ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 55, № 10/2 ФИЗИКА 2012

УДК 629.783, 521.182

Е.В. КАРАТАЕВ, Т.В. БОРДОВИЦЫНА

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРБИТЫ НИЗКОЛЕТЯЩЕГО СПУТНИКА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ СИСТЕМЫ ГЛОНАСС[1]

Представлены результаты анализа двух способов уточнения орбиты произвольного ИСЗ по данным измерений его дальности относительно навигационных КА системы ГЛОНАСС. Рассматривается сходимость итерационного алгоритма ньютоновского типа для нахождения в рамках метода наименьших квадратов (НК) оценок для поправок в элементы неизвестного ИСЗ в зависимости от интервала наблюдений и точности начальных параметров для классического способа уточнения орбиты в элементах и при использовании в качестве определяемых параметров координат и скоростей объекта.

Ключевые слова: *определение орбиты, искусственные спутники Земли, ГЛОНАСС измерения, математическое моделирование.*

Введение

В настоящее время для определения пространственных координат объектов широко используются системы глобального позиционирования (GPS – Global Positioning System и ГЛОНАСС – ГЛОбальная НАвигационная Спутниковая Система), имеющие одинаковый принцип определения координат. Данный принцип состоит в вычислении координат приёмника по определённым расстояниям от приёмника до навигационных спутников, координаты которых даны с высокой точностью. Традиционно системы глобального позиционирования используются только для определения пространственных координат объекта. В настоящей работе предполагается рассмотреть более сложную задачу, связанную с определением орбиты космического объекта по измерениям расстояний от данного объекта до спутников системы ГЛОНАСС. Следует сказать, что данная тема становится в настоящее время все более популярной. Можно указать ряд работ [1–4], в которых так или иначе эта тема рассматривалась. Каждый из указанных авторов решал какую-то свою задачу по разработке и применению алгоритмов определения орбит по измерениям спутник – спутник. Однако сравнение классического метода определения орбит с методом определения координат и скоростей в этих работах не проводилось.

Условие видимости объектов системы ГЛОНАСС

Будем представлять измеренную дальность от «неизвестного» спутника до спутника системы ГЛОНАСС в виде [5]

$$\rho^i = \sqrt{\left(x^i - x_{un}\right)^2 + \left(y^i - y_{un}\right)^2 + \left(z^i - z_{un}\right)^2} + \nu\,, \tag{1}$$

где x^i, y^i, z^i – координаты i-го спутника системы ГЛОНАСС; x_{un}, y_{un}, z_{un} – координаты спутника, орбита которого уточняется; ν – случайная ошибка измерений.

Чтобы исключить «невидимые» спутники, было применено следующее условие видимости [2]: $R < R_З$ (см. рис. 1).

Из теоремы косинусов

$$\cos\phi = \frac{r_1^2 + r_{12}^2 - r_2^2}{2r_1 r_{12}}\,.$$

Используя свойство прямоугольного треугольника, получим выражение для R:

$$R = r_1 \sin\phi = r_1\sqrt{1-\cos^2\phi} = \frac{1}{2r_{12}}\sqrt{(2r_{12}r_1)^2 - (r_{12}^2 + r_1^2 - r_2^2)^2}\,.$$

[1] Работа выполнена по заданию № 2.4024.2011 Министерства образования и науки Российской Федерации.

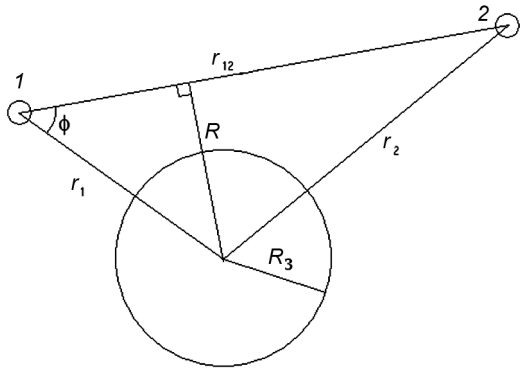

Рис. 1. Условия видимости: r_{12} – вектор, соединяющий два спутника; r_1, r_2 – векторы положения спутников 1 и 2 (соответственно) относительно центра Земли; R – перпендикуляр, опущенный к вектору r_{12} из центра Земли; R_3 – средний радиус Земли, включающий плотные слои атмосферы (6400 км)

Моделирование наблюдений

Моделирование производилось по 24 КА ГЛОНАСС, находящихся на круговых орбитах высотой 19100 км, наклонением 63,9° и периодом обращения 11 ч 15 мин в трех орбитальных плоскостях. Орбитальные плоскости разнесены по долготе на 120°. В каждой орбитальной плоскости размещаются по 8 НКА с равномерным сдвигом по аргументу широты 45°. Кроме этого, в плоскостях положения НКА сдвинуты относительно друг друга по аргументу широты на 15°. В качестве исследуемого объекта был взят спутник с элементами орбиты:

$$a = 7178{,}1361 \quad e = 0{,}10 \quad i = 62{,}8 \quad \Omega = 10{,}0 \quad \omega = 45{,}0 \quad M_0 = 0{,}0.$$

Моделирование измерений псевдодальностей производилось по формуле (1) для каждого момента времени на протяжении всего сеанса измерений, случайная ошибка вносилась с помощью программы random с модулем 1.

Движение спутника моделировалось в рамках задачи двух тел. При улучшении орбиты в кеплеровых элементах использовался классический алгоритм задачи двух тел [6], а при использовании координат и скоростей в качестве улучшаемых параметров применялся алгоритм Р. Бэттина [7].

Алгоритм нахождения поправок

Рассмотрим итерационный алгоритм ньютоновского типа для нахождения в рамках метода наименьших квадратов (НК) оценок для поправок в элементы неизвестного спутника. Линеаризуем уравнение (1) относительно неизвестных поправок в элементы орбиты. Получим следующее уравнение:

$$\Delta\rho = \frac{\partial\rho}{\partial\omega}\Delta\omega + \frac{\partial\rho}{\partial\Omega}\Delta\Omega + \frac{\partial\rho}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial\rho}{\partial i}\Delta i + \frac{\partial\rho}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial\rho}{\partial M}\Delta M ,$$

где $\Delta\rho_i = \rho_{\text{набл}} - \rho_{\text{выч}}$; $\Delta a, \Delta e, \Delta i, \Delta\omega, \Delta\Omega, \Delta M$ – поправки в улучшаемые начальные элементы «неизвестного» ИСЗ; i – номер измерения.

Перепишем систему уравнений в матричной форме:

$$A\Delta q = \Delta R .$$

Здесь A – матрица производных от измеряемых параметров по оцениваемым; Δq – вектор-столбец кеплеровых элементов; ΔR – вектор-столбец $\Delta\rho_i = \rho_{\text{набл}} - \rho_{\text{выч}}$. Данную систему уравнений решим методом дифференциальных поправок.

Используя зависимости $\rho_i(\omega_{un}, \Omega_{un}, a_{un}, i_{un}, e_{un}, M_{0un})$, компоненты матрицы A будем вычислять по формуле

$$\partial\rho_i / \partial e_k = \partial\rho_i / \partial x_j \, \partial x_j / \partial e_k ,$$

где производные $\partial\rho_i/\partial x_j$ вычисляются аналитическим способом, а производные $\partial x_j/\partial e_k \approx \Delta x_j/\Delta e_k$ – способом конечных разностей.

Решение нелинейных задач НК возможно только численными итерационными методами. Одним из наиболее эффективных методов является метод дифференциальных поправок (метод Гаусса – Ньютона). Метод дифференциальных поправок можно записать в следующем матричном виде:

$$q^{N+1} = q^N + \left(A(q^N)^T A(q^N)\right)^{-1} A(q^N)^T \Delta\rho(q^N).$$

При реализации данного алгоритма для вычисления обратной матрицы использовался метод сингулярного анализа [8].

Описание результатов

В рамках поставленной задачи был проведён ряд численных экспериментов для определения скорости сходимости итерационного процесса нахождения НК-оценок кеплеровых элементов. Исследования проводились в зависимости от продолжительности интервалов, охваченных наблюдениями и величины вносимых поправок.

Улучшение орбиты в кеплеровых элементах. Для исследования сходимости процесса в каждый из кеплеровых элементов вносились поправки порядка 1–3 км или эквивалентные им в градусах для угловых величин. Использовался следующий критерий сходимости:

$$|\, q_i^{N+1} - q_i^N \,| < \varepsilon_i,$$

причем в качестве ε_i выбиралась величина 10^{-5}.

В результате проделанной работы были получены графики скорости сходимости в зависимости от дуги, покрытой измерениями, выполненными с интервалом 25 с, и таблица предельных значений ошибок кеплеровых элементов, после которых итерационный процесс не сходится.

На графиках рис. 2 представлена зависимость количества итераций метода НК от длины дуги, охваченной измерениями, при различных точностях измерений. Для построения графика *а* использовалось значение случайной ошибки с нормальной дисперсией 1 м, для графика *б* – 10 м.

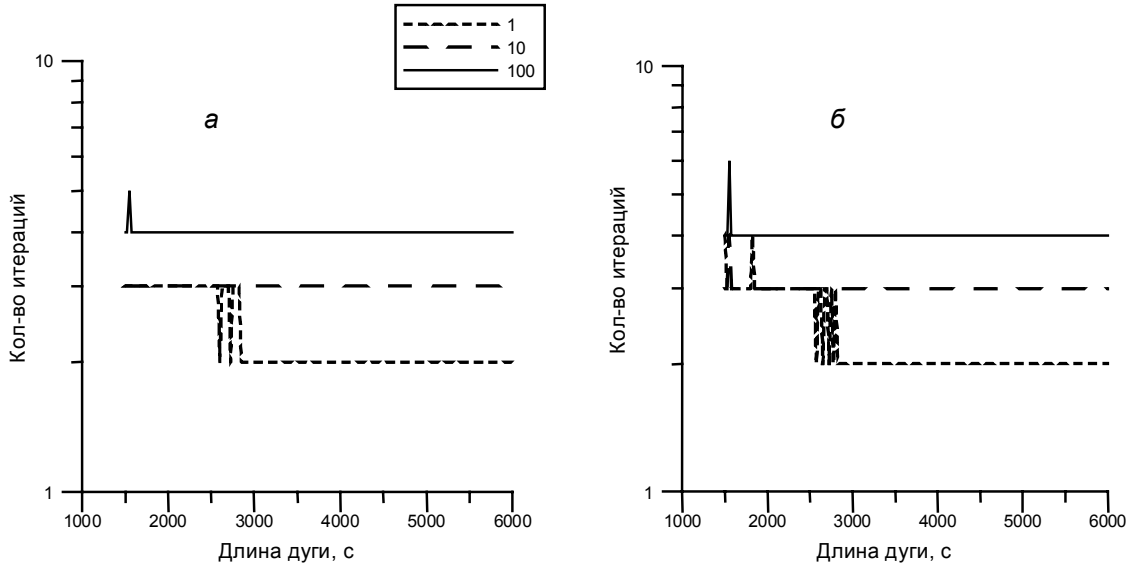

Рис. 2. Зависимость скорости сходимости от длительности интервала измерений при различной точности начальных параметров и величины случайной ошибки

При построении графиков были взяты следующие значения начальных ошибок: $\Delta a = 1{,}0$ км, $\Delta e = 0{,}0001$, $\Delta i = 0{,}001$, $\Delta\omega = 0{,}01$, $\Delta\Omega = 0{,}01$, $\Delta M = 0{,}01$ и превышающие их в 10 и 100 раз соответственно.

При сравнении графиков с различными значениями начальных ошибок видно, что чем выше точность начальных параметров, тем меньше итераций требуется для сходимости итерационного процесса.

Из сопоставления графиков *а* и *б* на рис 2 можно заметить, что ошибка измерений не оказывает прямого действия на процесс сходимости: количество итераций для расчетов с одними и теми же величинами начальных поправок примерно одинаково. Однако устойчивость процесса сходимости выше при использовании измерений с меньшей ошибкой.

В результате исследования процесса сходимости метода НК была получена табл. 1 предельных значений кеплеровых элементов, при превышении которых процесс расходится.

Таким образом, полученные результаты показывают, что при классическом подходе к решению задачи уточнения орбиты неизвестного ИСЗ по измерениям расстояний до спутников системы ГЛОНАСС существуют предельные значения в ошибках начальных данных, при которых процесс уточнения сходится. Кроме того, количество итераций зависит от величины неточности знания начальных кеплеровых элементов.

Таблица 1

Предельные значения неточности знания кеплеровых элементов

Элементы	ω, град	Ω, град	*i*, град	*e*	*a*, км	M_0, град
Значения	9	15	13	0,0820	620	8,5

Кроме того, количество итераций зависит как от величины неточности знания кеплеровых элементов, так и от величины случайных ошибок измерений.

Следует отметить, что в пределах указанных значений ошибок начальных параметров во всех случаях обеспечивалась заданная точность сходимости.

Улучшение орбиты в координатах и скоростях. Переход к улучшению орбиты в координатах и скоростях обусловлен наличием двух проблем при использовании классических кеплеровых элементов:

– возникновением граничных значений кеплеровых элементов, определяющих область, в которой итерационный процесс расходится;

– ухудшением сходимости процесса на короткой дуге.

Чтобы решить первую из проблем, в разработанный алгоритм был внесён этап первичного уточнения улучшаемых кеплеровых элементов через скорости, вычисляемые по приближенной формуле на основе плотного ряда измерений с последующим уточнением элементов, полученных по предварительным координатам и скоростям. В результате удалось расширить границы применимости используемого метода уточнения орбиты и повысить скорость сходимости всего процесса в целом. Значения кеплеровых элементов, получаемые через решение обратной задачи, существенно приближают начальные параметры к искомым, в связи с чем исчезает проблема граничных значений начальных данных сходимости процесса. Быстродействие метода благодаря этому приближению сводится к сходимости за 1 итерацию.

Непосредственное использование прямоугольных координат и скоростей в качестве улучшаемых параметров создает возможности определения орбиты на короткой дуге (до четверти оборота). Как видно из графика рис. 3, такой подход имеет не только лучшие показатели по сходимости итерационного процесса, но и большую устойчивость в отличие от классического метода, что позволяет рекомендовать данный способ для решения задачи улучшения орбиты на короткой дуге.

Остановимся далее на обусловленности обратных матриц, получаемых в процессе улучшения орбит с различными эксцентриситетами при использовании кеплеровых элементов, а также координат и скоростей. Для определения обусловленности обратной матрицы будем использовать число Тодда [4], задаваемое как отношение максимального собственного числа нормальной матрицы $A(q^N)^T A(q^N)$ к минимальному. По значению данной величины можно судить о качественной стороне проводимого процесса. Результаты исследования изменения числа Тодда при различных начальных значениях эксцентриситета орбиты исследуемого спутника в зависимости от мерного интервала приведены на рис. 4. Из графика видно, что при улучшении орбиты в классических кеплеровых элементах уменьшение эллиптичности орбиты ухудшает обусловленность задачи. Это происходит вследствие увеличения линейной зависимости между элементами нормальной матри-

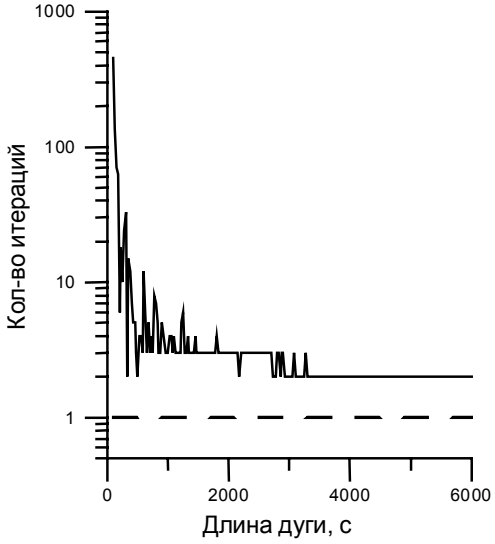

Рис. 3. Зависимость скорости сходимости от длительности интервала измерений при классическом подходе (——) и при использовании прямоугольных координат и скоростей (– – –)

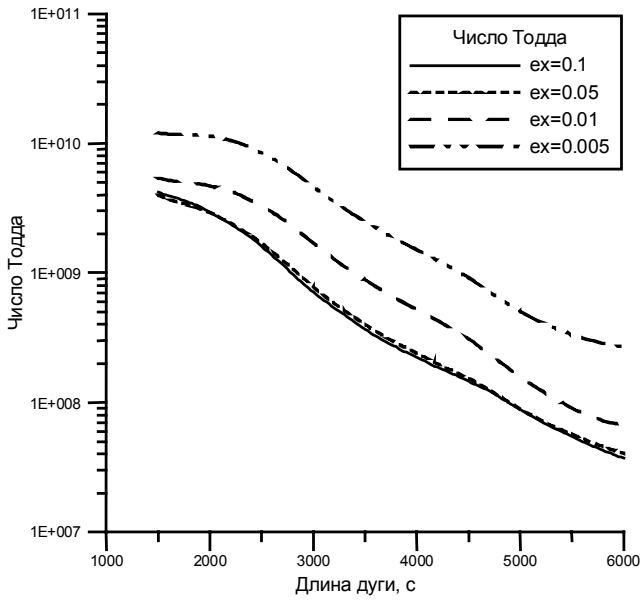

Рис. 4. Изменение числа Тодда при улучшении кеплеровых элементов в зависимости от длительности интервала измерений, при различных начальных значениях эксцентриситета орбиты исследуемого спутника

цы, поскольку в почти круговом движении положение перицентра не определено. При этом снижается точность определения всех элементов (см. табл. 2). В случае улучшения орбиты в координатах и скоростях мы наблюдаем обратную картину в изменении числа Тодда (рис. 5), которая отражает возрастание неравномерности изменения скоростей в окрестности перицентра и апоцентра орбиты при увеличении эксцентриситета.

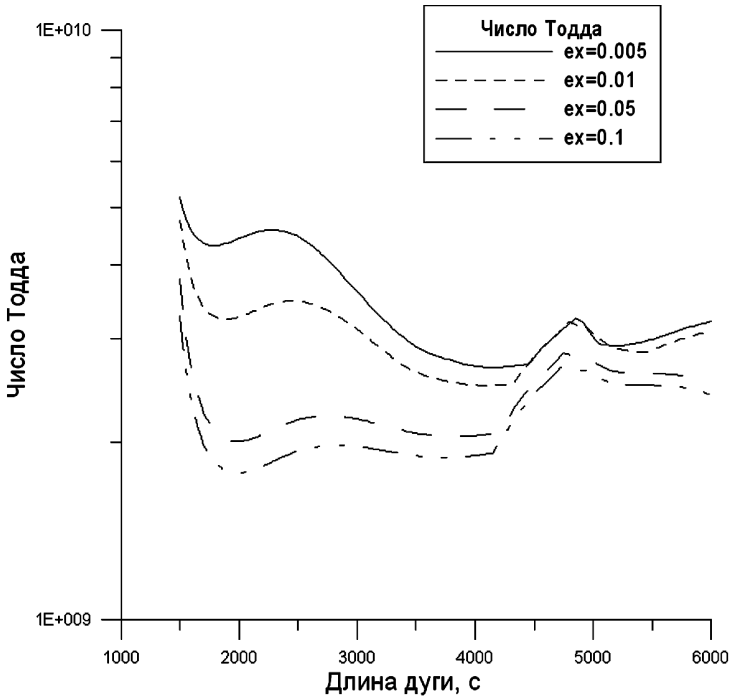

Рис. 5. Изменение числа Тодда при улучшении орбиты в координатах и скоростях в зависимости от длительности интервала измерений, при различных начальных значениях эксцентриситета орбиты исследуемого спутника

Таблица 2

Точность НК-оценок элементов орбиты для различных значений эксцентриситета при длине дуги 2600 с

Точность поправок в элементы	Значения эксцентриситетов орбит			
	0,1	0,05	0,01	0,005
a	0,0004899049	0,0004669568	0,0006108038	0,0006196685
e	0,0000000197	0,0000000010	0,0000000110	0,0000000074
i	0,0000006022	0,0000002060	0,0000004227	0,0000000505
ω	0,0000325576	0,0000589140	0,0004055276	0,0008331065
Ω	0,0000004370	0,0000001727	0,0000005483	0,0000004178
M_0	0,0000229739	0,0000500680	0,0003936638	0,0008220853
Число Тодда	1304313057,25	1440308479,11	2923666037,60	7580712752,94

Заключение

Таким образом, представленные в данной работе результаты убедительно показывают преимущество использования в процессе определения орбиты ИСЗ по ГЛОНАСС-измерениям координат и скоростей в качестве определяемых параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аким Э.Л., Капралов М.А., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Определение параметров движения космического аппарата бортовой навигационной системой по измерениям псевдоскорости и псевдодальности спутниковых навигационных систем / Препринт № 20. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2004.
2. Марарескул Т.А. // Материалы конф. «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики». Томск, 30 сентября – 2 октября 2006 г.
3. Соколова О.С. // Материалы конф. «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики». Томск, 30 сентября – 2 октября 2008 г. – С. 435–436.
4. Польченко А.С., // Изв. вузов. Физика. – 2009. – Т. 52. – № 10/2. – С. 65–72.
5. Антонович К.М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии. – М.: ФГУП «Картоцентр», 2005. – Т. 1. – 334 с.
6. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Наука, 1968. – 800 с.
7. Авдюшев В.А. Численное моделирование орбит. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 284 с.
8. Форсайт Дж., Малкольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 277 с.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия
E-mail: evgenykarataev@kuz.ru

Поступила в редакцию 15.10.12.

MODELING OF LOW-FLYING SATELLITE ORBIT DETERMINATION FOR GLONASS MEASUREMENTS

E.V. KARATAEV, T.V. BORDOVITSYNA

Tomsk State University, Tomsk, Russia

The results of analysis of two methods of improvement of an orbit of arbitrary satellites from measurements of its distances with respect to navigation GLONASS satellites are given. The convergence of the iterative Newton-type algorithm for finding unknown elements of the satellite by the least squares method has been considered in depends on the interval of observation and accuracy of the initial parameters with using classical keplerian elements and rectangular coordinates and velocities in the capacity of improvement parameters.

Каратаев Евгений Владимирович, студент;
Бордовицына Татьяна Валентиновна, д.ф.-м.н., профессор, зав. отделом НИИ ПММ ТГУ.