Томский государственный университет
Кемеровский государственный университет
Кемеровский научный центр СО РАН
Институт вычислительных технологий СО РАН
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2011)

Материалы X Всероссийской научно-практической конференции с международным участием

25–26 ноября 2011 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2011

6. *Печинкин А.В., Разумчик Р.В.* Система массового обслуживания с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок в дискретном времен // Автомат. и телемех., 2009. № 12. С. 109–120.

7. *Манзо Р., Касконе Н., Разумчик Р.В.* Экспоненциальная система массового обслуживания с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок // Автомат. и телемех., 2008. № 9. С. 103–113.

8. *Бочаров П.П., Д'Апиче Ч., Манзо Р., Печинкин А.В.* Анализ многолинейной марковской системы массового обслуживания с неограниченным накопителем и отрицательными заявками // Автомат. и телемех., 2007. № 1. С. 93–104.

ИССЛЕДОВАНИЕ АДАПТИВНОЙ RQ-СИСТЕМЫ С ВХОДЯЩИМ MMP-ПОТОКОМ ЗАЯВОК

Т.В. Любина, А.А. Назаров

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Адаптивной RQ-системой с входящим MMP-потоком заявок будем называть однолинейную систему массового обслуживания с источником повторных вызовов (ИПВ) и входящим марковским модулированным потоком (MMP-поток) заявок, управляемую адаптивным протоколом доступа [1].

На вход системы поступает MMP-поток [2], который определяется диагональной матрицей Λ условных интенсивностей $\rho\lambda_n$ и матрицей Q инфинитезимальных характеристик $q_{\nu n}$ цепи Маркова $n(t)$, управляющей MMP-потоком.

Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ. По завершении успешного обслуживания заявка покидает прибор. Если во время обслуживания некоторой заявки поступает другая, то в приборе возникает конфликт и обе заявки переходят в ИПВ. Из ИПВ после случайной задержки заявка с интенсивностью $1/T$, где T – состояние адаптера в текущий момент времени, вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка становится на обслуживание, если же он занят, то вновь возникает конфликт заявок.

Состояние системы в момент времени t определяется цепью Маркова $\{k(t), n(t), i(t), T(t)\}$ [3], где $i(t)$ – число заявок в ИПВ, $n(t)$ – значения цепи Маркова, управляющей MMP-потоком заявок, а $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом

$$k(t) = \begin{cases} 0, \text{если прибор свободен,} \\ 1, \text{ если прибор занят,} \end{cases}$$

адаптер с течением времени t свои состояния $T(t)$ меняет следующим образом

$$T(t+\Delta t) = \begin{cases} T(t) - \alpha\Delta t, \text{если } k(t) = 0, \\ T(t) + \beta\Delta t, \text{ если } k(t) = 1, \end{cases}$$

где величины $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – параметры адаптера, значения которых заданы.

Поэтому распределение вероятностей

$$P(k,i,n,T,t) = \partial P\{k(t)=k, n(t)=n, i(t)=i, T(t)<T\}/\partial T$$

удовлетворяет следующим равенствам

$$\begin{cases} P(0,n,i,T-\alpha\Delta t, t+\Delta t) = (1-\rho\lambda_n\Delta t)\left(1-\dfrac{i}{T}\Delta t\right)(1+q_{nn}\Delta t)P(0,n,i,T,t) + \\ +\mu\Delta t P(1,n,i,T,t) + \sum\limits_{\nu\neq n} q_{\nu n}\Delta t P(0,\nu,i,T,t) + o(\Delta t), \\ P(1,n,i,T+\beta\Delta t, t+\Delta t) = (1-\rho\lambda_n\Delta t)(1-\mu\Delta t)(1+q_{nn}\Delta t)P(1,n,i,T,t) + \\ +\dfrac{i+1}{T}\Delta t P(0,n,i+1,T,t) + \rho\lambda_n\Delta t P(0,n,i,T,t) + \rho\lambda_n\Delta t P(1,n,i-1,T,t) + \\ +\sum\limits_{\nu\neq n} q_{\nu n}\Delta t P(1,\nu,i,T,t) + o(\Delta t), \end{cases}$$

применяя которые, составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(0,n,i,T,t)}{\partial t} - \alpha\dfrac{\partial P(0,n,i,T,t)}{\partial T} = -\left(\rho\lambda_n + \dfrac{i}{T}\right)P(0,n,i,T,t) + \\ +\mu P(1,n,i,T,t) + \sum\limits_{\nu} P(0,\nu,i,T,t)q_{\nu n}, \\ \dfrac{\partial P(1,n,i,T,t)}{\partial t} + \beta\dfrac{\partial P(0,n,i,T,t)}{\partial T} = -(\rho\lambda_n + \mu)P(1,n,i,T,t) + \\ +\dfrac{i+1}{T}P(0,n,i+1,T,t) + \rho\lambda_n P(0,n,i,T,t) + \\ +\rho\lambda_n P(1,n,i-1,T,t) + \sum\limits_{\nu} P(1,\nu,i,T,t)q_{\nu n}. \end{cases} \tag{1}$$

Запишем систему (1) для стационарного распределения:

$$\begin{cases} -\alpha\dfrac{\partial P(0,n,i,T)}{\partial T} = -\left(\rho\lambda_n + \dfrac{i}{T}\right)P(0,n,i,T) + \mu P(1,n,i,T) + \sum\limits_{\nu} P(0,\nu,i,T)q_{\nu n}, \\ \beta\dfrac{\partial P(1,n,i,T)}{\partial T} = -(\rho\lambda_n + \mu)P(1,n,i,T) + \rho\lambda_n P(0,n,i,T) + \\ +\rho\lambda_n P(1,n,i-1,T) + \dfrac{i+1}{T}P(0,n,i+1,T) + \sum\limits_{\nu} P(1,\nu,i)q_{\nu n}. \end{cases} \tag{2}$$

Для дальнейшего исследования систему (2) перепишем в матричном виде, обозначив

$$P(0,i,T) = \{P(0,1,i,T), P(0,2,i,T), ..., P(0,N,i,T)\},$$
$$P(1,i,T) = \{P(1,1,i,T), P(1,2,i,T), ..., P(1,N,i,T)\},$$

получим

$$\begin{cases} -\alpha \dfrac{\partial P(0,i,T)}{\partial T} = P(0,i,T)\left(Q - \rho\Lambda - \dfrac{i}{T} I \right) + P(1,n,i,T)\mu I, \\ \beta \dfrac{\partial P(1,i,T)}{\partial T} = P(1,i,T)(Q - \rho\Lambda - \mu I) + P(0,i,T)\rho\Lambda + P(1,i-1,T)\rho\Lambda + \\ +P(0,i+1,T)\dfrac{i+1}{T}. \end{cases} \tag{3}$$

Чтобы решить систему (3), определим характеристические функции

$$H_k(u_1,u_2) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-u_1 i} \int_0^{\infty} e^{-u_2 T} P(k,i,T) dT . \tag{4}$$

Из системы (3), с учетом равенства (4), получаем следующую систему для функций $H_k(u_1,u_2)$:

$$\begin{cases} H_0(u_1,u_2)\big(Q - \rho\Lambda + \alpha u_2 I\big) + \displaystyle\int_{u_2}^{\infty} \frac{\partial H_0(u_1,x)}{\partial u_1} dx + \\ +H_1(u_1,u_2)\mu = -\alpha u_2 H_0(u_1,u_2), \\ H_1(u_1,u_2)(Q - \rho\Lambda - \mu I - \beta u_2 I) - e^{u_1} \displaystyle\int_{u_2}^{\infty} \frac{\partial H_0(u_1,x)}{\partial u_1} dx + \\ +H_0(u_1,u_2)\rho\Lambda + \rho e^{-u_1} H_1(u_1,u_2)\Lambda = \beta u_2 H_1(u_1,u_2). \end{cases} \tag{5}$$

Определение. Пропускной способностью сети связи называется точная верхняя граница S тех значений загрузки ρ, для которых в математической модели сети связи существует стационарный режим.

Для нахождения значения величины S и других характеристик модели исследование системы (5) выполнялось методом асимптотического анализа в условии большой загрузки системы $\rho \uparrow S$. Обозначив $\varepsilon = S - \rho$ и полагая $\varepsilon \to 0$, в системе (5) выполним замены:

$$\rho = S - \varepsilon, \quad u_1 = \varepsilon w_1, \quad u_2 = \varepsilon w_2,$$
$$H_0(u_1,u_2) = F_0(w_1,w_2,\varepsilon), \quad H_1(u_1,u_2) = F_1(w_1,w_2,\varepsilon),$$

получим

$$\begin{cases} F_0(w_1,w_2,\varepsilon)\big(Q - (s+\varepsilon)\Lambda + \alpha\varepsilon w_2 I\big) + \displaystyle\int_{w_2}^{\infty} \frac{\partial F_0(w_1,x,\varepsilon)}{\partial w_1} dx + F_1(w_1,w_2,\varepsilon)\mu = \\ = -\alpha\varepsilon w_2 F_0(w_1,w_2,\varepsilon), \\ F_1(w_1,w_2,\varepsilon)(Q - (s+\varepsilon)\Lambda - \mu I - \beta\varepsilon w_2 I) - e^{\varepsilon w_1} \displaystyle\int_{u_2}^{\infty} \frac{\partial F_0(w_1,x,\varepsilon)}{\partial w_1} dx + \\ +F_0(w_1,w_2,\varepsilon)(s+\varepsilon)\Lambda + (s+\varepsilon)e^{-\varepsilon w_1} F_1(w_1,w_2,\varepsilon)\Lambda = \beta\varepsilon w_2 F_1(w_1,w_2,\varepsilon). \end{cases} \tag{6}$$

В результате решения системы (6) получена характеристическая функция для распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов, а также найдено значение S пропускной способности системы.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)», проект № 11803.

Литература

1. *Кузнецов Д.Ю., Назаров А.А.* Адаптивные сети случайного доступа // Науч. ред. В.А. Силич. Томск: Дельтаплан, 2002. 254 с.

2. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

3. *Назаров, А.А., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов: Учеб. пос. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ M|M|1 В УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАГРУЗКИ

Е.А. Моисеева, А.А. Назаров

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Национальный исследовательский Томский государственный университет

Ситуации повторных обращений требований к обслуживающему прибору достаточно часто встречаются в различных сферах человеческой деятельности. Одним из примеров может быть блокировка в условиях доступа к общим ресурсам в информационных системах. Математической моделью процессов, описывающих такие ситуации, являются RQ-системы (Retrial Queueing System) [1, 2].

Рассмотрим (рис. 1) однолинейную RQ-систему с источником повторных вызовов (ИПВ), на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром λ, а время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ. Если поступившая заявка застает прибор свободным, то она занимает его для обслуживания. Если прибор занят, то заявка переходит в ИПВ, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к обслуживающему прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его для обслуживания, в противном случае заявка мгновенно возвращается в источник повторных вызовов для реализации следующей задержки.

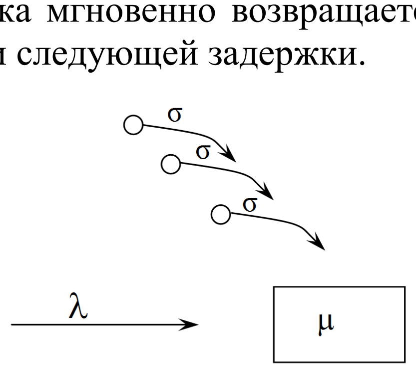

Рис. 1. Однолинейная RQ-система