Моделирование упругопластической деформации и разрушения неоднородных сред на мезоуровне

П.В. Макаров

Институт физики прочности и материаловедения, СО РАН, Томск, 634021, Россия
Томский государственный университет, Томск, 634050, Россия

В представленной работе основное внимание уделено краткому изложению возможностей и перспектив применения идей и подходов физической мезомеханики материалов и разработанных моделей к актуальным прикладным проблемам, таким как описание деформации и разрушения геоматериалов и геодинамики в целом, к моделированию процессов разрушения сложного природного композита — угля, а также механического поведения субмикрокристаллических материалов.

Не делая обстоятельного обзора классических подходов континуальной механики деформируемых твердых тел, что является отдельной серьезной задачей, автору пришлось очень коротко остановиться на некоторых основных положениях и моделях механики деформируемого твердого тела исключительно с целью обозначения места и специфики некоторых методов и подходов, которые применялись в последние годы в лаборатории механики структурно-неоднородных сред ИФПМ СО РАН для моделирования процессов развития локализованной деформации и разрушения на мезоскопическом масштабном уровне.

1. Введение

Введение в механику деформируемого твердого тела и физику пластичности понятий масштабных и структурных уровней деформации нагружаемых твердых тел, а также пристальное и детальное исследование закономерностей деформирования и разрушения на мезоскопическом масштабном уровне, которому отводится ключевая роль в иерархии масштабов, является несомненной заслугой школы академика В.Е. Панина [1, 2]. Конечно, понимание того, что сложное внутреннее строение твердых тел обязательно должно повлиять на их макроскопическое поведение было уже достигнуто на этапах становления как физики пластичности, так и механических теорий пластичности и разрушения в их классических вариантах. Однако классическая феноменология деформируемых твердых тел всегда исходила из макроскопических представлений [3–7]. Учет внутренней структуры в определяющих уравнениях осуществлялся путем введения структурных параметров [5, 6], которые, по мнению авторов, и должны были отражать реальное внутреннее строение материалов, обобщенно обозначаемое термином «микроструктура». На этом пути было получено огромное количество ценных результатов, прежде всего экспериментального характера, когда, например, исследовалось влияние размера зерна поликристаллов на предел текучести — знаменитое уравнение Холла–Петча.

С точки зрения континуальной механики уже в самом понятии «макрочастица» заложен трудно преодолимый дуализм. С одной стороны, эта макрочастица, как точка континуума, является бесконечно малой и, как следствие, возможны только центральные взаимодействия таких точек среды (предполагается отсутствие внутренних моментов, поверхностных макроскопических моментов и распределенных массовых моментов). Т.е. бесконечно малым макроскопическим точкам приписываются только три степени свободы — перемещения — и отсутствует их независимое вращение, так как нет причины, порождающей независимые повороты. С другой стороны, любая такая бесконечно малая макроскопическая частица является достаточно большой и содержит необходимое для усредненного макроскопического описания число структурных элементов, например, зерен поликристаллического материала и т.д. Именно последнее положение является поводом для введения в макроскопические теории пластичности и разрушения так называемых структурных параметров.

Сразу заметим, что подобный путь построения определяющих уравнений неявно предполагает равномерное статистическое распределение всей иерархии

© Макаров П.В., 2003

структурных элементов и отсутствие их коллективного поведения и процессов самоорганизации на «микромасштабном» уровне. В подобной концепции само понятие «микроструктура» размыто и не определено. Это и дефекты, и зерна, и любые другие структурные элементы, т.е. элементы разных масштабов уже содержащиеся, либо возникающие при деформировании в макрочастице.

Идея о равномерном статистическом распределении в материале структурных элементов и/или дефектов разной природы породила большое число статистических моделей разрушения. Подобные модели оказались чрезвычайно эффективными для сред, в которых коллективные эффекты и явления самоорганизации микроструктуры выражены слабо, например, для описания зарождения и развития разрушения многих композиционных материалов. Однако иерархическая природа процесса разрушения и здесь привела к развитию иерархических моделей разрушения [8], в частности развиваемых в Институте проблем механики РАН, Институте машиноведения РАН. Идея укрупнения трещин и перевода процесса разрушения на более высокий масштабный уровень нашла свое яркое воплощение в концентрационном критерии укрупнения трещин [9]. В этой модели физической характеристикой разрушения поврежденной среды является безразмерная величина c, выражающая среднее расстояние между трещинами:

$$c = \frac{h}{\ell} \tag{1}$$

в единицах их характерных размеров (h — среднее расстояние между трещинами, ℓ — средняя характерная их длина). Когда

$$c = e \approx 2.7 \tag{2}$$

(e — основание натурального логарифма!) происходит слияние трещин, т.е. образование укрупненной трещины и выход разрушения на следующий масштабный уровень. Условие (2) получило название концентрационного критерия укрупнения трещин.

Сильной стороной данного подхода является принцип самоподобия разрушения, фактически содержащийся в самой идее концентрационного критерия укрупнения трещин, когда подъем по иерархической лестнице сопровождается только количественными изменениями при отсутствии каких-либо качественных изменений. Охватывая в общих чертах фундаментальные свойства процесса разрушения — иерархичность и самоподобие — концентрационный критерий укрупнения трещин принципиально не позволяет указать место разрушения. Он просто утверждает, что выделенный объем масштаба L нагружаемого материала с повреждениями размером ℓ оказывается разрушенным при выполнении условия (2).

С другой стороны, не следует воспринимать соотношение (2) буквально, т.е. полагать, что если расстояние между соседними трещинами окажется близким к утроенной величине их характерных размеров, то напряженное состояние вблизи этих трещин заставит их слиться. Расчеты показывают, что это не так. Поэтому концентрационный критерий имеет статистическую трактовку, которая утверждает, что, если концентрация повреждений достигла такой средней величины, что выполнено условие (2), то в материале за счет статистических флуктуаций всегда образуются области, в которых концентрация повреждений окажется существенно выше. Именно это обстоятельство и не позволяет указать конкретное место образования укрупненной «макротрещины», разделяющей выделенный объем или нагружаемый образец на отдельные части.

Универсальность концентрационного критерия укрупнения трещин и единообразие переходов на более высокие масштабные уровни справедливы, строго говоря, для однородной бесструктурной среды. С другой стороны, подобные теории разрушения являются самодостаточными в том смысле, что они никак не связаны с предваряющей разрушение неупругой деформацией материала. Эта деформация может быть очень велика, особенно, для металлов, а трещины в этих материалах развиваются уже в пластически подготовленных объемах, часто (но не обязательно) следуя по пути локализованных сдвигов.

Существование обособленных механических теорий пластичности и разрушения (это, конечно, крайняя точка зрения) является несомненным нонсенсом, когда все исследователи понимают, что существует единый процесс механического отклика материала на нагружение, сопровождаемый упругими деформациями, неупругой реакцией, пластическим разрыхлением (т.е. накоплением повреждений разных масштабов) и, наконец, разрушением образца на части. Проблема сближения этих теорий и развитие общей теории неупругой (пластической) деформации и разрушения твердых тел является одной из самых актуальных задач как физики, так и механики деформируемого твердого тела.

Становление физической мезомеханики материалов как нового научного направления, развивающегося на стыке физики пластичности, механики деформируемого твердого тела и материаловедения [10], впервые открыло реальную, а не просто декларируемую, возможность сближения методов и подходов перечисленных выше научных дисциплин и органичность слияния теорий пластичности и разрушения в рамках совместного описания. Эти проблемы уже неоднократно обсуждались, в том числе и на страницах настоящего журнала [11–14]. При таком описании процессы неупругой (пластической) деформации и сопровождающие деформирование процессы накопления повреждений и трещин соответствующих масштабов рассматриваются совместно в рамках иерархических моделей, но уже не бесструктурного континуума, а структурированной среды. Учет

формирующихся в процессе нагружения субструктур и повреждений соответствующих масштабов, т.е. учет кластеризации и коллективных явлений, является неотъемлемой частью развиваемой методологии физической мезомеханики материалов [15, 16].

Центральная идея физической мезомеханики о материале как эволюционирующей под приложенными нагрузками иерархически организованной системе структурных элементов разных масштабов позволила органически вобрать в себя все созданные модели, рассматривая их как модели соответствующего уровня усреднения и, следовательно, соответствующей степени подробности описания. Крайняя позиция — классические модели континуальной механики с усредненными по бесструктурному континууму свойствами, проявляемыми материалом в заданном, иногда очень ограниченном, диапазоне условий нагружения и свойствами, явно или неявно приписанными такому деформируемому континууму. Другим ярким примером являются методы и подходы калибровочных полей, которые составляют класс «геометризированных» теорий деформируемых твердых тел, когда теория деформирования (мера деформации) связывается со свойствами континуума [17, 18].

Так как уравнения, описывающие деформационные процессы, — это дифференциальные уравнения, то и в основе изучаемых моделей лежит также идея деформируемого континуума (особый случай составляют дискретные методы описания — молекулярная динамика и т.д., которые мы здесь обсуждать не будем). Не является исключением и континуальная теория дефектов, несмотря на то, что движение единичной дислокации есть явление переноса разрыва — элементарной ступеньки. Это чрезвычайно важное обстоятельство позволяет распространить методы механики сплошных сред на микро- и мезоуровни, т.е. на уровни сред со структурой. Подобные приемы получили в механике название методов непрерывной аппроксимации. Одной из первых таких теорий была теория несимметричной упругости братьев Коссера, предложенная ими в 1909 году [19] и несправедливо забытая на несколько десятилетий. Ее повторное открытие связано с именами Трусделла и Тупина [20, 21] и относится уже к 1960 году. Фактически, в модели Коссера предпринята попытка методами теории упругости учесть неупругие явления и наличие внутренней структуры в материале. В более продвинутых методах непрерывной аппроксимации получили развитие определенные физические идеи, связанные с понятиями нелокальности, конфигурации, полярности и т.д. Эти методы и модели изучаются в разделе механики, называемом «обобщенной механикой сплошных сред» и в настоящее работе затрагиваться не будут, хотя их эффективность для построения специфических моделей микро- и мезоуровней очевидна и этот вопрос требует отдельного специального рассмотрения. Мы же подробнее остановимся на модели Коссера и ее трансформации для описания неупругого поведения сред со структурой на мезоуровне.

2. От уравнений несимметричной теории упругости к уравнениям несимметричной теории пластичности

2.1. Уравнения несимметричной упругости

Приближения классических теорий упругости и пластичности основываются на идеальных моделях упругого контакта с центральным взаимодействием бесконечно малых макрочастиц. Связь нагрузок по обе стороны поверхности нагружаемого элемента (действующая сила — отклик материала) в такой модели задается только главным вектором $\mathbf{P}_\mathrm{n}\mathrm{d}S$ (здесь $\mathrm{d}S$ — бесконечно малый элемент поверхности с нормалью $\mathbf{n}$; $\mathbf{P}_\mathrm{n}$ — сила). Эта идея приводит к симметричным тензорам напряжений и деформаций и, фактически, предполагает, что нагружаемое тело является бесструктурным деформируемым континуумом. Ограничения, накладываемые такой симметричной теорией, пытался снять Фойгт [22], предположив дополнительно наличие и главного момента $\mathbf{M}_\mathrm{n}\mathrm{d}S$ (здесь $\mathbf{M}_\mathrm{n}$ — момент сил, действующих на площадке $\mathrm{d}S$ с нормалью $\mathbf{n}$). Таким образом, в модель наряду с силовыми напряжениями σ_{ij} вводились также и моментные напряжения μ_{ij}. Причем тензоры и силовых и моментных напряжений в общем случае являются несимметричными. Это легко понять, вспомнив, что классическая теория напряжений определяет напряженное состояние среды обобщением закона сохранения количества движения на бесконечно малый объем деформируемой среды (например, тетраэдр), и не накладывает ограничений симметрии на вводимый тензор напряжений [3]. Симметрия тензора напряжений есть следствие закона сохранения моментов количества движения в классическом случае отсутствия внутренних моментов, а также поверхностных моментов $\mathbf{M}_\mathrm{n}$ и массовых моментов $\mathbf{Y}$. Введение в модель поверхностного момента не только снимает ограничения симметрии, но и предполагает наличие в среде внутренних нескомпенсированных моментов. Эти обстоятельства приводят к тому, что частицы среды теперь обладают шестью степенями свободы: три перемещения u_i и три независимых поворота ω_i ($\mathbf{u} = \{u_i\}$, $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_i\}$, $i = 1, 2, 3$). Количество уравнений движения также становится равным шести [23]:

$$\sigma_{ji,j} + \rho X_i = \rho\ddot{u}_i, \tag{3}$$

$$\varepsilon_{ijk}\,\sigma_{ji,j} + \mu_{ji,j} + \rho Y_i = J\ddot{\omega}_i. \tag{4}$$

Здесь система уравнений (3) выражает закон сохранения количества движения, (4) — закон сохранения моментов количества движения (при $\mu_{ij} = Y_i = \omega_i = 0$, $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$, что, как известно, полностью эквивалентно выполнению закона сохранения моментов количества движения в классическом случае отсутствия внутренних момен-

тов, поверхностных моментных напряжений и массовых моментов), $э_{ijk}$ — тензор Леви-Чивиты.

Заметим, что система уравнений (3), (4), как и в классическом случае, предполагает, что макроскопическая частица деформируемого континуума является бесконечно малой и, таким образом, теория несимметричной упругости в ее классическом варианте не содержит характерного размера длины.

Если классическая теория деформаций строится независимо от базовых уравнений механики сплошных сред, выражающих законы сохранения, то в случае несимметричной упругости для разъяснения смысла вводимых деформаций необходимо привлечь закон сохранения энергии, в котором выражения $\sigma_{ji}\mathrm{d}\gamma_{ji}$ и $\mu_{ji}\mathrm{d}\kappa_{ji}$ должны иметь смысл работы несимметричных силовых напряжений на приращениях также несимметричных «деформаций» $\mathrm{d}\gamma_{ji}$ и моментных напряжений на приращениях $\mathrm{d}\kappa_{ji}$ ($\kappa_{ji} \neq \kappa_{ij}$), которые имеют смысл изгибов-кручений деформируемой среды. Таким образом, формально в рассмотрение вводятся обобщенные силы σ_{ji} и μ_{ji} и обобщенные координаты γ_{ji} и κ_{ji}. Их произведения и имеют смысл работ.

Итак, в классическом случае симметричные деформации $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ равны

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij}), \tag{5}$$

где $\hat{g}_{ij}$ и $\mathring{g}_{ij}$ — метрические тензоры в актуальном и начальном состояниях. Запись (5) в терминах перемещений $\mathbf{u} = \{u_i\}$ приводит к уравнению Коши для малых деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{6}$$

В случае несимметричной упругости закон сохранения энергии для произвольного объема V, ограниченного поверхностью S имеет вид [23]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V \left[\frac{1}{2}(\rho v_i v_i + J\dot{\omega}_i\dot{\omega}_i) + E\right]\mathrm{d}V =$$
$$= \int\limits_V (X_i v_i + Y_i\dot{\omega}_i)\mathrm{d}V + \int\limits_S (\mathbf{P}_\mathrm{n}\mathbf{v} + \mathbf{M}_\mathrm{n}\boldsymbol{\omega})\mathrm{d}S - \int\limits_S q_i n_i \mathrm{d}S. \tag{7}$$

Здесь E — внутренняя энергия; $\mathbf{P}_\mathrm{n} = \mathbf{P}^j n_j$; $\mathbf{M}_\mathrm{n} = \mathbf{M}^j n_j$; $\mathbf{P}_\mathrm{n} = P^i_\mathrm{n}\mathbf{e}_i$; $\mathbf{M}_\mathrm{n} = M^i_\mathrm{n}\mathbf{e}_i$ и $P^i_\mathrm{n} = p^{ji}n_j$; а $M^i_\mathrm{n} = \mu^{ji}n_j$, т.е. P^i_n и M^i_n — проекции внешних силовых и моментных поверхностных напряжений на оси координат; а p^{ji} и μ^{ji} — уже порожденные внешними нагрузками внутренние силовые и моментные напряжения (положения индексов вверху здесь записаны исключительно из соображений удобства); n_j — направляющие косинусы, v_i — скорости, $v_i = \dot{u}_i$.

Применение теоремы Гаусса–Остроградского к поверхностным интегралам в уравнении (7), а также учет уравнений движения (3), (4) [3, 23] приводят к интегралу

$$\int\limits_V \{\dot{E} - [\sigma_{ji}(v_{i,j} - э_{kji}\,\dot{\omega}_k) - \mu_{ji}\dot{\omega}_{i,j}] - q_{i,i}\}\mathrm{d}V. \tag{8}$$

Вводя обозначения

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - э_{kji}\,\omega_k, \quad \kappa_{ji} = \omega_{i,j}, \tag{9}$$

получаем выражения для деформаций, которые удобно переписать в скоростях

$$\dot{\gamma}_{ji} = v_{i,j} - э_{kji}\,\dot{\omega}_k, \quad \dot{\kappa}_{ji} = \dot{\omega}_{i,j}. \tag{10}$$

Выражения (9) или (10) справедливы только локально и $\dot{\gamma}_{ji}$ представляет собой несимметричный тензор скоростей деформаций, $\dot{\kappa}_{ji}$ — тензор скоростей изгибов-кручений, а q_i — компоненты вектора теплового потока.

Теперь закон сохранения энергии записывается в дифференциальной форме

$$\dot{E} = \sigma_{ji}\dot{\gamma}_{ji} + \mu_{ji}\dot{\kappa}_{ji} - q_{i,i}. \tag{11}$$

Представляя уравнение баланса энтропии в обычной форме, и вводя функцию свободной энергии Гельмгольца F

$$F = E - ST, \tag{12}$$

можно легко получить следующие уравнения [23]:

$$\dot{S} = \theta - \frac{q_{i,i}}{T} + \frac{q_i T_{,i}}{T^2}, \tag{13}$$

$$\dot{F} = \sigma_{ji}\dot{\gamma}_{ji} + \mu_{ji}\dot{\kappa}_{ji} - \dot{T}S - T\left(\theta + \frac{q_i T_{,i}}{T^2}\right). \tag{14}$$

Здесь S — энтропия; θ — производство энтропии за счет необратимого процесса теплопроводности; T — температура.

Так как $F = F(\gamma_{ji}, \kappa_{ji}, T)$, то

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial \gamma_{ji}}\mathrm{d}\gamma_{ji} + \frac{\partial F}{\partial \kappa_{ji}}\mathrm{d}\kappa_{ji}\,\frac{\partial F}{\partial T}\mathrm{d}T. \tag{15}$$

Следовательно, из (14) и (15) получаем прозрачные и хорошо известные соотношения

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \gamma_{ji}}, \quad \mu_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \kappa_{ji}}, \tag{16}$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad \theta = -\frac{q_i T_{,i}}{T^2}, \tag{17}$$

причем $-\dfrac{q_i T_{,i}}{T^2} > 0$.

Таким образом, система уравнений (3) и (4), выражающая законы сохранения количества движения и моментов количества движения, вместе с законом сохранения энергии (11) и уравнением

$$\dot{\rho} + \rho\dot{u}_{i,i} = 0, \tag{18}$$

выражающим закон сохранения массы, а также с определяющими уравнениями (их еще надо записать) и дополнительными уравнениями (10) дают замкнутую систему динамических уравнений несимметричной теории упругости в том виде, как она приведена В. Новацким

[23]. Уравнения (16) разъясняют смысл введенных силовых параметров, а уравнения (17) дают общепринятые выражения для энтропии и функции производства энтропии θ. Условие (17) обеспечивает выполнение второго закона термодинамики.

Уравнения (10) принято называть дополнительными, т.к. они, строго говоря, не являются фундаментальными соотношениями в том смысле, что деформация среды полностью определена, если известны смещения ее точек и независимые повороты, т.е. известны u_i и ω_i (или υ_i и $\dot{\omega}_i$). Соотношения (10) математически оправданы тем, что определяющие соотношения, задающие деформационные свойства среды, принято формулировать в терминах связей напряжений с деформациями, последние и вводятся соотношениями (10).

Представляя эти соотношения в виде

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{ji} &= \dot{u}_{i,j} - э_{kji}\,\dot{\omega}_k = \\ &= \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) + \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{j,i}) - э_{kji}\,\dot{\omega}_k = \\ &= \dot{\varepsilon}_{ij} - (\dot{\omega}_k - \dot{\Omega}_k)\,э_{kji}, \\ \dot{\kappa}_{ji} &= \dot{\omega}_{i,j},\end{aligned} \tag{19}$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ji} = \frac{1}{2}(\upsilon_{i,j} + \upsilon_{j,i})$; $\Omega_k\, э_{kji} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$ или $\Omega_k = -\frac{1}{2}u_{\alpha,\beta}\, э_{\alpha\beta k}$, т.е. вектор $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}$ и является вектором зависимых поворотов, т.е. поворотов, полностью определенных полем векторов смещений, в то время как независимые повороты ω_i порождены наличием внутренних нескомпенсированных моментов, т.е. внутренним движением на более низких масштабных уровнях (например, зернограничными потоками дефектов в СМК-материалах или при явлениях сверхпластичности). Таким образом, становится понятным, что уравнения несимметричной упругости фактически должны описывать неупругие эффекты.

Это обстоятельство породило множество попыток применения подхода Коссера к созданию моделей несимметричной теории пластичности. Однако применение этих уравнений к макроскопическим объектам не могло привести к успеху, т.к. макроскопические эксперименты не подтверждали следующих из подобных теорий выводов. Так макроскопический образец с внутренними нескомпенсированными моментами, подвергнутый, например, растяжению, должен был бы поворачиваться, что никогда не наблюдается, за исключением особых случаев упорядочения внутренней структуры нагружаемого образца. Другим дефектом подобных макроскопических теорий несимметричной пластичности является полная неопределенность так называемых моментных модулей как макроскопических параметров и невозможность их экспериментального определения подобно модулям упругости симметричной среды.

Определяющие уравнения несимметричной упругости представим в виде [23, 24]:

$$\begin{aligned}\sigma_{ji} &= (\mu + \alpha)\gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} + (\lambda\gamma_{kk} - \nu\theta)\delta_{ij}, \\ \mu_{ji} &= (\gamma + \varepsilon)\kappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ij} + \beta\kappa_{kk}\delta_{ij}, \\ S &= \nu\gamma_{kk} + m\theta,\ \theta = T - T_0.\end{aligned} \tag{20}$$

Или, выделив симметричные и антисимметричные части тензора деформаций

$$\begin{aligned}\sigma_{ji} &= (\lambda\gamma_{kk} - \nu\theta)\delta_{ij} + 2\mu\gamma_{(ij)} + 2\alpha\gamma_{<ij>}, \\ \mu_{ji} &= \beta\kappa_{kk}\delta_{ij} + 2\gamma\kappa_{(ij)} + 2\varepsilon\kappa_{<ij>}.\end{aligned} \tag{21}$$

В этих уравнениях λ и μ — постоянные Ламе; α, γ, β, ε — моментные «модули»; $\nu = a_t(3\lambda + 2\mu)$, a_t — коэффициент линейного теплового расширения. Так как температура может вызвать только деформации, но не повороты, вторые уравнения в (20) и (21) не содержат соответствующего члена, аналогичного νθ в первых уравнениях.

2.2. Уравнения теории несимметричной пластичности

Следуя идее иерархичности структурной организации изучаемой среды, как основной идее физической мезомеханики, будем считать, что на макроскопическом уровне усредненного описания внутренние моменты всегда скомпенсированы, и любая теория упругопластической среды (за исключением особых случаев, которые здесь не обсуждаются) всегда приводит к симметричным тензорам напряжения и деформации, как это было обсуждено в первом разделе. На мезоскопическом уровне все значимые для изучения элементы структуры выводятся явно. Появление внутренних нескомпенсированных моментов обеспечивается наличием внутреннего движения на микроуровне, в том числе неоднородностью распределения деформационных дефектов и коллективными процессами. Все это внутреннее локально упорядоченное движение усредненно учитывается развитием независимых поворотов, движущими силами для которых являются моментные напряжения и несимметричные составляющие силовых напряжений. Природа этих напряжений сугубо упруга. Приложенные к телу нагрузки любого вида вызывают как упругий отклик, который всегда приводит к симметричному напряженно-деформированному состоянию в рамках развиваемого подхода, так и порождают существенно неоднородное внутреннее движение дефектной структуры материала на микроуровне, зарождение и перераспределение дефектов. На этом этапе, который условно можно обозначить наличием пороговых величин (пределов текучести), и начинают развиваться необратимые неупругие процессы. Отражение этого сложного внутреннего движения в терминах напряжений и деформаций уже невозможно описать в рамках классических симметричных теорий. Одним из возможных способов феномено-

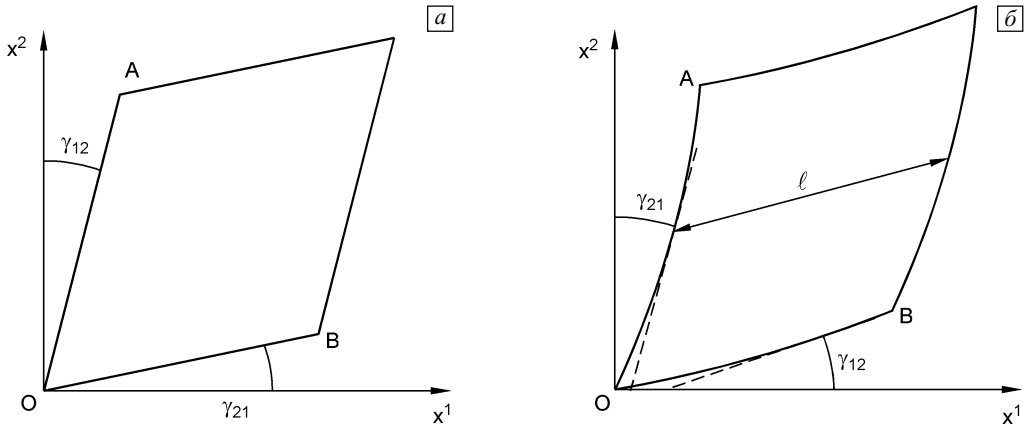


Рис. 1. Симметричная деформация ($\gamma_{12} = \gamma_{21}$, касательные к прямым *OA* и *OB* элементарной бесконечно малой частицы остаются постоянными) (*а*); несимметричная деформация ($\gamma_{12} \neq \gamma_{21}$, касательные вдоль кривых *OA* и *OB* непрерывно меняются, поворачиваются, порождая изгибы-кручения для «конечной» на микроуровне частицы среды) (*б*)

логического описания и является введение независимых поворотов и моментов напряжения. Подобная несимметричная теория по существу является градиентной, и неявно подразумевает наличие внутреннего характерного масштаба ℓ на микроскопическом масштабном уровне. На рис. 1, *а* представлена схема симметричной сдвиговой деформации (для простоты рассмотрен плоский случай), а на рис. 1, *б* приведен случай несимметричной деформации сдвига.

На рассматриваемом мезоскопическом уровне частицы являются бесконечно малыми точками деформируемого континуума, как и в случае симметричной упругости. Таким образом, также исследуется деформируемый континуум, но он уже обладает дополнительными свойствами: появляются независимые повороты и, как следствие, изгибы-кручения в деформируемой среде. Возможность не вводить явно характерные масштабы на мезоуровне (при желании это всегда легко сделать) является чрезвычайно важным обстоятельством. Нет нужды искусственно навязывать нагружаемой среде, какой блок или структурный элемент должен проявить себя и повернуться. Повороты автоматически должны возникать там, где есть градиент свойств материала, отражающий неоднородность внутреннего движения. Это может быть как начальная структурная неоднородность, так и приобретенная в ходе развития деформационного процесса.

Особо отметим, что речь идет о поворотах, порожденных внутренним движением на микроуровне, и усредненно учтенных на мезоскопическом уровне в несимметричной модели деформируемой среды. Обычная симметричная теория упругопластического тела также приведет к поворотам структурных элементов при наличии градиента свойств (рис. 2). Например, обтекание пластической средой жесткого шара или в плоском случае круга (рис. 2, *а*) не приведет к их поворотам, так как силы относительно его центра масс окажутся уравновешенными (если обтекающая среда и/или граница раздела «пластичная среда – жесткое тело» не обладают особыми свойствами). В случае обтекания средой жесткого тела сложной конфигурации (рис. 2, *б*) жесткое тело будет поворачиваться до тех пор, пока центры масс и

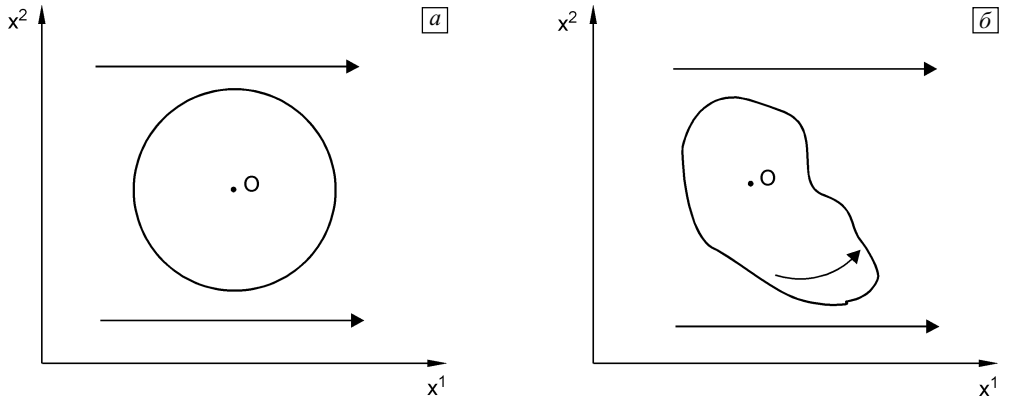


Рис. 2. Обтекание жесткого включения пластической средой. Для однородного шара (круга) центр масс *O* и центр давлений всегда совпадают (*а*); для тела сложной геометрии или неоднородных тел центры масс и давлений могут не совпадать (*б*)

центры давлений не окажутся на одной линии при заданном поле скоростей. Изменение в поле скоростей вызовет ответную реакцию поворотов. Этот тривиальный случай автоматически учитывается системой континуальной механики.

Как уже отмечалось, природа как силовых, так и моментных напряжений сугубо упругая. Как только появляются неупругие реакции, силовые и моментные напряжения релаксируют. Поэтому модель упругопластической среды должна быть релаксационной по существу, а следовательно, и динамической. Поэтому релаксационные определяющие уравнения запишем в скоростях.

Постулируем, что полные деформации и изгибы-кручения есть суммы упругих и пластических составляющих

$$\begin{aligned} \dot\gamma^{\mathrm{T}}_{ji} &= \dot\gamma^{\mathrm{e}}_{ji} + \dot\gamma^{\mathrm{p}}_{ji}, \\ \dot\varkappa^{\mathrm{T}}_{ji} &= \dot\varkappa^{\mathrm{e}}_{ji} + \dot\varkappa^{\mathrm{p}}_{ji}. \end{aligned} \tag{22}$$

Теперь определяющие уравнения (20) примут вид

$$\begin{aligned} \dot\sigma_{ji} &= \lambda(\dot\gamma^{\mathrm{T}}_{kk} - \dot\gamma^{\mathrm{p}}_{kk})\delta_{ij} + (\mu+\alpha)(\dot\gamma^{\mathrm{T}}_{ji} - \dot\gamma^{\mathrm{p}}_{ji}) + \\ &\quad + (\mu-\alpha)(\dot\gamma^{\mathrm{T}}_{ij} - \dot\gamma^{\mathrm{p}}_{ij}), \\ \dot\mu_{ji} &= \beta(\dot\varkappa^{\mathrm{T}}_{kk} - \dot\varkappa^{\mathrm{p}}_{kk})\delta_{ij} (\gamma+\varepsilon)(\dot\varkappa^{\mathrm{T}}_{ji} - \dot\varkappa^{\mathrm{p}}_{ji}) + \\ &\quad + (\gamma-\varepsilon)(\dot\varkappa^{\mathrm{T}}_{ij} - \dot\varkappa^{\mathrm{p}}_{ij}). \end{aligned} \tag{23}$$

В уравнениях (23) приращения упругих силовых и моментных напряжений всегда пропорциональны приращениям полных деформаций и изгибов-кручений, а релаксируют напряжения по мере развития пластических составляющих приращений деформаций и изгибов-кручений [25]. На упругой стадии деформирования моментные «модули» в рамках развиваемой модели равны нулю $(\alpha = \beta = \gamma = \varepsilon = 0)$ и теория сводится к симметричным уравнениям гуковской упругой среды. По мере развития неупругих деформаций эти моментные «модули» перестают быть равными нулю и увеличиваются по мере нарастания неоднородности внутреннего движения на микроуровне. В простейшем случае можно принять их равными нулю на упругой стадии и некоторым константам, характеризующим степень отклонения среды от симметричной модели, на стадии неупругой деформации. Таким образом, как уже отмечалось нами [26], моментные «модули» не являются материальными макроскопическими константами материала, а характеризуют процессы локального развития неупругих деформаций на мезоскопическом масштабном уровне, и говорить о моментных модулях имеет смысл только применительно к мезоуровню. В этом случае их целесообразно представлять в виде неких функций (линейных, как самый простой вариант) кумулятивной пластической деформации $\varepsilon^{\mathrm{p}}_k$, накопленной в данном локальном объеме (точке континуума на мезоуровне) нагружаемой среды

$$\varepsilon^{\mathrm{p}}_k = \int_0^{\varepsilon} \left|\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}\right| = \int_0^{t} \left|\dot\varepsilon^{\mathrm{p}}\right| \mathrm{d}t. \tag{24}$$

Здесь под $\dot\varepsilon^{\mathrm{p}}$ понимается интенсивность пластической деформации.

Особое место занимает проблема ограничения силовых и моментных напряжений. Не исследуя подробно этот сложный и не ясный до конца вопрос, кратко отметим две простейшие возможности.

1. Ввести в рассмотрение обобщенный или комбинированный критерий пластичности, объединяющий в одном выражении силовые и моментные напряжения, что требует либо нормировки и приведения напряжений к безразмерному виду, либо явного введения в рассмотрение параметра длины $[\mu_{ji}] = [\sigma_{ji}][L]$.

2. Независимо ограничивать силовые напряжения, используя, например, критерий пластичности по Мизесу, в котором необходимо усреднить несимметричные напряжения сдвига $s_{ij}s_{ij}$ при $i \neq j$, например, следующим образом:

$$\left[\frac{3}{2}\left(s^2_{xx} + s^2_{yy} + s^2_{zz} + \frac{1}{4}(s_{xy}+s_{yx})^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{4}(s_{xz}+s_{zx})^2 + \frac{1}{4}(s_{yz}+s_{zy})^2 \right)\right]^{1/2} \le K_1. \tag{25}$$

Здесь s_{ij} — компоненты тензора девиатора силовых напряжений. Если выполнено условие (25), то дополнительно следует ограничить и моментные напряжения, записав для них выражение, аналогичное (25),

$$\left[\frac{3}{2}\left(\mu^2_{xx} + \mu^2_{yy} + \mu^2_{zz} + \frac{1}{4}(\mu_{xy}+\mu_{yx})^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{4}(\mu_{xz}+\mu_{zx})^2 + \frac{1}{4}(\mu_{yz}+\mu_{zy})^2 \right)\right]^{1/2} \le K_2. \tag{26}$$

Так как момент $\mathbf{M} = \mathbf{F}\ell$, а поворот элемента среды вызывает деформации сдвига по его границам, константа K_2 в (26) может быть выбрана соответствующей величине $\tau^*\ell$, где τ^* — предел текучести материала при чистом сдвиге.

Высказанные соображения во многом остаются пока умозрительными. Необходимы серьезные усилия по выяснению способов совместного ограничения силовых и моментных напряжений и физической трактовки принятых моделей. Проведенные численные эксперименты и сравнение их с экспериментами позволит прояснить поставленные вопросы. Пока в этом направлении делаются первые шаги, вопросов больше, чем ответов. Как быть в случае, когда условие (25) выполнено, а согласно условию (26) материал находится еще в «упругом» состоянии, или наоборот? Необходимо организовать механизм взаимосогласованной корректировки силовых и моментных напряжений. Фактически весь механизм пластичности запускается условием (25), когда еще $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, так как на упругой стадии теория симмет-

рична. Локальная потеря сдвиговой неустойчивости приводит к нарастанию поворотов, пока не будет выполнено и условие (26). Такая трактовка представляется вполне корректной.

Не менее сложным остается и решение вопроса о разгрузке. Принимая постулат о том, что разгрузка упруга, силовые и моментные напряжения вычисляются по упругим формулам уже несимметричной упругости с функциями моментных «модулей», достигнутых в каждой локальной области в зависимости от величины накопленной неупругой деформации.

2.3. Уравнения «плоской» деформации

Запишем полученные уравнения несимметричной упругопластической среды для случая плоского двумерного течения, для которого выполнены следующие условия:

$$u_1 \neq 0, \quad u_2 \neq 0, \ u_3 = 0, \ \ \Omega_3 \neq 0,$$
$$\omega_3 \neq 0, \ \ \Omega_1 = \Omega_2 = \omega_1 = \omega_2 = 0.$$

Полная система уравнений примет следующий вид: закон сохранения массы

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \mathrm{div}\, v = 0, \tag{27}$$

уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x^2} = \rho \ddot{u}_1,$$
$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x^2} = \rho \ddot{u}_2, \tag{28}$$
$$\sigma_{12} - \sigma_{21} + \frac{\partial \mu_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x^2} = J\ddot{\omega}_3,$$

закон сохранения энергии

$$\dot{E} = \sigma_{ji}\dot{\gamma}_{ji} + \mu_{ji}\dot{\kappa}_{ji} - q_{i,i}, \tag{29}$$

уравнения теории деформаций (дополнительные уравнения)

$$\dot{\gamma}_{11} = \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x^1} = \frac{\partial v_1}{\partial x^1} \equiv \dot{\varepsilon}_{11},$$
$$\dot{\gamma}_{22} = \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x^2} = \frac{\partial v_2}{\partial x^2} \equiv \dot{\varepsilon}_{22},$$
$$\dot{\gamma}_{12} = \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x^1} - \dot{\omega}_3 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial v_2}{\partial x^1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^2}\right) - \dot{\omega}_3 =$$
$$= \dot{\varepsilon}_{12} - (\dot{\omega}_3 - \dot{\Omega}_3), \tag{30}$$
$$\dot{\gamma}_{21} = \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x^2} + \dot{\omega}_3 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial v_2}{\partial x^1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^2}\right) + \dot{\omega}_3 =$$
$$= \dot{\varepsilon}_{21} - (\dot{\Omega}_3 - \dot{\omega}_3).$$

Здесь $\dot{\Omega}_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^2}\right)$ и $\dot{\varepsilon}_{12} = \dot{\varepsilon}_{21}$, $\kappa_{13} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x^1}$, $\kappa_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x^2}$.

Определяющие уравнения

$$\dot{\sigma}_{11} = \lambda \dot{\gamma}^{\mathrm{e}}_{kk} + 2\mu \dot{\gamma}^{\mathrm{e}}_{11},$$
$$\dot{\sigma}_{22} = \lambda \dot{\gamma}^{\mathrm{e}}_{kk} + 2\mu \dot{\gamma}^{\mathrm{e}}_{22},$$
$$\dot{\sigma}_{33} = \lambda \dot{\gamma}^{\mathrm{e}}_{kk},$$
$$\dot{\sigma}_{12} = (\mu + \alpha)\dot{\gamma}^{\mathrm{e}}_{12} + (\mu - \alpha)\dot{\gamma}^{\mathrm{e}}_{21} =$$
$$= (\mu + \alpha)\left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1} - \dot{\omega}_3\right) + (\mu - \alpha)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x^2} - \dot{\omega}_3\right) =$$
$$= 2\mu \dot{\varepsilon}^{\mathrm{e}}_{12} + 2\alpha(\dot{\Omega}_3 - \dot{\omega}_3), \tag{31}$$
$$\dot{\sigma}_{21} = (\mu + \alpha)\dot{\gamma}^{\mathrm{e}}_{21} + (\mu - \alpha)\dot{\gamma}^{\mathrm{e}}_{12} =$$
$$= (\mu + \alpha)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x^2} + \dot{\omega}_3\right) + (\mu - \alpha)\left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1} - \dot{\omega}_3\right) =$$
$$= 2\mu \dot{\varepsilon}^{\mathrm{e}}_{21} - 2\alpha(\dot{\Omega}_3 - \dot{\omega}_3),$$
$$\overset{\oplus}{\dot{\mu}}_{13} = (\gamma + \varepsilon)\dot{\kappa}^{\mathrm{e}}_{13}, \ \ \overset{\oplus}{\dot{\mu}}_{23} = (\gamma + \varepsilon)\dot{\kappa}^{\mathrm{e}}_{23},$$
$$\overset{\otimes}{\dot{\mu}}_{31} = (\gamma - \varepsilon)\dot{\kappa}^{\mathrm{e}}_{13}, \ \ \overset{\otimes}{\dot{\mu}}_{32} = (\gamma - \varepsilon)\dot{\kappa}^{\mathrm{e}}_{23}.$$

Причем только моментные напряжения μ_{13} и μ_{23} входят в уравнения движения (помечены значком $\oplus$), напряжения μ_{31} и μ_{32} в уравнения движения не входят и являются геометрически необходимыми, как и напряжения σ_{33}, для того чтобы течение среды оставалось двухмерным. Определяющие уравнения (31) записаны в релаксационной форме [25]. Везде полагается, что

$$\dot{\gamma}^{\mathrm{e}}_{ji} = \dot{\gamma}^{\mathrm{T}}_{ji} - \dot{\gamma}^{\mathrm{p}}_{ji}, \ \ \dot{\kappa}^{\mathrm{e}}_{ji} = \dot{\kappa}^{\mathrm{T}}_{ji} - \dot{\kappa}^{\mathrm{p}}_{ji}. \tag{32}$$

Из представленной записи определяющих уравнений ясно видно, что несимметричная часть сдвиговых напряжений σ_{12} и σ_{21} обусловлена поворотами элементов структуры (частиц среды), что и послужило основанием связать несимметричную часть силовых напряжений и моментные напряжения с неупругими дефектами.

Условие текучести

$$(3J_2)^{1/2} = \sigma_0,$$

где

$$J_2 = \left(\frac{1}{2}(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2) + a_1 s_{12}^2 + 2a_2 s_{12} s_{21} + \right.$$
$$\left. + a_1 s_{21}^2 + a_3\left[\left(\frac{\mu_{13}}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{23}}{\ell}\right)^2\right]\right). \tag{33}$$

При упругой разгрузке приращения поворотов равны нулю и разгрузится только симметричная часть напряжений (см. уравнение (31)). Накопленные к этому времени повороты окажутся замороженными, как и несимметричная часть силовых напряжений. Таким образом, в среде формируется остаточное напряженное состояние.

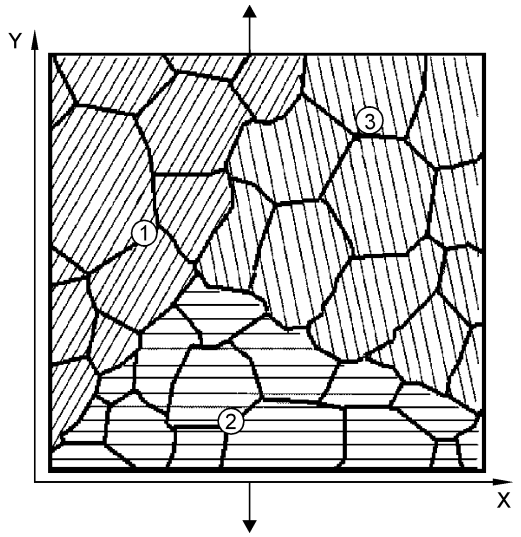


Рис. 3. Карта мезообъемов поликристалла с конгломератами зерен [29]

3. О моделировании механического поведения субмикрокристаллических материалов

Хорошо известно, что в субмикрокристаллических материалах сильно развиты разориентировки элементов мезоструктуры, а их неупругая деформация существенным образом связана с зернограничными потоками дефектов [27, 28]. Естественно возникает мысль об эффективности применения несимметричной теории с развитым внутренним движением на микроуровне к этим материалам.

На рис. 3 показана исходная карта образца с конгломератами зерен разных размеров. Склонность к развитию независимых поворотов задана близкой для зерен каждого из трех конгломератов и заметно отличается при переходе от одного конгломерата к другому. Расчет формирования локализованной деформации приведен на рис. 4, направление вращения сформировавшихся деформационных блоков показано стрелками, контуры блоков выделены изолиниями. Все расчеты этого раздела выполнены по упрощенной модели, приведенной в работе [29]. Часть блоков вращается по часовой стрелке, часть — в противоположную сторону. Границы поворачивающихся структурных элементов определяются полосами локализованной деформации, которые строго не привязаны ни к границам конгломератов, ни к границам зерен. Часть поворотов формируют зоны растяжения, и разрушение пойдет по механизму отрыва — случай, когда повороты направлены в разные стороны (по и против часовой стрелки).

Интересен случай, когда соседние элементы поворачиваются в одну сторону, но с разной скоростью и на разные углы. Такие зоны можно найти на рис. 4, *б*, *в*. В этом случае будет наблюдаться проскальзывание блоков, а разрушение пойдет по механизму сдвига. Если полосу локализации в левом верхнем углу рис. 4, *в* рассматривать как зародыш будущей трещины, то в ее верхней части будет преобладать отрыв, а в нижней — сдвиг. Такое комбинированное разрушение наблюдается до-

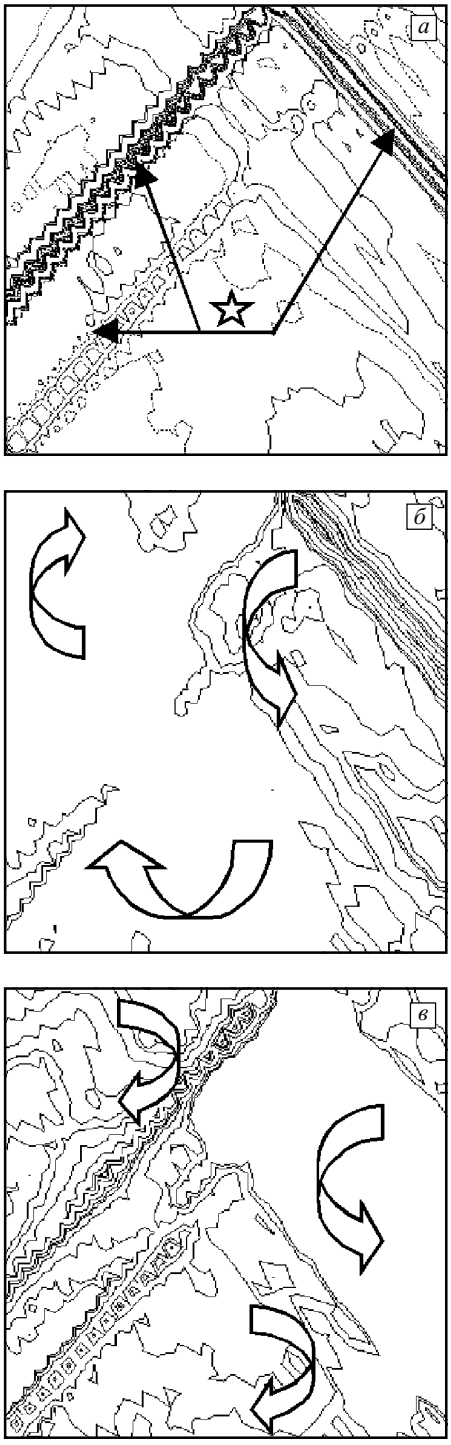


Рис. 4. Изолинии интенсивности пластической деформации (*а*), отрицательных (по часовой стрелке) (*б*) и положительных (против часовой стрелки) (*в*) поворотов мезообъемов, приведенных на рис. 3. Звездочкой отмечены полосы локализованной деформации. Стрелками показаны направления вращения сформировавшихся деформационных блоков [29]

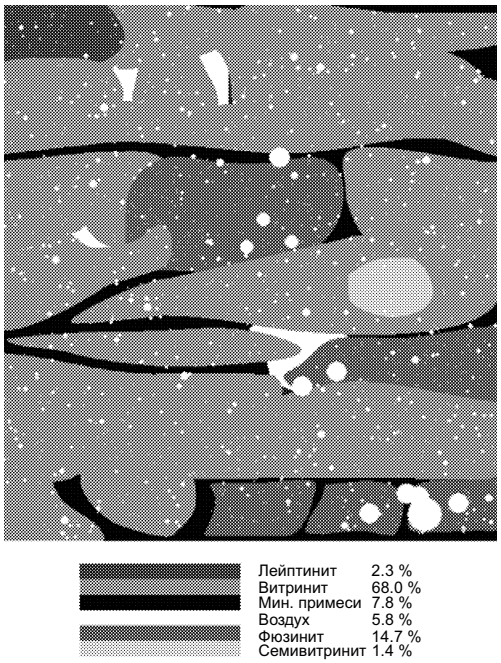


Рис. 5. Карта мезообъема угля с пористостью [30]

вольно часто. Мы надеемся, что предлагаемая методика моделирования окажется полезной и эффективной для предсказания деформационных свойств субмикрокристаллических материалов.

4. Мезомеханика угля как сложного природного композита

В монографии [30] представлены первые результаты по моделированию механического поведения угля на мезоскопическом масштабном уровне. Уже первые расчеты показали чрезвычайную эффективность развиваемого подхода к решению таких проблем, как специфика разрушения углей разного состава, пористости, водонасыщенности и формирование пылевых частиц разных размеров. Другая важная проблема — гидроразрыв мезообъемов угля при нагнетании в поровое пространство пласта воды. На рис. 5 показана карта мезообъема угля. Накопление повреждений на микроскопическом уровне [30] обеспечивает неупругие деформации на мезоскопическом уровне за счет развития дилатансии. Определяющие уравнения (вариант уравнений Драгона–Мруза) были ранее изучены О.И. Черепановым [31] и не только описывают дилатансию неупругой среды, но и учитывают внутреннее трение.

Осредненные кривые течения показаны на рис. 6. Они построены расчетным путем — нагружением представительного мезообъема угля заданного состава и пористости по известным зависимостям для компонент (рис. 7). Различные схемы нагружения мезообъема угля позволили рассчитать его разрушение (темные области на рис. 8) и оценить выход пылевых частиц и их распределение по размерам (рис. 9), что находится в хорошем согласии с экспериментами. В этих и последующих расчетах моментность среды не учитывалась

Финальная картина гидроразрыва мезообъема угля (пористость равна 7 %, заполненность влагой составляет 6.57 %) показана на рис. 10, закон нагнетания воды в поровое пространство и заполняемость сухих пор показаны на рис. 11. Подобные вопросы позволяют найти ответы на вопросы для решения очень важной проблемы — совершенствования технологии нагнетания воды в поровое пространство с целью предотвращения опасных выбросов за счет блокировки выделения остаточного газа из системы более мелких пор.

5. Мезомеханика геодинамических процессов

Эффективность подходов физической мезомеханики к исследованию процессов геодинамики подробно обсудил С.В. Гольдин в [32]. Именно в геоматериалах очень ярко выражена блочная структура, начиная от гигантских плит размерами в несколько тысяч километров и

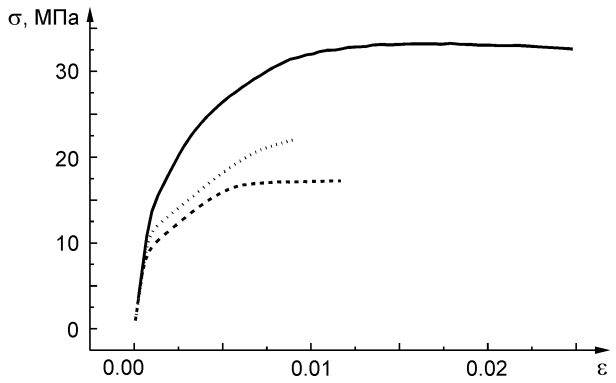


Рис. 6. Диаграммы нагружения образца угля при сжатии вдоль слоев (сплошная кривая), сдвиге вдоль слоев (штриховая кривая), диаграмма сжатия «представительного» мезообъема (пунктирная кривая) [30]

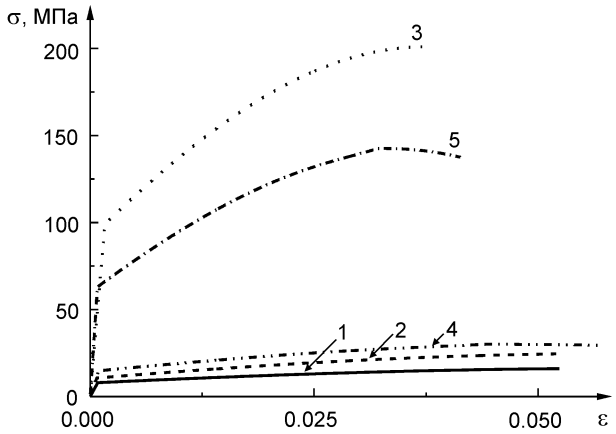
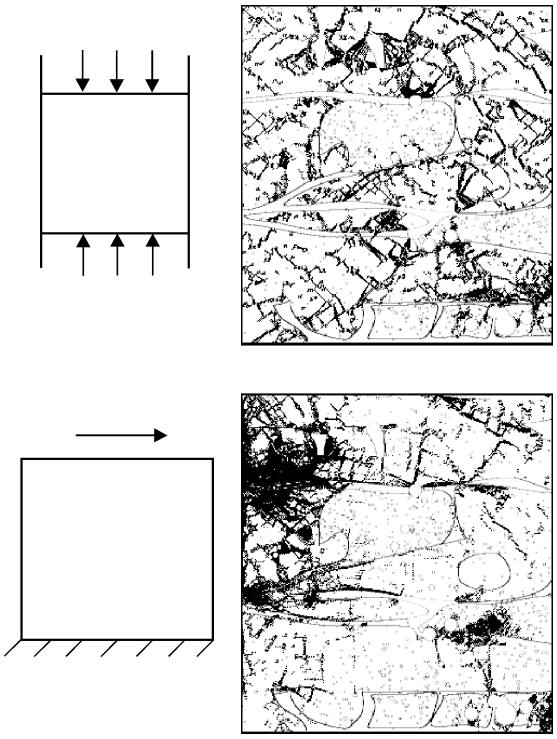


Рис. 7. Диаграммы нагружения структурных компонентов угля: *1* — лейптинит; *2* — витринит; *3* — минеральные примеси; *4* — семивитринит; *5* — фюзинит [30]



а *б*

Рис. 8. Разрушение пористого образца при разных видах нагружения: схема нагружения (*а*); области разрушения (выделены темным цветом) на фоне исходной структуры (*б*) [30]

кончая микроскопическими «блоками» перетертого в пыль материала. Эта система постоянно находится в движении. Деформации и перепаковки блоков непрерывно порождают серии землетрясений от «микроскопических», практически неощущаемых, до катастрофических. Оценка напряженно-деформированного состояния такой постоянно эволюционирующей геосреды крайне важна как для понимания деформационных процессов, развивающихся в земной коре, так и в продвижении по пути к предсказанию землетрясений. Подробная и реалистичная оценка напряженно-деформированного состояния возможна только при учете специфических свойств геологической среды — внутреннего трения и дилатансии. Уравнения, определяющие неупругое поведение геоматериалов, имеют вид

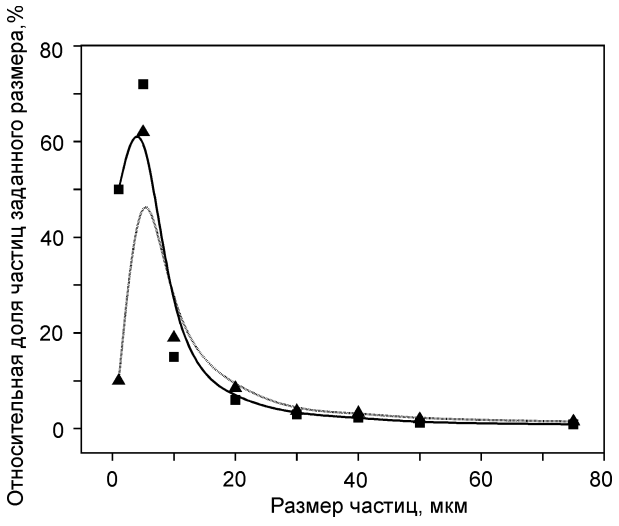


Рис. 9. Распределение пылевых частиц по размерам при разрушении в условиях сжатия поперек (▲) и вдоль (■) слоев

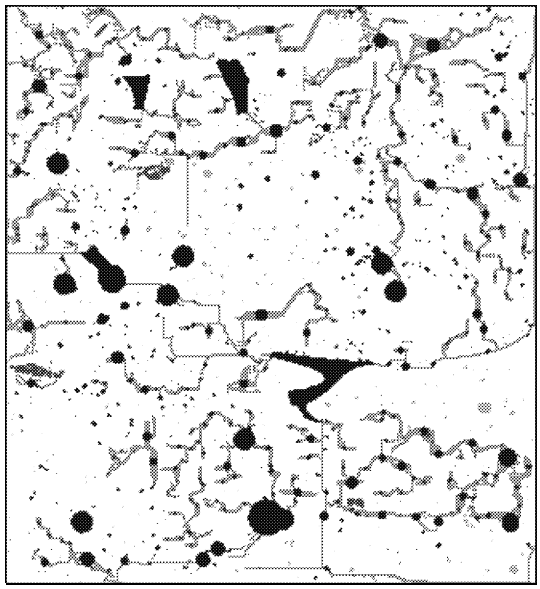


Рис. 10. Развитие локальных гидроразрывов в образце с пористостью 7 %

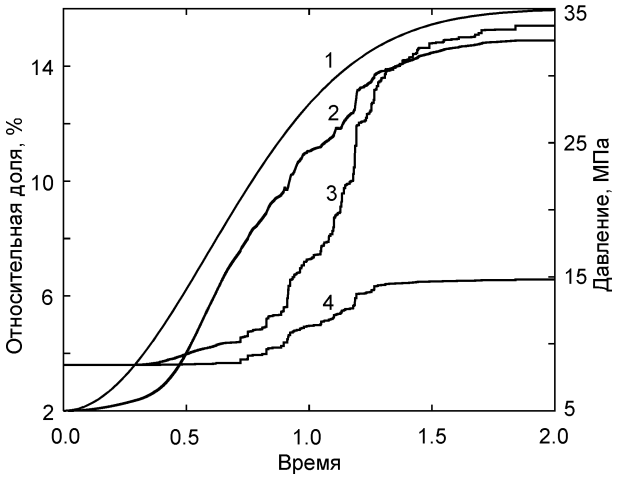


Рис. 11. Разрушение, заполняемость порового пространства, закон нарастания нагрузки и среднее давление в мезообъеме угля в зависимости от времени: *1* — функция нарастания давления нагнетаемой в поры воды, МПа; *2* — среднее давление в мезообъеме, МПа; *3* — доля разрушенного материала, %; *4* — заполнение водой порового пространства, %

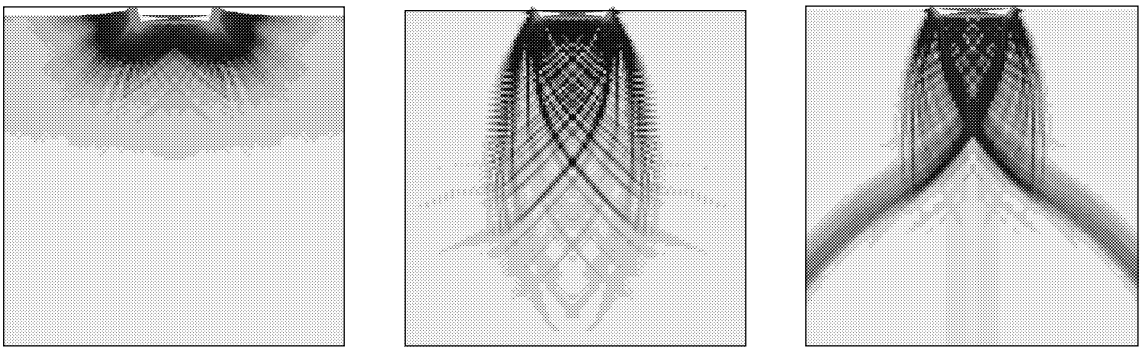


Рис. 12. Картины локализации повреждений в геологической среде для разных значений параметров модели и условий на боковых поверхностях (результаты предоставлены Ю.П. Стефановым, публикуются впервые)

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}} = \dot{\lambda}\left(\sigma_{ij} + 2\Lambda\alpha H\delta_{ij} - (1+2\Lambda\alpha)\frac{J_1}{3}\delta_{ij} \right) \quad (34)$$

и показывают переход от классического закона ассоциированного течения к среде с дилатансией и внутренним трением в форме, предложенной В.Н. Николаевским [33, 34]. Свойства подобной среды подробно изучены Ю.П. Стефановым в [35].

Нагружаемая нелинейная среда, описываемая уравнением (34), в которой параметры Λ и α и предел текучести $Y = \alpha H$ должны быть, в общем случае, функциями неупругой деформации и температуры, оказывается чрезвычайно чувствительной к неоднородностям напряженно-деформированного состояния и приводит к локализации неупругой деформации (повреждениям) уже на ранних стадиях деформирования [34, 35]. На рис. 12 показаны картины локализации повреждений в такой среде для разных значений параметров Λ и α.

Таким образом, в исходно бесструктурном материале формируются полосы локализованной неупругой деформации, в которых материал поврежден тем больше, чем выше степень локализации. Следовательно, склонность к локализованному развитию деформационного процесса является внутренним свойством подобной нелинейной среды, в которой часть полос со временем исчезает, а часть продолжает развиваться. Сопряженные полосы выражены менее ярко [35], что полностью соответствует экспериментам, в том числе и для металлических материалов.

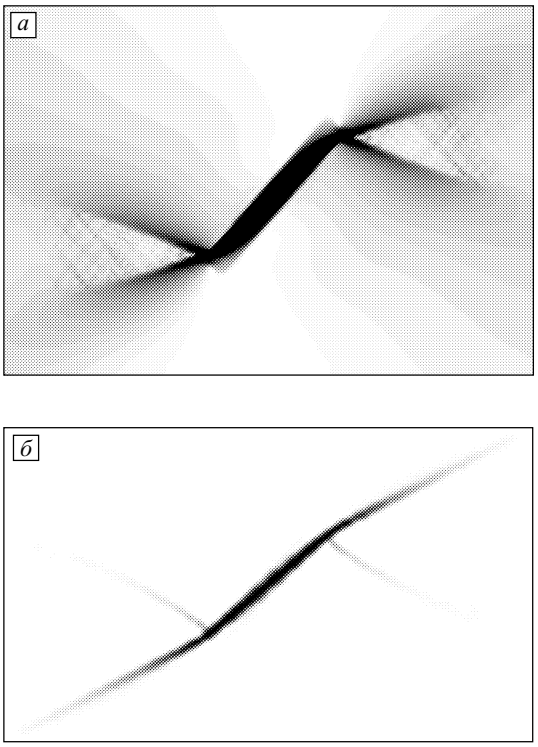


Рис. 13. Локализация повреждений при разрушении включений вытянутой формы в условиях чистого сдвига: $\Lambda/3 = \alpha = 0.28$ (*а*); 0.21 (*б*) [35]

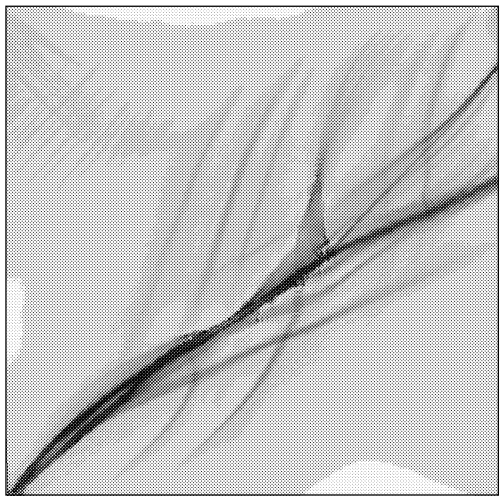


Рис. 14. Локализация деформации при нагружении области, содержащей нарушение в форме оз. Байкал (результаты предоставлены Ю.П. Стефановым, публикуются впервые)

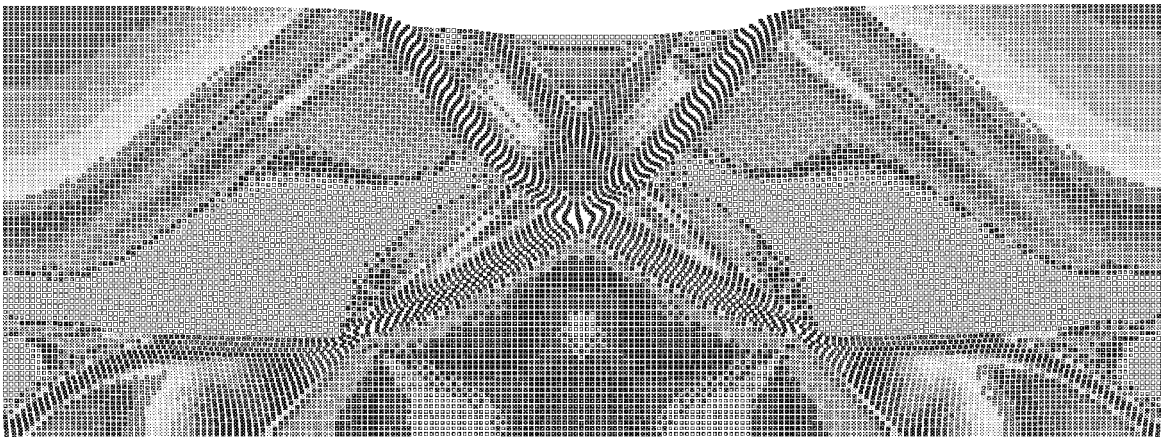


Рис. 15. Формирование симметричного грабена при пассивном рифтинге

Один из вопросов изучения геодинамических процессов — это формирование рифтовых зон (зон локальных растяжений земной коры). Схематические расчеты локализации деформации и разрушения (рис. 13) показывают, какое огромное значение на процессы локализации и ориентацию будущих разломов оказывает выбранная реология среды. Нетривиальной является и задача задания граничных условий, определяющих вид нагружения выбранного участка рифтовой зоны. Например, для Байкальской рифтовой зоны, строго говоря, необходимо решать более глобальную задачу плитной тектоники Азиатской части континента, как минимум. Имитационные расчеты для региона Байкальской рифтовой зоны представлены на рис. 14. Некоторое, хотя и отдаленное, сходство с системой разломов Байкальской рифтовой зоны все же просматривается. Решение обсуждаемой проблемы как прикладной задачи — дело будущего.

Прежде всего, необходимо выяснить условия формирования грабенов в зонах растяжения земной коры. Тестовые расчеты показали, что возможно получить все типы грабенов, варьируя как структурную неоднородность геосреды, так и ее физико-механические свойства (рис. 15, 16). Причем задача восстановления механизмов и истории зарождения и эволюции рифта на основе современных данных является неоднозначной. Для выбора наиболее реалистичного сценария эволюции конкретного рифта необходимо привлекать дополнительные независимые геофизические и геологические данные.

В любом случае геофизическая интерпретация результатов — отдельная и очень сложная задача.

Благодарности

В заключение, автор выражает благодарность И.Ю. Смолину и Ю.П. Стефанову за ценные дискуссии и предоставленные результаты расчетов.

Часть работы была выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-05-65346-а), а также проектов РАН № 13.12 и № 6.5.2.

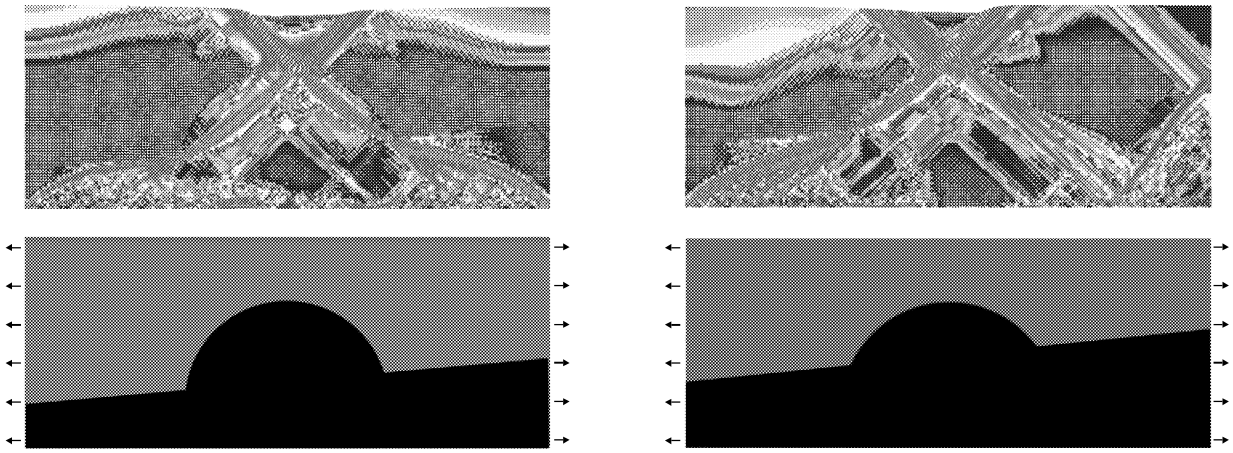


Рис. 16. Влияние структуры на образование грабенов при пассивном рифтинге

Литература

1. *Панин В.Е., Лихачев В.А., Гриняев Ю.В.* Структурные уровни деформации твердых тел. – Новосибирск: Наука, 1985. – 229 с.
2. *Панин В.Е., Гриняев Ю.В., Данилов В.И. и др.* Структурные уровни пластической деформации и разрушения. – Новосибирск: Наука, 1990. – 255 с.
3. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – Т. 1. – М.: Наука, 1983. – 528 с.
4. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – Т. 2. – М.: Наука, 1984. – 560 с.
5. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. – М.: Мир, 1979. – 304 с.
6. *Пэжина П., Савчук А.* Проблемы термопластичности // Проблемы теории пластичности и ползучести / Под ред. Г.С. Шапиро., Серия «Механика. Новое в зарубежной науке». – М.: Мир, 1979. – С. 94–202.
7. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
8. *Онищенко Д.А.* Вероятностное моделирование многомасштабного разрушения // Изв. АН. МТТ. – 1999. – № 5. – С. 27–48.
9. *Журков С.Н., Куксенко В.С., Петров В.А.* Можно ли прогнозировать разрушение? // Будущее науки. – М.: Знание, 1983. – С. 99–107.
10. *Физическая* мезомеханика и компьютерное конструирование материалов: В 2 т. / Под ред. В.Е. Панина. – Новосибирск: Наука, 1995. – Т. 1. – 298 с., Т. 2. – 320 с.
11. *Панин В.Е.* Основы физической мезомеханики // Физ. мезомех. – 1998. – Т. 1. – № 1. – С. 5–22.
12. *Панин В.Е.* Синергетические принципы физической мезомеханики // Физ. мезомех. – 2000. – Т. 3. – № 6. – С. 5–36.
13. *Панин В.Е., Фомин В.М., Титов В.М.* Физические принципы мезомеханики поверхностных слоев и внутренних границ раздела в деформируемом твердом теле // Физ. мезомех. – 2003. – Т. 6. – № 2. – С. 5–14.
14. *Макаров П.В.* Подход физической мезомеханики к моделированию процессов деформации и разрушения // Физ. мезомех. – 1998. – Т. 1. – № 1. – С. 61–81.
15. *Макаров П.В.* Моделирование процессов деформации и разрушения на мезоуровне // Известия АН. Механика твердого тела. – 1999. – № 5. – С. 109–131.
16. *Балохонов Р.Р.* Моделирование кривых течения металлов и сплавов с учетом влияния энергии дефекта упаковки // Физ. мезомех. – 1998. – Т. 1. – № 2. – С. 73–80.
17. *Гриняев Ю.В., Чертова Н.В.* Механические свойства материалов и предмет описания калибровочной теории // ЖТФ. – 1998. – Т. 68. – № 7. – С. 70–74.
18. *Гриняев Ю.В., Чертова Н.В.* Физическое содержание калибровочной модели, описывающей среды со структурой и дефектами // ПМТФ. – 1999. – № 6. – С. 165–170.
19. *Cosserat E., Cosserat F.* Theorie des Corps Deformables. – Paris: Hermann, 1909.
20. *Truesdell C.A., Toupin R.A.* The Classical Field Theories // Handbuch der Physik. – Berlin: Springer, 1960. – Band 3, Teil 1.
21. *Toupin R.A.* Elastic Materials with Couple Stresses // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1962. – No. 11.
22. *Voigt W.* Theoretische Studien uber die Elasizitatsverhatnisse der Kristalle // Abh. Ges. Wiss. Gottingen. – 1887. – 34.
23. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
24. *Кувшинский Е.В., Аэро Э.Л.* Континуальная теория асимметрической упругости. Учет «внутреннего» вращения // ФТТ. – 1963. – Т. 5. – Вып. 9. – С. 2591–2598.
25. *Макаров П.В.* Микродинамическая теория пластичности и разрушения структурно-неоднородных сред // Изв. вузов. Физика. – 1992. – № 4. – С. 42–58.
26. *Бакеев Р.А., Макаров П.В., Смолин И.Ю.* Моделирование упругопластической деформации на мезоуровне с позиции моментной теории // Моделирование процессов в синергетических системах. Труды международной конференции «Байкальские чтения – II по моделированию процессов в синергетических системах», Улан-Удэ, 18–23 июля 2002 г. – Улан-Удэ–Томск: Изд-во ТГУ, 2002. – С. 95–97.
27. *Кайбышев О.А., Валиев Р.З.* Границы зерен и свойства металлов. – М.: Металлургия, 1987. – 214 с.
28. *Колобов Ю.Р.* Диффузионно-контролируемые процессы на границах зерен и пластичность металлических поликристаллов. – Новосибирск: Наука, 1998. – 184 с.
29. *Smolin I.Yu., Makarov P.V., Shmick D.V., Savlevich I.V.* A micropolar model of plastic deformation of polycrystals at the mesolevel // Computational Materials Science. – 2000. – V. 19. – No. 1–4. – P. 133–142.
30. *Адаптация* методов мезомеханики к исследованию процессов деформации и разрушения угля / А.А. Трубицын, П.В. Макаров, О.И. Черепанов, С.П. Ворошилов, Н.В. Трубицына, И.Ю. Смолин, В.В. Соболев, Я.С. Ворошилов, В.В. Киселев, С. Грюнинг. – Кемерово: Кузбасс-ЦОТ, 2002. – 116 с.
31. *Черепанов О.И.* Численное моделирование деформации материалов с учетом неустойчивой ветви σ–ε-диаграммы // Физ. мезомех. – 1999. – Т. 2. – № 1–2. – С. 5–16.
32. *Гольдин С.В.* Деструкция литосферы и физическая мезомеханика // Физ. мезомех. – 2002. – Т. 5. – № 5. – С. 5–22.
33. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. – М.: Недра. – 1984. – 367 с.
34. *Гарагаш И.А., Николаевский В.Н.* Неассоциированные законы течения и локализация пластической деформации // Успехи механики. – 1989. – Т. 12. – № 1. – С. 131–183.
35. *Стефанов Ю.П.* Локализация деформации и разрушение в геоматериалах. Численное моделирование // Физ. мезомех. – 2002. – Т. 5. – № 5. – С. 107–118.

Simulation of elastoplastic deformation and fracture of heterogeneous media at the mesolevel

P.V. Makarov

Institute of Strength Physics and Materials Science, SB RAS, Tomsk, 634021, Russia
Tomsk State University, Tomsk, 634050, Russia

The paper presents a brief review of possibilities and prospects for application of concepts, approaches and developed models of physical mesomechanics of materials to urgent applied problems (description of geomaterial deformation and fracture and geodynamics problems) and to simulation of both fracture of a complex natural composite (coal) and mechanical behavior of ultrafine-grained materials.

Without reviewing classical approaches of continuum mechanics in detail, which is a separate serious problem, the author dwells upon some fundamental tenets and models of solid mechanics. This is done solely to determine the role and characteristic features of methods and approaches that were used in the last years in the laboratory of mechanics of heterogeneous media, Institute of Strength Physics and Materials Science, SB RAS, to simulate the development of localized deformation and fracture at the mesoscale level.