

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2012

№ 4(20)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

Глазунов А.А., д-р физ.-мат. наук, проф. (председатель); Гулько С.П., д-р физ.-мат. наук, проф. (зам. председателя); Лазарева Е.Г., канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. секретарь); Александров И.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Берцун В.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.; Биматов В.И., д-р физ.-мат. наук, проф.; Бубенчиков А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Бухтяк М.С., канд. физ.-мат. наук, доц.; Васенин И.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Гришин А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Ищенко А.Н., д-р физ.-мат. наук, проф.; Конев В.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Крайнов А.Ю., д-р физ.-мат. наук; Крылов П.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Панько С.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Пергаменщиков С.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Сипачёва О.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Скрипняк В.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Старченко А.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Г.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Э.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Cauty R., prof.

Научный журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» был выделен в самостоятельное периодическое издание из общенаучного журнала «Вестник Томского государственного университета» в 2007 г. Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия (свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-30658 от 20 декабря 2007 г.), ему присвоен международный стандартный номер сериального издания (ISSN 1998-8621). Журнал выходит ежеквартально и распространяется по подписке, его подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России».

«Вестник ТГУ. Математика и механика» входит в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе <http://elibrary.ru>, а также в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Кроме того, все номера журнала присутствуют и обрабатываются на общероссийском математическом портале <http://Math-Net.ru>.

Адрес редакции:

634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

МАТЕМАТИКА

УДК 519.711.3

М.С. Бухтяк, А.В. Никульчиков

ОЦЕНКА СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО ОТКЛОНЕНИЯ
ПОВЕРХНОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО РЕФЛЕКТОРА
ОТ ШЕСТИУГОЛЬНОЙ ФРОНТАЛЬНОЙ СЕТИ

Для параболической антенны рефлекторного типа строится шестиугольная фронтальная сеть, проекция которой на директориальную плоскость родительского параболоида есть правильная шестиугольная сеть. Построены оценки среднего квадратичного отклонения поверхности параболоида в «локальном» и в «глобальном» смысле. Определены результаты смещения сети целиком параллельно оси параболоида.

Ключевые слова: параболический рефлектор, фронтальная сеть, среднее квадратичное отклонение.

В идеологии теоретической разработки и технологического проектирования орбитальных рефлекторов (особенно крупногабаритных) можно наметить некоторые тенденции.

1. Параболоид вращения не вполне удобен, чтобы на нем размещать детали отражающей поверхности. Приблизим его (локально) куском сферы, а неизбежные погрешности нетрудно учесть.

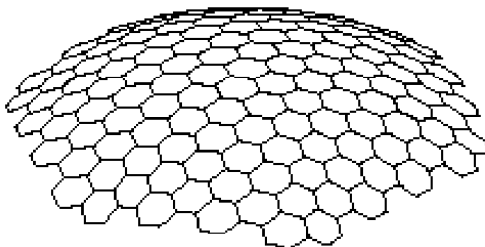


Рис. 1. Участок сферы идеально покрытый шестиугольными фасетами

2. Для элементарных деталей отражающей поверхности (фасет) (рис. 1) при уже сделанных допущениях о замене осесимметричного параболоида на кусок сферы удаётся найти удобные аппроксимирующие формулы, характеризующие параметр, заслуженно называемый «точностью по Хеджпету».

Примеры весьма успешного применения упомянутых подходов хорошо известны, например, из [1–6].

Мы же ставим несколько иные задачи.

1. Как раз форму основной поверхности – родительского параболоида – оставить неизменной.

2. Фронтальная сеть теперь предполагается состоящей не из идеальных шестиугольных ячеек, а несколько искажённых.

3. Фронтальная сеть мыслится как объект, который можно перемещать как твердое тело относительно родительского параболоида. Как будет показано ниже, на этом пути есть возможность своеобразного влияния на СКО.

Исследование основано на значительной идеализации реальных конструкций. Имеются, однако, основания полагать, что указанные идеализации, во-первых, неизбежны, а, во-вторых, не вносят фатальных искажений. Если иное не оговорено, размеры предполагаются в метрах. При графическом изображении отклонений и средних квадратичных отклонений третья координатная сеть градуируется в миллиметрах.

1. Локальное среднее квадратичное отклонение

Рассматривается рефлектор, математической моделью которого является офсетный параболоид. Родительский параболоид есть параболоид вращения¹

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4F} \quad (1)$$

с фокальным параметром F . В плоскости XOY строится правильная шестиугольная сеть, сторона шестиугольника равна a . Пусть одна из ячеек плоской сети имеет центр $(r, 0, 0)$ и вершины

$$C_i(x_i, y_i, 0).$$

«Поднимаем» каждую вершину на поверхность параболоида – и получаем точки

$$A_i\left(x_i, y_i, \frac{x_i^2 + y_i^2}{4F}\right). \quad (2)$$

Эти шесть точек компланарны. Они ограничивают плоский шестиугольник, который в общем случае правильным не является. Тем не менее константа a продолжает быть связанной с новой фигурой очевидным образом.

Принцип «поднятия» очень прост. Достаточно проследить судьбу каждого правильного шестиугольника, расположенного в координатной плоскости XOY , (фиолетового цвета) и результат его «поднятия» на поверхность родительского параболоида (рис. 2).

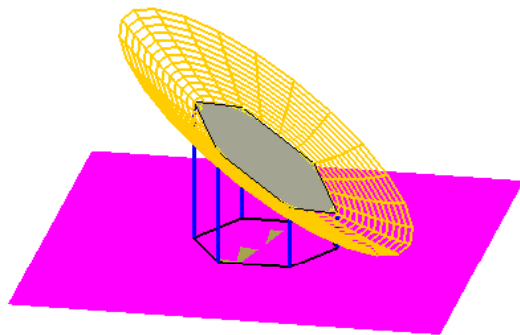


Рис. 2. Правильный шестиугольник в горизонтальной плоскости после «поднятия» перестает быть правильным, располагаясь на параболоиде вращения

¹ С этого момента деление координатных осей на оси абсцисс, ординат и аппликат сложностей не представляет.

Наш шестиугольник на родительском параболоиде – плоская фигура. Полагая, что сетеполотно заполняет этот плоский шестиугольник и само составляет плоский шестиугольник. Таким образом мы, в частности, пренебрегаем и «подушечным эффектом». Какими средствами это достигнуто – нас не интересует. Тогда отклонение текущей точки параболоида с первыми двумя координатами x , y от плоскости шестиугольника равно

$$f(x, y) = \frac{r^2 + x^2 + y^2 - a^2 - 2rx}{2\sqrt{r^2 + 4F^2}}. \quad (3)$$

Обычным путем находим максимальное расстояние (рис. 3) точки параболоида от плоскости (в пределах ячейки) равное

$$\frac{a^2}{2\sqrt{r^2 + 4F^2}}. \quad (4)$$

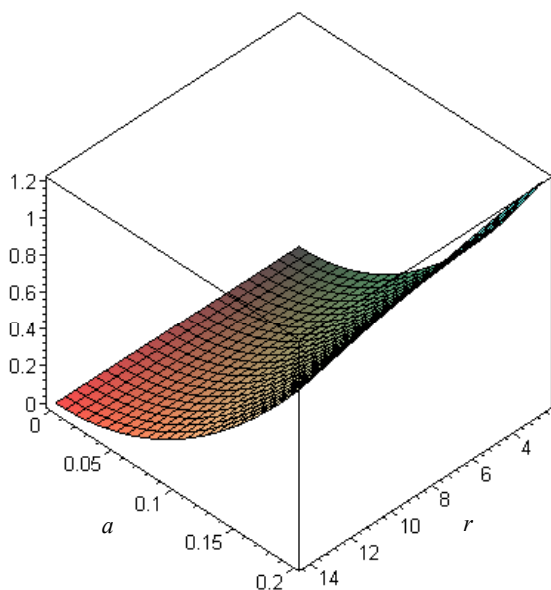


Рис. 3. График наибольшего отклонения в пределах ячейки до оптимизации (в миллиметрах)

Среднее квадратичное отклонение параболоида от плоскости ячейки (в пределах ячейки)

$$\text{СКО_ЛОКАЛЬНОЕ} = \sqrt{\frac{\iint_D f(x, y)^2 ds}{S_D}} = \frac{a^2 \sqrt{5F}}{5(r^2 + 4F^2)^{\frac{3}{4}}}. \quad (5)$$

Здесь D – ячейка, $S_D = \frac{3a^2}{4F} \sqrt{3(r^2 + 4F^2)}$ – площадь (наклонной) ячейки, ds – элемент площади этой же ячейки.

Представление о зависимости указанной величины от параметров дает график функции при $F = 9,0$ (рис. 4):

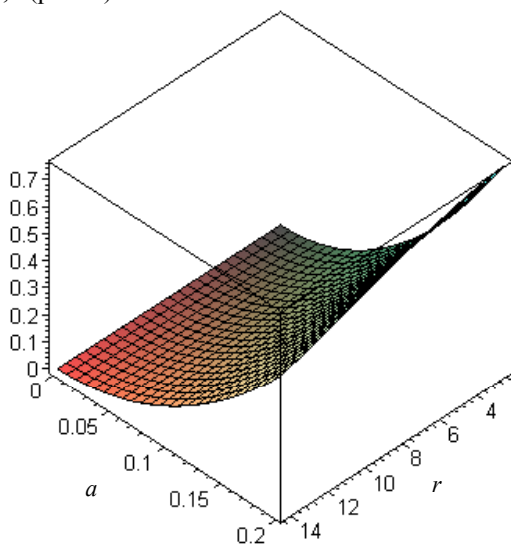


Рис. 4. График неоптимизированного локального СКО (в миллиметрах)

2. Оптимизация локального среднего квадратичного отклонения

Сместим плоскость ячейки в направлении оси аппликат на величину H . Тогда отклонение (3) заменится на величину

$$\frac{r^2 + x^2 + y^2 - a^2 - 2rx - 4FH}{2\sqrt{r^2 + 4F^2}}. \quad (6)$$

При этом для точек параболоида должен поменяться знак отклонения этих точек от плоскости наклонённой шестиугольной грани.

Решим этот вопрос попутно с другим. Именно шестиугольник в плоскости, который мы собрались «поднимать», сначала повернем в горизонтальной плоскости на некий угол t . Таким образом, речь пойдёт о влиянии двух факторов: параллельного смещения плоскости шестиугольника и вращении шестиугольника в его плоскости вокруг его центра симметрии.

Заменяя шестиугольник плоской сетью окружностью радиуса a и переходя к полярным координатам $x = r + u \cos v$, $y = u \sin v$, приводим отклонение (6) к виду

$$f_H = \frac{2r(r + u \cos v) - r^2 - (r + u \cos v)^2 - u^2 \sin^2 v + 4FH + a^2}{2\sqrt{r^2 + 4F^2}}, \quad (6^*)$$

$u = 0 \dots a, \quad v = 0 \dots 2\pi.$

Отмечаем важный факт: **Экстремальное значение отклонения во внутренней точки не зависит от угла поворота области и равно**

$$-\frac{a^2 + 4FH}{2\sqrt{r^2 + 4F^2}}. \quad (7)$$

В каждой граничной точке отклонение равно

$$\frac{2FH}{\sqrt{r^2 + 4F^2}}. \quad (8)$$

Максимум расстояния точек параболоида в пределах ячейки от плоскости ячейки достигает минимума, если сумма отклонений (7) и (8) равна нулю (тогда соответствующие расстояния равны), то есть при условии

$$H = H_{\text{опт}} = -\frac{a^2}{8F}. \quad (9)$$

При этом максимальное расстояние от точки параболоида до плоскости ячейки уменьшается вдвое по сравнению с (4) и составляет

$$\frac{a^2}{4\sqrt{r^2 + 4F^2}}. \quad (10)$$

Заметим, что выражение (9) свободно от вхождения переменной r , что приводит к важному выводу.

Смещение H зависит только от размера стороны ячейки и фокусного расстояния и не зависит от r (то есть от положения центра ячейки). Следовательно, сместив всю фронтальную сеть как твердое тело на величину (9) в направлении оси аппликат, мы уменьшаем вдвое максимальное отклонение сетеполотна от идеального параболоида. Того же эффекта мы достигнем, переместив центр принимающего устройства (ему соответствует фокус параболоида) на величину $\frac{a^2}{8F}$.

После указанной процедуры график максимального отклонения изменится и примет следующий вид (рис. 5):

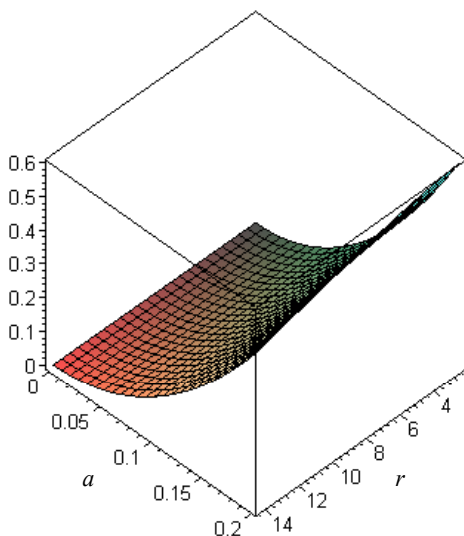


Рис. 5. График наибольшего отклонения в пределах ячейки после оптимизации сдвигом (в миллиметрах)

$$\text{СКО_ЛОКАЛЬНОЕ_ОПТИМ} = \sqrt{\frac{\iint_D f_H^2 ds}{S_D}} = \frac{\sqrt{6H} \sqrt{a^4 + 12FHa^2 + 48F^2H^2}}{6(r^2 + 4F^2)^{\frac{3}{4}}}. \quad (11)$$

3. Интерпретирующая функция. Среднее значение локального СКО

Совокупность ячеек шестиугольной фронтальной сети, покрывающей параболоид (вообще говоря, офсетный), представляет собой некоторое семейство (упорядоченное заранее неизвестным способом), однако оценка СКО фиксированной (неважно каким способом) приводит к случайной картине распределение СКО, типичный пример которого видим на рис. 6.

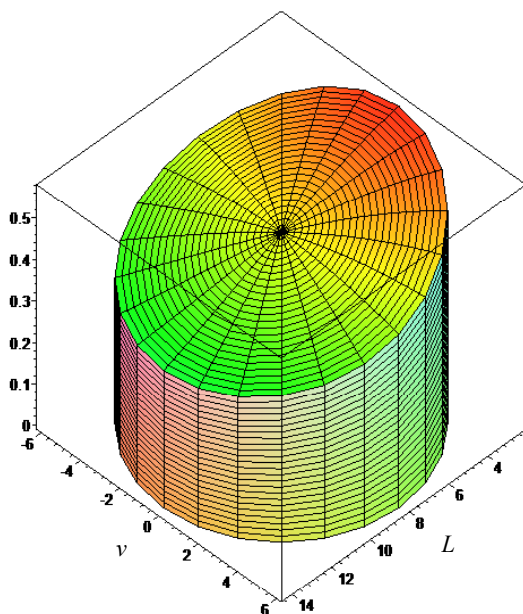


Рис. 6. Интерпретирующая функция

Оценка СКО получена интегрированием квадрата отклонения точек параболоида от плоскости ячейки, причем областью интегрирования служит (ради упрощения) круг, в который вписан шестиугольник, расположенный в координатной плоскости. Погрешность, вносимая нами, приводит лишь к несколько завышенной оценке вычисляемых величин. Данное обстоятельство более приемлемо, нежели заниженные оценки. Таким образом, введя полярные координаты (u, v) в плоскости XOY , приходим к формуле

$$SKO = 1000 \cdot \sqrt{\frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a T^2 du dv}, \quad (12)$$

где T – указанное отклонение. Проведя интегрирование, приходим к следующей формуле:

$$SKO_{-} = \frac{200 \cdot \sqrt{30} \cdot a^2}{3\sqrt{r^2 + 4F^2}}. \quad (13)$$

График соответствующей функции (при $F = 9,0$) приведен на рис. 7:

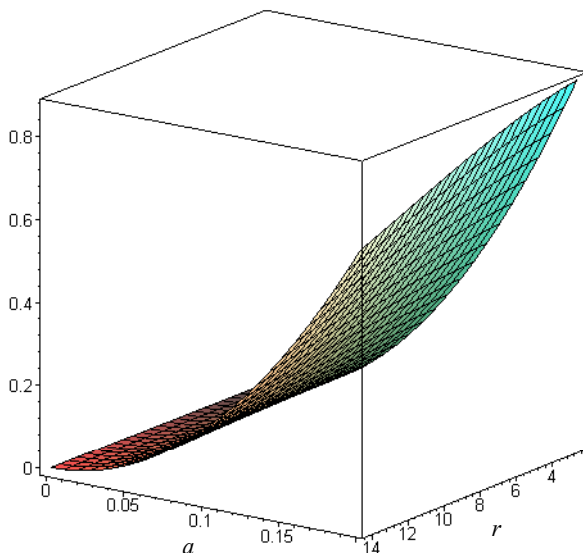


Рис. 7

СКО, найденное нами, характеризует поведение сетеполотна по отношению к идеальному параболоиду лишь в пределах одной ячейки. Его естественно назвать локальным СКО. Введем в рассмотрение другую величину – глобальное СКО, полученное интегральным усреднением локального СКО:

$$SKO_{-}GLOB = \sqrt{\frac{1}{R} \int_0^R SKO^2 dr}. \quad (14)$$

Вводим в плоскости XOY полярные координаты с полюсом в точке $(x_0, 0, 0, 0)$, где x_0 есть сумма клиренса K и радиуса вырезающего цилиндра R . Подставив (6) в (7), приходим к соотношению для глобального СКО (в мм):

$$SKO_{-}GLOB = \frac{200\sqrt{30}a^2}{3R\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_0^{2\pi} \left(\frac{\arctg \frac{R+x_0 \cos v}{W} - \arctg \frac{x_0 \cos v}{W}}{W} \right) dv}. \quad (15)$$

Здесь $W = \sqrt{x_0^2 + 4F - x_0^2 \cos^2 v}$

График зависимости глобального СКО (в миллиметрах) от величины a при $F = 9,0$, $R = 6,1$, $x_0 = 8,7$ приведен на рис. 8.

Локальное СКО (как и максимальное отклонение) также может быть уменьшено благодаря параллельному переносу плоскости ячейки в направлении оси аппликат. Оптимум достигается при смещении на величину

$$H = -a^2 / 8F. \quad (16)$$

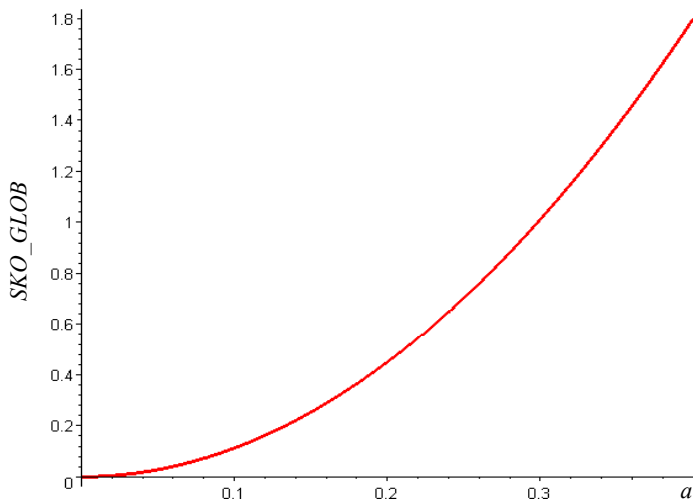


Рис. 8

Как и в случае с формулой (4), приходим к выводу: **сместив всю фронтальную сеть в направлении оси аппликат на величину (7), мы добьемся минимального значения локального СКО.** При этом формула для СКО такова:

$$SKO_OPTIMUM = \frac{200\sqrt{5} \cdot a^2}{3\sqrt{r^2 + 4F^2}}, \quad (17)$$

График функции (рис. 9) имеет вид

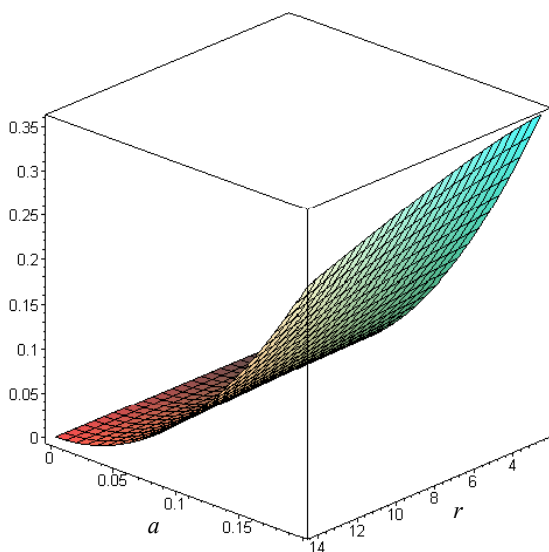


Рис. 9

Представляет интерес график функции при более широком диапазоне изменения параметра a (сторона шестиугольника). Именно, пусть a изменяется от 0 до 0,4 м. Тогда график принимает вид (рис. 10):

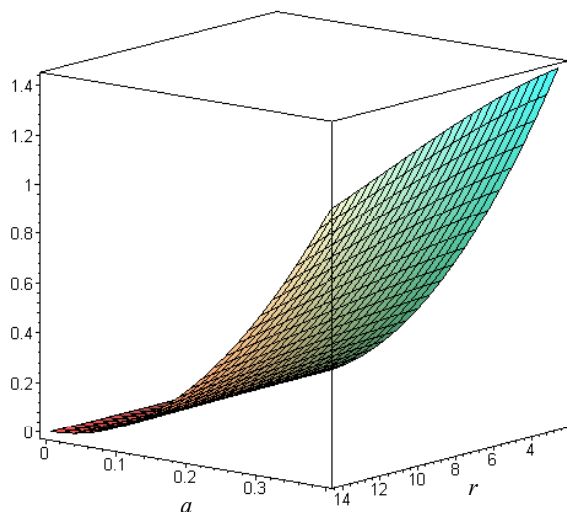


Рис. 10

Таким образом, на всей протяженности рефлектора при длине стороны ячейки в 0,4 м (соответственно при диаметре ячейки 0,8 м) получаем локальное СКО для каждой ячейки в отдельности равным приблизительно от нуля на периферии до 1,4 мм в центре.

Можно оценить СКО по всей поверхности так, как это было сделано выше для неоптимизированного локального СКО. Приводим график зависимости глобального оптимизированного СКО от величины a при $F = 9,0$, $R = 6,1$, $x_0 = 8,7$ (рис. 11).

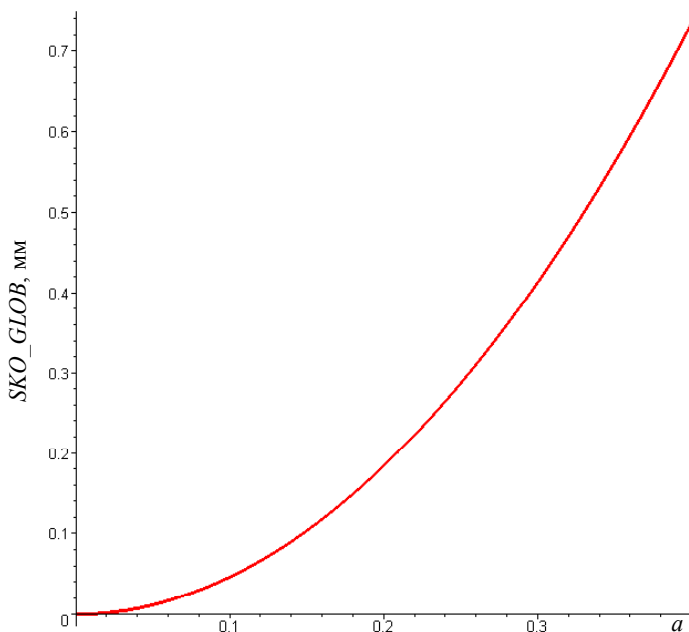


Рис. 10

Соответствующая функция при этом имеет вид

$$SKO_GLOB = \frac{100\sqrt{20}a^2}{3R\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{\arctg\left(\frac{R+x_0\cos(v)}{W}\right) - \arctg\left(\frac{x_0\cos(v)}{W}\right)}{W} dv} \quad (18)$$

Здесь $W = \sqrt{x_0^2 + 4F - x_0^2 \cos^2 v}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Agrawal P.K., Anderson M.S., Card M.F.* Preliminary design of large reflectors with flat facets // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1981. V. AP-29. P. 688–694.
2. *Agrawal P.K., Anderson M.S., Card M.F.* Preliminary design of large reflectors with flat facets [Electronic resource]. NASA Technical Memorandum 80164. Hampton, VA, 1980. URL: http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19800010031_1980010031.pdf
3. *Hedgepeth J.M.* Accuracy potentials for large space antenna reflectors with passive structure // AIAA J. Spacecraft and Rockets. 1982. V. 19. No. 3. P. 211–217.
4. *Hedgepeth J.M.* Accuracy potentials for large space antenna structures // Conference paper 1375 of 39th Annual Conference SAWE. St. Louis, MO, 1980.
5. *Lai C.Y., Pellegrino S.* Feasibility study of a deployable mesh reflector. Technical Report CUED/D-STRUCT/TR186 [Electronic resource] / Department of Engineering, University of Cambridge. Cambridge, 1999. URL: <http://www-civ.eng.cam.ac.uk/dsl/publications.html>
6. *Meguro A., Harada S., Ueba M.* Structural characteristics of an ultra-light large antenna reflector onboard communication satellites // Meeting paper IAC-04-I1.09 of 55th International Astronautical Congress. Vancouver, Canada, 2004.

Статья поступила 05.09.2012 г.

Bukhtyak M.S., Nikul'chikov A.V. AN ESTIMATE FOR THE MEAN-SQUARE DEVIATION OF THE PARABOLOID REFLECTOR SURFACE FROM THE HEXAGONAL FRONTAL NETWORK.

A hexagonal frontal network is designed for a parabolic dish of the reflector type. Its projection to the directorial plane of the parent paraboloid is a regular hexagon network. The mean-square deviation is estimated from the “local” point as well as from the “global” point. Results of the deviation of the whole network in parallel with the paraboloid axis are specified.

Keywords: parabolic reflector, frontal network, mean-square deviation.

BUKHTYAK Mikhail Stepanovich (Tomsk State University)

E-mail: bukhtyakm@mail.ru

NIKULCHIKOV Andrey Viktorovich (Tomsk State University)

E-mail: tracesofdeath@mail2000.ru