

УДК 517.9

Е.А. ЛЕВЧЕНКО\*, А.Ю. ТРИФОНОВ\*, А.В. ШАПОВАЛОВ\*\*

**ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФИШЕРА – КОЛМОГОРОВА – ПЕТРОВСКОГО – ПИСКУНОВА<sup>1</sup>**

Исследуется невязка квазиклассических асимптотик для одномерного нелокального уравнения Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова. Показано, что существуют значения параметров системы, при которых норма невязки ограничена и точность асимптотического решения сохраняется на всем временном интервале, а также значения параметров, при которых невязка стремится к нулю, а асимптотическое решение – к точному.

**Ключевые слова:** уравнение Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова, квазиклассические асимптотики, невязка асимптотического решения.

**Введение**

В работе рассматриваются свойства обобщенного кинетического уравнения Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова (ФКПП) [1, 2] с дополнительными нелокальными членами [3–5], описывающими кинетические процессы в реакционно-диффузионной (РД) системе с эффектами дальнего действия.

Математические модели, описывающие системы РД-типа, как правило, оказываются сложными, и возможности применения к ним аналитических методов ограничены. Одним из способов нахождения приближенных асимптотических решений таких уравнений является метод квазиклассических асимптотик [6–8], которые строятся в специальном классе функций. В данной работе выберем класс траекторно-сосредоточенных функций (ТСФ)  $\mathcal{S}_D^t$  [9].

Подстановка асимптотического решения в уравнение дает невязку, норму которой (например, в  $\mathcal{L}_2$ ) будем использовать в качестве критерия точности приближенного решения. Соответствие точных и асимптотических решений детально изучалось для линейных уравнений квантовой механики [10]. В частности, были получены оценки времени разрушения заданной точности асимптотического решения [11]. Для нелинейных уравнений исследование соответствия точных и асимптотических решений является принципиальной проблемой. Суть этой проблемы состоит в получении априорных оценок решений соответствующего нелинейного уравнения, равномерных по малому асимптотическому параметру. В отличие от линейных уравнений, получение таких оценок существенно зависит от вида исследуемого нелинейного уравнения. Отметим, что из эвристических соображений, приведенных в работе [10], оценка разности между точным и построенным формальным асимптотическим решениями может быть получена с использованием методов, развитых в [8, 10].

В настоящей работе на примере обобщенного уравнения ФКПП с нелокальной нелинейностью исследована невязка квазиклассической асимптотики в классе ТСФ в зависимости от параметров уравнения.

**1. Система Эйнштейна – Эренфеста и ассоциированное уравнение Фишера**

Запишем одномерное обобщенное уравнение ФКПП с нелокальной нелинейностью:

$$\hat{F}[u]u = 0, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{F}[u] &= D\partial_t - D^2\partial_x^2 - \langle D\partial_x, B[u](x, t, D) \rangle - DA[u](x, t, D), \\ A[u](x, t, D) &= a(x, t) - \kappa \int_{-\infty}^{+\infty} b(x, y, t)u(y, t)dy, \end{aligned} \quad (2)$$

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках Государственного задания вузам «Наука» на 2012 г., № 1.604.2011, и при поддержке ФЦП «Кадры», контракты № 14.В37.21.0911 и П789.

$$B[u](x, t, D) = V_x(x, t) + \kappa \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{V}_x(x, y, t) u(y, t) dy.$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}^1$ ,  $t \geq 0$ , – время;  $\kappa$  – вещественный параметр, характеризующий нелинейное взаимодействие; а  $V(x, t)$ ,  $\tilde{V}(x, y, t)$ ,  $b(x, y, t)$ ,  $a(x, t)$  – бесконечно гладкие по всем своим аргументам функции, которые при  $|x| \rightarrow \infty$  и  $|y| \rightarrow \infty$  растут вместе со всеми своими производными не быстрее, чем полином. Функция  $V(x, t)$  имеет смысл потенциала регулярной силы, действующей на систему, а функция  $\tilde{V}(x, y, t)$  характеризует внутреннее взаимодействие элементов системы,  $a(x, t)$  описывает процесс автокатализа,  $b(x, y, t)$  называют функцией влияния.

Анализ невязки проведем для случая, когда

$$V(x, t) = \frac{\kappa x^2}{2}, \quad \tilde{V}(x, y, t) = w_0 e^{-(x-y)^2 / 2\gamma_1^2}, \quad (3)$$

$$a(x, t) = a = \text{const}, \quad b(x, y, t) = b_0 e^{-(x-y)^2 / 2\gamma_2^2}.$$

Здесь  $\kappa, w_0, a, b_0, \gamma_1, \gamma_2$  – вещественные параметры. Функции (3) используются при моделировании процессов динамики биологических популяций (см., например, [3–5, 12]).

Введем обозначения

$$m_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx; \quad (4)$$

$$x_u(t) = \frac{1}{m_u(t)} \int_{-\infty}^{\infty} x u(x, t) dx; \quad (5)$$

$$\alpha_u^{(k)}(t) = \frac{1}{m_u(t)} \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta x)^k u(x, t) dx, \quad (6)$$

где  $m_u(t)$  – нулевой,  $x_u(t)$  – первый начальный и  $\alpha_u^{(k)}(t)$  – высшие центральные моменты функции  $u(x, t)$ . Центральный момент второго порядка  $\alpha_u^{(2)}(t)$  называется дисперсией функции  $u(x, t)$ . Продифференцировав  $m_u(t)$ ,  $x_u(t)$  и  $\alpha_u^{(k)}(t)$  по  $t$  с учетом уравнения (1), (2), получим систему Эйнштейна – Эренфеста для  $m_u(t)$ ,  $x_u(t)$  и  $\alpha_u^{(2)}(t)$ :

$$\begin{cases} \dot{m}_u = a m_u - \kappa b_0 m_u^2, \\ \dot{x}_u = -\kappa x_u, \\ \dot{\alpha}_u^{(2)}(t) = 2D - 2\kappa \alpha_u^{(2)} + \frac{2\kappa w_0}{\gamma_1^2} m \alpha_u^{(2)}. \end{cases} \quad (7)$$

Решение задачи Коши для системы (7) с начальными условиями

$$m_u|_{t=0} = m_0, \quad x_u|_{t=0} = x_0, \quad \alpha_u^{(2)}|_{t=0} = \alpha_0^{(2)}, \quad (8)$$

будем обозначать через  $m(t)$ ,  $x(t)$ ,  $\alpha^{(2)}(t)$ . Из (7) и (8) получим

$$m(t) = \frac{a m_0 e^{at}}{a + m_0 \kappa b_0 (e^{at} - 1)}, \quad x(t) = x_0 e^{-\kappa t}, \quad \alpha^{(2)}(t) = \varphi(t) \left( 2D \varphi(t) \int_0^t \varphi^{-1}(\tau) d\tau + \alpha_0^{(2)} \right), \quad (9)$$

где

$$\varphi(t) = e^{-2\kappa t} \left[ 1 + \frac{\kappa b_0 m_0}{a} (e^{at} - 1) \right]^{2w_0 / b_0 \gamma_1^2}.$$

Решение уравнения (1) с точностью до  $O(D^{3/2})$ , следуя [13], находим с помощью решений вспомогательного линейного уравнения

$$\hat{L}_0(t, \mathbf{C}) v^{(0)} = 0, \quad \mathbf{C} = (m_0, x_0), \quad (10)$$

где

$$\hat{L}_0(t, \mathbf{C}) = D \partial_t + \dot{x}(t, \mathbf{C}) D \partial_x - DA(t, \mathbf{C}) - B_x(t, \mathbf{C}) D \partial_x \Delta x - D^2 \partial_x^2,$$

$$B_x = B_x(t, \mathbf{C}) = k - \frac{\kappa w_0}{\gamma_1^2} m(t), \quad A = A(t, \mathbf{C}) = a - \kappa b_0 m(t). \quad (11)$$

Уравнение (10) параметрически зависит от набора данных Коши  $\mathbf{C}$ . Для построения решений уравнения (10) введем функции  $Z(t, \mathbf{C})$  и  $W(t, \mathbf{C})$ , которые определяются из системы в вариациях

$$\begin{cases} \dot{W} = B_x W, \\ \dot{Z} = -2W - B_x Z. \end{cases} \quad (12)$$

Решение системы (12), удовлетворяющее начальным условиям  $W(0) = \pm W_0$ ,  $Z(0) = \pm Z_0$ ,  $W_0 > 0$ ,  $Z_0 > 0$ , обозначим через  $W^{(\pm)}(t)$  и  $Z^{(\pm)}(t)$  соответственно и запишем в виде

$$W^{(\pm)}(t) = \pm W_0 \varphi^{-1/2}(t); \quad (13)$$

$$Z^{(\pm)}(t) = \varphi^{1/2}(t) \left[ \mp 2W_0 \int_0^t \varphi^{-1}(\tau) d\tau + Z_0 \right]. \quad (14)$$

Следуя [13], получим счетный набор решений уравнения (10) в виде

$$\begin{aligned} v_0(x, t, \mathbf{C}) &= \frac{m(t, \mathbf{C})}{\sqrt{2\pi D}} \sqrt{\left| \frac{W^{(-)}(t, \mathbf{C})}{Z^{(-)}(t, \mathbf{C})} \right|} \exp \left[ \frac{1}{2D} \frac{W^{(-)}(t, \mathbf{C})}{Z^{(-)}(t, \mathbf{C})} \Delta x^2 \right], \\ v_n(x, t, \mathbf{C}) &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}} \left[ \frac{Z^{(+)}(t, \mathbf{C})}{Z^{(-)}(t, \mathbf{C})} \right]^{n/2} H_n \left( \sqrt{\frac{b}{D Z^{(+)}(t, \mathbf{C}) Z^{(-)}(t, \mathbf{C})}} \Delta x \right) v_0(x, t, \mathbf{C}), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $H_n(\xi)$  – полиномы Эрмита,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Асимптотические решения  $u_n(x, t)$  исходного уравнения (1) с точностью до  $O(D^{3/2})$  имеют вид

$$u_n(x, t) = v_n(x, t, \mathbf{C})|_{\mathbf{C}=\mathbf{C}[u_n]}. \quad (16)$$

Здесь постоянные  $\mathbf{C}$  определяются [13] из условия  $m(t, \mathbf{C}) = m(t)$ ,  $x(t, \mathbf{C}) = x(t)$ . По аналогии с квантовой механикой [8], решение  $u_0(x, t)$  уравнения (1) будем называть вакуумным, а  $u_n(x, t)$  – возбужденными.

## 2. Анализ невязки уравнения Фишера

Подставив функцию  $u_0(x, t)$  (15) в исходное уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} \hat{F}[u_0]u_0(x, t) &= g_0(x, t), \\ g_0(x, t) &= \left\langle D \partial_x \kappa u_0(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{V}_x(x, y, t) + \frac{w_0}{\gamma_1^2} (\Delta x - \Delta y) \right] u_0(y, t) dy \right\rangle - \\ &\quad - \kappa D u_0(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} [b(x, y, t) - b_0] u_0(y, t) dy. \end{aligned} \quad (17)$$

Функция  $g_0(x, t)$  называется невязкой асимптотического решения  $u_0(x, t)$ . В качестве характеристики точности асимптотического решения будем использовать функцию  $\delta(t)$ , которая является оценкой функции  $g(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \|g_0(x, t)\| &\leq \delta(t), \quad \delta(t) = \kappa m^2(t) \sum_{i=1}^{10} \delta_i(t), \\ \delta_1(t) &= b_0 \varphi_1(t), \quad \delta_2(t) = \frac{w_0}{\gamma_1^2} \varphi_1(t), \quad \delta_3(t) = \frac{w_0 \sqrt{3}}{2\gamma_1^2} \varphi_1(t), \quad \delta_4(t) = \frac{w_0}{\sqrt{D}\gamma_1} \varphi_1(t) \varphi_2(t), \\ \delta_5(t) &= \frac{\sqrt{3}w_0}{\sqrt{2D}\gamma_1} \varphi_1(t) \varphi_2(t) \varphi_4(t), \quad \delta_6(t) = \frac{w_0}{\sqrt{D}\gamma_1} \varphi_1(t) \varphi_2(t) \varphi_3(t), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\delta_7(t) = \frac{\sqrt{3}w_0}{2\sqrt{D}\gamma_1} \varphi_1(t)\varphi_2(t)\varphi_3(t)\varphi_4(t), \quad \delta_8(t) = \frac{\sqrt{3}w_0}{2\sqrt{D}\gamma_1} \varphi_1(t)\varphi_2(t)\varphi_5(t),$$

$$\delta_9(t) = \delta_5(t), \quad \delta_{10}(t) = \frac{b_0}{\sqrt{D}} \gamma_2 \varphi_1(t)\varphi_6(t),$$

где

$$\varphi_1(t) = 4\sqrt{\left| \frac{W^{(-)}(t)}{4\pi DZ^{(-)}(t)} \right|}, \quad \varphi_2(t) = 4\sqrt{\frac{[W^{(-)}(t)]^2}{(DZ^{(-)}(t) - \gamma_1^2 W^{(-)}(t))(2DZ^{(-)}(t) - \gamma_1^2 W^{(-)}(t))}},$$

$$\varphi_3(t) = \frac{DZ^{(-)}(t)}{DZ^{(-)}(t) - \gamma_1^2 W^{(-)}(t)}, \quad \varphi_4(t) = \frac{DZ^{(-)}(t)}{2DZ^{(-)}(t) - \gamma_1^2 W^{(-)}(t)},$$

$$\varphi_5(t) = \frac{DZ^{(-)}(t) - \gamma_1^2 W^{(-)}(t)}{2DZ^{(-)}(t) - \gamma_1^2 W^{(-)}(t)}, \quad \varphi_6(t) = 4\sqrt{\frac{[W^{(-)}(t)]^2}{(DZ^{(-)}(t) - \gamma_2^2 W^{(-)}(t))(2DZ^{(-)}(t) - \gamma_2^2 W^{(-)}(t))}}.$$

Из явного вида невязки (17) при  $t \rightarrow \infty$  существуют неотрицательные ограниченные функции  $M_1(t), M_2(t), M_3(t), M_4(t), M_5(t)$ , такие, что в зависимости от знака  $k_0 = \frac{aw_0}{b_0\gamma_1^2} - k$  справедливы неравенства

$$k_0 > 0, \quad \|g_0(x, t)\| \leq \kappa \left( e^{-k_0 t/2} M_1(t) + e^{-3k_0 t/2} M_2(t) \right),$$

$$k_0 = 0, \quad \|g_0(x, t)\| \leq \kappa \left( \frac{1}{\sqrt[4]{t}} M_3(t) + \frac{1}{\sqrt[4]{t^3}} M_4(t) \right), \quad (19)$$

$$k_0 < 0, \quad \|g_0(x, t)\| \leq \kappa M_5(t).$$

Для наглядности также будем использовать безразмерную функцию  $\Delta(t) = \delta(t) / \|u_0(x, t)\|$ , которая характеризует невязку решения исходного уравнения. На рис. 1 и 2 изображены функции  $\delta(t)$  и  $\Delta(t)$  при  $k_0 < 0$  и  $k_0 > 0$  соответственно.

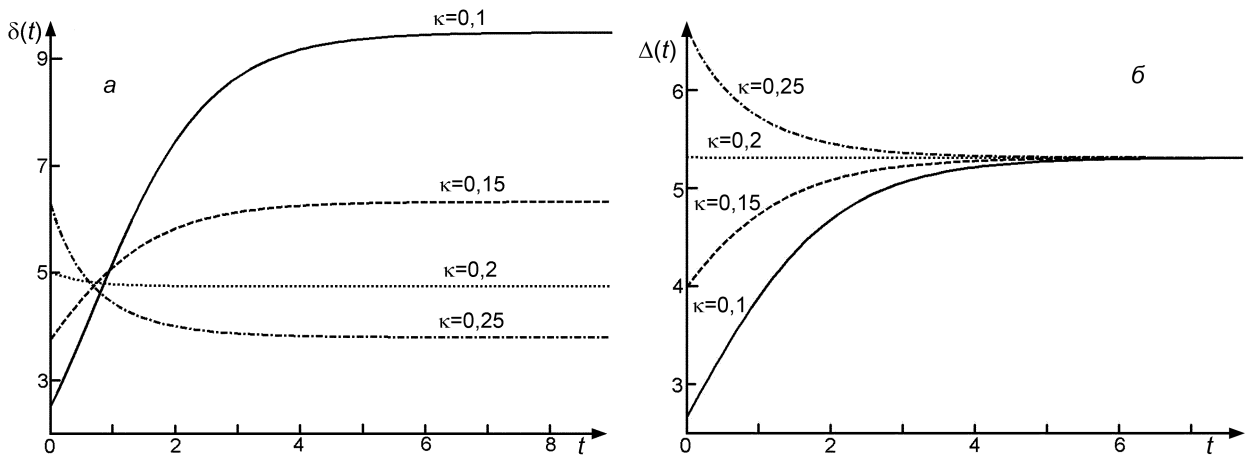


Рис. 1. Графики функции  $\delta(t)$  (а) и  $\Delta(t)$  (б) при  $D = 0,1, k = 1, w_0 = 1, \gamma_1 = 1, a = 1, b_0 = 5, \gamma_2 = 2, k_0 = -0,8$

Для решения  $u_0(x, t)$  уравнения (1) в зависимости от знака  $k_0$  при  $t \rightarrow \infty$  справедливы асимптотические оценки:

$$k_0 > 0, \quad u_0(x, t) \sim \frac{a}{\kappa b_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \sqrt{\frac{W_0 k_0}{Z_0 k_0 + W_0}} \exp[-k_0 t] \exp\left[-\frac{W_0 k_0}{2D(Z_0 k_0 + W_0)} \exp(-2k_0 t) x^2\right]; \quad (20)$$

$$k_0 = 0, \quad u_0(x, t) \sim \frac{a}{\kappa b_0} \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \exp\left[-\frac{1}{4Dt} x^2\right]; \quad (21)$$

$$k_0 < 0, \quad u_0(x, t) \sim \tilde{v}(t) = \frac{a}{\kappa b_0} \sqrt{\frac{-k_0}{2\pi D}} \exp\left[\frac{k_0}{2D} x^2\right]. \quad (22)$$

Нетрудно заметить, что при  $k_0 \geq 0$  существует  $\lim_{t \rightarrow \infty} u_0(x, t) = 0$ , а при  $k_0 < 0$  –  $\lim_{t \rightarrow \infty} u_0(x, t) = \tilde{v}(x)$ .

При этом функция  $\tilde{v}(x)$  не является точным стационарным решением уравнения (1), а функция  $u(x, t) = 0$  является.

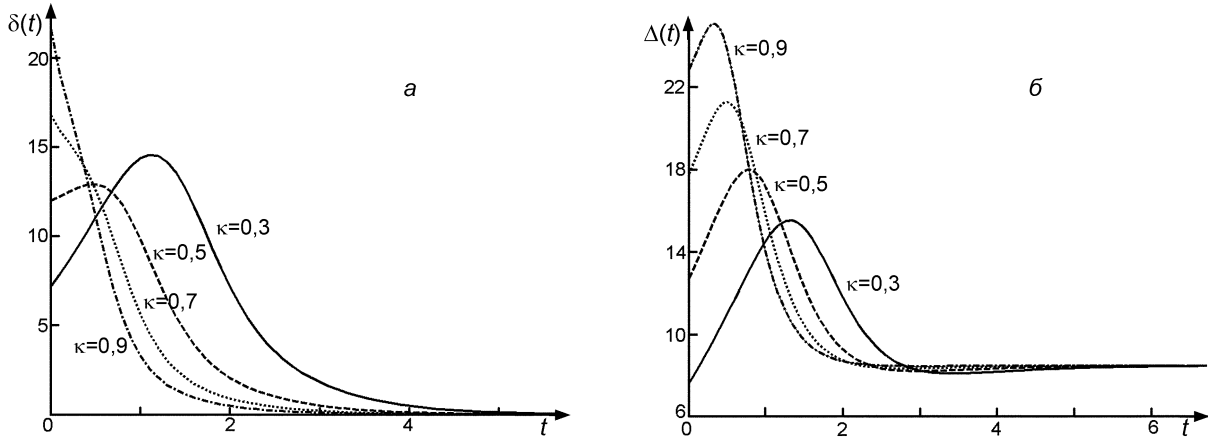


Рис. 2. Графики функции  $\delta(t)$  (а) и  $\Delta(t)$  (б) при  $D = 0,1, k = 1, w_0 = 4, \gamma_1 = 1, a = 1, b_0 = 1, \gamma_2 = 2, k_0 = 3$

Как видно из рис. 1 и 2 и формул (20) – (22), коэффициент  $k_0$  характеризует действие внешнего поля на эволюцию функции  $u_0(x, t)$ . Так, при  $k_0 < 0$  с течением времени формируется пространственно локализованное состояние системы (22). При этом невязка ограничена во времени  $\lim_{t \rightarrow \infty} g_0(x, t) = C$  (рис. 1, а). Отношение нормы невязки к норме решения  $\Delta(t)$  стремится к одной и той же постоянной для различных  $\kappa$  (рис. 1, б). В случае  $k_0 \geq 0$  под действием внешнего поля происходит «расплывание» области локализации решения, при этом решение и невязка стремятся к нулю  $\lim_{t \rightarrow \infty} g_0(x, t) = 0$  (рис. 2, а), а отношение их норм  $\Delta(t)$  стремится к константе (рис. 2, б).

Дисперсия  $\alpha_{u_0}^{(2)}(t)$  решения  $u_0(x, t)$  из явного вида функции  $u_0(x, t)$  (15) определяется соотношением

$$\alpha_{u_0}^{(2)}(t) = -DQ^{-1}(t), \quad (23)$$

где  $Q(t) = W^{(-)}(t) / Z^{(-)}(t)$ . Таким образом, при  $k_0 < 0$  дисперсия ограничена  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_{u_0}^{(2)}(t) = \text{const}$ , а при  $k_0 \geq 0$  – не ограничена  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_{u_0}^{(2)}(t) = \infty$ , что согласуется с оценками (20) – (22).

Из формулы (17) получаем, что для случая  $k_0 < 0$  точность  $O(D^{3/2})$  построенного асимптотического решения  $u_0(x, t)$  (15) сохраняется на всем временном интервале. Для  $k_0 > 0$  решение (15) с точностью  $O(D^{3/2})$  справедливо на промежутке  $[0, T_1]$ ,  $T_1 \ll -\ln D$ , затем происходит разрушение точности до  $O(D^{3/4})$ , хотя функция  $u_0(x, t)$  стремится к стационарному решению  $u(x, t) = 0$ . В случае  $k = 0$  наблюдается аналогичное поведение невязки  $g_0(x, t)$  (17), с тем различием, что оценка  $O(D^{3/2})$  справедлива на промежутке  $[0, T_2]$ ,  $T_2 \ll 1/D$ .

В зависимости от параметра  $\gamma_2$  при  $\tilde{V}(x, y, t) = 0$  зависимость нормы невязки асимптотического решения  $\|g_0(x, t)\|$  по отношению к норме  $\|u_0(x, t)\|$  представлена на рис. 3.

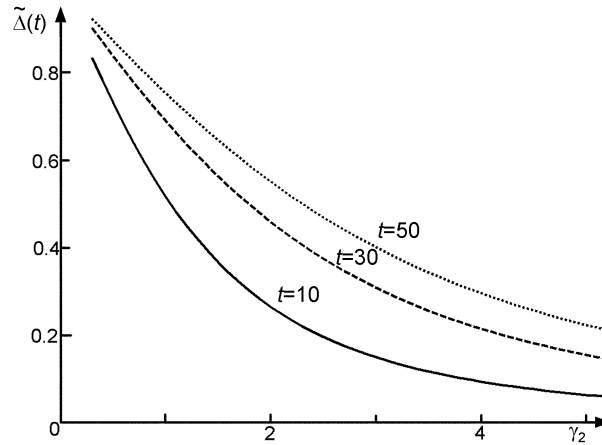


Рис. 3. График функции  $\tilde{\Delta}(t) = \|g(x,t)\| / \|u_0(x,t)\|$  при  $D = 0,1$ ,  $\kappa = 0,15$ ,  $k = 0$ ,  $a = 1$ ,  $b_0 = 1$

Из рис. 3 видим, что при  $\gamma_2 \rightarrow \infty$  и  $b(x,y,t) \rightarrow 0$  норма невязки стремится к нулю и построенное асимптотическое решение стремится к точному.

При условии  $B[u](x,t,D) = 0$  невязка решения  $u_n(x,t)$  равна

$$g_n(x,t) = \kappa b_0 \psi(t) H_n(\lambda(t) \Delta x) \exp\left[\frac{1}{2D} \frac{W^{(-)}(t)}{Z^{(-)}(t)} \Delta x^2\right] \times \\ \times \left\{ m_n(t) - \gamma_2 \sqrt{2\pi\beta(t)} \psi(t) w_1^n H_n\left(\frac{w_2(t)}{w_1(t)} \Delta x\right) \exp\left[\frac{1}{2D} \frac{W^{(-)}(t)}{Z^{(-)}(t)} \beta(t) \Delta x^2\right] \right\}, \quad (24)$$

где

$$\psi(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}} \frac{m(t)}{\sqrt{2\pi D}} \left[ \frac{Z^{(+)}(t)}{Z^{(-)}(t)} \right]^{n/2} \sqrt{\frac{W^{(-)}(t)}{Z^{(-)}(t)}}, \\ \lambda(t) = \sqrt{\frac{b}{DZ^{(+)}(t)Z^{(-)}(t)}}, \quad \beta(t) = \frac{DZ^{(-)}(t)}{DZ^{(-)}(t) - W^{(-)}(t)\gamma_2^2}, \\ w_1(t) = \sqrt{1 + 8\gamma_2^2 \lambda^2(t) \beta(t)}, \quad w_2(t) = \lambda(t) \beta(t).$$

На рис. 4 представлен график функции  $\|g_n(x,t)\|$  при  $n = 0; 2; 4$ .

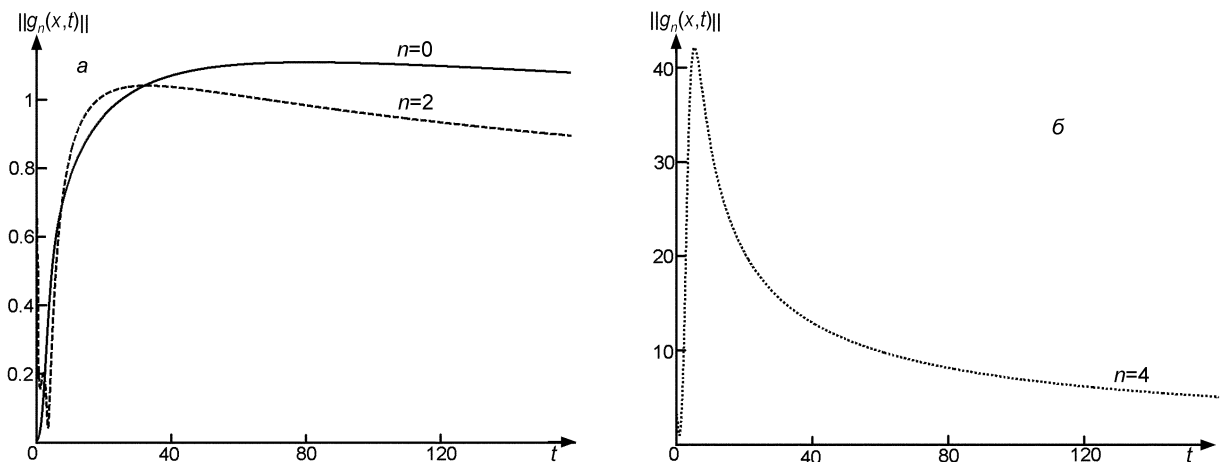


Рис. 4. Графики функции  $\|g_n(x,t)\|$  при  $D = 0,1$ ,  $\kappa = 0,15$ ,  $k = 0$ ,  $a = 1$ ,  $b_0 = 1$ ,  $\gamma_2 = 2$ ,  $n = 0; 2$  (а) и 4 (б)

Из рис. 4 видно, что норма невязки  $\|g_n(x, t)\|$  убывает с течением времени. Второй момент решения  $\alpha_{u_n}^{(2)}(t)$  для четных  $n$  имеет вид

$$\alpha_{u_n}^{(2)}(t) = -DQ^{-1}(t) \frac{Q(t) + (2n+2)D\lambda^2(t)}{Q(t) + 2D\lambda^2(t)}. \quad (25)$$

Таким образом, для возбужденных решений  $u_n(x, t)$  уравнения (1) при  $B[u](x, t, D) = 0$  второй момент со временем возрастает и соответственно область локализации решения «расплывается».

### Заключение

Развитый в работе формализм позволяет оценить влияние исходных параметров на изменение оценки точности найденного асимптотического решения уравнения ФКПП с течением времени. Таким образом, из приведенных рис. 1–4 и формул (17), (18), (24) можно заключить, что существуют значения параметров системы, при которых норма невязки ограничена и точность асимптотического решения сохраняется во всем временном интервале ( $k_0 < 0$ ). При значениях  $k_0 \geq 0$  невязка стремится к нулю, асимптотическое решение стремится к точному, но есть момент времени, в который наступает разрушение точности решения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fisher R. A. // Annu. Eugenics. – 1937. – V. 7. – P. 255–369.
2. Колмогоров А.Н., Петровский Н.Г., Пискунов Н.С. // Бюл. МГУ. Сер. А. Математика и механика. – 1937. – Т. 1. – № 6. – С. 1–16.
3. Fuentes M.A., Kuperman M.N., and Kenkre V.M. // Phys. Rev. Lett. – 2003. – V. 91. – P. 158104–158108.
4. Da Cunha J.A.R., Penna A.L.A., Vainstein M.H., et al. // Phys. Lett. A. – 2009. – V. 373. – P. 661–667.
5. Kenkre V. M. // Physica A. – 2004. – V. 342. – P. 242–248.
6. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. – М.: Наука, 1977.
7. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1976.
8. Маслов В.П. Операторные методы. – М.: Наука, 1973. – 544 с.
9. Bagrov V.G., Belov V.V., and Trifonov A.Yu. // Ann. Phys. – 1996. – V. 246. – No. 2. – P. 231–280.
10. Карасев М.В., Маслов В.П. // Совр. пробл. матем. – М.: ВИНТИ, 1979. – Т. 13. – С. 145–267.
11. Багров В.Г., Белов В.В. // ТМФ. – 1988. – Т. 74. – № 2.
12. Murray J.D. Mathematical Biology. I. An Introduction. – 3-ed. – N. Y., Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 2001. – 551 p.
13. Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – Т. 52. – № 9. – С. 14–23.

\*Физико-технический институт Национального исследовательского  
Томского политехнического университета, г. Томск, Россия

Поступила в редакцию 03.09.12.

\*\*Национальный исследовательский Томский государственный университет,  
г. Томск, Россия  
E-mail: trifonov@tpu.ru