

УДК 517.912,517.94

О ДВИЖЕНИИ СЛАБОПЕРЕТОРМОЖЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

© 2012 г. Ю. В. Брежнев¹, С. В. Сазонов²

E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

Анализируется движение нелинейных слабопереторможенных осцилляторов. Слабая переторможенность определена как малое превышение декрементом затухания собственной частоты осциллятора. На основе некоторых точных решений показано, что при превышении порога по начальному сдвигу релаксационная динамика сменяется квазиколебательным процессом приближения к равновесию.

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные осцилляторы встречаются в различных областях современной физики, химии, биофизики, электротехники, электроники и т.д. Разработан широкий круг аналитических методов для исследования динамики осцилляторов как со слабой, так и с сильной нелинейностью [1]. Во многих случаях помимо нелинейности важную роль играет диссипация (или вязкое трение).

В простейшем случае нелинейность и диссипация проявляют себя в уравнении вида

$$\ddot{P} + 2\gamma\dot{P} + \omega_0^2 P + \beta P^n = 0, \quad (1)$$

где P – зависимая переменная (сдвиг или координата осциллятора), положительные феноменологические коэффициенты γ , ω_0 и β характеризуют соответственно вязкие, упругие и нелинейные свойства осциллятора, n – степень нелинейности, точки над P обозначают производные по времени.

В пренебрежении нелинейностью ($\beta = 0$) уравнению (1) соответствуют два характеристических корня: $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. Если $\gamma < \omega_0$, имеем два комплексно сопряженных корня $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, что соответствует движению в режиме затухающих колебаний. В противном случае оба корня вещественны и линейная динамика происходит в сугубо релаксационном режиме. Тогда говорят, что осциллятор переторможен.

В отсутствие диссипации ($\gamma = 0$) уравнение (1) интегрируется в квадратурах. То же самое можно сказать о ситуации, когда можно пренебречь инерционным слагаемым \ddot{P} .

Аналитические методы для исследования движения нелинейных осцилляторов с затуханием хорошо разработаны при $\gamma/\omega_0 \ll 1$, что соответ-

ствует слабой диссипации или осциллятору с высокой добротностью. Здесь хорошо зарекомендовали себя методы прямого разложения (или последовательных приближений), перенормировки, многих масштабов, а также подходы Ван-дер-Поля, Линштедта–Пуанкаре и Крылова–Боголюбова–Митропольского [1]. В другом противоположном случае $\gamma/\omega_0 \gg 1$, соответствующем сильной переторможенности, надежно проявили себя методы пограничного слоя, включающие подходы многих масштабов и сращивания асимптотических разложений [1].

В ряде случаев представляет интерес случай слабой переторможенности, при котором параметр вязкости γ незначительно превышает параметр упругой возвращающей силы ω_0 . Условие слабой переторможенности приближенно выражается двойным неравенством

$$1 < \gamma/\omega_0 \leq 1.1. \quad (2)$$

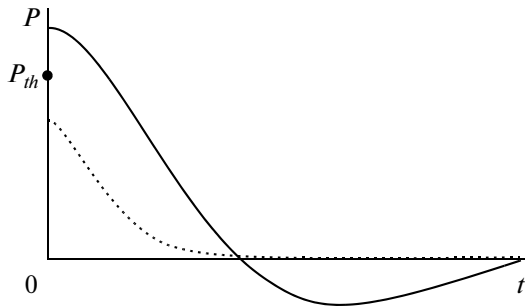
Слабопереторможенный нелинейный осциллятор находит свои приложения в биофизике ($n = 3$) [2], динамике параметра порядка сегнетоэлектриков типа смещения ($n = 2,3$) в окрестности температуры фазового перехода [3] и, возможно, в космологии ($n = 3$) [4].

В случае слабой переторможенности линейная динамика осциллятора является сугубо релаксационной. Однако нелинейность при превышении определенного порога P_{th} по начальному сдвигу P_0 способна внести качественные коррективы, а именно: сделать динамику квазиколебательной (рисунок).

В биофизических приложениях квазиколебательная динамика слабопереторможенного осциллятора Дюффинга ($n = 3$) соответствует эффекту суперкомпенсации [2]. В этом случае параметр P , отложенный по оси ординат на рисунке, определяется как $P = f - f_{eq}$, где f – мгновенное значение частоты сердечных сокращений (ЧСС),

¹ Томский государственный университет.

² Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва.



Линейная ($P_0 < P_{th}$), релаксационная, динамика сдвига (пунктирная кривая); нелинейная ($P_0 > P_{th}$), квази-колебательная, динамика (сплошная кривая). Начальные условия соответствуют конечным сдвигам $P(0) = P_0$ и нулевым скоростям $P'(0) = 0$ при $t = 0$.

измеряемое в ходе восстановления после нагрузки на организм, f_{eq} – равновесное значение ЧСС. Допустим, что для конкретного организма $f_{eq} = 60$ уд./мин, а сразу по окончании действия относительно слабой нагрузки $f_0 = 75$ уд./мин. Тогда $P_0 = f_0 - f_{eq} = 15$ уд./мин. В этом случае организм восстанавливается релаксационным образом, без прохождения фазы суперкомпенсации (пунктирная кривая на рисунке). Пусть затем этот же организм подвергли интенсивной внешней нагрузке, так что величина $f_0 = 120$ уд./мин превысила пороговое значение $f_{th} = 105$ уд./мин. Тогда $P_0 = f_0 - f_{eq} = 60$ уд./мин, что превышает порог $P_{th} = f_{th} - f_{eq} = 45$ уд./мин. В этом случае $P_0 > P_{th}$ и при восстановлении наблюдается фаза суперкомпенсации (см. локальный минимум сплошной кривой на рисунке).

В общем случае уравнение (1) при условии (2) не имеет аналитического решения. Для приближенного аналитического исследования (1) при условии (2), несмотря на то что есть малый параметр $(\gamma - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$, нельзя в качестве затравочного использовать решение линейного уравнения, соответствующего $\beta = 0$, так как нелинейность здесь качественным образом изменяет характер движения. Здесь, по-видимому, уместна аналогия с тем, что теорией возмущений нельзя пользоваться, например, при описании фазовых переходов. Однако существуют аналитические решения уравнения (1) при фиксированных значениях степени переторможенности γ/ω_0 . Анализ данных ситуаций и посвящена настоящая работа.

ВЫДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СЛУЧАЕВ

Уравнение (1) часто называют уравнением Эмдена–Фаулера [5]. Оно привлекает к себе значительное внимание в связи с исследованиями различных физических процессов и вопросов

интегрируемости [6]. Причем в общем случае рассматриваются ситуации, когда коэффициенты в (1) явно зависят от времени [5–7]. В настоящей работе мы ограничимся случаями постоянных коэффициентов, однако рассмотрим как однокомпонентные, так и многокомпонентные модели.

Представим P в виде

$$P = \xi^\alpha R(\xi), \quad (3)$$

где

$$\xi = \exp(-\varepsilon t), \quad (4)$$

α и ε – подлежащие определению постоянные.

Следуя [8], назовем данную подстановку преобразованием Куммера–Лиувилля.

После подстановки (3) и (4) в (1) будем иметь

$$\varepsilon^2 \xi^{\alpha+2} R'' + \varepsilon((2\alpha + 1)\varepsilon - 2\gamma) \xi^{\alpha+1} R' + (\alpha^2 \varepsilon^2 - 2\gamma\alpha\varepsilon + \omega_0^2) \xi^\alpha R + \beta \xi^{\alpha n} R^n = 0,$$

где штрих над R обозначает производную по ξ .

Полагая здесь равными нулю коэффициенты при R' и R , а также приравнивая друг другу степени ξ при R'' и R^n , придем к системе уравнений

$$(2\alpha + 1)\varepsilon = 2\gamma, \quad \alpha^2 \varepsilon^2 - 2\gamma\alpha\varepsilon + \omega_0^2 = 0, \quad \alpha + 2 = \alpha n.$$

Разрешая ее относительно α , ε и γ , найдем

$$\frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{n+3}{2\sqrt{2(n+1)}} > 1, \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{2}{n-1}, \quad \varepsilon = \omega_0 \frac{n-1}{\sqrt{2(n+1)}}. \quad (6)$$

При этом R удовлетворяет автономному дифференциальному уравнению, интегрируемому в квадратурах:

$$R'' + \frac{2\beta(n+1)}{\omega_0^2(n-1)^2} R^n = 0. \quad (7)$$

Таким образом, при условии (5) уравнение (1) оказывается интегрируемым. Его решение выражается соотношениями (3), (4), где α и ε определяются согласно (6), R – результат интегрирования (7).

ОДНОКОМПОНЕНТНЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ С КВАДРАТИЧНОЙ И КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В настоящем разделе рассмотрим две основные нелинейности (квадратичную и кубическую), чаще всего встречающиеся в различных приложениях.

1. Квадратичная нелинейность. Положим в (1) $n = 2$. Тогда, как видно из (5) и (6),

$$\gamma/\omega_0 = 5/\sqrt{24} \approx 1.02062, \quad \alpha = 2, \quad \varepsilon = 2\gamma/5, \quad (8)$$

а решение уравнения (7) выражается через эллиптические функции Якоби [9]. Используя (3), (4) и

полагая $\beta > 0$, запишем решение (1) для данного случая в виде

$$P(t) = Ae^{-4\gamma t/5} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{tn}^2 \left[\left(\frac{\sqrt{6\beta}}{\omega_0} A \right)^{1/2} e^{-2\gamma t/5} + B, k \right] \right\}, \quad (9)$$

где эллиптический тангенс $\operatorname{tn}(x, k) = \operatorname{sn}(x, k) / \operatorname{cn}(x, k)$; $\operatorname{sn}(x, k)$, $\operatorname{cn}(x, k)$ – эллиптические синус и косинус

соответственно, $k = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right]^{1/2} \approx 0.846467$ – модуль эллиптической функции; постоянные A и B определяются из начальных условий.

2. Кубическая нелинейность. В этом случае $n = 3$ (осциллятор Дюффинга),

$$\gamma / \omega_0 = 3 / \sqrt{8} \approx 1.06066, \quad \alpha = 1, \quad \varepsilon = 2\gamma / 3, \quad (10)$$

$$P = Re^{-2\gamma t/3} = Ae^{-2\gamma t/3} \operatorname{cn} \left(\frac{\sqrt{2\beta}}{\omega_0} Ae^{-2\gamma t/3} - B, k \right). \quad (11)$$

Здесь $\beta > 0$, $k = 1 / \sqrt{2} \approx 0.7071$, а постоянные A и B , как и выше, определяются из начальных условий.

Заметим, что в обеих интегрируемых ситуациях степень переторможенности удовлетворяет условию (2), т.е. является слабой.

Остановимся на решении (11) несколько подробнее. Рассмотрим начальное условие вида

$$P(0) = P_0, \quad \dot{P}(0) = 0, \quad (12)$$

которое соответствует рисунку.

Используя (11) и (12), можно выписать явные формулы для постоянных A и B . Однако они весьма громоздки и неудобны для приложений. Чтобы упростить вычисления, используем разложение в ряд Фурье для эллиптического косинуса [10]. Для модуля $k = 1 / \sqrt{2}$ в данном разложении можно ограничиться одним первым членом, что сохранит точность в пределах 1%. Тогда после несложных преобразований из (11) и (12) будем иметь

$$P(t) = P_0 e^{-2\gamma t/3} \times \left\{ \cos \left[a \left(1 - e^{-2\gamma t/3} \right) \right] + \frac{1}{a} \sin \left[a \left(1 - e^{-2\gamma t/3} \right) \right] \right\}, \quad (13)$$

где параметр a связан с начальным значением P_0 сдвига соотношением

$$a = \left(0.72U_0^2 + \sqrt{0.52U_0^4 + 1.44U_0^2} \right)^{1/2}. \quad (14)$$

Здесь $U_0 = \sqrt{\beta} P_0 / \omega_0$.

Рассмотрим вначале случай малых начальных значений сдвига $P_0 \ll P_{th}$. Как видно из (14), эта ситуация формально соответствует пределу $a \rightarrow 0$. Тогда (13) принимает вид

$$P(t) = P_0 e^{-2\gamma t/3} \left(2 - e^{-2\gamma t/3} \right).$$

Данное выражение, как и следовало ожидать, описывает сугубо релаксационный процесс восстановления, без прохождения через фазу супер-

компенсации (пунктирная кривая на рисунке). Легко видеть, что оно совпадает с решением линейаризованного уравнения (1) ($\beta = 0$) при условиях (12).

Найдем теперь пороговое значение P_{th} , при превышении которого возвращение к равносному состоянию происходит через фазу суперкомпенсации. Для этого положим в (13) $t = \infty$. Тогда $P = 0$, если $\operatorname{tga} = -a$. Отсюда $a = 2.029$. Используя (14) и связь между U_0 и P_0 , будем иметь соответствующее условие:

$$P_0 > P_{th} = 1.52 \frac{\omega_0}{\sqrt{\beta}}. \quad (15)$$

При $\beta > 0$ и $n = 3$, как видно из (1), эффективная жесткость осциллятора $\omega_{ef}^2(t) = \omega_0^2 + \beta P^2(t)$ возрастает, поэтому при больших начальных отклонениях эффективная степень переторможенности γ / ω_{ef} может стать меньше единицы, что и приводит к переходу релаксационной динамики в релаксационно-колебательную.

Более подробно анализ динамики слабопереторможенного осциллятора с кубической нелинейностью проведен в [11].

МНОГОКОМПОНЕНТНАЯ СИСТЕМА ПЕРЕТОРМОЖЕННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ДЮФФИНГА

Рассмотрим обобщение (1) на случай многокомпонентной системы нелинейно связанных переторможенных осцилляторов с кубической нелинейностью. Запишем такую систему в виде

$$\ddot{P}_j + 2\gamma_j \dot{P}_j + \omega_j^2 P_j + \beta_j P_j^3 + \sum_{k \neq j} \beta_{kj} P_k^2 P_j = 0, \quad (16)$$

$$(j = 1, 2, \dots, N),$$

где все коэффициенты положительны и постоянны.

Как видно, система (16) инвариантна относительно инверсии $P_j \rightarrow -P_j$.

Преобразование вида (3), (4) переводит (16) в автономную систему нелинейных дифференциальных уравнений для R_j при условиях

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_N = \gamma, \quad \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_N = \omega_0 \quad (17)$$

и ограничениях (10).

При этом

$$R_j'' + b_j R_j^3 + \sum_{k \neq j} b_{kj} R_k^2 R_j = 0, \quad (18)$$

где $b_j = 2\beta_j / \omega_0^2$, $b_{kj} = b_{jk} = 2\beta_{jk} / \omega_0^2$.

Система (18) имеет первый интеграл

$$\sum_{j=1}^N R_j'^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N b_j R_j^4 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N b_{jk} R_j^2 R_k^2 = H. \quad (19)$$

Рассмотрим далее сферически симметричный случай:

$$b_{jk} = b_{kj} = b_j = b. \tag{20}$$

Тогда (19) примет вид

$$|\vec{R}|^2 + \frac{b}{2} |\vec{R}|^4 = H, \tag{19a}$$

где вектор-столбец $\vec{R} = (R_1, R_2, \dots, R_N)^T$.

Перейдем к N -мерной сферической системе координат [12]

$$\begin{aligned} R_1 &= R \cos \varphi \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{N-2}, \\ R_2 &= R \sin \varphi \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{N-2}, \\ R_3 &= R \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{N-2}, \\ R_4 &= R \cos \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{N-2}, \dots, \\ R_N &= R \cos \theta_{N-2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Тогда гамильтониан (19a) и соответствующий ему лагранжиан запишутся в виде

$$H = R'^2 + R^2 \sum_{k=0}^{N-2} \theta_k'^2 \prod_{j=k+1}^{N-2} \sin^2 \theta_j + \frac{b}{2} R^4, \tag{19б}$$

$$L = R'^2 + R^2 \sum_{k=0}^{N-2} \theta_k'^2 \prod_{j=k+1}^{N-2} \sin^2 \theta_j - \frac{b}{2} R^4. \tag{22}$$

Записывая уравнения Эйлера—Лагранжа для R и θ_j , получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(R^2 \theta_k' \prod_{j=k+1}^{N-2} \sin^2 \theta_j \right) &= \\ = R^2 \sin \theta_k \cos \theta_k \sum_{j=0}^{k-1} \theta_j'^2 \prod_{\substack{m=j+1, \\ m \neq k}}^{N-2} \sin^2 \theta_m, \end{aligned} \tag{23}$$

($k = 0, 1, \dots, N - 2$).

Отсюда по цепочке находим серию интегралов движения

$$R^2 \varphi' \sin^2 \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{N-2} = l_0, \tag{24}$$

$$R^4 \theta_k'^2 \prod_{j=k+1}^{N-2} \sin^4 \theta_j + \frac{l_k^2}{\sin^2 \theta_k} = l_{k+1}^2, \tag{25}$$

($k = 0, 1, \dots, N - 2$).

Подставляя (24) и (25) в (19б), найдем

$$R'^2 + \frac{l_{N-2}^2}{R^2} + \frac{b}{2} R^4 = H. \tag{26}$$

Общее решение (26) имеет вид

$$R = \left\{ v_2 + (v_1 - v_2) \operatorname{cn}^2 \left[\sqrt{\frac{b}{2}(v_1 - v_3)} (\xi - B), q \right] \right\}^{1/2}, \tag{27}$$

где модуль эллиптического косинуса $q = \sqrt{\frac{v_1 - v_2}{v_1 - v_3}}$,

$v_1 > v_2 > v_3$ — корни полинома

$$Q(v) = H v - \frac{b}{2} v^3 - l_{N-2}^2. \tag{28}$$

Теперь, последовательно интегрируя цепочку (15) с $k = N - 2$ до $k = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} \cos \theta_k &= \frac{|l_k|}{\sqrt{l_k^2 + l_{k-1}^2}} \times \\ &\times \cos \left[\sqrt{l_k^2 + l_{k-1}^2} \left(B_k + \int_0^\xi \frac{d\xi'}{R^2 \prod_{j=k+1}^{N-2} \sin^2 \theta_j} \right) \right], \end{aligned} \tag{29}$$

($k = N - 2, N - 3, \dots, 1$),

$$\varphi = B_0 + l_0 \int_0^\xi \frac{d\xi'}{R^2 \prod_{j=1}^{N-2} \sin^2 \theta_j}. \tag{30}$$

Здесь B_k — постоянные интегрирования ($k = 0, 1, \dots, N - 2$).

Таким образом, мы нашли решение N -компонентной системы переторможенных осцилляторов Дюффинга при условиях (10) и при сферической симметрии нелинейности в пространстве динамических компонент P_j ($j = 1, 2, \dots, N$). $2N$ постоянных интегрирования H, B, l_k, B_k ($k = 0, 1, \dots, N - 2$) находятся из $2N$ начальных условий для $P_1(0), P_2(0), \dots, P_N(0), \dot{P}_1(0), \dot{P}_2(0), \dots, \dot{P}_N(0)$.

Рассмотрим специальный класс начальных условий, соответствующих начальным отклонениям осцилляторов с нулевыми начальными скоростями:

$$P_j(0) = P_{j0}, \quad \dot{P}_j(0) = 0. \tag{31}$$

Легко видеть, что в этом случае все компоненты “углового момента” l_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N - 2$) обращаются в нуль. Тогда $\theta_j = \theta_{j0} = \operatorname{const}$, $\varphi = \varphi_0 = \operatorname{const}$,

а из (28) вытекает, что $v_{1,3} = \pm \sqrt{\frac{2H}{b}}$, $v_2 = 0$ и решение (27) переходит в (11), с учетом замены

$R \rightarrow \sqrt{\sum_{j=1}^N R_j^2}$. При этом условие возникновения эффекта суперкомпенсации принимает вид (15)

при замене $P_0 \rightarrow \sqrt{\sum_{j=1}^N P_{j0}^2}$. Отсюда следует, что возможна ситуация, когда величина начального

отклонения P_{j0} каждого осциллятора меньше порогового значения, тем не менее дальнейшее приближение каждого из них к положению равновесия происходит в синхронном релаксационно-колебательном режиме, через фазу суперкомпенсации. Этот эффект понятен, так как при постоянных во времени углах θ_j и φ можно провести такое преобразование поворота N -мерной сферы, что все компоненты, за исключением одной, обратятся в нуль. Тогда имеем сугубо однокомпонентный случай, рассмотренный в третьем разделе настоящей статьи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в настоящей работе интегрируемые случаи уравнения Эмдена–Фаулера (1), соответствующие (5), описывают движение переторможенных нелинейных осцилляторов. Причем в ситуациях квадратичной и кубической нелинейностей переторможенность слабая, т.е. удовлетворяется условие (2). С дальнейшим увеличением степени нелинейности параметр переторможенности γ/ω_0 растет и выходит за рамки интервала (2).

Здесь мы ограничились исследованием лишь случая кубической нелинейности для многокомпонентного осциллятора, хотя предложенная здесь схема, восходящая к преобразованию (3), (4), позволяет исследовать и многокомпонентные ситуации с произвольной степенью нелинейности.

За рамками предложенного подхода остаются ситуации, когда нелинейность представляется в виде полинома некоторой степени. Развитие соответствующей теории на данный случай могло бы позволить рассмотреть случай, когда возвращающая нелинейная сила имеет вид функции, разложимой в ряд Тейлора.

Естественным образом возникает вопрос о построении теории возмущений для движения нелинейных переторможенных осцилляторов на основе рассмотренных здесь затравочных точных решений. Построение такой схемы способствовало бы построению приближенных решений при заполнении всего интервала (2) значений параметра переторможенности.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки России по гранту № 14.В37.21.0911.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений М.: Мир, 1984.
2. *Зайцев А.А., Сазонов С.В.* // Биофизика. 1997. Т. 42. № 2. С. 521.
3. *Струков Б.А., Леванюк А.П.* Физические основы сегнетоэлектрических явлений. М.: Наука, 1983.
4. *Долгов А.Д., Зельдович Я.Б., Сажин М.В.* Космология ранней Вселенной. М.: Изд-во МГУ, 1988.
5. *Govinder K.S., Leach P.G.L.* // J. Nonlinear Math. Phys. 2007. V. 14. № 3. P. 443.
6. *Euler N.* // J. Nonlinear Math. Phys. 1997. V. 4. № 3–4. P. 310.
7. *Euler N., Steeb W.-H., Cyrus K.* // J. Phys. A. 1989. V. 22. P. L195.
8. *Беркович Л.М.* Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. М.: РХД, 2002.
9. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. М.: Высш. шк., 1965.
10. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967.
11. *Брежнев Ю.В., Зайцев А.А., Сазонов С.В.* // Биофизика. 2011. Т. 56. № 2. С. 342.
12. *Иваненко Д., Соколов А.* Классическая теория поля. М.: Гостехиздат, 1951.