frac{1}{m}} \Phi(mt) \sum_{k=0}^{m-1} \Phi\left(nt+\frac{nk}{m}\right)dt$$

или, учитывая, что вместе k nk также пробегает полную систему вычетов по модулю m и поэтому, вследствие периодичности $\Phi(x)$,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \Phi\left(nt+\frac{nk}{m}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \Phi\left(nt+\frac{k}{m}\right) = m^{1-s}\Phi(mnt),$$

имеем

$$\int_0^1 \Phi(mx)\Phi(nx)dx = m^{1-s}\int_0^{\frac{1}{m}} \Phi(mt)\Phi(mnt)dt =$$

$$= m^{-s}\int_0^1 \Phi(t)\Phi(nt)dt = C(mn)^{-s}.$$

В случае любых m, n введем обозначения:

$$(m,n) = D, \quad n = n'D, \quad m = m'D.$$

Тогда

$$(m',n') = 1, \quad \int_0^1 \Phi(m'Dx)\Phi(n'Dx)dx =$$

$$= \int_0^1 \Phi(m'x)\Phi(n'x)dx = C(m'n')^{-s} = C\frac{D^{2s}}{m^s n^s}.$$

Отсюда получаем следующую теорему:

Если вещественная функция $F(x)$ с суммируемым по Лебегу квадратом удовлетворяет соотношению (1), то

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{C}} n^s F(nx - [nx]),$$

где $C = \int\limits_0^1 F(x)^2 dx$ обладают D_g-свойством со значением $g(t) = t^{2s}$, или, иными словами,

$$\int_0^1 f_n(x) f_m(x) dx = (n,m)^{2s}. \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{G(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C\varphi_{2s}(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^s F(dx - [dx])$$

образуют в этом случае ортонормированную систему пространства $L^2(0,1)$.

Пример A_1. Простейшим примером функции, удовлетворяющей соотношению (1) со значением $s = 1$, является

$$F(x) = -\log(2|\sin \pi x|),$$

в чем можно убедиться, пользуясь тождеством

$$\sin \pi m x = 2^{m-1} \prod_{k=0}^{m-1} \sin\left(\pi x + \frac{\pi k}{n}\right).$$

Здесь

$$C = \int_0^1 (\log 2|\sin \pi x|)^2 dx = \frac{\pi^2}{12},$$

поэтому

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{12}}{\pi} n \log(2|\sin \pi n x|)$$

удовлетворяют соотношению

$$(f_n, f_m) = (n, m)^2$$

и, следовательно,

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{12}}{\pi\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d \log(2|\sin \pi d x|) \tag{4}$$

образуют ортонормированную систему пространства $L^2(0,1)$.

Пример A_2. Известно [18, с. 21], что полиномы Бернулли удовлетворяют соотношению

$$B_k(mx) = m^{k-1} \sum_{s=0}^{m-1} B_k\left(x + \frac{s}{m}\right). \tag{5}$$

Известно также (там же, с. 31), что

$$\int_0^1 B_k(x)B_l(x)dx = (-1)^{l+1}\frac{k!l!}{(k+l)!}B_{k+l}, \tag{6}$$

откуда

$$\int_0^1 B_k(x)^2 dx = \frac{k!^2}{(2k)!}|B_{2k}|.$$

Согласно предыдущему, отсюда следует, что

$$\psi_{n;k}(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{k!^2}{(2k)!}|B_{2k}|\varphi_{2k}(n)}}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)d^k B_k(dx-[dx]) \tag{7}$$

образуют ортонормированную систему пространства $L^2(0,1)$. Эта система указана мною в работе [64]. Можно показать, что если $k \not\equiv l \pmod 2$, то функции

$$\begin{gathered} 1, \quad \psi_{1;k}, \psi_{2;k}, \ldots, \\ \psi_{1;l}, \psi_{2;l}, \ldots \end{gathered} \tag{8}$$

образуют полную ортонормированную систему $L^2(0,1)$.

Из полноты этой системы следует для любых $f(x)$ и $g(x)$

$$(f,g) = (f,1)(g,1) + \sum_{n=1}^{\infty}(f,\psi_{n;k})(g,\psi_{n;k}) + \sum_{n=1}^{\infty}(f,\psi_{n;l})(g,\psi_{n;l}), \tag{9}$$

откуда можно получить много тождеств теоретико-числового характера. Пользуясь примером A_1, легко доказать, что последовательность $f_1^*(x)$, $f_2^*(x)$, $f_3^*(x)$, $\ldots$, где

$$f_n^*(x) = \frac{\sqrt{24}n}{\pi^{\frac{3}{2}}}\frac{\log|\sin(2n\ arctg\ x)|}{1+xi},$$

удовлетворяет соотношению

$$\int_0^{\infty} f_m^*(x)f_n^*(x)dx = (m,n)^2.$$

Легко видеть также, что

$$\sin(2n\ arctg\ x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} Q_n\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right),$$

где $Q_n(t)$ — полином, определяемый соотношением

$$\sin 2n\varphi = \sin\varphi Q_n(\cos\varphi),$$

откуда

$$f_n^*(x) = \frac{\sqrt{24}}{\pi^{\frac{3}{2}}} n \frac{\log|Q_n(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})| + \log\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+xi}.$$

Также легко видеть, что

$$F_n(x) = \frac{\sqrt{24}}{\pi^{\frac{3}{2}}} n \frac{\log|Q_n(x)| + \log 2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[4]{1-x^2}}$$

удовлетворяют соотношению

$$\int\limits_0^1 F_n(x)F_m(x)dx = (n,m)^2.$$

Из теоремы 2 первой части этой работы следует, что

$$\psi_n^*(x) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d^*(x)$$

и

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F_d(x)$$

образуют ортонормированные системы пространств $L^2(0,\infty)$ и $L^2(0,1)$ соответственно.

б) *Второй метод.* Второй метод построения последовательностей, обладающих D-свойством, отличается от первого большей общностью и обладает тем преимуществом, что каждый раз выясняется то подпространство, на котором система будет полной. Этот способ дается непосредственно теоремой 3 первой части этой работы.

Смысл теоремы состоит в том, что если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ образуют ортонормированную систему некоторого функционального гильбертова пространства и $\omega(n)$ — мультипликативная функция со сходящейся суммой квадратов модулей, то

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\overline{\omega(n)}^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\omega(k)\alpha_{kn}(x)$$

образуют последовательность, обладающую D_g-свойством со значением $g(t) = |\omega(t)|^{-2}$, полную на линейной замкнутой оболочке последовательности $\alpha_n(x)$. Здесь

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty}|\omega(k)|^2.$$

Теоремы первой части работы показывают, что $\psi_n(x)$, определяемые формулами

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{G(n)}}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)f_d(x),$$

где

$$G(n) = \sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)|\omega(d)|^{-2} = |\omega(n)|^{-2}\prod_{p/n}(1-|\omega(p)|^{-2}),$$

образуют ортонормированную систему, эквивалентную системе $\alpha_n(x)$. Наша задача — выбрать $\alpha_n(x)$ и $\omega(k)$ таким образом, чтобы суммы $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega(k)\alpha_{kn}$ можно было представить в наиболее простой форме. Для случая $L^2(0,1)$ легко указать пример такого выбора, так как известно, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{n^{2r}}$ и $\sum\frac{\sin 2\pi nx}{n^{2r+1}}$ могут быть просто выражены через полиномы Бернулли. Отсюда вновь легко можно получить пример A_2, причем делается очевидным, на основании теорем

4 и 5 первой части, что система $\psi_{n;k}(x)$ при k четном эквивалентна системе $\sqrt{2}\cos 2\pi nx$ $(n = 1, 2, 3, ...)$, а при k нечётном эквивалентна системе $\sqrt{2}\sin 2\pi nx$. Две функциональные системы мы называем эквивалентными, если их линейные замкнутые оболочки совпадают. Отсюда, учитывая теорему о полноте тригонометрической системы, легко видеть, что система

$$\psi_{1;k}, \psi_{2;k}, \psi_{3;k}, ...$$

1

$$\psi_{1;l}, \psi_{2;l}, \psi_{3;l}, ...$$

есть полная система пространства $L^2(0,1)$, если $k \equiv l \pmod 2$. Случай

$$\alpha_n(x) = \sqrt{2}\cos 2\pi nx, \quad \omega(n) = \frac{1}{n}$$

дает снова пример A_1, причем становится очевидным, что ортонормированная последовательность

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{12}}{\pi\sqrt{\varphi_2(n)}} \log\left|\prod_{d/n}(2\sin\pi dx)^{d\mu(\frac{n}{d})}\right|$$

эквивалентна последовательности $\cos 2\pi nx$ $(n = 1, 2, 3, ...)$.

В случае, если те же последовательности косинусов или синусов перенумеруем иначе, получим другие примеры. Например, полагая

$$\omega(n) = \frac{1}{n}, \ \alpha_n(x) = -\sqrt{2}\sin 2\pi(n + n_0)x,$$

получим

$$f_n(x) = -\frac{n\sqrt{12}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin 2\pi(n_0+nk) =$$
$$= \frac{n\sqrt{12}}{\pi}\sin 2\pi n_0 x \log|2\sin \pi n x| +$$
$$+ n\sqrt{12}\cos(2\pi n_0 x)\left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{12}}{\pi\sqrt{\varphi_2(n)}}\sin 2\pi n_0 x \sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right) d\log|2\sin 2\pi dx| + \tag{10}$$
$$+ \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\cos 2\pi n_0 x \sum \mu\left(\frac{n}{d}\right) d\left(dx - [dx] - \frac{1}{2}\right)$$

образуют ортонормированную систему, эквивалентную системе

$$\sin 2\pi(n_0+1)x,\ \sin 2\pi(n_0+2)x, ...,$$

все функции которой ортогональны к $\sqrt{2}\sin 2\pi kx \quad (k = 1, 2, 3, ..., n_0)$ и образуют вместе с последними ортонормированную систему, полную на пространстве всех синусов (всех функций $f(x)$, удовлетворяющих почти всюду условию $f(x) = -f(1-x)$).

Так же можно получить ортонормированную систему

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{12}}{\pi\sqrt{\varphi_2(n)}}\cos 2\pi n_0 x \sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right) d\log|2\sin 2\pi dx| - \tag{11}$$
$$- \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\sin 2\pi n_0 x \sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right) d\left(dx - [dx] - \frac{1}{2}\right).$$

Ортонормированные системы формул (10) и (11) вместе с конечной системой $1, \sqrt{2}\sin 2\pi kx, \sqrt{2}\cos 2\pi kx \quad (k = 1, 2, 3, ..., n_0)$ образуют полную ортонормированную систему $L^2(0,1)$.

Легко получить разложения в ряды Фурье для различных ортонормированных систем, полученных выше. Пользуясь формулой Куммера

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{\pi n}\sin 2\pi nx=\log\Gamma(x-[x])+\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\times \\ \times(C+\log 2+\log\pi)-\frac{1}{2}\log\pi+\frac{1}{2}\log|\sin\pi x|, \tag{12}$$

легко получить разложение

$$\gamma(x)=\sqrt{12}\log\Gamma(x-[x])+\left(C+\log 2+\log\pi+\frac{\zeta'}{\zeta}(2)\right)\psi_1(x)- \\ -\sqrt{3}\log\pi+\sqrt{3}\log|\sin\pi x|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\psi_n(x), \tag{13}$$

где

$$\psi_n(x)=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\sum\mu\left(\frac{n}{d}\right)d\left(dx-[dx]-\frac{1}{2}\right),$$

$\Lambda(n)$ — функция Мангольдта.

Вопрос о том, будет ли ряд Фурье (13), сходящийся к $\gamma(x)$ в смысле метрики гильбертова пространства, сходиться в обычном смысле, мною не решен.

В первой части работы доказывается, что последовательность

$$f_n=\frac{\overline{\omega(n)}^{\,-1}}{\sqrt{\sigma}}\sum_{\substack{k=1\\(k,N)=1}}^{\infty}\omega(k)\alpha_{kn},$$

где

$$\omega(ab)=\omega(a)\omega(b),\quad \sigma=\sum_{\substack{k=1\\(k,N)=1}}^{\infty}|\omega(k)|^2,$$

система $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots$ ортонормирована, обладает свойством $(f_n,f_m)=g(n,m)$, если $(n,N)=1$, $(m,N)=1$, причем $g(t)=$

$= |\omega(t)|^{-2}$. Ввиду того, что соотношение $(f_n, f_m) = g(n,m)$ выполняется не всегда, а только для m и n, взаимно простых с данным N, его можно назвать ограниченным D_g-свойством.

Легко показать, что

$$\psi_n = G(n)^{-\frac{1}{2}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d \quad \left(G(n) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)\right),$$

где n пробегает все числа, взаимно простые с N, образуют ортонормированную систему, эквивалентную системе α_n, где n пробегает все значения, взаимно простые с N.

Доказательство этих положений совершенно аналогично доказательству теорем 4 и 5 первой части. Так как α_n с номерами, не взаимно простыми с N, не участвуют в построении ψ_n, то можно взять в качестве α_n любую ортонормированную систему, снабдив все ее элементы только индексами, взаимно простыми с N. Если даны α_n со всеми номерами, то, подразумевая под q любое число, не имеющее ни одного простого делителя, не входящего в N, вводим обозначения:

$$f_n^{(q)} = \frac{\overline{\omega(n)}^{-1}}{\sqrt{\sigma}} \sum_{\substack{k=1 \\ (k,N)=1}}^{\infty} \omega(k) \alpha_{knq}, \quad \psi_n^{(q)} = G(n)^{-\frac{1}{2}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d^{(q)},$$

$$(n, N) = 1, \quad \sigma = \sum_{(k,N)=1} |\omega(k)|^2.$$

Тогда очевидно, $\psi_n^{(q)}$, где n пробегает все значения, взаимно простые с N, а q — все числа, простые делители которых входят в N, образуют ортонормированную систему, эквивалентную $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Здесь в качестве $\omega(n)$ можно взять $\frac{\chi(n)}{n^z}$, $\quad Re(z) > \frac{1}{2}$, где χ — характер Дирихле по модулю N.

Легко найти конечное выражение для сумм

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^{2p}} \cos 2\pi nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^{2p+1}} \sin 2\pi nx,$$

где χ — характер Дирихле по модулю N.

В самом деле, обозначая $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n^k}$ через $F_k(x)$ и учитывая соотношения

$$\sum_{l=1}^{N} \cos 2\pi \frac{al}{N} \sin 2\pi n\left(x + \frac{l}{N}\right) = \frac{1}{2} N \sin 2\pi nx,$$

если $n \equiv \pm\, a \pmod N$, и

$$\sum_{l=1}^{N} \cos 2\pi \frac{al}{N} \sin 2\pi n\left(x + \frac{l}{N}\right) = 0,$$

если $n \equiv \pm\, a \pmod N$, имеем при $N > 2,\ (a, N) = 1$

$$2\frac{\chi(a)}{N} \sum_{l=1}^{N} \cos 2\pi \frac{al}{N} F_k\left(x + \frac{l}{N}\right) = \sum_{n \equiv a \pmod N} \frac{\chi(n)}{n^k} \sin 2\pi nx + \\ + \sum_{n \equiv -a \pmod N} \frac{\chi(-n)}{n^k} \sin 2\pi nx.$$

В случае $\chi(-1) = 1$ получим

$$2\frac{\chi(a)}{N} \sum_{l=1}^{N} \cos 2\pi \frac{al}{N} F_k\left(x + \frac{l}{N}\right) = \sum_{n \equiv a \pmod N} \frac{\chi(n)}{n^k} \sin 2\pi nx + \\ + \sum_{n \equiv -a \pmod N} \frac{\chi(n)}{n^k} \sin 2\pi nx.$$

Суммируя по всем $a = 1, 2, ..., N$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^k} \sin 2\pi nx = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \chi(a) \cos 2\pi \frac{al}{N} F_k\left(x + \frac{l}{N}\right). \tag{14}$$

В случае $\chi(-1) = -1$ пользуемся соотношением

$$\sum_{l=1}^{N} \cos 2\pi \frac{al}{N} \cos 2\pi n\left(x + \frac{l}{N}\right) =$$

$$= \begin{cases} +\frac{1}{2} N \cos 2\pi nx, & \text{если } n \equiv a \ (\operatorname{mod} N), \\ +\frac{1}{2} N \cos 2\pi nx, & \text{если } n \equiv -a \ (\operatorname{mod} N), \\ 0, & \text{если } n \not\equiv \pm a \ (\operatorname{mod} N). \end{cases}$$

Если же

$$F_k^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{n^k}, \quad \chi(-1) = +1, \quad N > 2,$$

то имеем аналогично

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^k} \cos 2\pi nx = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \sum_{a=1}^{N} \chi(a) \cos 2\pi \frac{al}{N} F_k^*\left(x + \frac{l}{N}\right). \tag{15}$$

Вводя сокращенные обозначения:

$$C(N, \chi, l) = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^{N} \chi(a) \cos 2\pi \frac{al}{N},$$

$$S(N, \chi, l) = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^{N} \chi(a) \sin 2\pi \frac{al}{N}$$

и учитывая формулы (14) и (15) и то, что

$$\sigma = \sum_{(n,N)=1}^{\infty} |\omega(n)|^2 = \sum_{(n,N)=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \prod_{p/N} \left(1 - \frac{1}{p^{2k}}\right) \zeta(2k) =$$

$$= N^{-2k} \varphi_{2k}(N) \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} |B_{2k}|,$$

получим

$$f_n(x) = \sqrt{2} \overline{\frac{\omega(n)}{\sqrt{\sigma}}}^{\,-1} \sum \frac{\chi(m)}{m^k} \sin 2\pi mnx =$$

$$= \left(\frac{k!^2}{2k}|B_{2k}|\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{N^k n^k}{\sqrt{\varphi_{2k}(N)}}\chi(N)\sum_{l=1}^{N} C(N,\chi,l)\times$$
$$\times B_k\left(nx+\frac{l}{N}-\left[nx+\frac{l}{N}\right]\right),$$

если $k \equiv 1 \pmod 2$, $\chi(-1)=1$. В случае чётного k

$$F_k^*(x) = \sum \frac{\cos 2\pi m x}{m^k} = \pm\frac{(2\pi)^k}{2k!}B_k(x-[x]),$$
$$f_n(x) = \sqrt{2}\frac{\overline{\omega(n)}^{-1}}{\sqrt{\sigma}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)}{m^k}\cos 2\pi m x =$$
$$= \sqrt{2}\frac{n^k\chi(n)N^k}{\sqrt{\sigma\varphi_{2k}(N)}}\sum_{l=1}^{N} C(N,\chi,l)F_k^*\left(x+\frac{l}{N}\right).$$

Поэтому

$$f_n(x) = \left(\frac{k!^2}{(2k)!}|B_{2k}|\varphi_{2k}(N)\right)^{-\frac{1}{2}} N^k n^k \chi(n)\times$$
$$\times\sum_{l=1}^{N} C(N,\chi,l)B_k\left(nx+\frac{l}{N}-\left[nx+\frac{l}{N}\right]\right)$$

удовлетворяют соотношению $(f_m, f_n) = g((m,n)) = (m,n)^{2k}$ при условии $(n,N)=1$, $(m,N)=1$, $\chi(-1)=1$ как при четном, так и при нечётном k. Отсюда следует предложение: *если $\chi(n)$ — характер Дирихле по модулю N, $\chi(-1)=1$, $N>2$ и*

$$C(N,\chi,l) = \frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N}\cos 2\pi\frac{al}{N}\chi(l),$$

то

$$\psi_{n;k}^{(q)}(x) = N^k\left(\frac{k!^2}{(2k)!}|B_{2k}|\varphi_{2k}(Nn)\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{l=1}^{N} C(N,\chi,l)\times$$
$$\times\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)d^k\widetilde{B}_k\left(dqx+\frac{l}{N}\right)\chi(d), \tag{16}$$

где n пробегает все числа, взаимно простые с N, а q пробегает все числа, не содержащие простых чисел, не входящих в N, образуют ортонормированную систему пространства $L^2(0,1)$, эквивалентную системе $\cos 2\pi mx$, *если k чётно, и системе* $\sin 2\pi mx$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, *если k нечётно.*

Здесь $\widetilde{B}_k(x)$ означает $B_k(x - [x])$. Точно так же в случае $\chi(-1) = -1$ имеем ортонормированную систему

$$\tilde{\psi}_{n;k}^{(q)}(x, \chi) = N^k \left(\frac{k!^2}{(2k)!} |B_{2k}| \varphi_{2k}(Nn) \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{N} S(N, \chi, l) \times \\ \times \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^k \widetilde{B}_k\left(dqx + \frac{l}{N}\right) \chi(d), \tag{17}$$

где n и q пробегают указанные числовые множества, и

$$S(N, \chi, l) = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^{N} \sin 2\pi \frac{al}{N} \chi(l).$$

Эта система будет эквивалентна системе синусов, если k чётно, и системе косинусов, если k нечётно.

Доказательство этого предложения аналогично предыдущему и легко следует из тригонометрических тождеств:

$$\sum_{l=1}^{N} \sin 2\pi \frac{al}{N} \sin 2\pi n \left(x + \frac{l}{N} \right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} N \cos 2\pi nx, & \text{если } n \equiv a \pmod{N}, \\ -\frac{1}{2} N \cos 2\pi nx, & \text{если } n \equiv -a \pmod{N}, \\ 0, & \text{если } n \not\equiv \pm a \pmod{N}, \end{cases}$$

$$\sum_{l=1}^{N} \sin 2\pi \frac{al}{N} \cos 2\pi n \left(x + \frac{l}{N} \right) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2} N \sin 2\pi n x, & \text{если } n \equiv a \ (\bmod N), \\ \frac{1}{2} N \sin 2\pi n x, & \text{если } n \equiv -a \ (\bmod N), \\ 0, & \text{если } n \not\equiv \pm a \ (\bmod N). \end{cases}$$

В случае главного характера χ_0 по модулю N выражение для $\psi^{(q)}_{n;k}(x, \chi_0)$ значительно упрощается.

Можно воспользоваться, например, формулой (6) статьи [65]:

$$f_n^{(q)} = \omega(n)^{-1} \sum_{d/n} \mu(d)\omega(d) L_{nqd} f^*,$$

где $f^* = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \omega(m)\alpha_m$, L_m — изометрический оператор гильбертова пространства, определяемый равенством

$$L_m \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \alpha_\mu = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \alpha_{m\mu},$$

означающий в нашем случае умножение аргумента периодической функции на m.

В нашем случае $\omega(n) = \frac{1}{n^k}$, $\alpha_n(x) = \sqrt{2}\cos 2\pi n x$, если k чётно, $\alpha_n(x) = \sqrt{2}\sin 2\pi n x$, если k нечётно,

$$f^* = f^*(x) = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{(2\pi)^k}{k!} B_k(x - [x]),$$

откуда

$$f_n^{(q)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} n^k \sum_{D/N} \mu(D) D^{-k} B_k(Dqnx - [Dqnx]), \quad \sigma = \sum_{(n,N)=1} \frac{1}{n^{2k}}$$

(в обозначениях для $f_n^{(q)}$ из первой части множитель $\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ опущен).

Соответствующая ортонормированная система будет

$$\psi^{(q)}_{n;k}(\chi_0; x) = \left(\frac{(2k)!}{k!} |B_{2k}| \varphi_{2k}(Nn) \right)^{-\frac{1}{2}} N^k \times \\ \times \sum_{d/n} \sum_{D/N} \mu(D) D^{-k} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^k B_k(Ddqx - [Ddqx]), \tag{18}$$

где n пробегает все числа, взаимно простые с N, q — все числа, не содержащие иных простых множителей, кроме тех, которые входят в N. Очевидно, что

$$1,\ \psi_{n;k}^{(q)}(\chi_0;x),\ \psi_{0;l}^{(q)}(\chi_0;x),$$

где $k \not\equiv l \pmod 2$, n, q изменяются указанным образом, образуют полную ортонормированную систему $L^2(1,0)$. Кроме того, легко видеть, что $\psi_{n;k}^{(q)}(\chi_0;x)$ выражаются через ортонормированные системы примера A_2 следующим образом:

$$\psi_{n;k}^{(q)}(\chi_0;x) = \frac{N^k}{\sqrt{\varphi_{2k}(N)}} \sum_{D/N} \mu(D) D^{-k} \psi_{n;k}(Dqx). \tag{19}$$

Ясно, что

$$1,\ \psi_{n;k}^{(q)}(\chi_1;x),\ \psi_{n;l}^{(q)}(\chi_2;x),$$

если $k \not\equiv l \pmod 2$, $\chi_1(-1) = \chi_2(-1) = 1$, а также

$$1,\ \tilde{\psi}_{n;k}^{(q)}(\chi_1;x),\ \psi_{n;l}^{(q)}(\chi_2;x),$$

если $\chi_1(-1) = -1$, $\chi_2(-1) = 1$, $k \equiv l \pmod 2$, и

$$1,\ \psi_{n;k}^{(q)}(\chi_1;x),\ \tilde{\psi}_{n;l}^{(q)}(\chi_2;x),$$

если $\chi_1(-1) = \chi_2(-1) = -1$, $k \not\equiv l \pmod 2$, образуют ортонормированную полную систему пространства $L^2(0,1)$, если χ_1, χ_2 — любые характеры по модулю N, n и q изменяются указанным выше образом.

Другую группу примеров получим, интерпретируя гильбертово пространство как совокупность всех комплексных функций двух аргументов x, y с суммируемым квадратом модуля на единичном круге

$x^2 + y^2 \le 1$. Это пространство обозначим через $L^2(K)$. В качестве ортонормированной системы α_n возьмем

$$\alpha_n(x,y) = \left\{2\pi \int\limits_0^1 |f_n(r)|^2 r^{2n+1} dr\right\}^{-\frac{1}{2}} f_n(r) z^n, \quad z = x+iy, \quad r = |z|,$$

где $f_n(r)$ — последовательность функций, определенных в интервале (0,1). В самом деле, ортогональность $f_n(|z|)z^n$ очевидна, так как

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f_n(r)\bar{f}_m(r) z^n \bar{z}^m dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} f_n(r)\bar{f}_m(r) r^{n+m+1} e^{i(n-m)\varphi} dr d\varphi = 0,$$

если $n \ne m$. Значение нормирующего множителя вычисляется непосредственно.

Пример A_3. Полагая $f_n(r) = (-\log r)^{s-\frac{1}{2}} r^{-1}$, где $Re(s) > 0$, имеем

$$\alpha_n(x,y) = \{2\pi n^{2\sigma}\Gamma(2\sigma)\}^{-\frac{1}{2}} \left(\log \frac{1}{|z|}\right)^{s-\frac{1}{2}} \frac{z^n}{|z|}, \tag{20}$$

где $\sigma = Re(s) > 0$. Отсюда следует

$$f_n(z) = n^\sigma \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nm}(z)}{m^\sigma} = \{2\pi\Gamma(2\sigma)\}^{-\frac{1}{2}} n^{2\sigma} \frac{(\log \frac{1}{|z|})^{s-\frac{1}{2}}}{|z|} \cdot \frac{z^n}{1-z^n}. \tag{21}$$

Соответствующая ортонормированная система $\psi_1(z), \psi_2(z), \psi_3(z), ...$ определяется формулой

$$\psi_n(z) = \{2\pi\Gamma(2\sigma)\varphi_{2\sigma}(n)\}^{-\frac{1}{2}} (-\log|z|)^{s-\frac{1}{2}} |z|^{-1} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{d^{2\sigma} z^d}{1-z^d}. \tag{22}$$

Для случая $\omega(n) = n^{-\sigma-1}$ (пример A_4)

$$f_n(z) = -n^{\sigma+1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{mn}(z)}{m^{\sigma+1}} =$$
$$= \{2\pi\Gamma(2\sigma)\}^{-\frac{1}{2}} n^{2\sigma+2} (-\log|z|)^{s-\frac{1}{2}} \log(1-z^n)|z|^{-1}.$$

Соответствующая ортонормированная система будет

$$\psi_n(z) = \{2\pi\Gamma(2\sigma)\varphi_{2\sigma+2}(n)\}^{-\frac{1}{2}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^{2\sigma+2} \times$$
$$\times \log(1-z^d) \frac{(-\log|z|)^{s-\frac{1}{2}}}{|z|}. \tag{23}$$

Указанные два примера дают системы, для которых $1, \psi_n(z), \psi_n(\bar{z})$ образуют полную ортонормированную систему. Из предыдущего следует: *логарифмы многочленов*

$$Q_k(z) = \prod_{d/n} (1-z^d)^{\mu(\frac{n}{d}) d^k}$$

ортогональны на единичном круге $|z| \leq 1$, *если скалярное произведение дано формулой*

$$(f,g) = \int\int_{x^2+y^2 \leq 1} f(z)\overline{g(z)}|z|^{-2}(-\log|z|)^{k-3} dxdy.$$

Из общих соображений первой части и из теоремы о полноте системы $1, z, z^2, ..., \bar{z}, \bar{z}^2, \bar{z}^3, ...$ следует полнота системы $1, \frac{z^n}{1-z^n}, \frac{\bar{z}^n}{1-z^n}$ для пространства Гильберта, где (f,g) определено формулой

$$(f,g) = \int\int_{x^2+y^2 \leq 1} f(z)\overline{g(z)}|z|^{-2}(-\log|z|)^{2\sigma-1} dxdy, \quad \sigma > -\frac{1}{2}.$$

Легко построить пример последовательности функций на единичном круге с ограниченным D-свойством

$$(f_n, f_m) = g(m,n),$$

если

$$(n, N) = 1, \quad (m, N) = 1.$$

Для этого достаточно взять $\alpha_n(x, y)$, как в примере A_3, и $\omega(n) = \frac{\chi(n)}{n^s}, \sigma > \frac{1}{2}$; тогда получим

$$f_n(z) = \frac{N^\sigma n^{2\sigma}}{\sqrt{2\pi\Gamma(2\sigma)\zeta(2\sigma)\varphi_{2\sigma}(N)}} \cdot \frac{(-\log|z|)^{s-\frac{1}{2}}}{|z|} \sum_{m=1}^{\infty} \chi(m) z^{mn} =$$
$$= \frac{N^\sigma n^{2\sigma}}{\sqrt{2\pi\Gamma(2\sigma)\zeta(2\sigma)\varphi_{2\sigma}(N)}} \frac{(-\log|z|)^{s-\frac{1}{2}}}{(1 - z^{Nn})|z|} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) z^{kn},$$

где $\chi(n)$ — характер Дирихле по модулю N. Легко найти $f_n^{(q)}(z)$ и соответствующую ортонормированную систему.

Пример A_4. Для пространства функций, определенных на единичной окружности со скалярным умножением

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(e^{iD}) \overline{g(e^{iD})} dD,$$

простейшим примером ортонормированной последовательности будет $\alpha_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}$. Отсюда $(\omega(n) = \frac{1}{n})$ получаем пример последовательности

$$f_n(z) = \frac{n\sqrt{3}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \log(1 - z^n),$$

обладающей D-свойством, и пример последовательности, ортонормированной на единичной окружности:

$$\psi_n(z) = \frac{\sqrt{3}}{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varphi_2(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d \log(1 - z^d). \tag{24}$$

Конечно, здесь z означает $e^{i\varphi}$, где $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, и рассматриваемое пространство есть $L_2(0, 2\pi)$, но по многим причинам оказывается целесообразным изучать функции $\psi_n(z)$ при всех значениях z.

Так, например, можно использовать теорию вычетов при вычислении коэффициентов Фурье

$$\oint f(z)\psi_n(\bar{z})\frac{dz}{iz} = \oint f(z)\psi_n\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{iz},$$

где первоначальный путь интегрирования по единичной окружности может быть заменен другим, если $f(z)$ голоморфна внутри единичного круга. Так как между кругами $|z| \le 1$ и $|z| \le \rho < 1$ $\psi_n(z)$ однозначны и голоморфны, то интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} f(z)\psi_n(z^{-1})\frac{dz}{iz}$$

равен интегралу

$$\oint\limits_{|z|=R} f(z)\psi_n(z^{-1})\frac{dz}{iz},$$

если $f(z)$ можно продолжить в кольцо $1 \le |z| \le R$ как однозначную аналитическую функцию. Очевидно, (24) можно записать в форме

$$\psi_n(z) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi^3\varphi_2(n)}}\log Q_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi^3\varphi_2(n)}}\sum_{d/n} d\varphi\left(\frac{n}{d}\right)\log P_d(z), \quad (25)$$

где

$$Q_n(z) = \prod_{d/n}(1-z^d)^{d\mu(\frac{n}{d})}$$

— полином порядка $\varphi_2(n)$.

Очевидно,

$$Q_n(z) = \prod_{d/n} P_d(z)^{d\varphi(\frac{n}{d})},$$

где $P_m(z)$ — полином деления окружности.

Согласно принципу обращения Мёбиуса, из (24) следует

$$n\log(1-z^n) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}\sum_{d/n}\sqrt{\varphi_2(d)}\psi_d(z). \quad (26)$$

Пример. Интересный пример ортонормированной системы получим, взяв в качестве $\alpha_n(x)$ в теореме 3 первой части ортонормированные в интервале (0,1) функции Лагерра

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} e^{\frac{x}{2}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^{n-1} e^{-x}).$$

Известно (см., например, [41] и [46]), что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x) t^k = \frac{t}{1-t} e^{-\frac{x}{2} \cdot \frac{1+t}{1-t}}, \tag{27}$$

где $|t| < 1$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{kn}(x) t^{kn} = \frac{1}{n} \sum_{\omega(n)} \frac{\omega t}{1-\omega t} e^{-\frac{x}{2} \cdot \frac{1+t}{1-t}}, \tag{28}$$

где $\sum\limits_{\omega(n)}$ означает, что ω пробегает все корни n-й степени из единицы. Известно, что

$$\int_0^1 (-\log t)^{s-1} t^{n-1} dt = \frac{\Gamma(s)}{n^s},$$

откуда

$$F_n(x) = \bar{n}^s \sum \frac{\alpha_{kn}}{k^s} = \frac{n^{2\sigma-1}}{\Gamma(s)} \sum_{\omega(n)} \int_0^1 \frac{\omega}{1-\omega t} e^{-\frac{x}{2} \cdot \frac{1+\omega t}{1-\omega t}} (-\log t)^{s-1} dt,$$

$$Re(s) = \sigma > \frac{1}{2}. \tag{29}$$

Нетрудно доказать, что ряд $\bar{n}^s \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{kn}(x)}{k^s}$ действительно сходится к

$$\frac{n^{2\sigma-1}}{\Gamma(s)} \sum_{\omega(n)} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{1-\omega t} e^{-\frac{x}{2} \cdot \frac{1+\omega t}{1-\omega t}} (-\log t)^{s-1} dt$$

по метрике гильбертова пространства $L^2(0, \infty)$.

Для этого, в силу полноты последовательности $\alpha_n(x)$, достаточно вычислить коэффициенты Фурье (F_n, α_k) и показать, что они совпадают с коэффициентами ряда $\bar{n}^s \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{kn}}{k^s}$. Очевидно, что

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\zeta(2\sigma)}} F_n(x)$$

удовлетворяют соотношению

$$\int\limits_0^\infty f_n(x)\overline{f_m(x)}dx = (n, m)^{2\sigma}$$

и поэтому

$$\begin{gathered}\psi_n(x) = \Gamma(s)^{-1}\{\zeta(2\sigma)\varphi_{2\sigma}(n)\}^{-\frac{1}{2}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^{2\sigma-1} \times \\ \times \sum_{\omega(d)} \int\limits_0^1 \frac{\omega}{1-\omega t} e^{-\frac{x}{2}\cdot\frac{1+\omega t}{1-\omega t}} (-\log t)^{s-1} dt\end{gathered} \tag{30}$$

образуют полную ортонормированную систему пространства $L^2(0,\infty)$, как следует из теорем 4 и 5 первой части и из теоремы о полноте системы функций Лагерра.

Ввиду известных оценок $\alpha_n(x) = O(n^{-\frac{1}{4}})$ (см. [46], а также [26]) ряд $\sum \frac{\alpha_{kn}}{k^s}$, сходящийся по норме гильбертова пространства $L^2(0,\infty)$ при $Re(s) > \frac{1}{2}$, сходится и в обычном смысле слова при $Re(s) > \frac{3}{4}$.

Ортонормированная в интервале (–1, 1) последовательность

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x),$$

где

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

— полином Лежандра, дает возможность построить последовательность $\Phi_1(x), \Phi_3(x), \Phi_5(x), ...,$ представляющую собой полную на $L^2(-1,1)$ систему функций, удовлетворяющую условиям

$$\int\limits_{-1}^{1} \Phi_n(x)\overline{\Phi_m(x)}dx = (n,m)^{2\sigma+1}$$

при любых нечетных n, m (при четном n $\Phi_n(x)$ не определены).

В самом деле, вводя обозначения

$$\alpha_{2k+1}(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)$$

и учитывая известную формулу

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m P_m(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}},$$

имеем

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,2)=1}}^{\infty} t^k \frac{\alpha_k(x)}{\sqrt{k}} = \frac{t}{\sqrt{2(1-t^2x+t^4)}}, \tag{31}$$

а также

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,2)=1}}^{\infty} \frac{\alpha_{kn}(x)}{\sqrt{k}}t^{kn} = \frac{1}{\sqrt{2n}}\sum_{\omega(n)} \frac{t\omega}{\sqrt{1-t^2x\omega^2+t^4\omega^4}}, \tag{32}$$

откуда следует

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,2)=1}}^{\infty} \frac{\alpha_{kn}(x)}{(kn)^{s+\frac{1}{2}}} = \frac{n^{-1}}{\sqrt{2}\Gamma(s)}\sum_{\omega(n)} \int\limits_0^1 \frac{\omega(-\log t)^{s-1}}{\sqrt{1-t^2x\omega^2+t^4\omega^4}}dt$$

или

$$\Phi_n(x) = \frac{n^{2\sigma}}{\sqrt{2}\Gamma(s)}\sum_{\omega(n)} \int\limits_0^1 \frac{\omega(-\log t)^{s-1}}{\sqrt{1-t^2x\omega^2+t^4\omega^4}}dt.$$

Здесь всюду n — нечётное число, $\sigma = Re(s) > 0$. Легко получить выражение для соответствующей ортонормированной системы. В частности, при $s = 1$ получим полную ортонормированную систему пространства $L^2(-1,1)$

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\varphi_3(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^2 \sum_{\omega(d)} \int\limits_0^\omega \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2x+t^4}}, \qquad (33)$$

где n принимает все нечетные значения, $\omega(d)$ означает, что ω пробегает все корни d-й степени из единицы.

Легко дать примеры пар последовательностей, обладающих относительным D-свойством, и построить из них биортогональные пары последовательностей, пользуясь теоремой 8 [65].

Так, легко видеть, что

$$\theta_n(x) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^q B_p(dx - [dx]),$$

$$\theta_n^*(x) = \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^p B_q(dx - [dx])$$

образуют биортогональную пару

$$\int\limits_0^1 \theta_n(x)\theta_m^*(x)dx = 0, \text{ если } n \neq m,$$

$$\int\limits_0^1 \theta_n(x)\theta_m^*(x)dx = 0, \text{ если } n = m,$$

если $p \equiv q \pmod 2$. Пользуясь теоремой 9 [65], можно построить последовательность, биортогональную к

$$f_n(x) = \sqrt{12}n\left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right).$$

Эта последовательность будет

$$\hat{f}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{\sqrt{\varphi_2(nk)}} \psi_{nk}(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{\varphi_2(nk)} \sum_{d/nk} \varphi\left(\frac{nk}{d}\right) d\left(x\varphi(d) - \varphi(dx, d) - \frac{1}{2}\delta_\alpha^1\right).$$

Здесь $\varphi(m, n)$ означает число чисел, не превосходящих m и взаимно простых с n :

$$\delta_\alpha^1 = \begin{cases} 1, & \text{если } d = 1, \\ 0, & \text{если } d > 1. \end{cases}$$

Очевидно, что интеграл

$$\int_0^1 \left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right) f(x) dx,$$

где $f(x) = -f(1 - x)$, равен нулю тогда и только тогда, когда $f(x)$ принадлежит линейной замкнутой оболочке

$$\hat{f}_1(x), \hat{f}_2(x), ..., \hat{f}_{n-1}(x), \hat{f}_{n+1}(x), ...$$

Полагая $f(x) = \Phi'(x),\ \Phi(0) = 0$, легко заметить, что

$$-\int_0^1 \left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right) \Phi'(x) dx = n \int_0^1 \Phi(t) dt - \sum_{k=1}^{n} \Phi\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}\Phi(1).$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 \Phi(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Phi\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}\Phi(1) = 0,$$

если $\Phi'(x) = f_m(x),\ m \neq n$. Легко указать критерий для совпадения интеграла с интегральной суммой при различных значениях n. Так, например,

$$\int_0^1 \Phi(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Phi\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n}\Phi(1)$$

при $n > N$, если $\Phi(0) = 0$,

$$\Phi'(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \hat{f}_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos 2\pi kx,$$

где a и b — любые константы, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 < \infty$. Система $\hat{f}_n(x)$ представляет интерес в связи с соотношением [$\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, $\mu(n)$ — функция Мёбиуса.]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n}\left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \sin 2\pi nx, \tag{34}$$

где сходимость рядов понимается как сходимость по норме пространства $L^2(0,1)$. Очевидно,

$$\left\|\sum_{k=m}^{m+p} \frac{\Lambda(n)}{n}\left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right)\right\|^2 = \frac{1}{12}\sum_{k=m}^{m+p}\sum_{l=m}^{m+p} \frac{\Lambda(k)}{k^2}\frac{\Lambda(l)}{l^2}(k,l)^2,$$

откуда сходимость ряда, стоящего в левой части равенства, становится очевидной. Равенство (34) доказывается путем вычисления коэффициентов Фурье для его обеих частей по системе синусов, на основании формулы

$$\int_0^1 \left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right)\sin 2\pi nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ не делится на } n, \\ -\frac{n}{2\pi m}, & \text{если } n/m. \end{cases}$$

Аналогично доказывается, что

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}\left(nx - [nx] - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sin 2\pi x}{\pi}. \tag{35}$$

На основании формулы Куммера равенство (34) перепишется следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n}\left(nx-[nx]-\frac{1}{2}\right)=-\log\Gamma(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)(C+\log 2\pi)+ +\frac{1}{2}\log\pi-\frac{1}{2}\log\sin\pi x. \tag{36}$$

Умножая на $\Phi'(x)$ и интегрируя, получим соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\Bigg\{\int_0^1\Phi(x)dx-\frac{1}{n}\sideset{}{^*}\sum_{k=1}^{n}\Phi\left(\frac{k}{n}\right)\Bigg\}=$$

$$=\int_0^1\log\frac{\Gamma(x)\sqrt{\sin\pi x}}{\sqrt{\pi}}\Phi'(x)dx-A\int_0^1\Phi(x)dx+\frac{A-\log\pi}{2}\Phi(1), \tag{37}$$

где $A=\log 2\pi+C$, C — константа Эйлера — Маскерони, $\Phi'(x)$ — любая функция с суммируемым по Лебегу квадратом модуля производной, $\sum^*$ означает, что последний член суммы должен быть умножен на $\frac{1}{2}$. Аналогично из (35) следует

$$\pi m\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\Bigg\{\int_0^1\Phi(x)dx-\frac{1}{nm}\sideset{}{^*}\sum_{k=1}^{nm}\Phi\left(\frac{k}{nm}\right)\Bigg\}=\int_0^1\Phi'(x)\sin 2\pi mx\ dx, \tag{38}$$

откуда для случая, когда почти всюду $\Phi'(x)=-\Phi'(1-x)$, получим

$$2\pi^2\sum_{m=1}^{\infty}m^2\left|\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\int_0^1\Phi(x)dx-\frac{1}{mn}\sideset{}{^*}\sum_{k=1}^{mn}\Phi\left(\frac{k}{nm}\right)\Bigg\}\mu(n)\right|^2=\int_0^1|\Phi'(x)|^2dx. \tag{39}$$

Для

$$\Phi^*(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^x\sum_{k=1}^{N}a_kk^2\hat{f}_k(x)dx$$

левая часть (37) делается равной $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k \Lambda(k)$. Представляют интерес со стороны приложений к вопросам распределения простых чисел частные случаи $\Phi(x) = x^s$ и $\Phi(x) = e^{\alpha x} - 1$.

Во втором случае

$$\int\limits_0^1 \Phi(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}^{*}\Phi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{e^{\alpha}-1}{\alpha} - \frac{e^{\frac{\alpha}{n}}+1}{2n(e^{\frac{\alpha}{n}}-1)}(e^{\alpha}-1).$$

Обозначая $e^{\alpha} = x$, получим из (37)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\left\{\frac{x-1}{\log x} - \frac{x^{\frac{1}{n}}+1}{2n(x^{\frac{1}{n}}-1)}(x-1)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \log\frac{\Gamma(t)}{\Gamma(1-t)}\log x x^t dt - \frac{A(x-1)}{\log x} + \frac{A - \log\pi}{2}(x-1). \qquad (40)$$

Тождество (40) после вычисления интеграла может быть записано в следующей форме:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\left\{\frac{1}{\log x} - \frac{x^{\frac{1}{n}}+1}{(x^{\frac{1}{n}}-1)2n}\right\}(x-1) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \log n \frac{(x-1)\log x}{\pi^2 n^2 + \log^2 x}.$$

Последнее соотношение, имеющее некоторое сходство с известным тождеством Ламберта, может быть существенно обобщено.

Некоторые вопросы, аналогичные и частично совпадающие с изложенными здесь в связи с примером $\omega(n) = \frac{1}{n}$, $\alpha_n = \sqrt{2}\sin 2\pi n x$, содержатся в работе [30]. [После написания этой работы я заметил ряд работ, посвященных вопросам, аналогичным с рассмотренными здесь, в частности, работу Ph. Hartman'a [7], рассматривающую вопрос о полноте системы $\Phi(t), \Phi(2t), \Phi(3t), \ldots$, где $\Phi(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt$ и $a_{nm} = a_n a_m$ при $(n, m) = 1$].

Сделаю еще одно замечание, относящееся к случаю абстрактно заданного пространства.

Изометрические операторы L_n, определяемые формулами

$$L_n \sum_{k=1}^{\infty} c_k \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \alpha_{kn},$$

где α_k — заданная ортонормированная система, обладают свойством мультипликативности: $L_m L_n = L_{mn}$. Оператор $\zeta(s, L)$, где

$$\zeta(s, L) f = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} L_n f,$$

позволяет написать $f_n = \overline{n^s} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nk}}{k^s}$ в форме

$$f_n = \overline{n^s} \zeta(s, L) L_n \alpha_1,$$

а ψ_n — в форме

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\varphi_{2\sigma}(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \overline{d^s} L_d \zeta(s, L) L_n \alpha_1.$$

Таким образом, операторы

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{\varphi_{2\sigma}(n)}} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

превращают α_m в ортонормированную последовательность $A_n \alpha_m$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, полную на подпространстве, порожденном α_m, α_{2m}, $\alpha_{3m}, \ldots$. Далее

$$\alpha_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi_{2\sigma}(n)} \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \overline{d^s} L_d \zeta(s, L) \alpha_m,$$

где справа стоит разложение α_m в ряд Фурье по ортонормированной системе $L_m \psi_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Частный случай системы (7), соответствующий $k=1$,

$$\psi_n(x)=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)d\left(dx-[dx]-\frac{1}{2}\right), \tag{41}$$

подробно рассмотрен мною в [64].

Пользуясь очевидным соотношением

$$-\int\limits_0^1\Phi'(x)\left(nx-[nx]-\frac{1}{2}\right)dx=n\left(\int\limits_0^1\Phi(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}^{*}\,\Phi\left(\frac{k}{n}\right)\right),$$

легко вычислить коэффициенты Фурье:

$$(\Phi',\psi_n)=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\varphi_2(n)}}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)d^2\left(\int\limits_0^1\Phi(x)dx-\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}{}^{*}\,\Phi\left(\frac{k}{d}\right)\right).$$

Отсюда и на основании теоремы Фишера — Рисса получается решение следующей проблемы моментов: *как должны быть заданы константы a_n, чтобы существовала функция $\Phi(x)$ с суммируемым по Лебегу квадратом модуля производной такая, что*

$$\int\limits_0^1\Phi(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}^{*}\,\Phi\left(\frac{k}{n}\right)=a_k?$$

Условием, необходимым и достаточным для этого, является сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left|\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)d^2a_d\right|^2.$$

24. Асимптотика степенных рядов на границе круга сходимости и предельные теоремы теории чисел

Обычным приемом определения асимптотики степенного ряда $\sum a_n x^n$ с коэффициентами арифметической природы является рассмотрение соответствующего ряда Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, изучение которого упрощено тогда, когда a_n обладают свойством мультипликативности ($a_{nm} = a_n a_m, (n, m) = 1$), а также во многих других случаях, когда задание последовательности a_n так или иначе связано с теорией делимости (например, когда $a_n = \Lambda(n)$).

Во многих случаях такого рода удается найти аналитическое продолжение функции $f(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ в область более широкую, чем область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, и отсюда получить, пользуясь классическими приемами аналитической теории чисел, асимптотику ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ в точке $x = 1$. Для этого можно либо применить преобразование Меллина к функции $\frac{N^s}{s^2} f(s)$ путем переноса пути интеграции и применения теоремы Коши о вычетах, найти асимптотику суммы $\sum\limits_{n \le N} a_n$ и, следовательно, асимптотику ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ в точке $x = 1$, либо применить преобразование Меллина к функции $\Gamma(s) f(s)$, что более непосредственным образом приведет к получению асимптотики ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, когда аналитическая природа функции $f(s)$ известна.

Если нужно найти асимптотику ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ во всех «рациональных» точках единичной окружности, т.е. в точках $x = \exp(2\pi i r)$, где r — рационально, то изучают функции, полученные аналитическим продолжением всех рядов Дирихле $\sum \frac{a_n \chi(n)}{n^s}$, где $\chi(n)$ — все характеры Дирихле по всевозможным модулям.

При этом используется наличие двух свойств функции $\chi(n)$ — свойство мультипликативности и свойство, выраженное формулой

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \chi(n)\bar{\chi}(l) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv l \pmod{k}, \\ 0, & \text{если } n \not\equiv l \pmod{k}, \end{cases}$$

позволяющее выделять из ряда те члены, номера которых принадлежат данной примитивной прогрессии. Случай непримитивной прогрессии сводится к случаю примитивной путем рассмотрения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nm}}{n^s} \chi(n)$, где m — общий наибольший делитель начального члена и модуля прогрессии.

Мне удалось показать, что во многих случаях можно найти асимптотику степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ в «рациональных» точках единичной окружности, не прибегая к теории рядов Дирихле, преобразованию Меллина и аналитическому продолжению, пользуясь только формальными тождествами вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{P_n'(x)}{P_n(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{\rho(n)} \frac{\rho x}{1-\rho x} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{dx^d}{1-x^d}$$

и другими аналогичными тождествами, правая часть которых является, в известном смысле слова, разложением функции $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ на простейшие дроби. Здесь $P_n(x) = \prod\limits_{d/n} (1-x^d)^{\mu(\frac{n}{d})}$ — полином деления окружности, символ $\sum\limits_{\rho(n)}$ означает, что суммирование распространено по всем корням n-й степени из единицы. В случае $b_n = O(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}})$

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(1-|x|)\sum\limits_{d/n}\mu(\frac{n}{d})\frac{dx^d}{1-x^d}$ сходится равномерно в круге $|x|\leq 1$, как в этом нетрудно убедиться из оценки

$$(1-|x|)\left|\sum_{d/n}\mu\left(\frac{d}{n}\right)\frac{dx^d}{1-x^d}\right|\leq\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)^2\frac{|x|d(1-|x|)}{1-|x|^d}\leq$$

$$\leq\sum_{d/n}\mu(d)^2=2^{\nu(n)},$$

где $\nu(n)$ — число простых делителей числа n.

Отсюда $\lim\limits_{x\to\rho}(1-|x|)\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n=b_k$, если

$$\rho=\exp\left(2\pi i\frac{l}{k}\right),\ (l,k)=1.$$

В случае, когда $a_n\geq 0$ из соотношения $\sum\limits_{n=1}^{N}a_n\sim AN$ следует $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n\sim\frac{A}{1-x}$ и наоборот (теорема Чезаро и теорема Харди — Литтлвуда).

Легко также показать, что указанные взаимно обратные теоремы можно несколько обобщить и показать эквивалентность соотношений

$$\sum_{\substack{n\equiv l \pmod k\\ n\leq N}}a_n\sim A(k,l)N\quad(N\to\infty),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\sim\frac{B(k,l)}{1-|x|}\quad\left(x\to\exp\left(2\pi i\frac{l}{k}\right)\right)$$

при соответственных связях между константами $A(k,l)$ и $B(k,l)$, если $a_n\geq 0$.

Так, легко усмотреть, что теорема Валле Пуссена — Адамара $\sum\limits_{\substack{n\equiv l \pmod k\\ n\leq N}}\Lambda(n)\sim\frac{1}{\varphi(k)}N$ эквивалентна соотношению $f(x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\times$

$\times x^n \sim \frac{\mu(k)}{\varphi(k)} \frac{1}{1-|x|}$ (x стремится по радиусу к корню (точной) k-й степени из единицы).

Однако этот факт эквивалентности двух указанных соотношений остается бесполезным до тех пор, пока не найден прямой способ определения асимптотики степенного ряда. Такой способ, основанный на рассмотрении тождества, мною найден для многих степенных рядов.

Так, например, легко доказать эквивалентность двух следующих соотношений:

$$\lim_{x\to\infty}(1-|x|)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)x^n = \frac{6}{\pi^2}\frac{\mu(k)}{\varphi_2(k)}, \tag{1}$$

$$\rho = \exp\left(2\pi i \frac{l}{k}\right), \quad (l,k)=1, \quad \varphi_2(k) = k^2 \prod_{P/k}\left(1-\frac{1}{P^2}\right),$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2} \sum_{\substack{n\equiv l \pmod k\\ n\le N}} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}\frac{k}{\varphi^2(k)} \prod_{p/(k,l)}\left(1-\frac{1}{p}\right). \tag{2}$$

Формула (1) легко может быть получена из тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)x^n = \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi_2(n)}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{dx^d}{(1-x^d)^2} =$$
$$= \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi_2(n)}\sum_{\omega(n)}\frac{\omega x}{(1-\omega x)}.$$

Таким образом, функция $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)x^n$ не только обладает асимптотикой, выражающей предельное соотношение (2), но и является простейшей из функций, обладающей этой асимптотикой, подобно тому, как $\pi\ ctg\ \pi z$ является простейшей из функций, имеющей простые полюсы с вычетами, равными единице, во всех целых числах.

Тождеств указанного типа можно получить очень много, пользуясь общим тождеством (1) из моей работы [71], а также другими приемами.

Аналогичную роль играют тождества вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{d^\alpha x^d}{(1-x^d)^\alpha}. \tag{3}$$

Пользуясь этими тождествами, легко доказать предельные формулы

$$\lim_{x\to\rho}(1-|x|)^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = b_k,$$

где $\rho = \exp(2\pi i \frac{l}{k})$, $(l,k)=1$, из которых легко получить значения пределов $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N^\alpha} \sum\limits_{\substack{n\equiv l \pmod k\\ n\le N}} a_n$ при любых l и k, если только $a_n \ge 0$.

Неудобство тождества (3) состоит в том, что биномиальные коэффициенты в разложении $\frac{x^d}{(1-x^d)^\alpha}$ не обладают свойством мультипликативности, поэтому целесообразнее рассматривать тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^\alpha f_\alpha(x^d), \tag{4}$$

где $f_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum\limits_{m=1}^{\infty} m^{\alpha-1} t^m$, так как последний ряд имеет мультипликативные коэффициенты и функция $f_\alpha(x)$ в отношении асимптотики на границе единичного круга подобна $\frac{x}{(1-x)^\alpha}$.

Разложение (4) по функциям $\sum\limits_{d/n} \mu(\frac{n}{d}) d^\alpha f_\alpha(x^d)$, тесно связанным с производными дробного порядка от логарифмической производной деления окружности, не может иметь сколь-нибудь общих классов рядов, так как предел $\lim\limits_{x\to\rho}(1-|x|)^\alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, равный b_k $\Big(\rho =$

$= \exp(2\pi i \frac{l}{k})\Big)$, зависит только от k. Более общие классы тождеств можно получить, изучая разложения по функциям

$$Q_n(x) = \sum_{\rho(n)} \frac{\rho x B(\rho)}{1 - \rho x},$$

где $B(\rho)$ любым образом зависит от ρ. Очень просто вычисляется сумма $\sum\limits_{\rho(n)} \frac{\rho x}{1-\rho x}\chi(l)$, где $l = \frac{\log \rho}{2\pi i} n$ и где χ — любой вещественный характер Дирихле.

Функций, разлагающихся указанным образом на простейшие дроби, характеризующие поведение их вблизи всех рациональных точек единичной окружности, очень много. Сюда относятся многие ряды с коэффициентами, связанными с теорией делимости, модулярные функции Эйзенштейна первой ступени, степени Якобиевской тэта-функции: $\vartheta(x)^4, \vartheta(x)^6, \vartheta(x)^8$, функции $\vartheta(x)^3\vartheta(x^2), \vartheta(x)^3\vartheta(x^3)$ и многие другие.

Во всех случаях такого разложения можно получить указанным выше приемом соответствующие предельные теоремы о сумме коэффициентов, а в некоторых случаях определить асимптотику коэффициента и даже предугадать точное выражение коэффициента.

25. Элементарные доказательства некоторых предельных теорем теории чисел

В настоящей статье будет дан элементарный вывод некоторых асимптотических теорем теории чисел, основанный на рассмотрении линейных операторов. Основой дальнейшего будет аналогия между рядами Дирихле и операторами, состоящая в том, что ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ ставится в соответствие оператор $Lf(x) = \sum\limits_{n\le x} a_n f(\frac{x}{n})$, причем перемножению рядов будет соответствовать перемножение операторов. Легко убедиться, например, что операторы ζ, ζ^{-1}, где $\zeta f(x) = \sum\limits_{n\le x} f(\frac{x}{n}), \zeta^{-1} f(x) = \sum\limits_{n\le x} \mu(n) f(\frac{x}{n})$, будут обратными друг другу (принцип обращения Мёбиуса). Основой дальнейшего будет также ряд предложений о влиянии операторов ζ, ζ^{-1} на асимптотические оценки.

Легко показать, что

$$\zeta O(x\log^k x) = O(x\log^{k+1} x), \quad \zeta^{-1} O(x\log^k x) = O(x\log^{k+1} x). \tag{1}$$

Известный, элементарно доказываемый факт ограниченности суммы $\sum\limits_{n\le x} \frac{\mu(n)}{n}$ может быть записан в форме

$$\zeta^{-1} x = O(x). \tag{2}$$

Нетрудно также доказать формулу

$$\zeta x\log^k x = \frac{1}{k+1} x\log^{k+1} x + \alpha_1^{(k)} x\log^k x + \ldots + \alpha_{k+1}^{(k)} x + O(\log^{k+1} x) \tag{3}$$

путем применения, например, формулы суммирования Эйлера — Маклорена.

Известная оценка $\sum \log^k \frac{x}{n} = O(x)$ приводит к формулам:

$$\zeta O(\log^k x) = O(x), \quad \zeta^{-1} O(\log^k x) = O(x). \tag{4}$$

Применяя к обеим частям (3) оператор ζ^{-1}, вводя обозначения $V_k(x) = \zeta^{-1} x \log^k x$ и учитывая (2), (4), получим

$$(k+1)x \log^k x = V_{k+1}(x) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i^{(k)} V_i(x) + O(x), \tag{5}$$

откуда путем последовательного разрешения относительно $V_i(x)$ вытекает

$$\zeta^{-1} x \log^{k+1} x = V_{k+1}(x) = (k+1)x \log^k x + xQ_k(\log x) + O(x), \tag{6}$$

где $Q_k(t)$ — многочлен $k-1$ степени от t.

Из последней формулы следует $(k > 1)$

$$\sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} \log^k \frac{x}{n} = k \log^{k-1} x + O(\log^{k-2} x). \tag{7}$$

Вводя обобщённую функцию Мангольдта $\Lambda_k(n) = \sum\limits_{d/n} \mu(d) \log^k \frac{n}{d}$ и обобщённую функцию Чебышева $\psi_k(x) = \sum\limits_{n \le x} \Lambda_k(n) = \sum\limits_{n \le x} \mu(n) \times$ $\times F_k(\frac{x}{n})$, где

$$F_k(x) = \sum_{n \le x} \log^k n = x \log^k x + a_1^{(k)} x \log^{k-1} x + \ldots + a_k^{(k)} x + O(\log^k x), \tag{8}$$

легко получить на основании (4), (6) следующую формулу $(k > 1):$

$$\begin{aligned} \psi_k(x) = \zeta^{-1} F_k(x) = \zeta^{-1}[x \log^k x + a_1^{(k)} x \log^{k-1} x + \ldots + a_k^{(k)} x + \\ + O(\log^k x)] = kx \log^{k-1} x + O(x \log^{k-2} x), \end{aligned} \tag{9}$$

откуда $(k > 1)$

$$\psi_k(x) \sim kx \log^{k-1} x \tag{10}$$

при $x \to \infty$. Доказать формулу (9) при $k = 1$ (теорему Адамара) так просто не удается. При $k = 1$, пользуясь (2), получим только $\psi(x) = O(x)$ (неравенство Чебышева). Легко убедиться в том, что $\Lambda_k(n)$ отлично от нуля только тогда, когда число различных делителей n не превосходит k. Поэтому $\psi_k(x)$ связано с распределением чисел, имеющих ограниченное количество простых делителей, так же как $\psi(x)$ связано с распределением простых чисел. Из предыдущего видно, что случай нескольких простых делителей элементарней, чем случай одного простого делителя. Легко также на основании принципа обращения Мёбиуса вывести

$$\sum_{d/n} \Lambda_k(d) = \log^k n, \tag{11}$$

откуда путем суммирования по n

$$\sum_{n \le x} \left[\frac{x}{n}\right] \Lambda_k(n) = \sum_{n \le x} \psi_k\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \le x} \log^k n \tag{12}$$

— обобщённое тождество Чебышева.

Из $\sum\limits_{n \le x} \Lambda_k(n) = O(x \log^{k-1} x)$ и из (8) легко получим

$$\sum_{n \le x} \frac{\Lambda_k(n)}{n} = \log^k x + O(\log^{k-1} x) \tag{13}$$

на основании следующих выкладок:

$$\sum_{n \le x} \left[\frac{x}{n}\right] \Lambda_k(n) = x \sum_{n \le x} \frac{\Lambda_k(n)}{n} - \sum_{n \le x} \Lambda_k(n) \left(\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right]\right) =$$

$$= x \sum_{n \le x} \frac{\Lambda_k(n)}{n} + O(x \log^{k-1} x) = \sum_{n \le x} \log^k n = x \log^k x + O(x \log^{k-1} x).$$

Формула (13) является обобщением формулы Мертенса $\sum\limits_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1)$, причем в предыдущем выводе содержится и вывод формулы Мертенса.

Интересные соотношения получим, вводя операторы $Af(x) = \log x f(x)$:

$$\sigma_k f(x) = \log^k x f(x) + C_k^1 \sum_{n\le x}\Lambda(n)\log^{k-1}\frac{x}{n} f\left(\frac{x}{n}\right) +$$

$$+C_k^2 \sum_{n\le x}\Lambda_2(n)\log^{k-2}\frac{x}{n} f\left(\frac{x}{n}\right) + \ldots + \sum_{n\le x}\Lambda_k(n) f\left(\frac{x}{n}\right)$$

и рассматривая произведение $\zeta\sigma_k$. Имеем

$$\zeta\sigma_k f(x) = \sum_{n\le x}\log^k\frac{x}{n} f\left(\frac{x}{n}\right) + C_k^1 \sum_{nm\le x}\Lambda(n)\log^{k-1}\frac{x}{nm} f\left(\frac{x}{nm}\right) +$$

$$+ \ldots + \sum_{nm\le x}\Lambda_k(n) f\left(\frac{x}{nm}\right) = \sum_{n\le x}\log^k\frac{x}{n} f\left(\frac{x}{n}\right) +$$

$$+ C_k^1 \sum_{n\le x}\log n\log^{k-1}\frac{x}{n} f\left(\frac{x}{n}\right) + \ldots + \sum_{n\le x}\log^k n f\left(\frac{x}{n}\right) =$$

$$= \log^k x\sum_{n\le x} f\left(\frac{x}{n}\right) = A^k\zeta f(x).$$

Здесь использовано $\sum\limits_{d/n}\Lambda_p(d) = \log^p n$.

Полученное соотношение $\zeta\sigma_k = A^k\zeta$ может быть также записано в форме

$$\sigma_k = \zeta^{-1}A^k\zeta, \tag{14}$$

откуда видно, что $\sigma_k = \sigma_1^k$, где

$$\sigma_1 f(x) = \sigma f(x) = \log x f(x) + \sum_{n\le x}\Lambda(n) f\left(\frac{x}{n}\right). \tag{15}$$

Точно так же легко доказать формулу

$$\zeta^{-p} A \zeta^{p} f(x) = \log x f(x) + p \sum_{n \le x} \Lambda(n) f\left(\frac{x}{n}\right), \tag{16}$$

где p — любое вещественное или даже любое комплексное число.

Смысл оператора ζ^p раскрывается в общем случае по формуле $\zeta^p f(x) = \sum\limits_{n \le x} a_n f\left(\frac{x}{n}\right)$, где a_n — коэффициенты ряда Дирихле для $\zeta(s)^p$.

Естественно прилагать обе части формулы (14) к функциям, для которых $\zeta f(x)$ может быть просто выражено. Так как согласно известному тождеству Чебышева

$$\zeta \psi(x) = \sum_{n \le x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = \log[x]! \text{ и } \log[x]! = x \log x - x + O(\log x)$$

(формула Стирлинга и оценка приращения $x \log x - x - \{[x] \log[x] - [x]\}$ по теореме Лагранжа о среднем значении), то

$$\sigma \psi(x) = \zeta^{-1} \log x \log[x]! = \zeta^{-1}(x \log^2 x - x \log x + O(\log^2 x)),$$

откуда $\sigma\psi(x) = 2x \log x + O(x)$ или

$$\log x \psi(x) + \sum_{n \le x} \Lambda(n) \psi\left(\frac{x}{n}\right) = 2x \log x + O(x) \tag{17}$$

(формула Сельберга).

Применяя более общий оператор σ_k, после всех преобразований и упрощений получим следующее обобщение формулы Сельберга:

$$\psi(x) \log^k x + k \sum_{n \le x} \Lambda(n) \log^{k-1} \frac{x}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = 2x \log^k x + O(x \log^{k-1} x). \tag{18}$$

Из этой формулы легко вывести

$$\psi(x)\log^k x+\sum_{n\le x}\Lambda(n)\log^{k-1} n\psi\left(\frac{x}{n}\right)=2x\log^k x+O(x\log^{k-1} x). \quad (19)$$

Исследования, здесь изложенные, имеют пункты соприкосновения с исследованиями А. Сельберга [20] и Г. Шапиро [22–24], но получены мною раньше и независимо от этих авторов.

26. Упрощение элементарного доказательства А. Сельберга асимптотического закона распределения простых чисел

Асимптотический закон распределения простых чисел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1$$

(где $\pi(x)$ — число простых чисел на отрезке $[1, x]$) был впервые доказан в 1896 г. (одновременно Адамаром и де Ла Валле — Пуссеном) аналитическим методом. Задача об элементарном доказательстве этого факта оказалась трудной и только в 1949 г. А. Сельберг [20] дал элементарное доказательство асимптотического закона. Доказательство Сельберга является технически сложным. Усилия ряда математиков были направлены к тому, чтобы упростить доказательство и тем самым лучше понять его идею. Г. Шапиро [22] вывел соотношение $\sum\limits_{p\leq x} \ln^2 p + \sum\limits_{p,q\leq x} \ln p \ln q = 2x\ln x + O(x)$ (играющее основную роль в доказательстве Сельберга) проще, чем оно выводится в оригинальной работе. Вывод же из этого соотношения асимптотического закона оставался трудным.

Асимптотический закон распределения простых чисел имеет несколько эквивалентных формулировок (в том смысле, что одно утверждение выводится из другого путём элементарных рассуждений), например:

$$\sum_{n\leq x} \mu(n) = o(x),\ \sum_{n\leq x} \frac{\mu(n)}{n} = o(x),\ \sum_{p\leq x} \ln p \sim x$$

(в последнем виде его доказывает Сельберг).

Мы заметили, что если проводить доказательство закона по тому типу, как это делает Сельберг, но в форме $\sum_{n\le x}\mu(n)=o(x)$, то техническая сторона доказательства сильно упрощается. Следует заметить, что вывод из $\sum_{n\le x}\mu(n)=o(x)$ более обычных форм асимптотического закона не является простым (см. дополнения 7 и 8), однако он давно известен и не в нём состоит трудность элементарного доказательства закона.

Статья состоит из основного текста, где даётся доказательство закона и ряда дополнений. В ходе доказательства используется соотношение $\sum_{p\le x}\ln^2 p+\sum_{p,q\le x}\ln p\ln q=2x\ln x+O(x)$, которое выводится по Г. Шапиро. Для чтения статьи необходимо знакомство с основами теории чисел. Вполне достаточно материала, содержащегося в первых двух главах [33].

Обозначения обычные: p и q — простые числа, $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта ($\Lambda(n)=\ln p$ для $n=p^l$ и $\Lambda(n)=0$ для других целых положительных n) $\sum_{p\le x}\ln p=\vartheta(x)$, $\sum_{n\le x}\mu(n)=M(x)$. В силу $|\mu(n)|\le 1$ имеем $-x\le M(x)\le x$.

Лемма 1.

$$\sum_{n\le x}\frac{\mu(n)}{n}=O(1). \tag{1}$$

Доказательство. См. дополнение 1.

Лемма 2.

$$\ln xM(x)+\sum_{p\le x}\ln pM\left(\frac{x}{p}\right)=O(x). \tag{2}$$

Доказательство. Действительно, $\ln x\sum_{n\le x}\mu(n)-\sum_{n\le x}\mu(n)\ln n=$

$$= \sum_{n\le x} \mu(n) \ln \tfrac{x}{n} = O\Biggl(\sum_{n\le x} \ln \tfrac{x}{n}\Biggr) = O(x).$$

Далее

$$\sum_{n\le x} \mu(n) \ln n = \sum_{p\le x} \ln p \sum_{ps\le x} \mu(ps) = -\sum_{p\le x} \ln p \sum_{\substack{s \le \frac{x}{p} \\ (s,p)=1}} \mu(s) =$$

$$= -\sum_{p\le x} \ln p \Biggl(\sum_{s\le\frac{x}{p}} \mu(s) + O\biggl(\frac{x}{p^2}\biggr)\Biggr) = -\sum_{p\le x} \ln p \sum_{s\le\frac{x}{p}} \mu(s) + O\biggl(x \sum_{2}^{\infty} \frac{\ln p}{p^2}\biggr).$$

Но ряд $\sum\limits_{p=2}^{\infty} \frac{\ln p}{p^2}$ — сходящийся. Таким образом,

$$\ln x \sum_{n\le x} \mu(n) + \sum_{p\le x} \ln p \sum_{s\le\frac{x}{p}} \mu(s) = O(x),$$

что и требовалось.

Меняя в двойной сумме порядок суммирования, лемме 2 придадим форму

$$\ln x M(x) + \sum_{n\le x} \mu(n) \vartheta\biggl(\frac{x}{n}\biggr) = O(x). \tag{3}$$

Нижеследующая лемма представляет обобщение классического разрывного равенства

$$\sum_{d/n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, \\ 0, & \text{при } n > 1. \end{cases}$$

Лемма 3. *Имеют место равенства*

$$\sum_{d/n} \mu(d) \ln \frac{x}{d} = \begin{cases} \ln x, & \textit{при } n = 1, \\ \Lambda(n), & \textit{при } n > 1; \end{cases} \tag{4}$$

$$\sum_{d/n}\mu(d)\ln^2\frac{x}{d}=\begin{cases}\ln^2 x, & \textit{при } n=1,\\ \ln p\ln\frac{x^2}{p}, & \textit{при } n=p^\alpha,\ \textit{где } \alpha\ge 1,\\ 2\ln p\ln q, & \textit{при } n=p^\alpha q^\beta,\ \textit{где } \alpha\ge 1 \ \textit{и } \beta\ge 1,\\ 0, & \textit{для остальных } n.\end{cases} \tag{5}$$

Доказательство равенства (4). Если $n=1$, то это очевидно; если $n=p^\alpha$, то $\sum\limits_{d/n}\mu(d)\ln^2\frac{x}{d}=\ln x-\ln\frac{x}{p}$; если $n=p^\alpha n',\ n'>1$, $(n',p)=1$, то

$$\sum_{d/n}\mu(d)\ln\frac{x}{d}=\sum_{d/n'}\mu(d)\ln\frac{x}{d}+\sum_{d/n'}\mu(dp)\ln\frac{x}{dp}=\ln p\sum_{d/n'}\mu(d)=0.$$

Доказательство равенства (5). Если $n=1$, то это очевидно; если $n=p^\alpha$, то

$$\sum_{d/n}\mu(d)\ln^2\frac{x}{d}=\ln^2 x-\ln^2\frac{x}{p}=\ln p\ln\frac{x^2}{p};$$

если $n=p^\alpha q^\beta$, то

$$\sum_{d/n}\mu(d)\ln^2\frac{x}{d}=\ln^2 x-\ln^2\frac{x}{p}-\ln^2\frac{x}{q}+\ln^2\frac{x}{pq}=$$
$$=\ln p\ln\frac{x^2}{p}-\ln p\ln\frac{\left(\frac{x}{q}\right)^2}{p}=2\ln p\ln q;$$

если $n = p^\alpha q^\beta n'$, где $(n', p) = 1,\ (n', q) = 1,\ n' > 1$, то

$$\sum_{d/n'} \mu(d) \ln^2 \frac{x}{d} = \sum_{d/n'} \mu(d) \ln^2 \frac{x}{d} +$$

$$+ \sum_{d/n'} \mu(dp) \ln^2 \frac{x}{dp} + \sum_{d/n'} \mu(dq) \ln^2 \frac{x}{dq} + \sum_{d/n'} \mu(dpq) \ln^2 \frac{x}{dpq} =$$

$$= \sum_{d/n'} \mu(d) \left(\ln^2 \frac{x}{d} - \ln^2 \frac{x}{dp} - \ln^2 \frac{x}{dq} + \ln^2 \frac{x}{dpq} \right) =$$

$$= 2 \ln p \ln q \sum_{d/n'} \mu(d) = 0.$$

Лемма 4.

$$\sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} \ln \frac{x}{n} = O(1). \tag{6}$$

Как известно, $\ln x = \sum\limits_{v \le x} \frac{1}{v} + C + O(\frac{1}{x})$, C — эйлерова постоянная (см. дополнение 3). Поэтому

$$\sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} \ln \frac{x}{n} = \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} \left(\sum_{v \le \frac{x}{n}} \frac{1}{v} + C + O\left(\frac{n}{x} \right) \right) =$$

$$= \sum_{m \le x} \frac{\sum\limits_{d/m} \mu(d)}{m} + O(1) + O(1) = O(1).$$

Лемма 5.

$$\sum_{n \le x} \Lambda(n) = O(x). \tag{7}$$

На основании леммы 3 $\sum\limits_{n \le x} \sum\limits_{d/n} \mu(d) \ln \frac{x}{d} = \ln x + \sum\limits_{n \le x} \Lambda(n)$. С другой стороны,

$$\sum_{n \le x} \sum_{d/n} \mu(d) \ln \frac{x}{d} = \sum_{d \le x} \mu(d) \ln \frac{x}{d} \left[\frac{x}{d} \right] =$$

$$= x \sum_{d \le x} \frac{\mu(d)}{d} \ln \frac{x}{d} + O\left(\sum_{d \le x} \ln \frac{x}{d} \right) = O(x).$$

Лемма 6.

$$\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n}=\ln x+O(1). \tag{8}$$

Доказательство. См. дополнение 5.

Лемма 7.

$$\sum_{n\le x}\frac{\mu(n)}{n}\ln^2\frac{x}{n}=2\ln x+O(1). \tag{9}$$

Доказательство.

$$\sum_{n\le x}\frac{\mu(n)}{n}\ln^2\frac{x}{n}=\sum_{n\le x}\frac{\mu(n)}{n}\ln\frac{x}{n}\left(\sum_{v\le\frac{x}{n}}\frac{1}{v}+C+O\left(\frac{n}{x}\right)\right)=$$

$$=\sum_{n\le x}\sum_{v\le\frac{x}{n}}\frac{\mu(n)\ln\frac{x}{n}}{nv}+O(1)+O\left(\frac{\sum\limits_{n\le x}\frac{\ln\frac{x}{n}}{n}}{x}\right)=$$

$$=\sum_{n\le x}\frac{\sum\limits_{d/n}\mu(d)\ln\frac{x}{d}}{n}+O(1)=\ln x+\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n}+O(1)=2\ln x+O(1).$$

Лемма 8.

$$\sum_{p\le x}\ln^2 p+\sum_{pq\le x}\ln p\ln q=2x\ln x+O(x). \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\sum_{n\le x}\sum_{d/n}\mu(d)\ln^2\frac{x}{d}=\sum_{d\le x}\mu(d)\ln^2\frac{x}{d}\left[\frac{x}{d}\right]=$$

$$=x\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d}\ln^2\frac{x}{d}+O\left(\sum_{d\le x}\ln^2\frac{x}{d}\right)=2x\ln x+O(x).$$

С другой стороны, на основании равенства (5)

$$\sum_{n\le x}\sum_{d/n}\mu(d)\ln^2\frac{x}{d}=\ln^2 x+\sum_{p^\alpha\le x}\ln p\ln\frac{x^2}{p}+\sum_{\substack{p^\alpha q^\beta\le x\\ p\ne q}}\ln p\ln q.$$

Но

$$\sum_{p^\alpha\le x}\ln p\ln\frac{x^2}{p}=\sum_{p\le x}\ln p\ln\frac{x^2}{p}+$$
$$+O\Bigl(\sum_{p^2\le x}\ln^2 p\Bigr)+O\Bigl(\sum_{\substack{p^\alpha\le x\\ \alpha\ge 2}}\ln p\ln x^2\Bigr)=$$
$$=\sum_{p\le x}\ln p\ln\frac{x^2}{p}+O\Bigl(\ln x\ln x\sum_{p\le\sqrt{x}}\ln p\Bigr)=\sum_{p\le x}\ln p\ln\frac{x^2}{p}+O(\sqrt{x}\ln^2 x)$$

(сумма $\ln x\sum\limits_{\substack{p^\alpha\le x\\ \alpha\ge 2}}\ln p$ разбивается на $O(\ln x)$ слагаемых сообразно $\alpha=2,3,\ \ldots$).

$$\sum_{\substack{p^\alpha q^\beta\le x\\ p\ne q}}\ln p\ln q=\sum_{pq\le x}\ln p\ln q+$$
$$+O\Bigl(\sum_{p^2\le x}\ln^2 p\Bigr)+O\Bigl(\sum_{\substack{p^\alpha q^\beta\le x\\ \alpha\ge 2;\ \beta\ge 1}}\ln p\ln q\Bigr)=$$
$$=\sum_{pq\le x}\ln p\ln q+O\Bigl(\ln x\sum_{p\le\sqrt{x}}\ln p\Bigr)+O\Bigl(\sum_{\substack{p^\alpha\le x\\ \alpha\ge 2}}\ln p\ \vartheta\Bigl(\frac{x}{p^\alpha}\Bigr)\Bigr)=$$
$$=\sum_{pq\le x}\ln p\ln q+O(\sqrt{x}\ln x)+O\Bigl(x\sum_{\substack{p^\alpha\le x\\ \alpha\ge 2}}\frac{\ln p}{p^\alpha}\Bigr)=\sum_{pq\le x}\ln p\ln q+O(x).$$

Итак $\sum\limits_{p\le x}\ln p\ln\frac{x^2}{p}+\sum\limits_{pq\le x}\ln p\ln q=2x\ln x+O(x)$. Далее $\sum\limits_{p\le x}\ln p\ln\frac{x^2}{p}=$ $=2\ln x\sum\limits_{p\le x}\ln p-\sum\limits_{p\le x}\ln^2 p$. Доказательство леммы будет закончено, если доказать, что $\sum\limits_{p\le x}\ln^2 p=\ln x\sum\limits_{p\le x}\ln p+O(x)$. Это так, ибо

$$\sum_{p\le x}\ln^2 p=\ln x\sum_{p\le x}\ln p-\sum_{p\le x}\ln p\int\limits_p^x\frac{du}{u}=$$

$$=\ln x\sum_{p\le x}\ln p-\int\limits_2^x\frac{\sum\limits_{p\le u}\ln p}{u}du=\ln x\sum_{p\le x}\ln p+O(x)$$

(ибо $\sum\limits_{p\le u}\ln p=O(u)$). Лемма доказана.

Отсюда следует также, что утверждение леммы 8 можно записать в виде

$$\ln x\vartheta(x)+\sum_{p\le x}\ln p\ \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)=2x\ln x+O(x). \tag{11}$$

Напрашивается аналогия между неравенством (2) и неравенством (11). Мы будем пользоваться следующим видом утверждения леммы 8:

$$\vartheta(x)+\sum_{pq\le x}\frac{\ln p\ln q}{\ln pq}=2x+O\left(\frac{x}{\ln 2x}\right). \tag{12}$$

Чтобы это получить, рассмотрим

$$\frac{1}{\ln x}\sum_{pq\le x}\ln p\ln q-\sum_{pq\le x}\frac{\ln p\ln q}{\ln pq}=\sum_{pq\le x}\ln p\ln q\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\ln pq}\right)=$$

$$=-\sum_{pq\le x}\ln p\ln q\int\limits_{pq}^x\frac{du}{u\ln^2 u}=-\int\limits_6^x\frac{\sum\limits_{pq\le u}\ln p\ln q}{u\ln^2 u}du=O\left(\int\limits_6^x\frac{du}{\ln u}\right)=$$

$$=O\left(\int\limits_6^{\sqrt{x}}\frac{du}{\ln u}\right)O\left(\int\limits_{\sqrt{x}}^x\frac{du}{\ln u}\right)=O(\sqrt{x})+O\left(\frac{x}{\ln\sqrt{x}}\right)=O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

[Мы воспользовались соотношением $\sum\limits_{pq\le u}\ln p\ln q=O(u\ln u)$, которое следует из (11)]. Таким образом, неравенство Сельберга (10) может быть записано в форме $\vartheta(x) + \sum\limits_{pq \le x} \frac{\ln p \ln q}{\ln pq} = 2x + O(\frac{x}{\ln x})$, а лучше в форме (12).

Лемма 9.

$$\ln x M(x) = \sum_{pq \le x} \frac{\ln p \ln q}{\ln pq} M\left(\frac{x}{pq}\right) + O(x \ln\ln x). \tag{13}$$

В равенстве (3) производим подстановку $\vartheta(\frac{x}{n}) = \frac{2x}{n} - \sum\limits_{pq \le \frac{x}{n}} \frac{\ln p \ln q}{\ln pq} + O(\frac{x}{n \ln 2\frac{x}{n}})$, взятую из неравенства (12), и получаем

$$\ln x M(x) + 2x \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} - \sum_{n \le x} \mu(n) \sum_{pq \le \frac{x}{n}} \frac{\ln p \ln q}{\ln pq} + \\ + O\left(x \sum_{n \le x} \frac{1}{n \ln 2\frac{x}{n}}\right) = O(x).$$

Воспользовавшись неравенством (1) и легко устанавливающимся фактом $\sum\limits_{n \le x} \frac{1}{n \ln 2\frac{x}{n}} = O(\ln\ln x)$ (см. дополнение 6) и меняя в двойной сумме порядок суммирования, доказываем лемму 9.

Лемма 10. *Имеет место рекуррентное неравенство*

$$|M(x)| \le \frac{1}{\ln x} \sum_{n \le x} \left| M\left(\frac{x}{n}\right) \right| + O\left(\frac{x \ln\ln x}{\ln x}\right). \tag{14}$$

Доказательство. В равенствах (2) и (13) переходим к модулям и складываем полученные выражения, получаем

$$2 \ln x |M(x)| \le \sum_{p \le x} \ln p \left| M\left(\frac{x}{p}\right) \right| + \sum_{pq \le x} \frac{\ln p \ln q}{\ln pq} \left| M\left(\frac{x}{pq}\right) \right| + O(x \ln\ln x).$$

Производя абелево преобразование в левой части последнего равенства, получаем

$$2\ln x|M(x)| \leq \sum_{n\leq x-1}\left(\sum_{p\leq n}\ln p+\sum_{pq\leq n}\frac{\ln p\ln q}{\ln pq}\right)\times$$
$$\times\left(\left|M\left(\frac{x}{n}\right)\right|-\left|M\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|\right)+$$
$$+\left(\sum_{p\leq x}\ln p+\sum_{pq\leq x}\frac{\ln p\ln q}{\ln pq}\right)+O(x\ln\ln x)=$$
$$=\sum_{n\leq x-1}2n\left(\left|M\left(\frac{x}{n}\right)\right|-\left|M\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|\right)+O\left(\sum_{n\leq x-1}\frac{n}{\ln 2n}\left|\left|M\left(\frac{x}{n}\right)\right|-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left|M\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|\right|\right)+O(x)+O(x\ln\ln x).$$

Из геометрически очевидного неравенства $||a|-|b||\leq|a-b|$ имеем

$$\left|\left|M\left(\frac{x}{n}\right)\right|-\left|M\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|\right|\leq\left|M\left(\frac{x}{n}\right)-M\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|=$$
$$=\left|\sum_{\frac{x}{n+1}\leq k<\frac{x}{n}}\mu(n)\right|\leq\frac{x}{n}-\frac{x}{n+1}=O\left(\frac{x}{n^2}\right).$$

Далее $O\left(x\sum_{n\leq x}\frac{1}{n\ln 2n}\right)=O(x\ln\ln x)$. Поэтому

$$2\ln x|M(x)|\leq 2\sum_{n\leq x}\left|M\left(\frac{x}{n}\right)\right|+O(x\ln\ln x),$$

что и требуется.

Если в формуле (14) в правой части произвести оценку$|M(\frac{x}{n})|\leq$ $\leq\alpha\frac{x}{n}$, где α — некоторая константа (очевидно, можно взять $\alpha=1$), то получаем снова неравенство $|M(x)|\leq\alpha x+O(\frac{x\ln\ln x}{\ln x})$, т. е. снижения константы не происходит. Однако, как мы увидим, если неравенство (14) сочетать с тем понижением, которое имеется в неравенстве (1), то получается снижение постоянной и, таким образом, приходим к доказательству закона.

Из равенства (1) частным суммированием выводится неравенство

$$\sum_{n\le x}\frac{M(n)}{n^2}=O(1).$$

Таким образом, существует такая постоянная k, что для любых x' и x''

$$\left|\sum_{x'<n\le x''}\frac{M(n)}{n^2}\right|< k.$$

Лемма 11. *Существуют такие постоянные* k_1 *и* $c>1$, *что каково бы ни было* $0<\delta<1$ *и* $x>c$, *в любом интервале* $(x, xe^{\frac{k_1}{\delta}})$ *найдётся такое* y, *что* $|M(y)|<\delta y$.

Доказательство. Пусть на (x,x') $M(n)$ не меняет знака, скажем $M(n)\ge 0$. Берём $\frac{M(y)}{y}$, минимальное на этом участке:

$$k>\sum_{x\le n\le x'}\frac{M(n)}{n^2}>\frac{M(y)}{y}\sum_{x\le n\le x'}\frac{1}{n}\ge\frac{M(y)}{y}\left(\ln\frac{x'}{x}-c_1\right);$$

поэтому (используя $|M(y)|\le y$) получаем $k_1>\frac{M(y)}{y}\ln\frac{x'}{x}$. Если $x'>xe^{\frac{k_1}{\delta}}$, то $M(y)<\delta y$. Если на участке $(x, xe^{\frac{k_1}{\delta}})$ $M(n)$ меняет знак, то так как $M(n)$ — всегда целое число, а длина разрыва $M(n)$ равна единице, то есть такое y, что $M(y)=0$, и, значит, $|M(y)|<\delta y$.

Лемма 12. *Существуют такие постоянные* c *и* k_1, *что при любом* $0<\delta<1$ *и* $x\ge c$ *в интервале* $(x, xe^{\frac{k_1}{\delta}})$ *содержится подынтервал* $(y_1, y_1e^{\frac{\delta}{2}})$ *такой, что в нём* $|M(z)|<3\delta z$.

Доказательство. В интервале $(x, xe^{\frac{k_1}{\delta}})$ содержится точка y, в которой $|M(y)|<\delta y$. Далее, $|M(a)-M(b)|=|\sum\limits_{a\le n\le b}\mu(n)|\le b-a$, поэтому $|M(b)|\le|M(a)|+b-a$. Возьмём интервал $(ye^{-\frac{\delta}{2}}, ye^{\frac{\delta}{2}})$; для y' из этого интервала справедливо соотношение (при $a=y,\ b=y'$) $\left|\frac{M(y')}{y'}\right|<\delta\frac{y}{y'}+1-\frac{y}{y'}<\delta e^{\frac{\delta}{2}}+1-e^{-\frac{\delta}{2}}<2\delta+\delta=3\delta$. Возьмём часть этого интервала, попавшую на $(x, xe^{\frac{k_1}{\delta}})$, и пусть y_1 — левый конец этой части. Весь $(y_1, y_1 e^{\frac{\delta}{2}})$ принадлежит этой части: если $y_1 = ye^{-\frac{\delta}{2}}$, то $(ye^{-\frac{\delta}{2}})e^{\frac{\delta}{2}} = y$ принадлежит к $(x, xe^{\frac{k_1}{\delta}})$; если $y_1 = x$, то, считая $k_1 \geq 1$, получаем: $xe^{\frac{\delta}{2}} < xe^{\frac{k_1}{\delta}}$.

Теорема (асимптотический закон распределения простых чисел)

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) = o(x). \tag{15}$$

Доказательство. Обозначим через α всякое такое число, что, начиная с некоторого $x \geq x_0(\alpha)$, имеем $|M(x)| \leq \alpha x$. Очевидно, что единица есть такое α, а также, что $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} \frac{|M(x)|}{x} \leq \alpha$. Если мы построим последовательность таких $\alpha\{\alpha_n\}$, что $\alpha_n \to 0$, то теорема будет доказана. Пусть доказано, что при $x \geq x_0$ $|M(x)| \leq \alpha x$. По неравенству (14)

$$|M(x)| \leq \frac{1}{\ln x} \sum_{n \leq x} \left| M\left(\frac{x}{n}\right) \right| + O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln x} \sum_{n \leq \frac{x}{x_0}} \left| M\left(\frac{x}{n}\right) \right| + O\left(\frac{x}{\ln x} \sum_{\frac{x}{x_0} \leq n \leq x} \frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln x} \sum_{n \leq \frac{x}{x_0}} \left| M\left(\frac{x}{n}\right) \right| + O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\right).$$

Положим $\delta = \frac{\alpha}{6}$, $\rho = e^{\frac{k_1}{\delta}}$ и весь возможный интервал для $\frac{x}{n}$, т.е. $(x_0,\, x)$, разобьём на интервалы точками деления $x_0,\ x_0\rho,\ x_0\rho^2, \ldots$. По лемме 12 в каждом таком интервале есть такая часть $(y_v, y_v e^{\frac{\delta}{2}})$, где улучшается оценка для $M(\frac{x}{n})$. Если $\frac{x}{n}$ попало на такую часть, то оценим $|M(\frac{x}{n})| \leq 3\frac{\alpha}{6}\frac{x}{n} = \alpha\frac{x}{n} - \frac{\alpha}{2}\frac{x}{n}$; если $\frac{x}{n}$ попало вне, то оценим

$|M(\frac{x}{n})| < \alpha\frac{x}{n}$. Получаем

$$|M(x)| < \frac{\alpha x}{\ln x}\sum_{n\le\frac{x}{x_0}}\frac{1}{n} - \frac{\alpha x}{2\ln x}\sum_{v=0}^{\left[\frac{\ln\frac{x}{x_0}}{\ln\rho}\right]}\sum_{y_v\le\frac{x}{n}\le y_v e^{\frac{\delta}{2}}}\frac{1}{n} + O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\right).$$

Мы будем пользоваться геометрически очевидными неравенствами

$$-\frac{2}{\alpha} < \sum_{\alpha\le n\le\beta}\frac{1}{n} - \ln\frac{\beta}{\alpha} < \frac{1}{\alpha},$$

$$\sum_{\frac{x}{y_v}e^{-\frac{\delta}{2}}\le n\le\frac{x}{y_v}}\frac{1}{n} > \frac{\delta}{2} - \frac{2y_v e^{\frac{\delta}{2}}}{x} > \frac{\delta}{2} - \frac{2x_0\rho^v}{x},$$

$$|M(x)| \le \frac{\alpha x}{\ln x}\sum_{n\le\frac{x}{x_0}}\frac{1}{n} - \frac{\alpha x}{2\ln x}\sum_{v=0}^{\left[\frac{\ln\frac{x}{x_0}}{\ln\rho}\right]}\frac{\delta}{2} + \frac{\alpha x_0}{\ln x}\sum_{v=0}^{\left[\frac{\ln\frac{x}{x_0}}{\ln\rho}\right]}\rho^v +$$

$$+ O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\right) \le \alpha x - \frac{\alpha x\delta}{4\ln x}\left(\left[\frac{\ln\frac{x}{x_0}}{\ln\rho}\right]+1\right) + \frac{\alpha x_0}{\ln x}\frac{\frac{x}{x_0}-1}{\rho-1} + O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\right) \le$$

$$\le \alpha x - \frac{\alpha x\delta}{4\ln x}\frac{\ln x}{\ln\rho} + \frac{\alpha x\delta\ln x_0}{4\ln x\ln\rho} + \frac{\alpha x_0}{\ln x}\frac{\frac{x}{x_0}-1}{\rho-1} + O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\right) =$$

$$= \alpha x\left(1 - \frac{\delta^2}{4k_1}\right) + O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\right) = \alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{4\cdot 36k_1}\right)x + O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\right).$$

Таким образом, наряду с константой α_n годится константа $\alpha_{n+1} = \alpha_n(1 - \frac{\alpha_n^2}{200k_1})$. Выберем $\alpha_1 = 1$ и покажем, что $\alpha_n \le \frac{\sqrt{200k_1}}{\sqrt{n+3}}$. Для $n = 1$ это справедливо. Выражение $\alpha_n(1 - \frac{\alpha_n^2}{200k_1})$ возрастает при $\alpha_n \le \sqrt{\frac{200k_1}{3}}$. Промажорируем α_n выражением $\frac{\sqrt{200k_1}}{\sqrt{n+3}}$ (это можно сделать уже при $n = 1$). Тогда $\alpha_{n+1} < \frac{\sqrt{200k_1}}{\sqrt{n+3}}(1 - \frac{1}{n+3}) < \frac{\sqrt{200k_1}}{\sqrt{n+4}}$.

Теорема доказана.

ДОПОЛНЕНИЯ

1) Как известно, $\sum\limits_{d/n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, \\ 0, & \text{при } n > 1; \end{cases}$

$$\sum_{n \le x} \sum_{d/n} \mu(d) = 1, \quad \sum_{n \le x} \mu(n) \left[\frac{x}{n} \right] = 1,$$

$$x \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} + O(x) = 1, \quad \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} = O(1).$$

2) Замечание к лемме 2. Обозначим $A^* = \overline{\lim\limits_{x \to \infty}} \frac{M(x)}{x}$ и $a^* = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{M(x)}{x}$. Докажем, что из утверждения леммы 2 следует, что $A^* + a^* = 0$. Неравенство можно переписать в виде

$$\frac{M(x)}{x} + \frac{1}{\ln x} \sum_{p \le x} \frac{\ln p}{p} \frac{M(\frac{x}{p})}{\frac{x}{p}} = O\left(\frac{1}{\ln x} \right).$$

Выберем произвольно $\varepsilon > 0$. Существует такое $x_0(\varepsilon)$, что при $x > x_0$ имеем $\frac{M(x)}{x} > a^* - \varepsilon$. Далее

$$O\left(\frac{1}{\ln x} \right) = \frac{M(x)}{x} + \frac{1}{\ln x} \sum_{p \le \frac{x}{x_0}} \frac{\ln p}{p} \frac{M(\frac{x}{p})}{\frac{x}{p}} + \frac{1}{\ln x} \sum_{\frac{x}{x_0} < p \le x} \frac{\ln p}{p} \frac{M(\frac{x}{p})}{\frac{x}{p}} >$$

$$> \frac{M(x)}{x} + \frac{1}{\ln x} \sum_{p \le \frac{x}{x_0}} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{\ln x} \sum_{\frac{x}{x_0} < p \le x} \frac{\ln p}{p}.$$

Используя формулу Чебышева $\sum\limits_{p \le x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1)$ (см. дополнение 5), получаем $O(\frac{1}{\ln x}) = \frac{M(x)}{x} + (a^* - \varepsilon) + O(\frac{1}{\ln x})$. Устремляем x к бесконечности так, чтобы $\frac{M(x)}{x}$ стремилось к A^*, тогда $0 \ge A^* + a^* - \varepsilon$. Но ε сколь угодно мало, поэтому $0 \ge A^* + a^*$. Аналогично получаем $A^* + a^* \ge 0$. Итак, $A^* + a^* = 0$.

3) Замечание к лемме 4. Простой вывод этого соотношения см. в [34, с. 126].

4) Замечание к лемме 5. Этот вывод классической теоремы имеется в [34, с. 240–241].

5) На основании определения $\Lambda(n)$: $\sum\limits_{d/n}\Lambda(d)=\ln n$, $\sum\limits_{n\le x}\sum\limits_{d/n}\Lambda(d)=$ $=x\ln x+O(x)$ (грубая форма формулы Стирлинга); $\sum\limits_{d\le x}\Lambda(d)[\frac{x}{d}]=$ $=x\ln x+O(x)$. На основании леммы 5 $x\sum\limits_{d\le x}\frac{\Lambda(d)}{d}+O(x)=x\ln x+$ $+O(x)$. Сокращая на x, получаем $\sum\limits_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n}=\ln x+O(1)$. Очевидно,

$$\left|\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n}-\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p}\right|\le\sum_{p\le x}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+...\right)\ln p<\sum_{p}\frac{\ln p}{p(p-1)}=O(1).$$

Это доказывает другую форму этого факта: $\sum\limits_{p\le x}\frac{\ln p}{p}=\ln x+O(1)$.

$$6)\ \sum_{n\le x}\frac{1}{n\ln 2\frac{x}{n}}=\frac{1}{\ln x}\sum_{n\le x}\frac{1}{n}+\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2\frac{x}{n}}-\frac{1}{\ln x}\right)=$$

$$=\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\int\limits_{2\frac{x}{n}}^{x}\frac{du}{u\ln^2 u}+O(1)=\int\limits_{2}^{x}\frac{\sum\limits_{\frac{2x}{n}\le u\le x}\frac{1}{n}}{u\ln^2 a}du+O(1)=$$

$$=\ln\ln x+O(1).$$

7) Выведем известным способом из $\sum\limits_{n\le x}\mu(n)=o(x)$ асимптотический закон в форме $\sum\limits_{n\le x}\Lambda(n)\sim x$. Рассмотрим $S(x)=\sum\limits_{n\le x}\mu(n)\times$ $\times\sum\limits_{m\le\frac{x}{n}}(\ln m-\tau(m)+2C)$, где $\tau(m)$ — число делителей m, а C — эйлерова постоянная. $S(x)=\sum\limits_{k\le x}\sum\limits_{d/k}\mu(d)(\ln\frac{k}{d}-\tau(\frac{k}{d})+2C)=\sum\limits_{k\le x}(\Lambda(k)-$ $-1)+2C$, так как $\sum\limits_{d/k}\mu(d)\ln\frac{k}{d}=\Lambda(n)$ (выводится сразу из равенства (4) и равенства $\sum\limits_{d/k}\mu(d)\tau(\frac{k}{d})=1$, которое получается, например, с помощью индукции по числу простых множителей k : если $k=k'p^{\alpha}$,

то

$$\sum_{d/k}\mu(d)\tau\left(\frac{k}{d}\right)=\sum_{d/k'}\mu(d)\tau\left(p^{\alpha}\frac{k'}{d}\right)+\sum_{d/k'}\mu(dp)\tau\left(p^{\alpha-1}\frac{k'}{d}\right)=$$

$$=\left(\tau(p^{\alpha})-\tau(p^{\alpha-1})\right)\sum_{d/k'}\mu(d)\tau\left(\frac{k'}{d}\right)=\sum_{d/k'}\mu(d)\tau\left(\frac{k'}{d}\right)\Bigg).$$

Выберем $0<\delta<1$, тогда

$$S(x)=S(\delta x)+\sum_{\delta x<n\le x}\mu(n)\sum_{m\le\frac{x}{n}}(\ln m-\tau(m)+2C)=$$

$$=S(\delta x)+\sum_{n=[\delta x]+1}^{[x]}(M(n)-M(n-1))\sum_{m\le\frac{x}{n}}(\ln m-\tau(m)+2C)=$$

$$=S(\delta x)-M(\delta x)\sum_{n=1}^{\left[\frac{x}{1+[\delta x]}\right]}(\ln n-\tau(n)+2C)+M(x)(2C-1)+$$

$$+\sum_{n=1+[\delta x]}^{[x]-1}M(n)\sum_{\frac{x}{n+1}<k\le\frac{x}{n}}(\ln k-\tau(k)+2C).$$

По формуле Дирихле (см., например, [36, с. 247–248])
$\sum\limits_{m\le x}\tau(m)=x\ln x+(2C-1)x+O(\sqrt{x})$,

$$\sum_{k\le x}(\ln k-\tau(k)+2C)=x\ln x-x+O(\ln x)-x\ln x-(2C-1)x+$$

$$+O(\sqrt{x})+2Cx=O(\sqrt{x}).$$

Непустых сумм $\sum\limits_{\frac{x}{n+1}<k\le\frac{x}{n}}(\ln k-\tau(k)+2C)$, очевидно, меньше или равно $\frac{x}{1+[\delta x]}-\frac{x}{[x]}+1<\frac{1}{\delta}+1$. Каждую такую сумму оцениваем: $O\left(\sqrt{\frac{x}{1+[\delta x]}}\right)=O\left(\sqrt{\frac{1}{\delta}}\right)$.

Получаем

$$|S(x)| \le |S(\delta x)| + |M(\delta x)|\sqrt{\frac{x}{1+\delta x}} + |M(x)|(2C-1)+$$
$$+ o(x)\left(\frac{1}{\delta}+1\right)\sqrt{\frac{1}{\delta}} \le |S(\delta x)|+$$
$$+ o(x)\left(\sqrt{\frac{1}{\delta}} + (2C-1) + \left(\frac{1}{\delta}+1\right)\sqrt{\frac{1}{\delta}}\right).$$

Но

$$|S(\delta x)| \le \sum_{n\le \delta x}\left|\sum_{m\le \frac{x}{n}}(\ln m - \tau(m) + 2C)\right| \le k\sum_{n\le\delta x}\sqrt{\frac{x}{n}} \le$$
$$\le k'\sqrt{x}\sqrt{\delta x} = k'\sqrt{\delta}x.$$

Итак, $|S(x)| \le k'\sqrt{\delta}x + o(x)\left(\sqrt{\frac{1}{\delta}} + (2C-1) + (\frac{1}{\delta}+1)\sqrt{\frac{1}{\delta}}\right)$. Зададим $\varepsilon > 0$, тогда можно найти такое δ, что $k'\sqrt{\delta} < \varepsilon$. Далее, при $x \ge x_0(\delta)$ имеем $o(x)\left(\sqrt{\frac{1}{\delta}} + (2C-1) + (\frac{1}{\delta}+1)\sqrt{\frac{1}{\delta}}\right) < \varepsilon x$ и, следовательно, $|S(x)| \le 2\varepsilon x$. Отсюда $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\left|\frac{\sum\limits_{n\le x}(\Lambda(n)-1)}{x}\right| \le 2\varepsilon$, но ε сколь угодно мало. Таким образом, $\sum\limits_{n\le x}\Delta(n) \sim x$. Этому, очевидно, можно придать такой вид: $\sum\limits_{p\le x}\ln p \sim x$ (т.е. $\vartheta(x)\sim x$).

8) Получим из этого, наконец, $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$.

$$\pi(x) = \sum_{p\le x} 1 = \frac{1}{\ln x}\left(\sum_{p\le x}\ln p + \sum_{p\le x}\ln\frac{x}{p}\right) =$$

$$= O\left(\frac{x}{\ln x}\right) + \frac{1}{\ln x}\sum_{p\le x}\int\limits_p^x \frac{du}{u} = O\left(\frac{x}{\ln x}\right) + \frac{1}{\ln x}\int\limits_2^x O\left(\frac{u}{u}\right)du = O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Далее $\left|\pi(x) - \frac{\vartheta(x)}{\ln x}\right| \le \frac{1}{\ln x}\int\limits_2^x \frac{\sum\limits_{p\le u} 1}{u}du = \frac{1}{\ln x}\int\limits_2^x O(\frac{u}{u\ln u})du = O(\frac{x}{\ln^2 x})$. Так как $\vartheta(x)\sim x$, то $\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}$.

27. Об одном новом аналитическом представлении дзета-функции Римана

В монографии Сельберга [21], посвященной теории L-функций Дирихле, дано представление дзета-функции через интеграл

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \omega(x,y)x^{-s_1-1}y^{-s_2-1}dxdy,$$

где $\omega(x,y)=\min(x(1-y),y(1-x))$.

В настоящей работе выводятся различные обобщения формулы Сельберга.

Как и при выводе необобщённой формулы Сельберга, я исхожу из соотношения (см. [21, с. 7])

$$\int_0^\infty (e^{2\pi in\varepsilon x}-1)x^{-s-1}dx=\Gamma(-s)|2\pi n|^s\exp\left(-\frac{\pi s}{2}\varepsilon i\ sgn\ n\right),$$

где $0<R(s)<1$, n — целое число, $\varepsilon=\pm1$.

Из этого соотношения легко получим

$$\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \sideset{}{'}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^p}(e^{2\pi ix_1\varepsilon_1 n}-1)\cdots$$

$$\cdots(e^{2\pi ix_k\varepsilon_k n}-1)x_1^{-s_1-1}x_2^{-s_2-1}\cdots x_k^{-s_k-1}dx_1dx_2\cdots dx_k=$$

$$=\Gamma(-s_1)\cdots\Gamma(-s_k)(2\pi)^{s_1+\ldots+s_k}(e^{-\frac{\pi zi}{2}}+e^{\frac{\pi zi}{2}}(-1)^p)\zeta(p-s_1-\ldots-s_k),\tag{1}$$

где $z=\varepsilon_1s_1+\ldots+\varepsilon_ks_k$, $\varepsilon_i=\pm1$, штрих при знаке суммирования означает, что значение $n=0$ при суммировании пропущено. Известные формулы

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{\cos 2\pi nx}{n^p}=(-1)^{[\frac{p}{2}]+1}\frac{(2\pi)^p}{2\cdot p!}\widetilde{B}_p(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n^p} = (-1)^{[\frac{p}{2}]+1} \frac{(2\pi)^p}{2 \cdot p!} \widetilde{B}_p(x),$$

из которых первая верна при p четном, вторая — при p нечётном и в которых $\widetilde{B}_p(x)$ — периодизированный многочлен Бернулли: $\widetilde{B}_p(x) = B_p(x - [x])$, приводят к формуле

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{n^p} e^{2\pi inx} = ip^2 (-1)^{[\frac{p}{2}]+1} \frac{(2\pi)^p}{p!} \widetilde{B}_p(x), \tag{2}$$

верной при любой чётности p.

Вводя обозначения

$$H_p(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \widetilde{B}_p(x_1+x_2+\ldots+x_k) - \widetilde{B}_p(x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}) - \ldots \pm$$

$$\pm B_p(0) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_\nu} \widetilde{B}_p(u - x_{i_1} - x_{i_2} - \ldots - x_{i_\nu}),$$

$$u = x_1 + x_2 + \ldots + x_k,$$

получим на основании (1), (2)

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty H_p(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \ldots, \varepsilon_k x_k) x_1^{-s_1-1} \cdots x_k^{-s_k-1} dx_1 \cdots dx_k =$$

$$= (-1)^{p-1} 2 \cdot p! (2\pi)^s \Gamma(-s_1)\Gamma(-s_2) \cdots \Gamma(-s_k) \cos \frac{\pi z - \pi p}{2} \zeta(p-s), \tag{3}$$

$$(s = s_1 + s_2 + \ldots + s_k, \quad z = \varepsilon_1 s_1 + \varepsilon_2 s_2 + \ldots + \varepsilon_k s_k).$$

Особенно простой вид приобретает формула (3), если все ε равны единице:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty H_p(x_1, x_2, \ldots, x_k) x_1^{-s_1-1} \cdots x_k^{-s_k-1} dx_1 \cdots dx_k =$$

$$= (-1)^{p-1} 2 \cdot p! \Gamma(-s_1)\Gamma(-s_2) \cdots \Gamma(-s_k) (2\pi)^{s-p} \cos \frac{\pi}{2}(s-p) \zeta(p-s) \tag{4}$$

$$(s = s_1 + s_2 + \ldots + s_p).$$

Или, если воспользоваться функциональным уравнением Римана $\zeta(s) = \frac{1}{2}\Gamma(s)^{-1}(2\pi)^s \sec\frac{\pi s}{2}\zeta(1-s)$,

$$\zeta(s-p+1) =$$

$$= \frac{(-1)^{p-1}\Gamma(p-s)}{p!\Gamma(-s_1)\Gamma(-s_2)\cdots\Gamma(-s_k)} \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty H_p(x_1, x_2, ..., x_k) x_1^{-s_1-1} \cdots$$

$$\cdots x_k^{-s_k-1} dx_1 \cdots dx_k, \tag{5}$$

$$(s = s_1 + s_2 + \ldots + s_k).$$

В частности, при $p = 2$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (\widetilde{B}_p(x+y) - \widetilde{B}_p(x) - \widetilde{B}_p(y) + B_p) x^{-s_1-1} y^{-s_2-1} dxdy =$$

$$= (-1)^{p-1} p! \frac{\Gamma(-s_1)\Gamma(-s_2)}{\Gamma(p-s_1-s_2)} \zeta(s-p+1), \tag{6}$$

где $s = s_1 + s_2$. Иначе формулу (6) можно записать следующим образом:

$$\zeta(s) = \frac{(-1)^{p-1}}{p!} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(-p+1-u)\Gamma(-s+u)} \int_0^\infty \int_0^\infty (\widetilde{B}_p(x+y) - \widetilde{B}_p(x) -$$

$$- \widetilde{B}_p(y) + B_p) x^{-p-u} y^{-s+u-1} dxdy. \tag{7}$$

Формула (7) интересна тем, что в ее правую часть входит u, от которого левая часть не зависит. Умножая обе части полученной формулы на различные функции от u и интегрируя или дифференцируя по u, без труда выведем из нее много других формул.

В частности, умножая обе части (7) на $\exp(\frac{k^2u^2}{4})$ и интегрируя по соответствующей вертикали, придем к соотношению

$$\pm p!\frac{\Gamma(1-p-s)\zeta(s)}{\Gamma(1-s)}\int\limits_0^\infty \frac{x^{-s-1}}{(1+x)^{1-p-s}}F(x)dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (\widetilde{B}_p(x+y) - \widetilde{B}_p(x) - \widetilde{B}_p(y) + B_p)x^{-p}y^{-s-1}F\left(\frac{x}{y}\right)dxdy \quad (8)$$

$$\left(F(t) = \exp\left(-\frac{1}{k^2}\log^2 x\right)\right).$$

Умножая обе части (7) на $\Gamma(-p+1-u)\,\Gamma(-s+u)$ и дифференцируя по m раз, получим

$$\zeta(s) = \frac{(-1)^{p-1}\Gamma(1-s)}{p!\frac{d^m}{du^m}\Gamma(1-p-u)\Gamma(u-s)}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (\widetilde{B}_p(x+y) - \widetilde{B}_p(x) - \widetilde{B}_p(y)+$$

$$+B_p)x^{-p-u}y^{-s-1}\log^m \frac{y}{x}dxdy. \quad (9)$$

Полагая в формулах (7), (9) $u = \frac{s+1-p}{2}$, получим две следующие формулы:

$$\zeta(s) = \frac{(-1)^{p-1}}{p!}\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(\frac{1-p-s}{2})^2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (\widetilde{B}_p(x+y) - \widetilde{B}_p(x) - \widetilde{B}_p(y)+$$

$$+B_p)(xy)^{-\frac{s+p+1}{2}}dxdy, \quad (10)$$

$$\zeta(s) = \frac{(-1)^{p-1}}{p!}\frac{\Gamma(1-s)}{\theta_m(s)}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (\widetilde{B}_p(x+y) - \widetilde{B}_p(x) - \widetilde{B}_p(y)+$$

$$+B_p)(xy)^{-\frac{s+p+1}{2}}\log^m \frac{y}{x}dxdy, \quad (11)$$

$$\theta_m(s) = \left[\frac{\partial^m}{\partial u^m}\Gamma(1-p-u)\Gamma(u-s)\right]_{u=\frac{s-p+1}{2}}.$$

Очевидны дальнейшие обобщения полученных здесь формул.

28. Асимптотика степенных рядов на границе круга сходимости и предельные теоремы теории чисел

Обычным приёмом определения асимптотики степенного ряда с коэффициентами арифметической природы является рассмотрение соответствующего ряда Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$. Если нужно найти асимптотику ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ во всех «рациональных» точках единичной окружности, т.е. в точках $x = \exp(2\pi i r)$, где r — рационально, то изучают функции, полученные аналитическим продолжением рядов Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nm}\chi(n)}{n^s}$, где $\chi(n)$ — характер Дирихле.

Мне удалось показать, что во многих случаях можно определить асимптотику степенного ряда в рациональных точках, пользуясь особыми тождествами, представляющими собой в известном смысле разложение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ на простейшие дроби. В этих случаях, если $a_n \geq 0$, на основании теоремы Харди и Литтлвуда получаются асимптотические соотношения вида

$$\sum_{\substack{n \equiv l \pmod k \\ n \leq N}} a_n \sim A(k,l) N^{\alpha}.$$

Один класс упомянутых тождеств имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{dx^d}{1-x^d} = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{xP_n'(x)}{P_n(x)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{\omega(n)} \frac{\omega x}{1-\omega x},$$

где $P_n(x) = \prod\limits_{d/n} (1 - x^d)^{\mu(\frac{n}{d})}$ — многочлен деления окружности и где символ $\sum\limits_{\omega(n)}$ означает суммирование по всем примитивным корням n-й степени из единицы.

В случае $b_n = O(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}})$ легко показать, что

$$\lim_{x\to\rho}(1 - |x|)\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = b_k,$$

где

$$\rho = \exp\left(2\pi i \frac{l}{k}\right) \ \ (l,k) = 1,$$

так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(1 - |x|)\frac{xP_n'(x)}{P_n(x)}$ при этом условии сходится равномерно.

Легко доказать, что известные взаимно обратные теоремы — теорема Чезаро и теорема Харди н Литтлвуда — можно несколько обобщить и показать эквивалентность соотношений

$$\sum_{\substack{n\equiv l \pmod k\\ n\le N}} a_n \sim A(l,k)N,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{B(l,k)}{1 - |x|} \ \ \left(\tau \to \exp\left(2\pi i \frac{l}{k}\right)\right) \ (a_n \ge 0),$$

где $k,\ l$ — любые числа, при соответственных связях между постоянными $A(l,k),\ B(l,k)$.

Так, легко усмотреть, что теорема Валле Пуссена — Адамара

$$\sum_{\substack{n\equiv l \pmod k\\ n\le N}} \Lambda(n) \sim \frac{1}{\varphi(k)}N$$

эквивалентна соотношению

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)x^n \sim \frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\frac{1}{1 - |x|}$$

(x стремится радиально к корню (точной) k-й степени из единицы).

Однако этот факт эквивалентности двух указанных соотношений остаётся бесполезным до тех пор, пока нет прямого способа определения асимптотики степенного ряда.

Такой способ, основанный на рассмотрении специальных тождеств, найден мною для многих степенных рядов.

Легко показать эквивалентность соотношений

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)x^n \sim \frac{1}{(1-|x|)^2}\frac{6}{\pi^2}\frac{\mu(k)}{\varphi_2(k)} \tag{1}$$

$$\left(x \to \exp\left(2\pi i \frac{l}{k}\right),\ (l,k)=1,\ \varphi_2(k) = k^2 \prod_{p/k}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\right),$$

$$\sum_{\substack{n\equiv l \pmod k\\ n\le N}} \varphi(n) \sim \frac{3}{\pi^2}\frac{k}{\varphi_2(k)} \prod_{p/(l,k)}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Но формула (1) легко может быть получена из тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)x^n = \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{\varphi_2(n)}\sum_{\omega(n)}\frac{\omega x}{(1-\omega x)^2}.$$

Таким образом, функция $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(n)x^n$ не только обладает асимптотикой, выражающей арифметическое предельное соотношение (2), но и является простейшей из функций, обладающих этой асимптотикой, подобно тому, как $\pi\ ctg\ \pi z$ является простейшей из функций, имеющих простые полюсы с вычетами, равными единице, во всех целых числах.

Указанным приёмом можно получить многие формулы вида $\sum\limits_{\substack{n\equiv l \pmod k\\ n\le N}} a_n \sim A(l,k)n^{\alpha}$, не пользуясь рядами Дирихле и характерами Дирихле, опираясь только на два факта — на наличие тождества указанного типа и на теорему Харди — Литтлвуда.

Тождеств упомянутого вида можно получить очень много, пользуясь общим тождеством (1) из моей работы [71], а также многими другими приёмами.

Аналогичную роль играют тождества вида

$$\sum a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{\rho(n)} \frac{c(\rho)}{(1-\rho x)^{\alpha}}.$$

Функций, разлагающихся указанным образом на простейшие дроби, характеризующие поведение их вблизи всех «рациональных» точек единичной окружности, очень много.

Сюда относятся многие ряды с коэффициентами, связанными с теорией делимости, модулярные функции Эйзенштейна первой ступени, степени якобиевой тэта-функции $\vartheta(x)^4$, $\vartheta(x)^6$, $\vartheta(x)^8$, функции $\vartheta(x)^3\vartheta(x^2)$, $\vartheta(x)^3\vartheta(x^3)$ и многие другие.

Во всех случаях такого разложения можно получить указанным выше приёмом соответствующие предельные теоремы о сумме коэффициентов, а в некоторых случаях определить асимптотику n-го коэффициента и даже предугадать точное значение коэффициента.

29. Операторные методы в теории чисел

1. Операторный аналог теории рядов Дирихле на любом линейном функциональном множестве строится на основе последовательности линейных операторов L_m, обладающей по терминологии, введенной мною, M-свойством (мультипликативным свойством): $L_n L_m = L_{nm}$. Простейшие примеры таких операторов даются соотношениями

$$L_n f(x) = f(nx),\ L_n f(x) = f(x^n),\ L_n f(x) = n^k f(x + \log n).$$

Более сложные примеры можно построить на основе теории однопараметрических операторных групп (см., например, [48, 69]).

Далее, параллельно с данным рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = T(s)$, рассматривается «операторный ряд Дирихле» $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} L_n = T(s, L)$, где L — название последовательности $L_1,\ L_2, \ldots$, обладающей M-свойством. Введённое таким образом соответствие между обычным и операторными рядами Дирихле является изоморфизмом. В самом деле, нетрудно убедиться в том, что если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k^s},$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} L_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m^s} L_m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k^s} L_k.$$

За операторными рядами Дирихле целесообразно оставить те же обозначения и то же наименование, которое имеют их обычные прообразы. Так, $\zeta(s, L) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{n^s}$ называется операторной дзета-функцией, ряд $\frac{\zeta'}{\zeta}(s, L) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \cdot \frac{L_n}{n^s}$ — логарифмической производной операторной дзета-функции и т.д. Очевидно,

$$\zeta(s,L)\frac{\zeta'}{\zeta}(s,L)f = \frac{\zeta'}{\zeta}(s,L)\zeta(s,L)f = -\sum_{n=1}^{\infty}\log n\frac{L_n}{n^s}f. \tag{1}$$

Следует отметить, что сходимость понимается всюду в смысле обычной сходимости рядов $\sum \frac{a_n}{n^s}L_n f(x)$ при заданном выборе f при любом x. Можно показать, что указанная символика объединяет в едином плане многие казалось бы далеко лежащие друг от друга вопросы теории чисел.

Варьируя в соотношении (1) выбор последовательности операторов L_n функции $f(x)$, числовые значения s и x, получим много новых, а также и известных арифметических тождеств. Обозначая

$$L_n f(x) = f(x^n),\ \sum_{n=1}^{\infty} f(x^n) = \Phi(x),$$

получим из (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\Phi(x^n) = \sum_{n=1}^{\infty}\log n f(x^n). \tag{2}$$

Это тождество интересно тем, что правая часть его есть сумма, распространенная по всем натуральным числам, левая часть [благодаря наличию факторов Мангольдта $\Lambda(n)$] — сумма по простым числам.

Однако это соотношение, являющееся операторным аналогом тождества Эйлера, может представлять интерес, когда известны $f(x)$ и $\Phi(x)$, т.е. когда сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x^n)$ может быть вычислена. Так будет, если $f(x) = x$; тогда

$$\Phi(x) = \frac{x^n}{1-x^n}.$$

Отсюда следует тождество Ламберта

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{m=1}^{\infty} \log m \cdot x^m.$$

Большую группу новых соотношений можно получить, рассматривая последовательность операторов L_n, определенную соотношением $L_n f(x) = f(\frac{x}{n})$, на множестве функций от положительного x, которые все обращаются в нуль при $x < 1$. Здесь все операторные ряды Дирихле являются конечными суммами вида $\sum\limits_{n \leq x} a_n f(\frac{x}{n})$. В частности,

$$\zeta f(x) = \sum_{n \leq x} f\left(\frac{x}{n}\right), \quad \zeta^{-1} f(x) = \sum_{n} \mu(n) f\left(\frac{x}{n}\right),$$

откуда немедленно следует принцип обращения Бахмана. Недавним исследованиям Эрдеша и Атле Сельберга по элементарному доказательству теоремы Адамара можно придать новую интерпретацию и обобщение (см. [83]).

2. *Построение ортогональных последовательностей арифметического характера.* Доказывается, что если последовательность f_1, $f_2, \ldots$ элементов гильбертова пространства обладает HD_g-свойством: $(f_n, f_m) = g((n,m))$, то последовательность $\theta_n = \sum\limits_{d/n} \mu(\frac{n}{d}) fd$ ортогональна. Здесь (n,m) — общий делитель чисел n и m, $\mu(n)$ — функции Мёбиуса (см. [65, 80]).

В указанной работе развиты методы построения последовательностей функций, обладающих D-свойством и имеющих простую структуру. Так, например, функции $f_n(x) = n^k B_k(nx - [nx])$ обладают D-свойством в пространстве $L^2(0,1)$, и, следовательно, последовательность ортогональна в интервале (0,1). Здесь $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, $B_k(t)$ — полином Бернулли. В этом и других случаях тождество Парсеваля и неравенство Бесселя приводят к новым тождествам и новым неравенствам, приводящим, в частности, к новым эквивалентам гипотезы Римана. Многие из этих эквивалентов могут быть охарактеризованы как обобщение теоремы Франеля о распределении чисел Фарея.

30. Об одном замечательном степенном ряде

В последнее десятилетие встречалось исследование степенного ряда $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Z^{2n}$ в связи с вопросами аддитивной теории чисел (в работе М. А. Субханкулова), а также в связи с вопросами статистики. Этому ряду была посвящена статья Ф. Трикоми. Следует отметить, что до недавнего времени этот ряд фигурировал только как пример ряда, не продолжаемого за границу круга сходимости.

Настоящая статья посвящена изложению двух фактов — установлению асимптотики функции $f(z)$ при радиальном приближении z к «рациональным» точкам единичной окружности, т.е. к точкам вида $z = \exp(2\pi i R)$, где R — рационально, а также преобразованию этого ряда к другой форме. Первый вопрос решается следующим образом: полагая $z = r\exp(2\pi i \frac{a}{k}) = r\omega,\ \ r = |x|\ \ (a,\ k$ — целые числа), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z^{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega^{2^n} r^{2^n} = (1-r)\sum_{m=1}^{\infty} S_m r^m, \qquad (1)$$

$$S_m = \sum_{2^n \le m} \omega^{2^n}$$

(преобразование Абеля). ω^{2^n} является в случае нечётного k периодической функцией n с периодом, равным $l(k)$, где $l(k)$ — период, который образуют степени двойки по модулю k (иными словами, $l(k)$ — показатель, к которому принадлежит 2 по модулю k). В случае $k = 2^\lambda k',\ (k', 2) = 1$ последовательность будет периодической, только начиная с $n = \lambda$, причем период будет равен $l(k') = l(\frac{k}{2^\lambda})$. Во всяком случае из изложенного следует

$$S_m \sim \frac{\log m}{l(k')\log 2} S_{k'}, \tag{2}$$

а из этого и из (1) следует

$$f(z) \sim -\frac{S_{k'}}{l(k')\log 2}\log(1-|z|), \tag{3}$$

где

$$z = |z|\omega,\ \omega = \exp\left(2\pi i\frac{a}{k}\right),\ S_{k'} = \sum_{m=1}^{l(k')}\exp\left(2\pi i\frac{a\cdot 2^m}{k}\right).$$

Далее легко доказать, пользуясь формулой Меллина:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\Gamma(s)y^{-s}ds = e^{-y},$$

следующее соотношение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-y2^n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{ns}}y^{-s}ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\Gamma(s)}{2^s-1}y^{-s}ds.$$

Так как $\int\limits_{-N+\frac{1}{2}-\infty i}^{-N+\frac{1}{2}+\infty i}\frac{\Gamma(s)}{2^s-1}y^{-s}ds \to 0$ при N целом и стремящемся к бесконечности, то легко убедиться, используя обычный прием переноса пути интеграции и использования теории вычетов, в том, что значение суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-2^n y}$ равно сумме вычетов функции $\frac{\Gamma(s)}{2^s-1}y^{-s}$ в полуплоскости $Re(s) < 1$.

На этом основании получим тождество $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-y2^n} = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n!(2^n-1)} \times$ $\times (2y)^n + \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}' \Gamma(\frac{2\pi ni}{\log 2})y^{-\frac{2\pi in}{\log 2}} + A\log y + B\log^2 y$, где $A,\ B$ — константы, штрих при знаке суммирования означает, что значение $n = 0$ при суммировании пропущено.

31. Об одной ортогональной системе, связанной с теорией чисел

В моих работах [65, 80] доказывается, что если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...$ образуют ортонормированную систему гильбертова пространства H и если $\omega(n)$ — мультипликативная функция со сходящейся суммой квадратов модулей, то система $\psi_1, \psi_2, \psi_3, ...$, определяемая равенствами

$$\psi_n = \gamma_n \sum_{d/n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f_d, \qquad (1)$$

$$\gamma_n = |\omega(n)| \prod_{p/n} (1 - |\omega(p)|^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (2)$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \overline{\omega(n)}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k) \alpha_{kn},\ \delta = \sum_{k=1}^{\infty} |\omega(k)|^2, \qquad (3)$$

будет также ортонормированной системой H. Там же доказывается, что из полноты системы α_n вытекает полнота ψ_n. Из этой теоремы, конкретизируя пространство H, можно получить много конкретных ее реализаций (см. вышеупомянутые статьи, а также работу [39]). Возьмем, в частности, в качестве H несепарабельное гильбертово пространство обобщенных почти периодических функций со скалярным произведением, определяемым равенством
$(f, g) = \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} f(t) \bar{g}(t) dt$. Подставляя в равенства (1) — (3):
$\alpha_n = n^{-ti},\ \omega(n) = n^{-s}$, получим: $\delta = \zeta(2\sigma),\ \sigma = Re(s)$,
$f_n(t) = \zeta(2\sigma)^{-\frac{1}{2}} n^{\bar{s} - ti} \zeta(s + ti),\ \psi_n(t) = \frac{\zeta(s+ti)\varphi_{\bar{s}-ti}(n)}{\sqrt{\zeta(2\sigma)\varphi_{2\sigma}(n)}}$,
$\varphi_z(n) = \sum\limits_{d/n} \mu(\frac{n}{d}) d^z$. Согласно предыдущему, функции $\psi_n(t)$ ортонор-

мированы, поэтому имеют место соотношения ортогональности:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\zeta(\sigma+ti)|^2\varphi_{\sigma-ti}(n)\varphi_{\sigma+ti}(m)dt=\zeta(2\sigma)\varphi_{2\sigma}(n)\delta_n^m \quad (\sigma>1), \tag{4}$$

где δ_n^m — символ Кронекера ($\delta_n^m=1$, если $n=m$ и $\delta_n^m=0$, если $n\neq m$). Причина этого соотношения состоит в том, что

$$|\zeta(\sigma+ti)|^2 n^{\sigma-ti}m^{\sigma+ti}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}\left(\frac{n}{l}\right)^{\sigma}\left(\frac{m}{k}\right)^{\sigma}\left(\frac{nk}{ml}\right)^{-ti},$$

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T}|\zeta(\sigma+ti)|^2 n^{\sigma-ti}m^{\sigma+ti}dt &= 2T\sum_{\substack{k,l\\ nk=ml}}\left(\frac{n}{l}\right)^{\sigma}\left(\frac{m}{k}\right)^{\sigma}+\\ &+2\sum_{nk\neq ml}\sum\left(\frac{n}{l}\right)^{\sigma}\left(\frac{m}{k}\right)^{\sigma}\frac{\sin(T\log\frac{ml}{nk})}{\log\frac{ml}{nk}}= \\ &=2T\sum_{\omega\equiv 0 \pmod{[n,m]}}\left(\frac{mn}{\omega}\right)^{2\sigma}+\\ &+2\sum_{nk\neq ml}\sum\left(\frac{n}{l}\right)^{\sigma}\left(\frac{m}{k}\right)^{\sigma}\frac{\sin(T\log\frac{ml}{nk})}{\log\frac{ml}{nk}},\end{aligned} \tag{5}$$

где $[n,m]$ — общее наименьшее кратное чисел n и m. Из (5) вытекает

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\zeta(\sigma+ti)|^2 n^{\sigma-ti}m^{\sigma+ti}dt=(n,m)^{2\sigma}\zeta(2\sigma), \tag{6}$$

а отсюда, на основании связи между D-свойством и ортонормированностью, развитой в вышеуказанных работах, следует (4). Нетрудно также, пользуясь результатами тех же работ, построить систему, биортогональную к системе функций n^{-ti}, и получить, пользуясь этой системой, интегральные представления для коэффициентов произвольного ряда Дирихле, отличные от рассматривавшихся до сих пор.

Из предыдущего очевидно, что функции $F_n(t,T) = \frac{\zeta(\sigma+ti)\varphi_{\sigma+ti}(n)}{\sqrt{2T}}$ будут обладать «аппроксимативной ортогональностью» на интервале $(-T,T)$: $\int\limits_{-T}^{T} F_n(t,T)\overline{F_m(t,T)}dt = \zeta(2\sigma)\varphi_{2\sigma}(n)\delta_n^m + \eta_{n,m}(T)$, где δ_n^m символ Кронекера и $\eta_{n,m}(T) \to 0$ при $T \to \infty$.

32. Теорема Адамара как следствие одной общей теоремы типа Таубера

(*Представлено академиком АН УзССР Т. А. Сарымсаковым*)

Мне удалось доказать приложимость метода работы А. Сельберга [20] к получению одной общей теоремы анализа, т.е. достоверность следующей теоремы типа Таубера:

Теорема 1. *Из условий*

$$\sum_{n\le x} F\left(\frac{x}{n}\right) = O\left(\frac{x}{\lg^\eta x}\right) \quad \eta > 2, \tag{a}$$

$$|F(u) - F(v)| < L(|u-v|+1) \tag{b}$$

(*условие медленного роста* $F(x)$)

следует $\frac{F(x)}{x} \to 0$ *при* $x \to \infty$.

Заключение теоремы остается справедливым, если условие (b) заменить «ослабленным условием медленного роста».

Теорема 2. *Из условий*

$$\sum_{n\le x} F\left(\frac{x}{n}\right) = O\left(\frac{x}{\lg^\eta x}\right) \quad \eta > 2, \tag{a}$$

$$|F(u) - F(v)| \le L\left\{(|u-v|+1) + \min\left(\frac{u}{\lg u}, \frac{v}{\lg v}\right)\right\} \tag{b$'$}$$

(*ослабленное условие медленного роста*)

$$a_n = \max|F(n+\theta) - F(n)| = O(\log^p n), \tag{c}$$

$$\sum_{n\le x} a_n = \sum_{n\le x} \max_{0\le\theta\le1} |F(n+\theta) - F(n)| = O(x) \tag{d}$$

вытекает $\frac{F(x)}{x} \to 0$.

Интересно отметить, что теорема Адамара как в форме $\psi(x) \sim x$, так и в форме $M(x) = O(x)$, является легко проверяемым следствием сформулированных теорем.

33. О приложении операторного исчисления к выводу некоторых оценок теории чисел

Определения и обозначения

Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$, где a_n — любые вещественные числа, будет называться последовательностью A, последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ — последовательностью B и т.д.

Функции $F(A/x)$, $F(B/x)$, определены равенствами

$$F(A/x) = \sum_{n \leq x} a_n, \; F(B/x) = \sum_{n \leq x} b_n$$

и т. д. Линейные операторы $L(A)$, $L(B)$ и т.д. определены на множестве функций любой природы следующим образом:

$$L(A)f(x) = \sum_{n \leq x} a_n f\left(\frac{x}{n}\right), \; L(B)f(x) = \sum_{n \leq x} b_n f\left(\frac{x}{n}\right)$$

и т.д.

Для последовательностей $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ и т.д. введем также операции мультипликативного свертывания и мёбиусовского обращения по формулам $a_n \bigcirc b_n = \sum\limits_{d/n} a_d b_{\frac{d}{n}}$:

$$a_n \bigcirc a_n^* = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1; \\ 0, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

Сокращенно эти действия над членами последовательности будут записываться как действия над самими последовательностями: $A \bigcirc B$, A^*, $A \bigcirc B = C$ будет означать $c_n = a_n \bigcirc b_n$, A^* означает $(a_1^*, a_2^*, \ldots)$ или $A \bigcirc A^* = (1, 0, \ldots)$. Очевидно, что мультипликативному свертыванию последовательностей A и B соответствует умножение соответствующих операторов $L(A)$ и $L(B)$ и соответствует числовое перемножение рядов Дирихле

$$f(s,A)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\quad f(s,B)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^s},$$

т.е. $L(A \bigcirc B)=L(A)L(B)$, $f(s,A \bigcirc B)=f(s,A)f(s,B)$.

Очевидно, что если первый элемент последовательностей брать всегда неравным нулю, то все рассматриваемые здесь последовательности образуют группу по отношению к операции свертывания, а все $L(A)$ операторы — группу преобразований, причем, соответствие $L(A)\leftrightarrow A$ указывает на изоморфизм этих групп. Это соответствие дает изоморфизм также для соответствующих колец. Очевидно далее, что $L(A^*)=L(A)^{-1}$. Очень важное значение имеет штрих-операция, превращающая последовательность a_n в последовательность $-a_n\log n$, отвечающую в вышеуказанном изоморфизме дифференцированию рядов Дирихле. Соответственно определяются последовательности

$$A'=(-a_1\log 1,-a_2\log 2,-a_3\log 3,...)$$

и операторы

$$\zeta'(A)f(x)=\zeta(A')f(x)=-\sum a_n\log n f\left(\frac{x}{n}\right).$$

Большой интерес в данном плане представляет операция α, вносящая в описанную алгебру операторов некоммутативность — операция умножения любой функции на $\log x: \alpha f(x)=f(x)\log x$. Последовательность, элементы которой удовлетворяют неравенству $|a_n|< C$, назовем принадлежащей классу $K(C)$, последовательность, элементы которой удовлетворяют неравенствам

$$|a_n| \le \log n,\ |\sum_{k=1}^{n} a_k| \le C_1 n,$$

назовём принадлежащей классу $K^*(C)$.

Операторы, отвечающие рядам Дирихле $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s},\ \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

обозначим $\zeta,\ \zeta',\ \frac{\zeta'}{\zeta}$. Иными словами,

$$\zeta f(x) = \sum_{n \le x} f\left(\frac{x}{n}\right),\ \zeta' f(x) = -\sum_{n \le x} \log n f\left(\frac{x}{n}\right),$$

$$\frac{\zeta'}{\zeta} f(x) = -\sum_{n \le x} \Lambda(n) f\left(\frac{x}{n}\right).$$

Легко видеть, что $L(A)F(B|x) = L(A \bigcirc B)1 = L(A)L(B)1 =$
$= \sum\limits_{n \le x} a_n \bigcirc b_n$. Отсюда, в случае

$$A = (1, 1, 1, ...),\ \beta = (\Lambda(1), \Lambda(2), ...),$$

где $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, получим $F(B|x) = \psi(x)$,

$$\zeta\psi(x) = L(A)\psi(x) = \sum_{n \le x} \varphi\left(\frac{x}{n}\right) = \log[x]!, \tag{1}$$

где $\psi(x)$ — функция Чебышева. Отсюда

$$\zeta\psi(x) = x \log x - x + O(\log x).$$

Далее $\zeta(1) = [x]$, откуда $\zeta^{-1}[x] = 1$ или

$$\sum_{x \le n} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right] = 1,\ \ \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} = O(1).$$

Легко показать, что если последовательность A принадлежит к классу $K(C)$, то из $f(x) = O(\frac{x}{(\log x)l+\varepsilon})$ следует $L(A)f(x) = O(x)$, а из $f(x) = O(x(\log x)^m)$, $\quad m > 0$, следует $L(A)f(x) = O(x(\log n)^{m+1})$. Далее известная формула

$$\int\limits_1^x \sum_{n\le y} a_n \frac{dy}{y} = \sum_{n\le x} a_n \log\frac{x}{n}$$

может быть записана в форме

$$\int\limits_1^x (L(A)1)\frac{dx}{x} = L(A)\log x.$$

Далее

$$-L'(A)f(x) + L(A)f(x)\log x = \log x L(A)f(x). \tag{2}$$

Это соотношение означает равенство

$$\sum_{n\le x} a_n \log n f\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n\le x} \log\frac{x}{n} a_n f\left(\frac{x}{n}\right) = \log x \sum_{n\le x} a_n f\left(\frac{x}{n}\right).$$

Умножая обе части (1) на $L^{-1}(A)$, получим

$$L^{-1}\alpha L = \alpha - \frac{L'}{L}, \tag{3}$$

где α — оператор умножения на $\log x$. В частности,

$$\zeta^{-1}\alpha\zeta = \alpha - \frac{\zeta'}{\zeta}, \tag{4}$$

$$\zeta\alpha\zeta^{-1} = \alpha + \frac{\zeta'}{\zeta}. \tag{5}$$

Применяя (4) к функции Чебышева $\psi(x)$ и учитывая (1), получим

$$\log x\ \psi(x) + \sum_{n\le x} \Lambda(n)\psi\left(\frac{x}{n}\right) = \zeta^{-1}\log x \log[x]! =$$

$$= \zeta^{-1}(x \log^2 x - xg \lg x + O(l^2 x)) = \zeta^{-1}\{\zeta(2x \lg x + ax) + O(\log^2 x)\}. \quad (6)$$

Применяя (5) к $[x]$ и учитывая $\zeta^{-1}[x] = 1$, получим

$$[x]lyx - \sum \Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] = \zeta \log x = O(x). \quad (7)$$

Легко видеть, что из (7) следует соотношение Мертенса, а из (6) — соотношение Сельберга.

34. Классификация мультипликативных функций и последовательностей линейных мультипликативных операторов

Мультипликативной функцией называется функция целого аргумента, удовлетворяющая равенству $a(n)a(m) = a(nm)$ при «n» и «m», взаимно простых.

Многие числовые функции удовлетворяют этому соотношению. Например: $d(n)$ — число делителей n, $\sigma(n)$ — сумма делителей n, $\varphi(n)$ — функция Эйлера, $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, $\tau(n)$ — функция Рамануджана. Операция мультипликативного свертывания обычно определяется следующим соотношением:

$$\sum_{d/n} a(d) b\left(\frac{n}{d}\right).$$

Обозначим операцию свертывания символом $\oplus$. Тогда

$$a(n) \oplus b(n) = \sum_{d/n} a(d) b\left(\frac{n}{d}\right).$$

Известно, что операция мультипликативного свертывания обладает коммутативным и ассоциативным законами.

Известно также, что мультипликативное свертывание двух мультипликативных функций — также мультипликативная функция. Кроме того, известно, что умножению двух рядов Дирихле соответствует свертывание их коэффициентов.

Правило умножения рядов Дирихле можно записать в принятых обозначениях в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)\oplus b(n)}{n^s}. \tag{2}$$

Каждой мультипликативной функции $a(n)$ поставим в соответствие ряд Дирихле $T(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}$, причем $Re(s)$ выберем так, чтобы была обеспечена абсолютная сходимость ряда $T(s)$. Тогда согласно теореме Эйлера

$$T(s)=\prod_{p}\left(1+\frac{a(p)}{p^s}+\frac{a(p^2)}{p^{2s}}+...\right), \tag{3}$$

где p пробегает все простые числа.

Укажем одну из возможных классификаций мультипликативных функций. Отнесём к нулевому классу функцию

$$a_0(n)=\begin{cases}1, & \text{если } n=1,\\ 0, & \text{если } n\neq 1.\end{cases}$$

К классу «K» отнесём те мультипликативные функции, которые удовлетворяют соотношению

$$a_k(p^\alpha)=-\sum_{n=1}^{k}a_k(p^{\alpha-n})b_k(p^n), \tag{4}$$

где $b_k(p^n)=0$, если $n<0$ и $b_k(p^n)$ — произвольная функция, определенная только в точках $p,p^2,...,p^k$. Предполагаем, что $b_k(p^n)\neq 0$, если $n=k$. Доопределим функцию $b_k(n)$ во всех остальных точках следующим образом: $b_k(1)=1,\ b_k(p^n)=0$, если $n>k$ и $b_k(n)b_k(m)=$ $=b_k(nm)$, если $(m,n)=1$. Обозначим построенную таким образом функцию через $a_{-k}(n)$. Соотношение (4) тогда примет вид

$$a_k(p^\alpha)=-\sum_{n=1}^{\alpha}a_k(p^{\alpha-n})a_{-k}(p^n). \tag{5}$$

Это равенство можно записать также в форме

$$\sum_{d/p^\alpha} a_k\left(\frac{p^\alpha}{d}\right)a_{-k}(d) = 0, \text{если } \alpha > 0.$$

Это означает, что

$$T_k(s)T_{-k}(s) = 1 \tag{6}$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_k(n)}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-k}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_k(n)\oplus a_{-k}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_0(n)}{n^s}.$$

Равенство (6) означает, что

$$T_k(s) = T_{-k}^{-1}(s) = \prod_p\left(1 + \frac{a_{-k}(p)}{p^s} + ... + \frac{a_{-k}(p^k)}{p^{ks}}\right)^{-1}.$$

Решая уравнение $x^k + a_{-k}(p)x^{k-1} + ... + a_{-k}(p^k) = 0$, получим некоторые решения $x_{1,2,...,k} = -a^{(1)}(p), -a^{(2)}(p), ..., -a^{(k)}(p)$. То есть

$$T_k(s) = \prod_p\left(1 + \frac{a^{(1)}(p)}{p^s}\right)^{-1}\left(1 + \frac{a^{(2)}(p)}{p^s}\right)^{-1}\cdot ...\cdot\left(1 + \frac{a^{(k)}(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

где функции $a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(k)}$ определены в простых числах. Доопределим их во всех остальных числах с помощью равенства

$$a^{(n)}(m)a^{(n)}(e) = a^{(n)}(me),\ n = 1, ..., k.$$

Тогда функции $a^{(n)}(m)$ согласно определению (4) принадлежат к первому классу.

Таким образом, мы получаем доказательство следующего утверждения: Каждая функция K-го класса может быть представлена в виде свертывания «K» функций первого класса. То есть для каждой функции $a_k(n)$ можно найти такие функции $a_1^{(1)}(n), a_1^{(2)}(n), ..., a_1^{(k)}$, что выполняется равенство

$$a_k(n) = a_1^{(1)}(n) \oplus a_1^{(2)}(n) \oplus ... \oplus a_1^{(k)}(n). \tag{7}$$

Функции первого класса, как это следует из определения, удовлетворяют теореме умножения

$$a_1(n)a_1(m) = a_1(nm)$$

при любых m и n и называются широко мультипликативными в отличие от всех остальных мультипликативных функций, которые называются узко мультипликативными.

Докажем, что свертывание «K» функций первого класса является функцией k-го класса.

Действительно, пусть $a(n) = a_1^{(1)}(n) \oplus a_1^{(2)}(n) \oplus ... \oplus a_1^{(k)}(n)$. Тогда

$$T(s) = T_1^{(1)}(s)T_1^{(2)}(s)...T_1^{(k)}(s) =$$

$$= \prod_p \left(1 + \frac{a_1^{(1)}(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 + \frac{a_1^{(2)}(p)}{p^s}\right)^{-1} \cdot ... \cdot \left(1 + \frac{a_1^{(k)}(p)}{p^s}\right)^{-1} =$$

$$= \prod_p \left(1 + \frac{a_1^{(1)}(p) + ... + a_1^{(k)}(p)}{p^s} + ... + \frac{a_1^{(1)}(p) + ... + a_1^{(k)}(p)}{p^s}\right)^{-1} =$$

$$= \prod_p \left(1 + \frac{a(p)}{p^s} + \frac{a(p^2)}{p^{2s}} + ...\right)^{-1}.$$

Отсюда видно, что $a(p)$ есть функция класса «K». Таким образом, доказана эквивалентность двух определений принадлежности функции к классу «K».

Классификация, проведенная таким путем, страдает тем недостатком, что хотя каждая функция может принадлежать только одному классу, но не всякая функция принадлежит какому-либо классу. Для устранения этого недостатка введем понятие о классах, обозначенных отрицательными числами. Будем говорить, что функция $a(n)$ принадлежит классу «$-K$», и обозначать ее $a_{-k}(n)$, если эта функция удовлетворяет равенству

$$a_{-k}(p^{\alpha}) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_{-k}(p^{\alpha-n}) a_k(p^n), \tag{8}$$

где $a_k(n)$ — функция класса K и $a_{-k}(p^n) = 0$, если $n < 0$. Совершенно аналогично устанавливается, что определение (8) равносильно равенству

$$a_{-k}(n) = a_{-1}^{(1)}(n) \oplus a_{-1}^{(2)}(n) \oplus \ldots \oplus a_{-1}^{(k)}(n).$$

Все остальные функции, не попавшие ни в один из классов, отнесём к бесконечному классу.

Из предыдущего видно, что классы не пересекаются. Очевидно также, что если $k, b \geq 0$, то

$$a_k(n) \oplus a_b(n) = a_{k+b}(n),$$

и если $k, b \leq 0$, то

$$a_k(n) \oplus a_b(n) = a_{k+b}(n).$$

Относительно свертывания функций $a_k(n)$ и $a_{-b}(n)$, очевидно, можно утверждать, что

$$a_k(n) \oplus a_{-b}(n) = a_{k-b}(n) \text{ или } a_{\infty},$$

если $k, b \geq 0$ или $k, b \leq 0$.

Рассмотрим несколько примеров мультипликативных функций.

1. Функция $\sigma(n) = \sum\limits_{d/n} d^k$ относится ко второму классу, так как она может быть получена свертыванием двух широко мультипликативных функций $a_1^{(1)}(n) = 1$ и $a_1^{(2)}(n) = n^k$.

2. Функция $\rho_k(n) = \sum\limits_{d/n} \chi(d) d^k$ также относится ко второму классу.

3. Функция $\psi(n) = \prod\limits_{p^\alpha/n} r^\alpha \times \sum \cos\varphi(d-2m)$ при произвольных r и φ также является функцией второго класса.

4. Функция $d_k(n)$, определенная равенством $\zeta^k(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s}$, относится к K-му классу. Здесь $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана.

Особенно интересно рассмотреть второй класс. Принадлежность функции второму классу определяется с помощью равенства

$$a(p^\alpha)a(p) = a(p^{\alpha+1}) - \varepsilon(p)\ a(p^{\alpha-1}).$$

Это непосредственное следствие равенства (4) при $k = 2$. Если доопределить функцию ε, определенную только в простых числах, до функции широко мультипликативной, то этот закон умножения можно переписать в виде

$$a(n)a(m) = \sum_{d/(m,n)} a\left(\frac{mn}{d^2}\right)\varepsilon(d). \tag{9}$$

Известно, что многие функции, производящими рядами для которых являются модулярные функции, удовлетворяют такому закону умножения. Такой закон умножения выполняется, например, для $\tau(n)$ — Рамануджана, для остаточных членов — в формулах Булыгина, для остаточного члена — в формуле для числа представлений целого положительного «n» квадратичными формами $x^2+y^2+5z^2+5t^2$, x^2+ $+y^2+7z^2+7t^2$, $x^2+y^2+13z^2+13t^2$, $x^2+y^2+17z^2+17t^2$ и так далее.

Из предыдущего следует, что закон умножения (9) означает, то и только то, что функция $a(n)$ может быть получена путем свертывания двух широко мультипликативных функций. Эффективное отыскание функций, свертыванием которых получена данная функция, решало бы гипотезы типа гипотезы Рамануджана. Классификацию, подобную той, которая была дана для мультипликативных функций, с некоторыми ограничениями можно перенести и на последовательности линейных мультипликативных операторов.

Последовательность линейных операторов $\{L_n\}(n=1,2,...)$ называется мультипликативной, если для всех целых n определены операторы $L_1, L_2, ..., L_n, ...$, обладающие свойством

$$L_n L_m = L_{nm}, \text{ при } (m,n)=1. \tag{10}$$

Очевидно, что в силу определения $L_n L_m = L_m L_n$. Определим операцию свертывания двух последовательностей линейных операторов равенством

$$\{L''_n\} = \{L_n\} \oplus \{L'_n\},$$

где

$$L''_n = \sum_{d/n} L_d L'_{n/d},$$

иными словами,

$$\{L_n\} \oplus \{L'_n\} = \left\{\sum_{d/n} L_d L'_{n/d}\right\}. \tag{11}$$

Здесь операция свертывания ассоциативна, но, вообще говоря, не коммутативна. Докажем следующую **теорему:** *Свертывание двух* *линейных мультипликативных операторов тогда и только тогда является мультипликативным оператором, когда свертывающие-ся операторы коммутируют друг с другом при взаимно простых индексах.*

Достаточность. Пусть операторы L_n и L'_m удовлетворяют равенству (10) и $L_n L'_m = L'_m L_n$ при $(m, n) = 1$. Покажем, что тогда $L''_n = L_n \oplus L'_n$ также удовлетворяет соотношению (10).

$$L''_n L''_m = (L_n \oplus L'_n)(L_m \oplus L'_m) = \sum_{d/n} L_d L'_{\frac{n}{d}} \sum_{\delta/m} L_\delta L'_{\frac{m}{\delta}} =$$

$$= \sum_{d/n} \sum_{\delta/n} L_d L'_{\frac{n}{d}} L_\delta L'_{\frac{m}{\delta}}$$

в силу линейности операторов L_n и L'_n. Далее, $L''_n L''_m = \sum\limits_{d/n} \sum\limits_{\delta/n} L_d L_\delta \times$ $\times\, L'_{\frac{n}{d}} L'_{\frac{m}{\delta}}$ в силу того, что $(\frac{n}{d}, \delta) = 1$ и операторы L'_n и L_m коммутируют при $(m, n) = 1$. Наконец, так как $(d, \delta) = 1$ и $(\frac{n}{d}, \frac{m}{\delta}) = 1$, то $L_d L_\delta = L_{d\delta}$ и $L'_{\frac{n}{d}} L'_{\frac{m}{\delta}} = L'_{\frac{mn}{d\delta}}$ по предположению. Следовательно, $L''_n L''_m = \sum\limits_{d/mn} L_d L'_{\frac{mn}{d}}$.

Необходимость. Пусть последовательности операторов $\{L_n\}$ и $\{L'_n\}$ удовлетворяют равенствам (10). Пусть этим свойством обладает также последовательность операторов (11). Покажем, что тогда $L_n L'_m = L'_m L_n$ при $(m, n) = 1$. Для простоты предположим, что $n = p$ и $m = q$ — простые числа. Тогда

$$L_p \oplus L'_p = L_p + L'_p, \quad L_q \oplus L'_q = L_q + L'_q,$$

$$L_{pq} \oplus L'_{pq} = L_{pq} + L_p L'_q + L_q L'_p + L'_{pq} \tag{12}$$

по определению операции свертывания. $L_{pq} \oplus L'_{pq} = (L_p + L'_p)(L_q + L'_q)$

по предположению. Отсюда

$$L_{pq} \oplus L'_{pq} = L_{pq} + L_p L'_q + L'_p L_q + L'_{pq}. \tag{13}$$

Сравнивая (12) и (13), получим

$$L_q L'_p = L'_p L_q. \tag{14}$$

Совершенно аналогично можно провести доказательство для любых взаимно простых m и n. В силу этой теоремы нам придется ограничиться классификацией линейных мультипликативных операторов только на множестве коммутирующих друг с другом операторов при $(m, n) = 1$. Так как понятие коммутируемости операторов не транзитивно, то на этой основе нельзя провести исчерпывающую классификацию мультипликативных линейных операторов.

Однако такую классификацию можно провести на множестве всех последовательностей мультипликативных операторов, каждая из которых коммутирует с любой другой при $(m, n) = 1$. Дословно повторяя рассуждения для мультипликативных функций, мы получим, что если оператор $L_{n,\,k}$ удовлетворяет равенству

$$L_{p^\alpha,\,k} = \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n-1} \sum_{m_1=1}^{k} \ldots \sum_{m_i=m_{i-1}+1}^{k} L_{p_1 1}^{(m,\,n)} \ldots L_{p_1 1}^{(m_1)} L_{p^{\alpha-n},\,k}, \tag{15}$$

то $L_{n,\,k}$ является свертыванием «K» линейных мультипликативных операторов первого класса, т.е.

$$L_{n,\,k} = L_{n,\,1}^{(1)} \oplus L_{n,\,1}^{(2)} \oplus \ldots \oplus L_{n,\,1}^{(k)} \tag{16}$$

и наоборот.

При выводе этих фактов вместо свойств рядов Дирихле используются свойства операторной дзета-функции.

В качестве примера рассмотрим оператор Гекке, играющий важную роль в теории модулярных функций. Оператор Гекке определяется следующим образом:

$$T_n^t f(x) = n^{k-1} \sum_{d/n} \varepsilon\left(\frac{n}{d}\right) d^{-k} \sum_{b \bmod d} f\left(\frac{\frac{n}{d}x + bt}{d}\right).$$

Здесь $b \bmod d$ означает, что «b» пробегает полную систему вычетов по $\mod d$, $\varepsilon(d)$ — широко мультипликативная функция, t — период функции $f(x)$.

Замечательным свойством оператора Гекке является теорема умножения

$$T_n^t T_m^t = \sum_{d/(m,n)} T^t_{\frac{mn}{d^2}} \varepsilon(d) d^{k-1}.$$

Из этого равенства видно, что оператор Гекке принадлежит ко второму классу. Докажем эту теорему умножения, воспользовавшись другим определением принадлежности ко второму классу.

Для этого рассмотрим две последовательности линейных мультипликативных операторов:

$$\{L_n^t\} \text{ и } \{L_n'\}, \quad \text{где } L_n^t f(x) = n^{-1} \sum_{b \bmod n} f\left(\frac{k + bt}{n}\right),$$

и

$$L_n' f(x) = n^{k-1} \varepsilon(n) f(nx).$$

Здесь $\varepsilon(n)$ — широко мультипликативная функция. Покажем, что операторы L_n^t и L'_n широко мультипликативные. Действительно,

$$\begin{aligned}
L'_n L'_m f(x) &= (mn)^{k-1}\varepsilon(mn) f(mnx) = L'_{mn} f(x),\\
L_n^t L_m^t &= (mn)^{-1} \sum_{b \bmod n} \sum_{c \bmod n} f\left(\frac{x+bt}{mn} + \frac{ct}{n}\right) =\\
&= (mn)^{-1} \sum_{b \bmod n} \sum_{c \bmod n} f\left(\frac{x+(b+cm)t}{mn}\right) =\\
&= (mn)^{-1} \sum_{b \bmod mn} f\left(\frac{x+bt}{mn}\right) = L_{mn}^t.
\end{aligned}$$

Кроме того, если $(m,n)=1$, то L_n^t и L''_m коммутируют друг с другом:

$$\begin{aligned}
L_n^t L'_m f(x) &= m^{k-1}\varepsilon(m)\ n^{-1} \sum_{b \bmod n} f\left(\frac{mx+bt}{n}\right) \quad \text{и}\\
L'_m L_n^t f(x) &= m^{k-1}\varepsilon(m)\ n^{-1} \sum_{b \bmod n} f\left(\frac{mx+bmt}{n}\right) =\\
&= m^{k-1}\varepsilon(m)\ n^{-1} \sum_{b \bmod n} f\left(\frac{mx+bt}{n}\right).
\end{aligned}$$

Таким образом, если

$$\begin{aligned}
T_n^t &= L_n^t \oplus L'_n, \quad \text{то}\\
T_n^t T_m^t f(x) &= \sum_{d/(m,n)} T^t_{\frac{mn}{d^2}} L'_d L_d^t f(x) =\\
&= \sum_{d/(m,n)} T^t_{\frac{mn}{d^2}} d^{k-2}\varepsilon(d) \sum_{b \bmod d} f(x+bt).
\end{aligned}$$

Если функция $f(x)$ периодична с периодом t, то оператор T_n^t совпадает с оператором Гекке над этой функцией.

Очевидно, что если оператор L'_n — обратный слева к оператору L_n при любых целых n и операторы L_n, L'_m широко мультипликативны и коммутируют друг с другом при $(m,n)=1$, то $T_n = a(n)L_n \oplus$ $\oplus b(n)L'_n$, где $a(n)$ и $b(n)$ — широко мультипликативные функции, удовлетворяет теореме умножения

$$T_k T_m = \sum_{d/(m,n)} T_{\frac{mn}{d^2}} a(d) b(d). \qquad (17)$$

Легко доказать и обратное утверждение.

Так как оператор $L'_n f(x) = f(nx)$ — обратный слева для оператора $L^t_n f(x) = n^{-1} \sum\limits_{b \bmod n} f(\frac{mx+bt}{n})$ на классе функций с периодом t, то на этом классе выполняется теорема умножения (17) для оператора Гекке. В силу этого обстоятельства легко доказывается также, что оператор

$$T_n f(x) \sum_{d/n} f\left(x\frac{n}{d^2}\right)\, a(d)\, b\left(\frac{n}{d}\right)$$

удовлетворяет равенству (17).

Рассмотрим оператор

$$L_u f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log^k u}{k!} f(x+kh).$$

Оператор L'_n, определенный как тождественный при $n = 1$ и совпадающий с L_u при $n > 1$, широко мультипликативен. Обратным к нему слева будет оператор L''_n, являющийся тождественным при $n = 1$ и при $n > 1$ заданный равенством

$$L''_n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log^k \frac{1}{n}}{k!}\ f(x+kh).$$

В силу этого оператор

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{n,k}}{k!}\ f(x+kh), \text{ где } a_{n,k} = \sum_{d/n} \log^k \frac{n}{d} \frac{n}{d^2},$$

удовлетворяет теореме умножения (17) с $a(n) = b(n) = 1$.

35. Операторные ряды Дирихле, связанные с оператором Лиувилля

(*Представлено академиком АН УзССР Т. А. Сарымсаковым*)

В работе [69] даны различные способы нахождения семейств операторов L_u, удовлетворяющих определенной системе аксиом. Эти семейства операторов обладают M-свойством

$$L_n L_m = L_{nm}.$$

В связи с этим ставился вопрос относительно «операторных рядов Дирихле»

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{n^s} f(x) = \zeta(S, L) f(x).$$

Во всех рядах подобного типа сходимость везде понимается в смысле обычной сходимости рядов при заданном f и любом x.

Известное тождество Эйлера в операторной форме пишется

$$\zeta(S, L)\ \frac{\zeta'}{\zeta}(S, L) f = \frac{\zeta'}{\zeta}(S, L)\ \zeta(S, L) f = -\sum_{n=1}^{\infty} \log n \frac{L_n}{n^s} f.$$

Определенный выбор последовательности операторов L_u и семейства функций f и числовых значений S и x приводит обычно к известным, а также к новым арифметическим тождествам [52, 83].

Достаточно напомнить, что норвежский математик Атле Сельберг получил известные результаты, исходя из семейства операторов L_n, где $L_n f(x) = f(\frac{x}{n})$, что фактически привело его к элементарному доказательству теоремы Адамара.

Мы будем рассматривать семейство функциональных операторов L_u, определенных для всех $u \geq 1$ формулами $L_1 f(x) = f(x)$,

$$L_u f(x) = \frac{1}{\Gamma(\log u)} \int\limits_0^x (x-t)^{\log u - 1} f(t)dt, \ u > 1, \tag{1}$$

а также операторы

$$\left.\begin{aligned} G_u f(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(1+i\log u)} \int\limits_0^x (x-t)^{-i\log u} f'(t)dt, \\ G_u^* f(x) = G_u^{-1} f(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(1-i\log u)} \int\limits_0^x (x-t)^{-i\log u} f'(t)dt, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

заданные в пространстве F, состоящие из всех дифференцируемых функций на (0,1) с $|f'(t)|$, удовлетворяющие условию $f(0) = f'(0) =$ $= 0$. Из них (1) — оператор дробного интегрирования порядка $\log u$ и (2) — порядка $i \log u$; (1) и (2) — операторы Римана — Лиувилля.

Групповые свойства этих операторов проверяются непосредственно. Например, легко показать, что $L_n L_m = L_{nm}$ и $G_u G_v = G_{uv}$

$$G_u^* G_v^* = G_u^{-1} G_v^{-1} = G_{uv}^{-1} = G_{uv}^*.$$

Инфинитезимальный оператор (2) имеет вид

$$\lambda = \left[\frac{\partial G_u}{\partial u}\right]_{u=1} = (\log x + c) f(x) + \int\limits_0^x \log\left(1 - \frac{t}{x}\right) f'(t)dt,$$

где $c = \Gamma'(1)$ — константа Эйлера — Маклорена.

Оператор λ, в известном смысле слова, есть логарифм операции интегрирования.

Этот случай — пример полугруппы операторов, так как G_u неопределено для $0 < u < 1$. $G_u = u^\lambda$ здесь означает только наличие соотношений $G_u G_v = G_{uv}$,

$$u \geq 1, \ v \geq 1 \text{ и } \frac{d}{du} G_u = \lambda G_u.$$

На основании правила интегрирования по частям оператор λ можно записать в более удобной форме

$$\lambda f(x) = (\log x + c) f(x) + \int\limits_0^x \frac{f(t) - f(x)}{t - x} dt.$$

Операторные ряды, составленные из (1), вследствие быстрого роста $\Gamma(\log u)$ всюду сходятся и потому нельзя ставить вопрос об аналитическом продолжении. Однако легко показать, что операторные ряды, составленные из (2), сходятся только правее прямой $\sigma = \frac{\pi}{2} + 1$, где $\sigma = Re(s)$, и, следовательно, можно ставить вопрос об их аналитическом продолжении.

Приложение оператора (2) к функциям двух переменных дает

$$T_u f(x, y) = G_u G_u^* f(x, y) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1 + i \log u)} \frac{1}{\Gamma(1 - i \log u)} \int\limits_0^x \int\limits_0^y (x - t_1)^{i \log u} (y - t_2)^{-i \log u} \times$$

$$\times f''(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \frac{u^\pi - u^{-\pi}}{\pi \log u} \int\limits_0^x \int\limits_0^y \left(\frac{x - t_1}{x - t_2} \right)^{i \log u} f''(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Если приложить этот оператор (2) в случае $2p$ переменных $x_1, ..., x_p$ и $y_1, ..., y_p$, то получим

$$\left(\frac{u^\pi - u^{-\pi}}{\pi \log u} \right)^p \int\limits_0^{x_1} ... \int\limits_0^{x_p} \int\limits_0^{y_1} ... \int\limits_0^{y_p} \left[\frac{(x_1 - t_1)...(x_p - t_p)}{(y_1 - \tau_1)...(y_p - \tau_p)} \right]^{i \log u} \times$$

$$\times f^{2p} \left(\frac{t_1, ..., t_p}{\tau_1, ..., \tau_p} \right) dt_1 ... dt_p d\tau_1 ... d\tau_p = F \left(\frac{x_1, ..., x_p}{y_1, ..., y_p} \middle| u \right).$$

Литература

1. Behnke H. Über die Verteilung von Irrationalitaten mod. 1 // Hamb. Abh. — 1922. — №1. — P. 252–267.

2. Behnke H. Zur Theorie der diophantischen Approximationen // Hamb. Math. Abh. — 1924. — №3. — P. 261–318.

3. Davenport H. Note on a Result in the Additive Theory of Numbers / H. Davenport, H. Heilbronn // Proc. London Math. Soc. — 1938. — Vol. s2-43, №2. — P. 142–151.

4. Dunford N. On one parameter groups of linear transformations // Annals of Mathematics, Second Series. — 1938. — Vol. 39, №3. — P. 569–573.

5. Erdös P. On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for integers // Acta arithmetica. — 1935. — Vol. 1, №2. — P. 197–200.

6. Erdös P. Über die Vereinfachung eines Landauschen Satzes / P. Erdös, P. Turan // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. — 1935. — Т. 1. — С. 144–147.

7. Hartman Ph. Multiplicative sequences and Töplerian (L^2)-bases // Duke Math. Journ. — 1947. — Vol. 14, №3. — P. 755–767.

8. Hecke E. Uber analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins. // Hamb. Abh. — 1921. — №1. — P. 54–76.

9. Heilbronn H. Alle großen ganzen Zahlen lassen sich als Summe von höchstens 71 Primzahlen darstellen / H. Heilbronn, E. Landau, P. Scherk // Časopis pro pěstování matematiky a fysiky. — 1936. — Vol. 65, №3. — P. 117–141.

10. Hille E. On the Completeness of Lambert Functions, II / E. Hille, O. Szasz // Annals of Mathematics, Second Series. — 1936. — Vol. 37, №4. — P. 801–815.

11. Hille E. On Semi-Groups of Transformations in Hilbert Space // Proc. Nat. Acad. Sci. — 1938. — Vol. 24, №3. — P. 159–161.

12. Hille E. Notes on Linear Transformations. II. Analyticity of Semi-Groups // Annals of Mathematics, Second Series. — 1939. — Vol. 40, №1. — P. 1–47.

13. Khintchine A. Zur additiven Zahlentheorie // Матем. сб. — 1932. — Т. 39, №3. — С. 28–34.

14. Landau E. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. — Leipzig, 1909.

15. Landau E. Vorlesungen *ü*ber Zahlentheorie. — Vols. 1–3. — Leipzig, 1927.

16. Landau E. Verscharfung eines Romanoffschen Satzes // Acta arithmetica. — 1935. — Vol. 1, №1. — P. 43–61.

17. Landau E. On a titchmarsh-estermann sum // J. Lond. Math. Soc. — 1936. — Vol. s1-11, №4. — P. 242–245.

18. N*ö*rlund N. E. Vorlesungen *ü*ber Differenzenrechnung. — Berlin, 1924.

19. Schnirelmann L. Über additive Eigenschaften von Zahlen // Math. Ann. — 1933. — Vol. 107. — P. 649–690.

20. Selberg A. An elementary proof of the prime-number theorem // Ann. Math. — 1949. — Vol. 50, №2. — P. 305–313.

21. Selberg A. Contributions to the theory of Dirichlet's L-functions. — Oslo Academie Vid Selsk, 1946.

22. Shapiro H. On a theorem of Selberg and generalization // Ann. Math. — 1950. — Vol. 51, №2. — P. 485–497.

23. Shapiro H. On primes in arithmetic progression (I) // Ann. Math. — 1950. — Vol. 52, №1. — P. 217–230.

24. Shapiro H. On primes in arithmetic progression (II) // Ann. Math. — 1950. — Vol. 52, №1. — P. 231–243.

25. Stone M. H. Linear Transformations in Hilbert Space: III. Operational Methods and Group Theory // Proc. Nat. Acad. Sci. — 1930. — Vol. 16, №2. — P. 172–175.

26. Szeg*ö* G. Orthogonal Polynomials // Amer. Math. Soc. — 1939. — P. 378–393.

27. Taylor A. E. Linear operations which depend analytically on a parameter // Annals of Mathematics, Second Series. — 1938. — Vol. 39, №3. — P. 574–593.

28. Vinogradow I. Some theorems concerning the theory of primes // Мат. сб. — 1937. — Vol. 44, №2. — С. 179–194.

29. Widder D. V. The inversion of the Laplace integral and the related moment problem // Transactions of the American Mathematical Society. — 1934. — Vol. 36, №. 1. — P. 107–200.

30. Wintner A. Diophantine Approximation and Hilbert's space // Amer. Journ. Math. — 1944. — Vol. 66, №4. — P. 564–578.

31. Бухштаб А. А. Об одной метрической задаче аддитивной теории чисел // Матем. сб. — 1933. — Т. 40, №2. — С. 190–195.

32. Бухштаб А. А. Теория чисел. — М.: Просвещение, 1966. — 385 с.

33. Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Гостехиздат, 1953.

34. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. — М.: Гостехиздат, 1952.

35. Государственный архив Томской области. Ф–815. Оп. 29. Д. 326.

36. Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. — М.; Л.: Изд-во Академии наук, 1947.

37. Ингам А. Распределение простых чисел. — М.; Л., 1936.

38. История отечественной математики / под ред. И. З. Штокало. — Киев, 1968. — Т. 3.

39. Котелянский Д. М. Об одном арифметическом методе ортогонализации в несепарабельных гильбертовых пространствах // Матем. сб. — 1953. — Т. 33(75), №1. — С. 181–192.

40. Круликовский Н. Н. Из истории развития математики в Томске. — Томск.: Изд-во Том. ун-та, 2006. — 173 с.

41. Курант Р. Методы математической физики / Р. Курант, Д. Гильберт. — М.; Л., 1945.

42. Плеснер А. Спектральная теория линейных операторов // УМН. — 1941. — Вып. 9. — С. 3–125.

43. Сарымсаков Т. А. Николай Павлович Романов (к пятидесятилетию со дня рождения) / Т. А. Сарымсаков, Ю. В. Линник // УМН. — 1957. — Т. 12, №3. — С. 251–253.

44. Прахар К. Распределение простых чисел. — М.: Мир, 1967. — 511 с.

45. Профессора Томского университета. Биографический словарь. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998.

46. Смирнов В. И. Курс высшей математики. — Т. 3. — М.; Л., 1949.

47. Титчмарш Э. Ч. Введение в теорию интегралов Фурье. — М.: ОГИЗ, 1948.

48. Хилл Е. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1951.

49. Шнирельман Л. Г. Об аддитивных свойствах чисел. — Новочеркасск, 1930.

50. Шнирельман Л. Г. Об аддитивных свойствах чисел // УМН. — 1939. — Вып. 6. — С. 9–25.

51. Шнирельман Л. Г. Об аддитивных свойствах чисел // УМН. — 1940. — Вып. 7. — С. 7–46.

52. Ягудаев Б. Я. Получение некоторых арифметических тождеств на основе теории операторной дзета-функции // Учен. зап. Ташкентского вечернего пед. ин-та им. В. Г. Белинского. — 1960. — Вып. 10. — С. 36–41.

Основные результаты автора опубликованы в следующих работах:

53. Романов Н. П. О двух теоремах аддитивной теории чисел // Матем. сб. — 1934. — Т. 40, №4. — С. 514–520.

54. Романов Н. П. Об одной теореме аддитивной теории чисел // Учен. зап. Моск. гос. ун-та. — 1934. — Т. 2, №2. — С. 49–54.

55. Romanoff N. P. Ueber einige Satze der additiven Zahlentheorie // Math. Ann. — 1934. — Vol. 109. — P. 668–678.

56. Романов Н. П. К проблеме Гольдбаха // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. — 1935. — Т. 1, №1. — С. 34–38.

57. Романов Н. П. Замечание к работе «К проблеме Гольдбаха» // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. — 1937. — Т. 1, вып. 1. — С. 34–38.

58. Романов Н. П. Об аддитивных свойствах общих числовых последовательностей // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. — 1937. — Т. 1, вып. 3. — С. 190–204.

59. Романов Н. П. Определение среднего квадратичного основной функции аддитивной теории чисел // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. — 1938. — Т. 2, вып. 1. — С. 13–37.

60. Романов Н. П. О некоторых теоремах аддитивной теории чисел // УМН. — 1940. — Т. 7. — С. 47–56.

61. Романов Н. П. Об одной специальной ортогональной системе // ДАН. — 1943. — Т. 40, №3. — С. 294–295.

62. Романов Н. П. Об одной полной ортонормированной системе пространства $L_2(0,1)$ // ДАН. — 1944. — Т. 45. — С. 294–295.

63. Романов Н. П. Об ортонормированных системах // ДАН. — 1945. — Т. 46. — С. 239–242.

64. Романов Н. П. Об одной специальной ортонормированной системе и ее связи с теорией простых чисел // Матем. сб. — 1945. — Т. 16(58), №3. — С. 353–364.

65. Романов Н. П. Пространство Гильберта и теория чисел // ИАН. — Сер. матем. — 1946. — Т. 10. — С. 3–34.

66. Романов Н. П. Об определении среднеарифметических высшего порядка от основной функции аддитивной теории чисел // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. — 1946. — Т. 3, вып. 1. — С. 128–144.

67. Романов Н. П. Применение функционального анализа к вопросам распределения простых чисел // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. — 1946. — Т. 3, вып. 1. — С. 145–173.

68. Романов Н. П. Об одном специальном семействе бесконечных унитарных матриц // ДАН. — 1946. — Т. 52. — С. 295–298.

69. Romanoff N. P. On one-parameter groups of linear transformations. — 1 // Ann. Math. — 1947. — Vol. 48, №2. — P. 216–233.

70. Романов Н. П. Об операторной ζ-функции // УМН. — 1947. — Т. 2, №3 (19). — С. 186–187.

71. Романов Н. П. К вопросу о распределении простых чисел // Матем. сб. — 1948. — Т. 23 (65), №2. — С. 259–278.

72. Романов Н. П. Ряды Фурье по одной специальной ортогональной системе // Труды пед. и учит. ин-та. — Самарканд, 1948. — Т. 6. — С. 91–102.

73. Романов Н. П. Об одном специальном семействе бесконечных унитарных матриц // ДАН УзССР. — 1948. — Т. 4. — С. 3–5.

74. Романов Н. П. Ряды Фурье по одной специальной ортогональной системе // ДАН УзССР. — 1948. — Т. 12. — С. 3–9.

75. Романов Н. П. Числа Фарея и распределение простых чисел // Труды Узбек. ун-та. — 1948. — Т. 37. — С. 1–15.

76. Романов Н. П. Об асимптотических теоремах теории чисел // Труды Ин-та матем. и мех. АН УзССР. — 1949. — Т. 5. — С. 54–60.

77. Романов Н. П. Аналитические функции целого аргумента // Труды Узбек. ун-та. — 1951. — Т. 47. — С. 3–27.

78. Романов Н. П. Об одном повом подходе к проблеме распределения простых чисел // Труды Ин-та матем. и мех. АН УзССР. — 1951. — Т. 8. — С. 3–25.

79. Романов Н. П. Числа Фарея и распределение простых чисел // УМН. — 1951. — Т. 6, №5 (45). — С. 157.

80. Романов Н. П. Пространство Гильберта и теория чисел. — II // ИАН. Сер. матем. — 1951. — Т. 15. — С. 131–152.

81. Романов Н. П. Асимптотика степенных рядов на границе круга сходимости и предельные теоремы теории чисел // УМН. — 1953. — Т. 8, №2 (54). — С. 160–162.

82. Романов Н. П. Асимптотика степенных рядов на границе круга сходимости и предельные теоремы теории чисел // Труды Ср.-Аз. ун-та. — 37. Матем. науки. — 1954. — Т. 8. — С. 119–123.

83. Романов Н. П. Элементарные доказательства некоторых предельных теорем теории чисел // Труды Ср.-Аз. ун-та — 54. Матем. науки. — 1954. — Т. 10. — С. 23–27.

84. Романов Н. П. Аналитические функции целого аргумента: об одном новом представлении дзета-функции Римана // УМН. — 1955. — Т. 10, №2 (64). — С. 212–213.

85. Романов Н. П. Упрощение элементарного доказательства А. Сельберга асимптотического закона распределения простых чисел / Н. П. Романов, А. Г. Постников // УМН. — 1955. — Т. 10, №4 (66). — С. 75–87.

86. Романов Н. П. Об одном новом аналитическом представлении дзета-функции Римана // Труды Ср.-Аз. ун-та. — 66. Физ.-матем. науки. — 1956. — Т. 13. — С. 51–54.

87. Романов Н. П. Асимптотика степенных рядов на границе круга сходимости и предельные теоремы теории чисел // Труды 3-го Всесоюз. матем. съезда. — М., 1956. — Т. 1. — С. 12–13.

88. Романов Н. П. Операторные методы в теории чисел // Труды 3-го Всесоюз. матем. съезда. — М., 1956. — Т. 1. — С. 13.

89. Романов Н. П. Об одном замечательном степенном ряде // Тр. Среднеазиат. ун-та. — 83. Матем. — 1958. — №14. — С. 93–94.

90. Романов Н. П. Об одной ортогональной системе, связанной с теорией чисел // Учён. зап. Ташкент. пед. ин-та. — 1959. — Т. 7. — С. 3–4.

91. Романов Н. П. Теорема Адамара как следствие одной общей теоремы типа Таубера // ДАН УзССР. — 1959. — Т. 10. — С. 7–8.

92. Романов Н. П. О приложении операторного исчисления к выводу некоторых оценок теории чисел // Тр. Ташкент. ун-та. — 189. Матем. — 1961. — №21. — С. 65–68.

93. Романов Н. П. Классификация мультипликативных функций и последовательностей линейных мультипликативных операторов / Н. П. Романов, Б. В. Левин // Тр. Ташкент. ун-та. — 208. Матем. — 1962. — №23. — С. 128–136.

94. Романов Н. П. Операторные методы в теории чисел // Тр. 4-го Всесоюз. матем. съезда. — 1964. — Т. 2. — С. 135–136.

95. Романов Н. П. Операторные ряды Дирихле, связанные с оператором Лиувилля / Н. П. Романов, Б. Я. Ягудаев // ДАН УзССР. — 1964. — №4. — С. 9–11.

Научное издание

РОМАНОВ Николай Павлович

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Сборник трудов

Редактор В.Г. Лихачева

Подписано в печать 29.03.2013 г.
Формат 60x84$^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Печ. л. 29,75; усл. печ. л. 27,7; уч.-изд. л. 27,5. Тираж 500. Заказ

ООО «Издательство ТГУ», 634029, г. Томск, ул. Никитина, 4
ООО «Интегральный переплет», 634040, г. Томск, ул. Высоцкого, 28, стр. 1