

УДК 539.4

## Моделирование разрушения хрупких и квазихрупких тел и геосред

Е.П. Евтушенко<sup>1</sup>, М.О. Еремин<sup>2</sup>, Ю.А. Костандов<sup>3</sup>, П.В. Макаров<sup>1,2</sup>,  
И.Ю. Смолин<sup>1,2</sup>, И.Е. Шиповский<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, 634021, Россия

<sup>2</sup> Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, 634050, Россия

<sup>3</sup> НИИ проблем геодинамики Таврического национального университета им. В.И. Вернадского, Симферополь, 95007, Украина

Проведено экспериментальное исследование разрушения хрупких образцов из песчано-цементной смеси с начальной трещиной при одноосном сжатии. Изучено влияние ориентации начальной трещины на разрушение образца. Установлено, что образование и развитие трещин происходит преимущественно в направлении действия нагрузки, т.е. песчано-цементная смесь ведет себя как типичный квазихрупкий материал. Численное моделирование выполнено по модели Друкера–Прагера–Николаевского, учитывающей эффекты внутреннего трения, дилатансии и различия в значениях прочности среды при сжатии и растяжении, а также накопление повреждений и деградацию прочности среды. Расчетные картины разрушения хорошо соответствуют экспериментальным данным.

*Ключевые слова:* квазихрупкая среда, начальная трещина, разрушение, поврежденность, деградация, эксперимент, моделирование

## Simulation of fracture of brittle and quasibrittle solids and geomedia

E.P. Evtushenko<sup>1</sup>, M.O. Eremin<sup>2</sup>, Yu.A. Kostandov<sup>3</sup>, P.V. Makarov<sup>1,2</sup>, I.Yu. Smolin<sup>1,2</sup> and I.E. Shipovsky<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS, Tomsk, 634021, Russia

<sup>2</sup> National Research Tomsk State University, Tomsk, 634050, Russia

<sup>3</sup> Research Institute of Geodynamics Problems, Taurida National V.I. Vernadsky University, Simferopol, 95007, Ukraine

The paper reports on experimental study of fracture of brittle sand-cementite specimens with an initial crack under uniaxial compression. The influence of the initial crack orientation on fracture of the specimen is traced. It is found that nucleation and development of cracks proceeds chiefly in the loading direction, i.e., the sand-cementite mixture behaves as a typical quasibrittle material. In numerical simulation, the Drucker–Prager–Nikolaevsky model is used which takes into account the effect of internal friction, dilatancy and difference in material strength in compression and tension, damage accumulation and strength degradation. The calculated fracture patterns agree well experimental data.

*Keywords:* quasibrittle medium, initial crack, fracture, damage degree, degradation, experiment, simulation

### 1. Введение

Решение проблемы разрушения хрупких и квазихрупких твердых тел и сред, например геосред, является одной из актуальных задач механики деформируемого твердого тела. Многие важные задачи прикладного характера, такие как обрушение кровли над выработанным пространством в шахтах, задачи геодинамики и плитной тектоники, а также исследования прочности строительных материалов, не могут быть рассмотрены без реалистичных представлений о функции отклика этих сред на нагружение, которая и определяет механическое поведение материалов и сред. В ряду этих вопро-

сов важнейшее место занимает задача формирования очага разрушения и магистральных макроскопических трещин.

В настоящей работе проблема разрушения хрупких и квазихрупких материалов и сред решается комплексно — экспериментально на специально изготовленных модельных материалах и методами численного моделирования. Одной из главных задач настоящего исследования является разработка математической модели нагружаемой горной породы, геосреды в том числе, позволяющей описать экспериментально наблюдаемые картины разрушения. Как в экспериментах с модельными

образцами, так и в численных расчетах исследовалось разрушение образцов, содержащих начальную трещину в условиях их осевого сжатия.

Аналитическое решение задачи об устойчивости хрупких тел, содержащих начальную трещину, при их сжатии чрезвычайно затруднено ввиду сложности и разнообразия процессов, происходящих при этом. Имеющиеся решения [1–3] этой задачи получены при определенных упрощениях и допущениях и во многих случаях далеки от реального развития разрушения в хрупких телах с трещинами.

Задаче об устойчивости хрупких тел, в том числе содержащих начальную трещину, посвящено значительное количество экспериментальных исследований. В одних из них рассматривается достижение предельного состояния сплошного хрупкого тела при различных видах нагружения, например [4], в других — устойчивость содержащих начальную трещину тонких пластин, изготовленных, например, из стекла или полиметилметакрилата и подвергаемых растяжению [5]. Экспериментальные исследования устойчивости хрупких тел, содержащих начальную трещину, при одноосном сжатии очень малочисленны, хотя эта задача является актуальной как для изучения разрушения различных строительных материалов, так и для изучения разрушения горных пород. Причина этого состоит в сложности изготовления образцов для таких исследований, поскольку такие образцы при их сжатии не должны терять устойчивость.

Поэтому вопросам численного моделирования процессов разрушения горных пород и других твердых деформируемых тел и анализу происходящих при этом явлений уделено внимание во многих исследованиях и в ряде из них [6–12] достигнут значительный прогресс в этой области.

Учет в определяющих уравнениях внутреннего трения, дилатансионных процессов, а также существенно различной реакции горных пород (пределов прочности) на сжатие и растяжение позволили авторам работ [8–12] описать процессы накопления в нагружаемой среде повреждений и формирование в ней систем трещин раз-

ных масштабов вплоть до магистральных макроскопических трещин и разломов. Этот подход будет использован и в настоящей работе при моделировании разрушения образцов из песчано-цементной смеси.

Одной из задач настоящей работы является также разработка методики изготовления образцов из хрупкого материала с начальной трещиной и проведение экспериментального исследования разрушения этих образцов при одноосном сжатии.

## 2. Экспериментальное исследование влияния ориентации начальной трещины на процесс разрушения хрупких тел при одноосном сжатии

Образцы, содержащие начальную трещину, изготавливались из песчано-цементной смеси при различных значениях водно-цементного отношения, что позволяло получать песчано-цементные материалы с различающимися физико-механическими свойствами [13]. Образцы представляли собой прямоугольные параллелепипеды размером  $55 \times 55 \times 20$  мм<sup>3</sup> с центральной сквозной щелью длиной 20 мм, имитирующей начальную трещину, как показано на рис. 1. При этом все поверхности граней образцов с размерами  $55 \times 20$  мм<sup>2</sup> соответствовали  $\approx 10$  классу обработки.

Щель в образце изготавливалась ортогонально его большим граням, имеющим размер  $55 \times 55$  мм<sup>2</sup>, и ориентировалась под углами  $\varphi = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$  к боковой грани образца. Для создания в образцах сквозных щелей использовались стальные пластины толщиной 0.2 мм, покрытые антиадгезионным составом. Эти пластины вставляли в песчано-цементный раствор после его виброуплотнения через направляющую оправку, ориентирующую и центрирующую их в образцах, и вынимали из него после прохождения начальной стадии отверждения.

Для изготовления образцов использовали портландцемент марки 500 и речной песок, из которого отсеиванием была удалена пылевидная фракция. Песчано-цементная смесь смешивалась с водой при значениях водно-цементного отношения, равных 0.73 и 0.58. Отношение объемных частей цемента и песка при этом составляло 1 : 2.7 и 1 : 2, а полученные серии образцов обозначены как М1 и М2 соответственно. Значения коэффициентов внутреннего трения образцов этих серий, определенные по методике [14], составляли 0.26 и 0.29 соответственно.

Нагружение образцов одноосным сжатием осуществлялось на испытательной машине УМЭ-10М со скоростью 0.5–1.5 кН/с. Между образцом и стальными плитами пресса размещались фторопластовые пластины толщиной 0.1 мм, что позволило снизить значение коэффициента контактного трения до 0.07.

Фотографии разрушенных песчано-цементных образцов приведены на рис. 2.

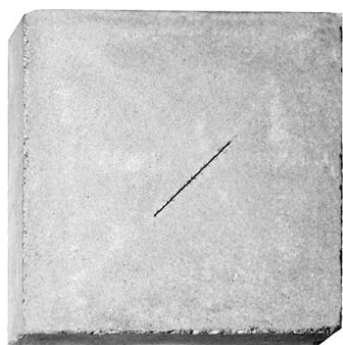


Рис. 1. Общий вид экспериментального образца с начальной трещиной

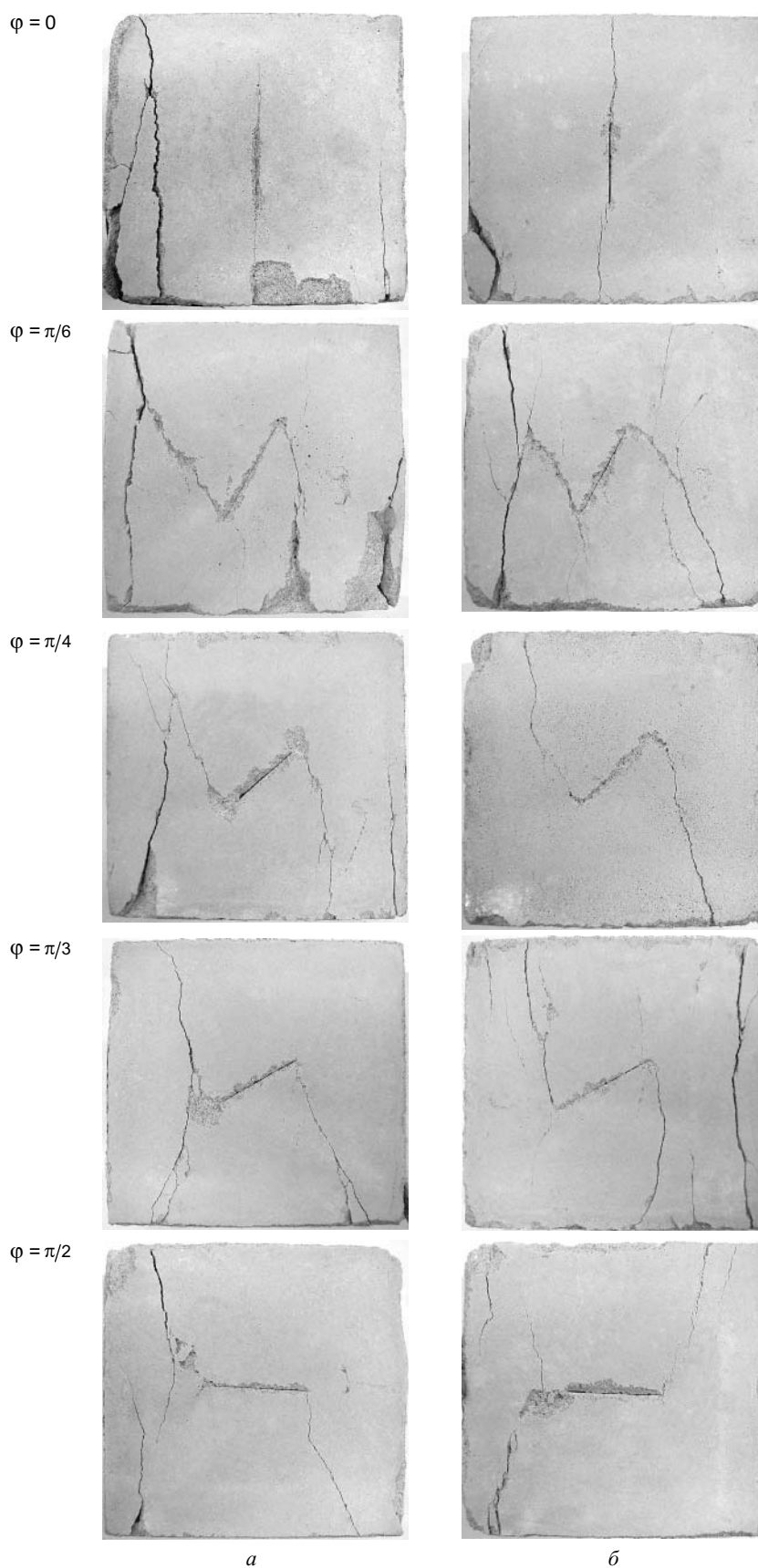


Рис. 2. Развитие трещин в образцах серий М1 (*а*) и М2 (*б*) с разным наклоном начальных трещин при их осевом сжатии

Анализ картин разрушения позволяет сделать вывод о преобладании продольного характера разрушения, когда образование и развитие трещин происходит преимущественно в направлении действия нагрузки.

Действительно, в случае  $\varphi = 0$  образуются и центральная трещина, частью которой является начальная трещина, и параллельные ей боковые трещины, и сделанный вывод о характере разрушения очевиден.

В случаях  $\varphi = \pi/6$  и  $\pi/4$  центральная трещина не образуется, поскольку этому препятствует наличие в центральной части образца свободных поверхностей, которыми являются берега начальной трещины. Однако боковые трещины, ориентированные вдоль направления действия нагрузки, при этом образуются. В результате взаимодействия начальной и боковых трещин образуются и соединяющие их трещины.

В случаях  $\varphi = \pi/4$  и  $\pi/3$  центральная трещина также не образуется. Средние части боковых трещин начинают отклоняться в сторону центральной части образца, где находится начальная трещина. В результате при  $\varphi = \pi/2$  боковые трещины захватывают вершины начальной трещины, являющиеся концентраторами напряжений.

Следует отметить, что боковые трещины во всех случаях исходили из точек нагружаемой поверхности образца, находящихся на некотором расстоянии от угловых точек. Во всех случаях разрушение наблюдалось также вблизи свободных границ и углов.

### 3. Численное моделирование разрушения квазихрупких образцов с начальной трещиной и сред

Одной из центральных проблем решения задачи о разрушении квазихрупких тел является проблема выбора предельной поверхности. Реалистичная модель хрупкой среды должна учитывать различие значений предельной прочности на растяжение и сжатие. Во-вторых, модель должна учитывать внутреннее трение и дилатансионные процессы [8–10]. В настоящей работе применена комбинированная модель, в которой учтены эти процессы, а также процессы накопления повреждений средой в ходе ее нагружения и деградации прочностных параметров с учетом типа напряженного состояния. Один из вариантов такой модели подробно описан в работах [9–12].

В 2D- и 3D-постановках численно решалась полная система уравнений механики деформируемого твердого тела, включающая законы сохранения массы, импульса и энергии:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \quad \rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \nabla \sigma_{ik}, \\ \rho \dot{E} &= \sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{ik} - \frac{\partial q_i}{\partial x^k} \end{aligned} \quad (1)$$

и эволюционные определяющие уравнения первой группы [9]:

$$\frac{D\sigma_{ik}}{Dt} = \lambda(\dot{\theta}^t - \dot{\theta}^p)\delta_{ik} + 2\mu(\dot{\epsilon}_{ik}^t - \dot{\epsilon}_{ik}^p). \quad (2)$$

Здесь  $\rho$  — плотность материала;  $x^k$  — координаты в декартовой системе координат наблюдателя;  $v_i$  — компоненты вектора скорости перемещений;  $\sigma_{ik}$  — компоненты тензора напряжений;  $F_i$  — компоненты вектора массовых сил;  $\dot{\epsilon}_{ik}^t = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \right)$  — компоненты тензора скорости деформации;  $\dot{\theta}^t = \dot{\epsilon}_{ii}^t$  — полная скорость объемной деформации;  $\dot{\theta}^p = \dot{\epsilon}_{ii}^p$  — неупругая составляющая скорости объемной деформации;  $E$  — внутренняя энергия единицы начального объема;  $q_i$  — компоненты вектора теплового потока;  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера;  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе; точка над символом означает материальную производную по времени; производная напряжений по времени  $D\sigma_{ik}/Dt$  определена в смысле производной Яуманна. Используется разложение полной скорости деформации на упругую и неупругую составляющие:  $\dot{\epsilon}_{ij}^t = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p$ .

В данных расчетах среда считается баротропной, а релаксация мгновенной и не учитываются процессы распространения тепла. Кроме того, в модели неупругого поведения хрупкой среды учитывается ее чувствительность к давлению. Предельная поверхность  $f(\sigma_{ij})$  для такой среды в пространстве напряжений включает первый инвариант напряжений:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{\alpha}{3} I_1 + I_2^{1/2} - Y. \quad (3)$$

Здесь  $I_1$  и  $I_2$  — первый и второй инварианты тензора напряжений;  $\alpha$  имеет смысл коэффициента внутреннего трения;  $Y$  — предел прочности. Таким образом, уравнение (3) является обобщением условия Кулона–Мора и определяет в пространстве напряжений конус Мизеса–Шлейхера, который зависит от давления [9]. В отличие от классической модели Друкера–Прагера, в настоящей работе используется неассоциированный закон течения:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (4)$$

где  $\dot{\lambda}$  — пластический множитель, определяемый из условия удовлетворения напряженного состояния функции текучести (3). Пластический потенциал  $g(\sigma_{ij})$  в случае неассоциированного закона течения не совпадает с видом предельной поверхности (3) и записывается в данном случае следующим образом [9, 15]:

$$g(\sigma_{ij}) = I_2 + \frac{\Lambda}{3} I_1 \left( 2Y - \frac{\alpha}{3} I_1 \right) + \text{const}, \quad (5)$$

где  $\Lambda$  — коэффициент (функция) дилатансии.

В этом случае скорость неупругой деформации определяется следующим выражением [9] (эволюционные уравнения второй группы):

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \left[ s_{ij} + \frac{2}{3} \Lambda \left( Y - \frac{\alpha}{3} I_1 \right) \delta_{ij} \right] \dot{\lambda}, \quad (6)$$

где  $s_{ij}$  — компоненты девиатора напряжений. Это выражение позволяет записать уравнение, связывающее объемную  $\dot{\theta}^p = \dot{J}_1^p$  и сдвиговую  $\dot{J}_2^{p/2}$  составляющие скорости неупругой деформации [9, 15]:

$$\dot{J}_1^p = 2\Lambda \dot{J}_2^{p/2}. \quad (7)$$

Здесь  $\dot{J}_1^p$  и  $\dot{J}_2^p$  — первый и второй инварианты тензора скорости деформации. При  $\Lambda = \alpha$  получим модель Друкера–Прагера, а при  $\Lambda = \alpha = 0$  — модель Прандтля–Рейса.

Очень важно, что представленная модель (3)–(7) позволяет описать также неупругую деформацию, предваряющую разрушение различных квазихрупких тел и геосред. Эта неупругая деформация отражает также макроскопический неупругий отклик среды на нагружение за счет накопления в среде мелких повреждений и трещин и связанных с их эволюцией дилатансионных процессов. Обычно такая неупругая деформация очень мала и не превышает десятых долей процента для хрупких сред. В случае вязкохрупкой реакции материала эта неупругая деформация оказывается существенно большей и может достигать даже нескольких процентов и более для грунтов и геосред [9–12].

Таким образом, неупругая макроскопическая деформация обеспечивается повреждениями и дефектами, накапливаемыми средой на микроуровнях. Этот процесс описан определяющими уравнениями (2)–(7).

Процесс деградации прочности вследствие накопления в среде мелких повреждений опишем введением в рассмотрение функции деградации  $D$ , как это сделано в работах [8–12]. Прочность среды  $Y$  в уравнении (3) уменьшается от некоторого начального состояния  $Y_0$  до 0:

$$Y = Y_0(1 - D), \quad \text{где } 0 < D \leq 1. \quad (8)$$

Ранее [8–12] для геосред и ряда геоматериалов была изучена функция деградации вида:

$$D = \int_{t_0}^t \frac{(\sigma_0 - \sigma)^2 dt}{(\sigma^*)^2 t^*}, \quad 0 < D \leq 1, \quad (9)$$

где  $\sigma$  — инвариант тензора напряжений (первый, второй или их комбинация в зависимости от реологии среды, в данном случае  $\sigma$  означает интенсивность напряжений);  $\sigma_0$  и  $\sigma^*$  — параметры модели, имеющие размерность напряжения, второй из которых определяет скорость накопления средой повреждений;  $t^*$  — характерное время процесса накопления средой повреждений до их критического значения, когда разрушение переходит в сверхбыстрый катастрофический режим формирования магистральной трещины или разлома (рис. 3). Процесс деградации начинается при достижении некоторого порогового значения напряжений  $\sigma'_0$ . Параметр  $\sigma'_0$  характеризует способность среды накапливать повреждения

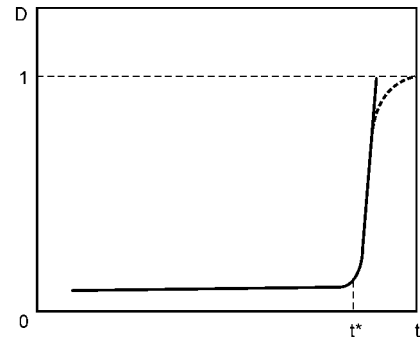


Рис. 3. Переход разрушения в сверхбыстрый катастрофический режим (при  $t > t^*$ ,  $D \rightarrow 1$ )

в упругой области, когда средние макроскопические напряжения существенно ниже макроскопического предела прочности (или предела текучести для пластичных сред). Фактически этот параметр отражает многомасштабность процесса разрушения в реальных материалах. Локальные напряжения мезоуровня могут значительно превышать средние макроскопические напряжения вследствие действия мезоконцентраторов различной физической природы. В этом случае повреждения будут генерироваться в среде даже при очень незначительных средних напряжениях на упругом участке диаграммы  $\sigma \sim \epsilon$ .

На рис. 4 приведены результаты расчетов обрушения кровли над горной выработкой. Расчеты выполнены по модели (1)–(9), как это описано в работах [10–12]. Показан процесс обрушения кровли, включающий первую и последующие посадки кровли. Развитие этого процесса во времени приведено на рис. 5. На рис. 5, а показан участок кровли с вязкохрупким разрушением. На рис. 5, б показаны скорости роста трещин, где значительные всплески соответствуют сверхбыстрым катастрофическим стадиям разрушения. Фактически каждый всплеск означает катастрофическую стадию подрастания индивидуальной трещины. Рисунок 5, в, который по времени синхронизирован с рис. 5, б, показывает раз-

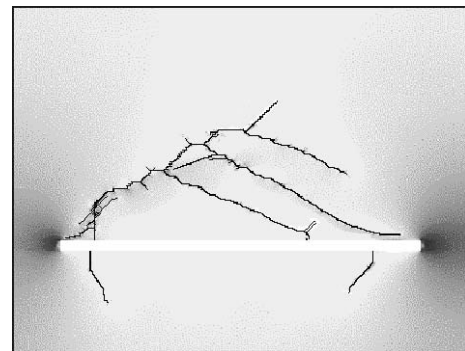


Рис. 4. Магистральные трещины в кровле над выработанным пространством, определяющие первую и последующие посадки кровли

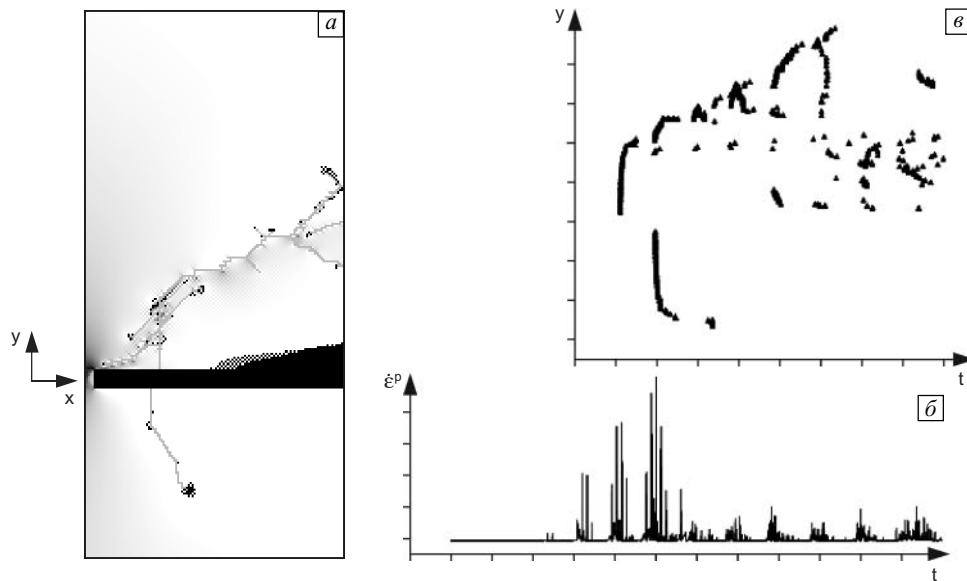


Рис. 5. Развитие магистральной трещины в кровле над выработанным пространством: *a* — распределение сформировавшихся магистральных трещин; *б* — временное распределение скорости накопления неупругой деформации в среде; *в* — высотное распределение меток полностью разрушенных элементов геосреды ( $D = 1$ ,  $Y = 0$ )

витие процесса разрушения во времени для частиц геосреды с определенной вертикальной координатой, черным цветом отмечены значения координат тех частиц среды, для которых в данный момент времени поврежденность достигла единицы ( $D = 1$ ), т.е. среда в них полностью разрушилась. Заметим, что первые группы всплесков скорости неупругой деформации на рис. 5, б не привели к полному разрушению для соответствующих частиц,  $D < 1$ , поэтому частицы среды не утратили полностью свою прочность и соответствующие метки, свидетельствующие об их разрушении, на рис. 5, в отсутствуют. Интегральной характеристикой меры поврежденности квазихрупкой среды является накопленная в ней неупругая деформация, которая есть не что иное, как совокупность дефектов, микротрещин и прочих повреждений, приводящих к макроскопической деградации среды и к дилатансии.

По этой причине в работе была предложена и изучена модель, в которой функция деградации прочности  $D$  в нагружаемой среде взята в зависимости от накопленной средой неупругой деформации  $\varepsilon^P = \varepsilon_{\text{тек}} - \varepsilon_0$ :

$$D = \int_{t_0}^t \frac{[(\varepsilon_{\text{тек}} - \varepsilon_0)^2 + K(\varepsilon_{\text{тек}} - \varepsilon'_0)^2] dt}{\varepsilon_*^2 t_*},$$

$$\varepsilon_* = \varepsilon_{0*} (1 + \gamma)^n, \quad (10)$$

$$Y = Y_0 (1 - D), \quad 0 < D \leq 1.$$

Здесь  $t_*$  — некоторое характерное значение времени, определяющее скорость накопления средой повреждений (параметр модели);  $\varepsilon_*$  — функция вида напряженного состояния частиц среды, определяемого параметром Лоде–Надаи  $\gamma = 2(\sigma_2 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3) - 1$  [16];  $\varepsilon_{0*}$  — параметр модели;  $K = 0$  при  $\gamma \geq 0$  (в частицах

среды наблюдаются деформации сдвига-сжатия) и  $K = 1$  при  $\gamma < 0$  (в частицах среды наблюдаются деформации сдвига-растяжения);  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные напряжения;  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon'_0$  — малые пороговые значения деформации, соответствующее сугубо упругому отклику среды, при превышении которых в среде начинают накапливаться повреждения, причем  $\varepsilon'_0 \ll \varepsilon_0$ , что позволяет среде более интенсивно накапливать повреждения в области растягивающих напряжений;  $n$  — параметр модели, определяющий разницу скоростей накопления повреждений при растяжении и сжатии. Это обстоятельство приводит к существенно более низкой ее прочности при растяжении, чем при сжатии. Функция  $\varepsilon_*$  таким образом зависит от вида напряженного состояния, что ее численное значение резко падает в области растягивающих напряжений при  $\gamma < 0$ , что также обеспечивает более интенсивное накопление средой повреждений в областях сдвигов-растяжений. Таким образом, учет вида напряженного состояния позволяет корректно описать различную реакцию среды на сдвиги-сжатия и сдвиги-растяжения.

Принципиально важным в рассматриваемой модели (10) является следующее обстоятельство. Исходная прочность материала  $Y_0$  одинакова для всех частиц нагружаемой среды, но текущая прочность  $Y$  зависит от вида напряженного состояния, формируемого в среде в процессе ее нагружения, и уменьшается по мере накопления средой повреждений, которые локализируются в узких областях, эволюционируя в трещины. Любой реальный хрупкий материал содержит множество микротрещин, которые в области растягивающих напряжений начинают раскрываться, понижая локальную проч-

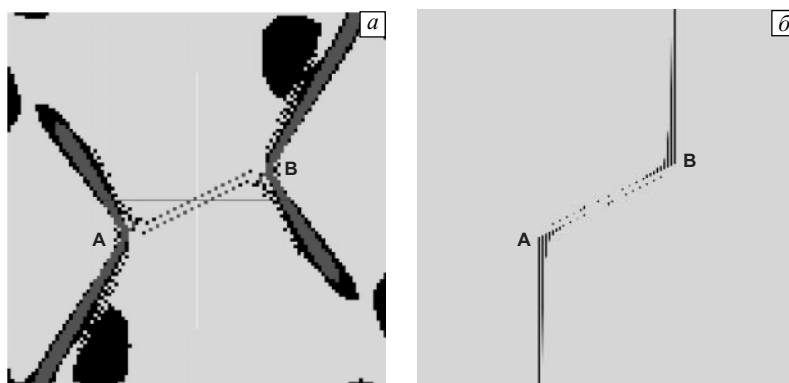


Рис. 6. Результаты расчетов развития повреждений в образце с наклонной трещиной по модели (3)–(7) (а) и (3)–(10) с учетом деградации (б)

ность материала в этой области. Именно это обстоятельство и учитывает рассматриваемая модель (10). Таким образом, в областях, где преобладают деформации сдвига-растяжения ( $\gamma < 0$ ), поврежденность растет существенно быстрее, чем в областях, где превалируют деформации сдвига-сжатия ( $\gamma > 0$ ). В процессе нагружения среды в ней формируются узкие локальные области пониженной прочности, которые эволюционируют в трещины (при  $D = 1$ ).

На рис. 6 представлены полученные в результате расчетов картины разрушения хрупких образцов с начальной трещиной  $AB$  при угле ее наклона  $\varphi = \pi/3$  и наличии некоторого небольшого трения на горизонтальных гранях, где задавалась нагрузка. Результат моделирования, выполненного по уравнениям (3)–(7) без учета деградации, а только с учетом внутреннего трения  $\alpha$  и дилатансии  $\Lambda$  ( $\alpha = 0.29$ ,  $\Lambda = 0.12$ ) [6–9], показан на рис. 6, а. Бóльшим значениям неупругих деформаций соответствует бóльшая насыщенность серого цвета. В этом случае реакцию среды на нагружение можно характеризовать наличием заметных неупругих деформаций (до нескольких процентов), которые локализованы в полосах. Ориентация полос локализации в этом случае определяется значениями параметров  $\alpha$  и  $\Lambda$ , которые определяют внутреннее трение и дилатансию, и может меняться в широких пределах от нескольких градусов до десятков градусов [9]. Видно, что без учета различия

деградации прочности материала при сжатии и растяжении направления вновь образующихся трещин (если полученные полосы локализованного сдвига трактовать как формирующиеся трещины) не соответствуют наблюдаемым в эксперименте.

При учете различия значений прочности материала при сжатии и растяжении, а также деградации прочности (10), но с низкой ее скоростью, вовлеченными в неупругую деформацию оказываются значительные области в образце (рис. 6, б). В этом случае неупругая деформация также трактуется как поврежденность среды. При  $D = 1$   $Y = 0$  и среда считается разрушенной. Поскольку скорость накопления повреждений сравнительно низкая, образующиеся «трещины» (области локализованных повреждений) еще невелики. Реакцию среды можно трактовать как квазихрупкую.

Таким образом, выполнение расчетов при явном учете накопления повреждений в соответствии с (10), а также с учетом различия прочностных свойств среды при растяжении и сжатии и деградации прочностных характеристик среды приводит к картине разрушения, соответствующей эксперименту. На рис. 7 приведены картины разрушения, полученные в результате расчетов для четырех последовательных моментов времени, по которым можно проследить развитие хрупких трещин в образце при его одноосном сжатии. Скорость накопления повреждений (и, следовательно, деградация среды)

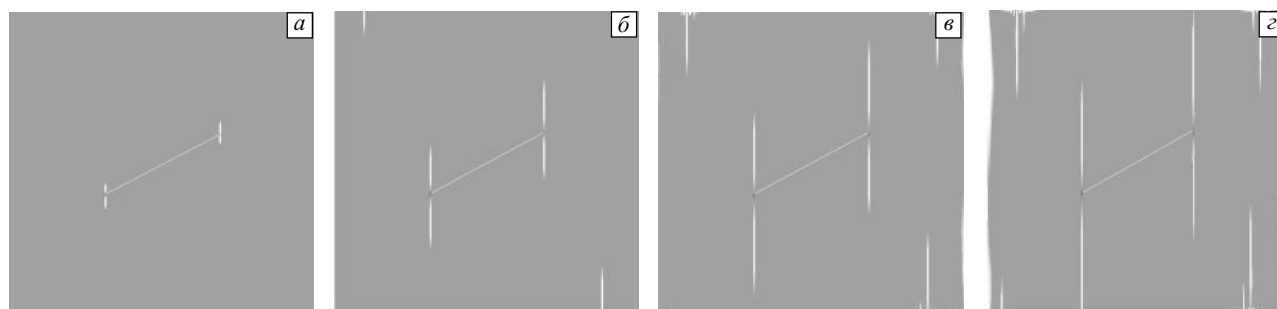


Рис. 7. Развитие трещин в хрупком образце с наклонной трещиной при сжатии

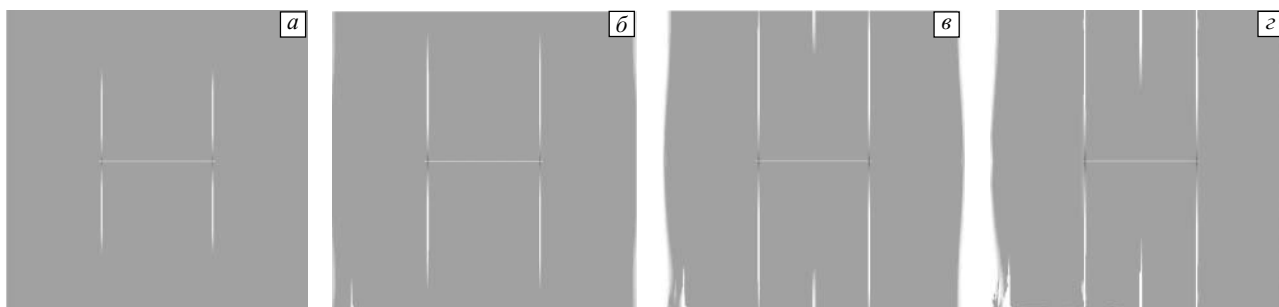


Рис. 8. Развитие трещин в хрупком образце с горизонтальной исходной трещиной при сжатии

в этом случае задана в несколько раз выше, чем для случая, показанного на рис. 6, б.

Из рис. 7 следует, что зарождение вертикальных трещин происходит у границ начальной трещины, далее они распространяются в обоих направлениях от трещины. Кроме этого, в углах образца были заданы области с пониженными прочностными характеристиками в качестве незначительных начальных повреждений ( $D \approx 0.03-0.05$ ), дающих возможность распространения трещин, схожих с наблюдаемыми в экспериментах. На свободных боковых поверхностях образца происходит разрушение вблизи его углов. По-видимому, при проведении экспериментов, на образование трещин вблизи углов образца повлияло наличие трения, что привело к зарождению повреждений на начальных этапах деформирования. Если при моделировании в расчетах задать такие незначительные повреждения ( $\approx 5\%$ ) вблизи углов, то в результате расчетов трещины вблизи углов развиваются одновременно с центральными. Если же таких начальных повреждений не задавать, то свободные поверхности образца и его углы разрушаются на более поздних стадиях деформирования.

При выполнении расчетов процесса разрушения образца в случае ортогональной ориентации начальной трещины к вертикали ( $\varphi = \pi/2$ ) принималось, что образец мог свободно проскальзывать вдоль горизонтальных

граней. В этом случае трещины также зарождаются у границ начальной трещины и распространяются в обоих направлениях по вертикали, как показано на рис. 8. При большем значении общей деформации происходит разрушение углов и тонкого слоя вблизи свободной поверхности. На более поздней стадии деформирования формируется центральная трещина, ортогональная к начальной, что соответствует экспериментам (рис. 9, в).

Приведенные на рис. 7 и 8 картины разрушения, полученные в результате расчетов с учетом различия значений прочности среды при сжатии и растяжении, а также накопления повреждений, достаточно хорошо согласуются с результатами экспериментов, представленными на рис. 2 и 9, в в отношении развития вертикальных трещин. Однако в эксперименте не все трещины развиваются строго вертикально.

Итак, при высокой скорости накопления средой повреждений, а значит, и высокой скорости деградации прочности разрушение носит сугубо хрупкий характер. Однако при уменьшении скорости накопления средой повреждений среда начинает проявлять вязкие свойства, что видно из картин разрушений, показанных на рис. 10. Результаты расчетов, приведенные на рис. 10, а демонстрируют, что в нагружаемой среде появились значительные области локализованной неупругой дефор-

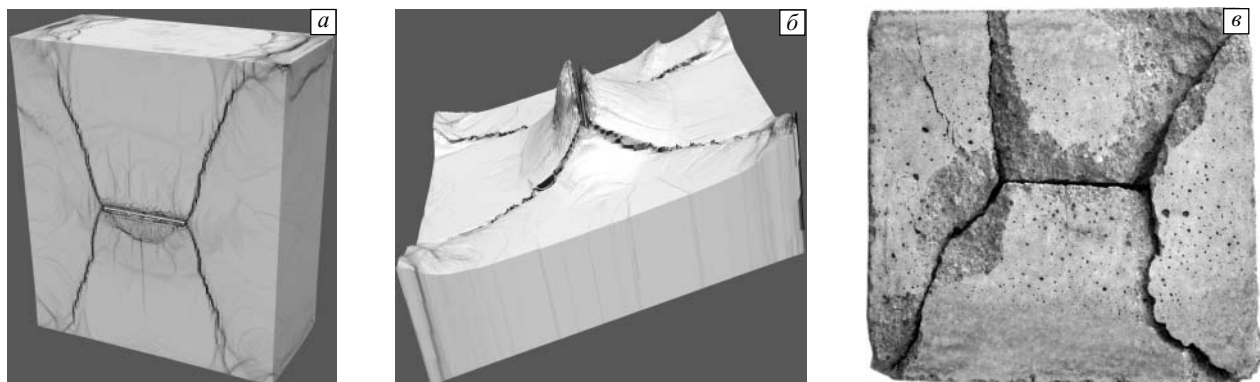


Рис. 9. Картины разрушения образца из цементно-песчаной смеси с исходной горизонтальной трещиной при его осевом сжатии: полученные в расчете локализация неупругой деформации (а), рельеф поверхности при 20-кратном увеличении (б) и экспериментальная фотография разрушенного образца (в)



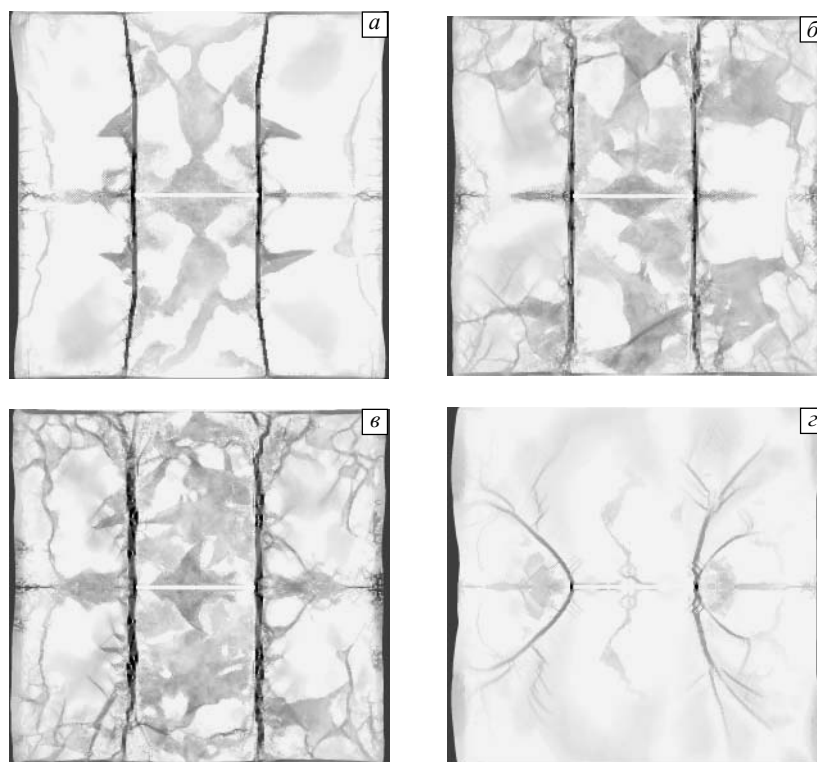


Рис. 10. Квазихрупкий характер разрушения образцов с начальной горизонтальной трещиной: начальная скорость накопления повреждений, условно равная 1 (*а*); скорость накопления повреждений, уменьшенная в 5 (*б*), 10 (*в*) и 50 раз (*г*)

мации, в отличие от рис. 8, где вся неупругая деформация сосредоточена в узких зонах хрупких трещин. Более того, направление развития трещин начинает отклоняться от строго вертикального направления и в большей степени соответствует экспериментальным данным в отношении наклонных трещин (рис. 2 и 9, *в*). По мере снижения скорости накопления средой повреждений в 5, 10 и 50 раз по сравнению с исходной (рис. 10, *а*) влияние предваряющей разрушение неупругой деформации на общую картину разрушения проявляется все в большей степени (рис. 10, *б*, *в*, *г*). В итоге на рис. 10, *в* мы уже можем наблюдать ветвление трещин. Характер неупругой деформации при низкой скорости накопления



Рис. 11. Расчетная картина квазихрупкого разрушения образца с горизонтальной начальной трещиной при сжатии

средой повреждений (рис. 10, *г*) схож с деформационной картинной, показанной на рис. 6, *а*.

Области локализованной неупругой деформации образуют систему ветвящихся трещин, ориентация которых определяется также, как и ориентация полос локализованной неупругой деформации, показанных на рис. 7, *а*, — величинами внутреннего трения и дилатансии.

Система фрактальных ветвящихся трещин в квазихрупком образце показана на рис. 11. Такой характер разрушения соответствует средам, способным на стадии предразрушения накапливать значительные (до нескольких процентов и более) неупругие деформации, оставаясь на макроуровне консолидированными.

На рис. 9 приведена картина расчета разрушения квазихрупкого образца с горизонтальной исходной трещиной, полученная 3D-моделированием по уравнениям (3)–(10) с учетом как дилатансии и внутреннего трения, так и деградации прочности. Величина смещений частиц среды, показанных на рис. 9, *б*, для наглядности увеличена в 20 раз. Полученный в расчетах характер разрушения хорошо соответствует экспериментальной картине, показанной на рис. 9, *в*.

#### 4. Выводы

В результате экспериментального исследования разрушения квазихрупких образцов с начальной трещиной

при одноосном сжатии установлено, что образование и развитие трещин практически соответствуют стандартной картине разрушения хрупких материалов и происходят преимущественно в направлении действия нагрузки, т.е. в этом случае преобладает продольный характер разрушения образцов. Однако направления этих трещин заметно отклоняются от вертикального. На стадии предразрушения в образцах накапливается заметная неупругая деформация.

Построена модель квазихрупкой среды, учитывающая различия в значениях прочности среды при сжатии и растяжении, а также накопление повреждений, которая при расчетах процесса разрушения хрупких образцов с начальной трещиной при их одноосном сжатии позволяет получить результаты, в достаточной степени соответствующие экспериментальным. В частности, ориентация образующихся при этом макроскопических трещин и общая картина разрушения наиболее полно соответствуют наблюдаемой в эксперименте в случае, когда среда на стадии предразрушения накапливает существенные неупругие деформации.

Численно изучено влияние скорости накопления среды повреждений на характер разрушения образцов с начальной трещиной. Показано, что, как и в экспериментах, отклонение трещин от вертикального направления, типичного для хрупких материалов, связано с влиянием параметров внутреннего трения и дилатансии. Образцы разрушаются при заметных величинах накопленной на стадии предразрушения неупругой деформации, которая может составлять несколько процентов.

Установлено, что с увеличением скорости накопления повреждений в среде, задаваемой функцией повреждаемости в кинетических уравнениях (9), (10), реакция среды меняется от квазихрупкой с большими неупругими локализованными в полосах сдвига-растяжения деформациями к хрупкой. При низких скоростях накопления повреждений среда демонстрирует типично упругопластическое поведение, характерное для грунтов и геосред [9–11].

Работа выполнена при частичной поддержке проекта РФФИ № 12-05-00503, проекта VII.64.1.8 фундаментальных исследований СО РАН на 2010–2013 гг. и междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований СО РАН на 2012–2014 гг. № 90.

## Литература

1. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наукова думка, 1968. – 246 с.
2. Черепанов Г.П. О развитии трещин в сжатых телах // Прикладная математика и механика. – 1966. – Т. 30. – № 1. – С. 82–93.
3. Локишина Л.Я., Костандов Ю.А., Васильев Д.Л. Устойчивость трещины при одноосном сжатии с учетом внутреннего трения // Науковий вісник Національного гірничого університету. – 2010. – № 4. – С. 7–10.
4. Ставрогин А.Н., Тарасов Б.Г. Экспериментальная физика и механика горных пород. – СПб.: Наука, 2001. – 271 с.
5. Жигалкин В.М., Семенов В.Н., Усольцева О.М. и др. Экспериментальное исследование деформирования полухрупких материалов при плоском напряженном состоянии // Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках: Матер. Межд. научн. школы им. ак. С.А. Христиановича, Симферополь, 17–23 сентября 2007 г. – Симферополь: Таврич. нац. ун-т, 2007. – С. 107–110.
6. Немирович-Данченко М.М. Модель гипопругой хрупкой среды: применение к расчету деформирования и разрушения горных пород // Физ. мезомех. – 1998. – Т. 1. – № 2. – С. 107–114.
7. Makarov P.V., Schmauder S., Cherepanov O.I., Smolin I.Yu., Romanova V.A., Balokhonov R.R., Saraev D.Yu., Soppa E., Kizler P., Fischer G., Hu S., Ludwig M. Simulation of elastic plastic deformation and fracture of materials at micro-, meso- and macrolevels // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2001. – V. 37. – No. 1–3. – P. 183–244.
8. Стефанов Ю.П. Численное моделирование деформирования и разрушения горных пород на примере расчета поведения образцов песчаника // ФТПРПИ. – 2008. – № 1. – С. 73–83.
9. Макаров П.В., Смолин И.Ю., Стефанов Ю.П., Кузнецов П.В., Трубицын А.А., Трубицына Н.В., Ворошилов С.П., Ворошилов Я.С. Нелинейная механика геоматериалов и геосред. – Новосибирск: Акад. изд-во «Гео», 2007. – 235 с.
10. Макаров П.В. Математическая теория эволюции нагружаемых твердых тел и сред // Физ. мезомех. – 2008. – Т. 11. – № 3. – С. 19–35.
11. Макаров П.В., Смолин И.Ю., Евтушенко Е.П., Трубицын А.А., Трубицына Н.В., Ворошилов С.П. Сценарии эволюции горного массива над выработкой // Физ. мезомех. – 2009. – Т. 12. – № 1. – С. 75–82.
12. Макаров П.В., Смолин И.Ю., Евтушенко Е.П., Трубицын А.А., Трубицына Н.В., Ворошилов С.П. Моделирование обрушения кровли над выработанным пространством // Физ. мезомех. – 2008. – Т. 11. – № 1. – С. 44–50.
13. Костандов Ю.А., Медведев В.С. Исследование предельного состояния хрупких тел с трещинами при одноосном сжатии // Заводская лаборатория. – 2011. – № 3. – С. 54–57.
14. Костандов Ю.А. Определение коэффициентов внешнего и внутреннего трения материалов // Заводская лаборатория. – 2011. – № 2. – С. 56–59.
15. Гарагаш И.А., Николаевский В.Н. Неассоциированные законы течения и локализация пластической деформации // Успехи механики. – 1989. – Т. 12. – № 1. – С. 131–183.
16. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

Поступила в редакцию 23.09.2011 г.,  
после переработки 18.05.2012 г.

## Сведения об авторах

Евтушенко Евгений Павлович, прогн. ИФПМ СО РАН, eugene@ispms.tsc.ru

Еремин Михаил Олегович, магистрант ТГУ, bacardi@sibmail.com

Костандов Юрий Аршавирович, к.ф.-м.н., зав. лаб. НИИ ПГД ТНУ, ipgd@yandex.ru

Макаров Павел Васильевич, д.ф.-м.н., проф., зав. лаб. ИФПМ СО РАН, проф. ТГУ, pvm@ispms.tsc.ru

Смолин Игорь Юрьевич, д.ф.-м.н., доц., внс ИФПМ СО РАН, проф. ТГУ, smolin@ispms.tsc.ru

Шиповский Иван Евгеньевич, к.т.н., снс НИИ ПГД ТНУ, ipgd@yandex.ru