На правах рукописи

Фол

УДК 519.863

Романович Ольга Владимировна

# ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМУМА СОСТАВНОЙ ФУНКЦИИ С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРОМ (НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛИ ТОВАРНОГО РЫНКА)

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2012

Работа выполнена на кафедре прикладной информатики Национального исследовательского Томского государственного университета.

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | доктор технических наук, профессор<br>Поддубный Василий Васильевич |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук, профессор<br>Дмитриев Юрий Глебович<br>(Национальный исследовательский Томский государственный университет)<br>доктор физико-математических наук, профессор<br>Рожкова Светлана Владимировна<br>(Национальный исследовательский Томский политехнический университет) |
| Ведущая организация: | Кемеровский государственный университет |

Защита состоится 27 декабря 2012 г. в 10:30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.08 при Национальном исследовательском Томском государственном университете по адресу: 634050, г.Томск, пр. Ленина, 36, корп. 2, ауд. 102.

Отзывы на автореферат, заверенные гербовой печатью организации, просим направлять па адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, ученому секретарю ТГУ Буровой Н.Ю.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Национального исследовательского Томского государственного университета по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36а.

Автореферат разослан 26 ноября 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.267.08
доктор технических наук, профессор А.В.Скворцов

**Актуальность работы**. Одним из важнейших направлений исследования рыночной экономики является математическое моделирование рыночных процессов.

Математическими моделями рыночных процессов занимались А. Курно, Л. Вальрас, А. Маршалл, Г.С. Эванс, В.Парето и др. Из современников это Ю.А. Кузнецов, В.А. Васильев, В.А. Булавский, С.Б. Перминов, Н.К. Обросова, И.К. Коханенко, T. Suzuki, C. Chiarella, P. Zhu, T. He, C. Hommes, T. Puu, T. Onozaki и многие другие.

Одной из первых моделей ценообразования на товарном рынке стала «паутинообразная» модель, на основе которой в дальнейшем рассматривались различные модели «вальрасовского» типа. Во всех этих моделях основными конструкциями выступают линии спроса и предложения, а рыночное равновесие определяется точкой их пересечения. Эти модели позволяют исследовать условия устойчивости рыночного равновесия и траектории перехода рынка к равновесному состоянию при заданных линиях спроса и предложения и широко используются в настоящее время.

Уже первые исследователи рыночных процессов (например, П. Сраффа) подвергали сомнению постулаты линий спроса и особенно предложения. Проблему замены в математических моделях рынка линии предложения товаров можно решить подбором подходящих стратегий поставки товаров на рынок. Она может быть решена на основе использования естественных для рынка критериев оптимальности (например, критерия максимума прибыли продавца), обеспечивающих стремление рынка к динамическому равновесию. Такой подход годится для математического анализа и оптимизации относительно свободных товарных рынков, на которых цены товаров устанавливаются по максимуму выгоды продавца. Однако математические модели рынков такого типа, особенно динамических, функционирующих во времени, тем более в условиях лага поставок товаров на рынок, в настоящее время развиты и исследованы недостаточно.

Поскольку продавец не может продать товаров больше, чем спрос на них, и не может обеспечить спрос, если товаров меньше спроса, общим для оптимизационных моделей рынков подобного типа является составной характер функции прибыли продавца (целевой функции оптимизации). В этой связи можно выделить класс математических моделей систем, как экономических, рыночных, так и технических или даже абстрактных математических, которые функционируют по критерию максимума кусочно-гладкой составной целевой функции.

Для оптимизации непрерывных негладких выпуклых (вогнутых) функций в настоящее время разработан мощный математический аппарат субдифференциалов и построены эффективные субградиентные алгоритмы их численного решения. Это направление представляют следующие отечественные и зарубежные учёные: Ж.Ж. Моро, Ф. Кларк, Н.З. Шор, В.Ф. Демьянов, В.Н. Малозёмов, Л.В. Васильев, Е.А. Нурминский, К. Лемарешаль, Б.Н. Пшеничный, Б.Т. Поляк, П. Вульф, Ю.Е. Нестеров, В.Н. Крутиков, И.М. Прудников, Г.Ш. Тамасян, И.Я. Заботин, И.С. Забродин и др.

Однако, применение численных методов недифференцируемой оптимизации, в том числе субградиентных, возможно только при фиксированных значениях параметров, поскольку области действия функций набора, определяющих составную целевую функцию, в этом случае фиксированы.

Некоторые подходы к решению задач оптимизации составных функций, зависящих от параметра, предложены, например, в работах по оптимизации запасов (Ф. Реймонд, Т. Ньюберри, Дж. Хедли, Т. Уайтин, Дж. Букан, Э. Кенигсберг). Однако достаточно общего подхода к их решению пока не найдено. Поэтому проблема развития методов и алгоритмов исследования математических моделей систем, функционирующих по критериям оптимизации составных функций, зависящих от параметров, остаётся актуальной.

**Целью настоящей работы** является исследование статических и динамических математических моделей систем, функционирующих по критерию максимума составной функции с характеристическим параметром.

В рамках указанной цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Разработать обобщённую математическую модель системы, функционирующей по критерию максимума кусочно-дифференцируемой составной функции с характеристическим параметром в статике и динамике, в том числе с запаздывающим аргументом.
2. Разработать комбинаторно-аналитические методы и алгоритмы анализа, моделирования и оптимизации статических и динамических систем, функционирующих по критерию максимума кусочно-дифференцируемой составной функции с характеристическим параметром.
3. Построить математические модели рынка одного и многих конкурирующих (и/или сопутствующих) товаров в качестве примера системы, функционирующей по критерию максимума кусочно-дифференцируемой составной функции с характеристическим параметром.
4. Разработать комплекс программ моделирования и исследования динамических моделей товарного рынка, функционирующего по критерию максимума прибыли продавца.
5. Провести компьютерное моделирование и численное исследование динамики системы, функционирующей по критерию максимума кусоч-

но-дифференцируемой составной функции с характеристическим параметром, на примере товарного рынка.

**Научная новизна** работы состоит в следующем:

1. Разработана обобщённая математическая модель системы, функционирующей по критерию максимума кусочно-дифференцируемой составной функции с характеристическим параметром в статике и динамике, в том числе с запаздывающим аргументом, основанная на выделении зон возможной локализации максимума целевой функции.

2. Впервые предложен комбинаторно-аналитический метод формального сведения кусочно-гладкой задачи оптимизации составной функции с характеристическим параметром к гладкой путём введения в представление целевой функции предикатных индикаторных функций.

3. На основе предложенного комбинаторно-аналитического метода с использованием алгоритма генерации размещений с повторениями впервые разработан алгоритм («комбинаторно-аналитический») нахождения решения кусочно-дифференцируемой задачи оптимизации составной функции с характеристическим параметром, в том числе запаздывающим, как дифференцируемой.

4. Впервые построена математическая модель инерционного рынка одного и многих конкурирующих (и/или сопутствующих) товаров в качестве примера системы, функционирующей по критерию максимума кусочно-дифференцируемой составной функции (прибыли продавца) с характеристическим параметром (объёмом поставок товаров), не требующая знания линии предложения. Благодаря этому модель позволяет более глубоко изучать динамику переходных рыночных процессов в условиях лага поставок при различных стратегиях поставки товаров на рынок и исследовать явления ценового гистерезиса, отсутствующего в других моделях.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Математическая модель системы, функционирующей по критерию максимума кусочно-дифференцируемой составной функции с характеристическим параметром в статике и динамике, в том числе с запаздывающим аргументом, основанная на выделении зон возможной локализации максимума целевой функции.

2. Метод формального сведения кусочно-гладкой задачи оптимизации к гладкой путем введения в представление целевой функции предикатных индикаторных функций.

3. Комбинаторно-аналитический алгоритм решения задач анализа, моделирования и оптимизации статических и динамических систем, функционирующих по критерию максимума составных функций, зависящих от характеристического параметра, в том числе с запаздывающим

аргументом, с использованием аппарата предикатных индикаторных функций и генератора размещений с повторениями.

4. Математическая модель инерционного рынка одного и многих конкурирующих (и/или сопутствующих) товаров как пример системы, функционирующей по критерию максимума кусочно-дифференцируемой составной функции (прибыли продавца) с запаздывающим характеристическим параметром (объёмом поставок товаров на рынок).

5. Комплекс программ имитационного моделирования и исследования статических и динамических систем, функционирующих по критерию максимума составной функции с характеристическим параметром.

**Методы исследования.** В ходе исследования были использованы методы математического анализа, линейной алгебры, вычислительной математики, оптимизации, математического и имитационного моделирования, математической статистики.

**Теоретическая значимость работы** заключается в следующем:

1. Разработанный комбинаторно-аналитический метод позволил впервые в комбинаторно-аналитической форме решить задачу оптимизации составной функции с характеристическим параметром, что существенно расширяет область теоретического исследования статических и динамических оптимизационных систем.

2. Разработанная математическая модель системы, функционирующей по критерию максимума составной функции с характеристическим параметром, имеет самостоятельное значение и может применяться для теоретического исследования широкого круга соответствующих явлений в экономике, технике, экологии, биологии, медицине и др.

**Практическая ценность диссертационной работы** заключается в том, что:

1. Разработанная математическая модель системы, функционирующей по критерию максимума составной функции с запаздывающим характеристическим параметром, может быть использована для решения практических задач оперативного управления поставками товаров на рынки, супермаркеты и другие торговые точки, управления запасами и т.п.

2. Комплекс программ имитационного моделирования и исследования статических и динамических систем, функционирующих по критерию максимума составной функции с характеристическим параметром, в применении к исследованию динамической модели инерционного рынка одного или многих товаров, функционирующего по критерию максимума прибыли продавца, позволяет сравнивать по этому критерию различные стратегии поставки товаров на рынок, в том числе известные и вновь предлагаемые, а также находить оптимальные стратегии, обеспечивающие максимальную эффективность рынка по этому параметру.

**Достоверность и обоснованность** всех полученных результатов подтверждается строгими математическими выкладками, возможностью адекватной интерпретации результатов моделирования и совпадением результатов моделирования с известными решениями.

**Личный вклад автора.** Постановка задачи, планирование основных путей их решения и обсуждение результатов осуществлялись совместно с научным руководителем. Разработка и исследование алгоритмов, проведение вычислительного эксперимента, реализация и отладка программного обеспечения осуществлялись автором самостоятельно.

**Апробация диссертационной работы.** Основные положения и отдельные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

1. VI – XI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием в г. Анжеро-Судженске в 2007 – 2012 г.
2. Международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященная 100-летию со дня роджения С.Л. Соболева в г. Новосибирске в 2008 г.
3. X международной ФАМЭТ конференции в г. Красноярске в 2011 г.
4. Международной конференции «Современные проблемы математики, информатики и биоинформатики», посвященной 100-летию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР А.А. Ляпунова в г. Новосибирске в 2011 г.
5. XIX международной конференции «Математика. Компьютер. Образование» в г. Дубна в 2012 г.
6. IX Международной конференции студентов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук» в г. Томске в 2012 г.
7. IX Российской конференции с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» в 2012 г.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 14 печатных работ, в том числе четыре статьи из списка, рекомендованного ВАК РФ.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы из 131 наименования. Общий объём работы составляет 133 страницы.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Введение** содержит общую характеристику работы, её актуальности, новизны, научной и практической значимости, апробации работы и опубликованности основных научных результатов.

**Первая глава** диссертации содержит обзор методов оптимизации недифференцируемых, в том числе составных функций, а также обзор основных экономических моделей (управления запасами, товарных рынков), которые связаны с проблематикой оптимизации составных функций.

Скалярная составная функция $f(x, q)$ скалярной или векторной переменной $x$, в общем случае зависящая от скалярного или векторного параметра $q$, определяется на разбиении $\{X_i(q), i=\overline{1,n}\}$ области $X \subset R$ набором функций $\{f_i(x,q), i=\overline{1,n}\}$, таких, что областью действия каждой функции $f_i(x, q)$ является множество $X_i(q), i=\overline{1,n}$: $f(x,q)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x,q)\cdot 1(x\in X_i(q))$, где $\bigcup_{i=1}^{n} X_i(q)=X$, $X_i(q)\bigcap X_j(q)=\varnothing$, $i\neq j$, $i,j=\overline{1,n}$, $1(x\in X_i(q))$ – индикаторная функция. Параметр $q$, будем называть **характеристическим**. Составная функция относится к классу негладких функций даже при гладких функциях исходного набора из-за возможных разрывов как функции, так и её производных на границах элементов разбиения.

Возникает проблема исследования поведения систем, функционирующих по критерию максимума составной функции, в зависимости от характеристических параметров и выявления возможностей дальнейшей оптимизации систем по этим параметрам (задача параметрического математического программирования с составной целевой функцией): $J(q)=\max_{x\in X} f(x,q)$, $J=\operatorname{opt}_{q\in U} J(q)$.

Особенно ярко проявляется влияние характеристических параметров $q$ на поведение динамических систем, функционирующих во времени, когда параметры могут быть функциями времени $q(t)$, в том числе с запаздывающим аргументом $q(t-\tau)$. В этом случае состояние системы $x(t)$ также зависит от времени $t$.

К задачам оптимизации составных функций приводятся также непрерывно-дискретные максиминные (минимаксные) задачи оптимизации, в которых максимум (минимум) целевой функции ищется по непрерывной переменной $x$, а сама целевая функция определяется как минимум (максимум) по дискретной переменной $i$. При этом целевая функция также может зависеть от параметров. Например, в максиминных задачах этого типа целевая функция максимизации имеет вид: $f(x,q)=\min_i\{f_i(x,q), i=\overline{1,n}\}$, где все функции набора $\{f_i(x,q), i=\overline{1,n}\}$ определены на всём множестве $X$, но это множество естественным образом распадается на непересекающиеся (связные или несвязные, включая пустые) подмножества $X_i(q)$, $i=\overline{1,n}$, зависящие от параметра $q$ и образующие зоны действия тех функций набора, которые являются на этих подмножествах составляющими нижней границы множества функций этого набора. Задача максимизации нижней границы $f(x, q)$ множества таких функций образует непрерывно-дискретную максиминную задачу вида $J(q) = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{i} \left\{ f_i(x, q), i = \overline{1, n} \right\}$.

Простейшей задачей такого рода является задача исследования зависимости (например, от параметра сдвига) максимума нижней границы набора вогнутых параболических функций и отыскания её максимума-максиморума по параметру. Подобные задачи возникают в теории игр с Природой (нижняя цена игры), в некоторых видах дифференциальных игр уклонения-преследования, в теории принятия решений (осторожный критерий А. Вальда) и в других областях. Целевая функция этих задач также недифференцируема (кусочно-дифференцируема), причём множество точек недифференцируемости зависит от параметра $q$.

Во **второй главе** рассматриваются динамические системы, функционирующие по критерию максимума составной целевой функции с запаздывающим характеристическим параметром, на примере инерционного товарного рынка при различных стратегиях поставки товара в условиях запаздывания.

В разделе 2.1 разработана формальная математическая модель динамической системы, функционирующей в дискретном времени $t = 0,1,2,...$ по критерию максимума составной функции с запаздывающим характеристическим параметром.

Последовательно решаются две задачи. **Первая задача** – задача максимизации составной функции при заданных начальных условиях и заданных значениях всех переменных на предшествующем («разгонном») интервале длины $\tau$ (запаздывания) при фиксированном характеристическом параметре. **Вторая задача** связана с нахождением значения запаздывающего характеристического параметра $q$, при котором достигается максимум максиморум составной целевой функции по аргументу $q(t - \tau)$.

В разделе 2.2 на основе математической модели, предложенной в разделе 2.1, рассматривается имитационная динамическая модель рынка одного товара с оптимальной стратегией поставки товара в условиях запаздывания поставки. Получено точное решение задачи оптимизации поставки товара на рынок в условиях запаздывания при детерминированном спросе, обеспечивающее максимум максиморум составной целевой функции прибыли продавца. Объём поставки товара выступает в качестве запаздывающего характеристического параметра. Показано, что оптимальная стратегия поставки товара на рынок может быть реализована с помощью математической модели, позволяющей точно прогнозировать состояние рынка вперёд на время запаздывания, и определяется условиями состояния рынка (товарного дефицита, затоваривания рынка, динамического равновесия рынка). Построен алгоритм нахождения оптимальной стратегии поставки товара на рынок на основе модели прогноза состояния рынка. Рассмотрим эту модель подробнее.

Пусть рынок одного товара функционирует в дискретном времени $t \in N = \{0,1,2,...\}$, $P(t)$ – цена товара в момент времени $t$, $Q^O(t)$ – остаток непроданного товара на этот момент времени, $Q^Z(t-\tau)$ – объём товара, заказываемого в момент времени $t-\tau$ для поставки на рынок к моменту $t$ (стратегия поставок). Предполагается, что заказанный товар поступает на рынок с запаздыванием на $\tau$ единиц времени. Спрос на товар при цене $P(t)$ обозначим через $Q^D(t)$. Пусть в момент $t$ дискретного времени спрос на товар имеет вид простейшей линейной зависимости: $Q^D(t) = Q_m - aP(t)$, где $Q_m > 0$ и $a > 0$ – заданные константы. Объём $Q(t)$ товара, предлагаемого к продаже в момент времени $t$, складывается из остатков товара в объеме $Q^O(t)$ от продаж на предыдущем интервале дискретного времени и товара в объеме $Q^Z(t-\tau)$, заказанного продавцом в момент времени $t-\tau$ и поступающего на рынок к моменту времени $t$: $Q(t) = Q^O(t) + Q^Z(t-\tau)$. Пусть $Q^S(t)$ – объём продаж в момент $t$. Тогда, очевидно, $Q^S(t) = \min(Q^D(t), Q(t))$. Остатки товара подчиняются уравнению: $Q^O(t+1) = Q^O(t) + Q^Z(t-\tau) - Q^S(t)$.

Пусть $J(t)$ – прибыль продавца на $t$-м интервале дискретного времени, равная разности между выручкой от продажи товара и затратами на его приобретение ($P_1$ – цена закупки единицы товара) и хранение ($P_2$ – цена хранения единицы товара):

$$J(t) = Q^S(t)P(t) - Q^Z(t-\tau)P_1 - Q^O(t)P_2 - \frac{R}{2}\left(P(t) - P(t-1)\right)^2. \quad (1)$$

Последнее слагаемое (с коэффициентом $R > 0$) выражает «штрафные санкции» или потери в прибыли, связанные с изменением цены товара, и определяет инерционность рынка. Поскольку $Q^S(t)$ – составная функция, прибыль продавца $J(t)$ – тоже составная функция.

Решается задача нахождения значения цены товара $P(t)$ в момент времени $t$ при условии, что на предыдущем $(t-1)$-м шаге она равнялась $P(t-1)$, и дополнительной поставки товара $Q^Z(t-\tau)$, обеспечивающей максимальную прибыль продавца при заданной линии спроса на $t$-ом интервале дискретного времени: $J(t) \Rightarrow \sup\limits_{P(t),\, Q^Z(t-\tau)}$. В такой постановке для описания динамики рынка не требуется знания линии предложения (в отличие от классической модели Вальраса-Маршалла). При решении этой оптимизационной задачи автоматически получаются значения цены товара $P(t)$, объёма спроса $Q^D(t)$, объёмов продаж $Q^S(t)$, остатков непроданного товара $Q^O(t)$ и прибыли продавца $J(t)$ для каждого текущего момента дискретного времени $t$. При этом должны выполняться ограничения на величину возможной цены товара $P(t)$: $P_1 < P_{\min} < P(t) < P_{\max} = Q_m/a$ (8) и на величину дополнительного заказа товара $Q^Z(t-\tau) \geq 0$.

Первый этап решения задачи оптимизации – нахождение оптимальной по критерию (1) цены $P(t)$ товара при фиксированном объёме $Q(t)$ поставки товара на рынок в момент времени $t$. В силу составного характера целевой функции выделяются области (зоны) состояния рынка, соответствующие дефициту товара на рынке (область 1, в которой $Q(t) < Q^D(t)$), затовариванию рынка (область 2, в которой $Q(t) > Q^D(t)$) и балансу спроса и предложения (область 3, область динамического равновесия, в которой $Q(t) = Q^D(t)$).

1) В области товарного дефицита имеем: $Q(t) < Q^D(t)$, $Q^S(t) = Q(t)$.

Максимум целевой функции (1) достигается в точке $P(t) = P(t-1) + \dfrac{Q(t)}{R} = P^{(1)}(t)$. Это выражение справедливо только для $Q(t)$ из области 1: $Q(t) < \dfrac{R(Q_m - aP(t-1))}{a+R} = Q^{(1)}(t)$. Видно, что $P^{(1)}(t)$ растет с ростом $Q(t)$ по линейному закону от $P^{(1)}(t)|_{Q(t)=0} = P(t-1)$ до $P^{(1)}(t)|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)} = \dfrac{Q_m + RP(t-1)}{a+R} = P^{(1)}_{\max}(t)$.

2) В области затоваривания рынка имеем: $Q(t) > Q^D(t)$, $Q^S(t) = Q^D(t)$,

Максимум (1) достигается в точке $P(t) = \dfrac{Q_m + RP(t-1)}{2a+R} = P^{(2)}(t)$. Это выражение справедливо лишь для $Q(t)$, принадлежащих области 2: $Q(t) > \dfrac{R(Q_m - aP(t-1)) + aQ_m}{2a+R} = Q^{(2)}(t)$. В области 2 $P^{(2)}(t)$ не зависит от $Q(t)$. В данном разделе показано, что $Q^{(2)}(t) > Q^{(1)}(t)$.

3) В области баланса спроса и предложения (то есть в области динамического равновесия рынка) имеем: $Q(t) = Q^D(t)$, $Q^S(t) = Q^D(t)$. Тогда $Q(t) = Q_m - aP(t)$, откуда $P(t) = \dfrac{Q_m - Q(t)}{a} = P^{(3)}(t)$. Границами области 3 по $Q(t)$ являются $Q^{(1)}(t)$ и $Q^{(2)}(t)$: $Q^{(1)}(t) \leq Q(t) \leq Q^{(2)}(t)$. Здесь $P^{(3)}(t)$ линейно убывает с ростом $Q(t)$ от $\dfrac{Q_m + RP(t-1)}{a+R} = P^{(1)}_{\max}(t)$ до $\dfrac{Q_m + RP(t-1)}{2a+R} = P^{(2)}(t)$.

На рис. 1 в качестве примера изображена зависимость условно-оптимальной (при фиксированном $Q(t)$) цены $P(t)$ товара при следующих параметрах: $Q_m = 4$, $a = 0.4$, $P_1 = 3$, $R = 50$, $P(t-1) = 7$. При этом

$Q^{(1)}(t) = 1.191$, $Q^{(2)}(t) = 1.213$, $P^{(1)}_{\max}(t) = 7.024$, $P^{(2)}(t) = 6.969$. Полужирным шрифтом выделены номера зон.

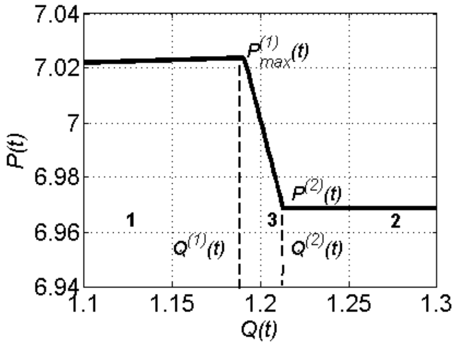


Рис. 1. Условно-оптимальная цена

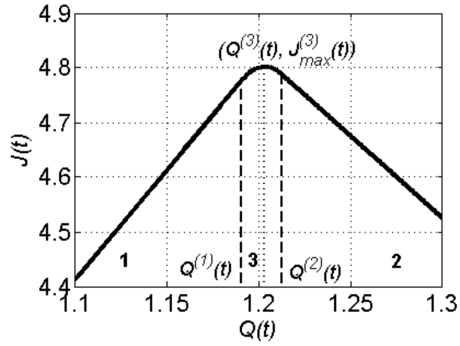


Рис. 2. Условно-максимальная прибыль

Второй этап позволяет найти значение характеристического параметра $Q(t)$, обеспечивающее максимум максиморум целевой функции. В каждой зоне отдельно находится зависимость целевой функции от $Q(t)$. Показано, что точка $Q^{(3)}(t)$ максимума $J^{(3)}(t)$ лежит в области 3. В результате проведенного анализа получена формула расчёта оптимального размера поставки товара на рынок $Q^{(3)}$:

$$Q(t) = \frac{R(Q_m - aP(t-1)) + a(Q_m - aP_1)}{2a + R} = Q^{(3)}(t).$$

На рис. 2 для того же примера приведен ход условно-оптимальной прибыли (при фиксированном $Q(t)$ и при $Q^{O}(t) = 0$) с указанием точки глобального максимума ($Q^{(3)}(t) = 1.203$, $J^{(3)}_{\max}(t) = 4.802$).

Максимальное значение прибыли в зоне 3 достигается при $Q(t) = Q^{(3)}(t)$ и равно $J^{(3)}_{\max}(t) = J^{(3)}(t)|_{Q(t)=Q^{(3)}(t)}$. Однако, максимум максиморум целевой функции $J^{(3)}_{\max}(t)$ достижим только при $Q^{O}(t) \le Q^{(3)}(t)$: в этом случае можно заказать недостающий товар в объеме $Q^{Z}(t - \tau) = Q^{(3)}(t) - Q^{O}(t)$. Но если остатков больше оптимального значения $Q^{(3)}(t)$, то возможно получить только условно-максимальную прибыль $J^{(3)}(t)|_{Q(t)=Q^{O}(t)}$.

Задача имитационного моделирования поведения рынка с оптимальной стратегией поставки товара в условиях запаздывания поставки решается с использованием **двух моделей**. Одна модель – **имитационная**. Она моделирует динамику рынка при известном на каждом шаге $t$ объёме поставки $Q^{Z}(t)$. Другая модель – **упреждающая**. Она предназначена для определения будущего состояния рынка – на момент $t + \tau$. Модель прогноза запускается в каждый момент времени $t$ на $\tau$ шагов вперёд с начальными условиями, выражающими состояние имитационной модели в этот момент времени. По предсказанному состоянию производится расчёт требуемой к этому моменту времени оптимальной поставки товара $Q^Z(t+\tau)$, которая и принимается к реализации в имитационной модели.

На рис. 3 приведена схема взаимодействия имитационной модели функционирования рынка и модели прогноза состояния рынка на τ шагов вперёд.

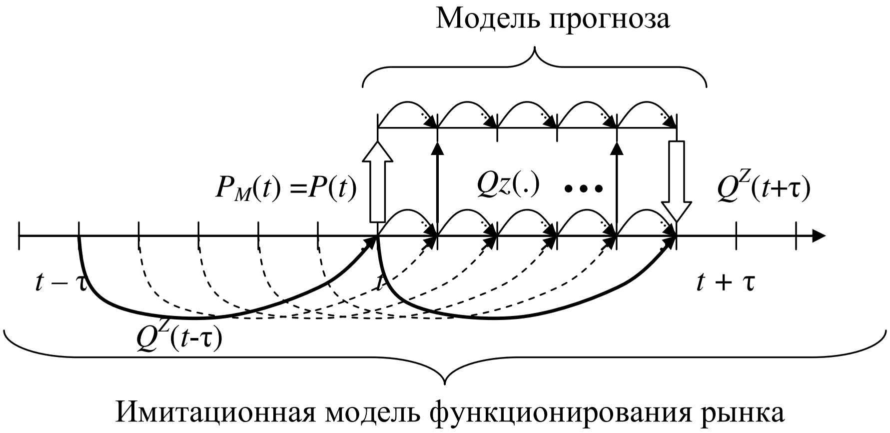


Рис. 3. Взаимодействия имитационной модели и модели прогноза

Проведено численное моделирование динамической модели рынка одного товара с оптимальной запаздывающей стратегией поставки товара. На рис. 4 представлена динамика цен товаров на рынке, на рис. 5 − динамика прибыли для ситуации резкого вывода системы из состояния равновесия в момент времени $t = 0$ при $\tau = 10,20,30$.

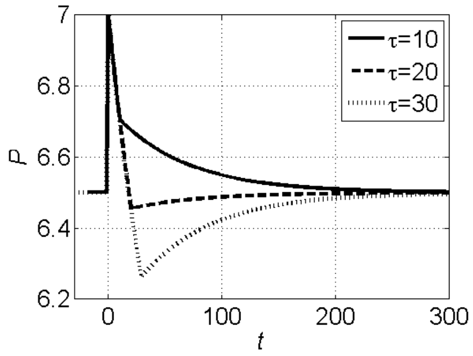


Рис. 4. Оптимальная динамика цены

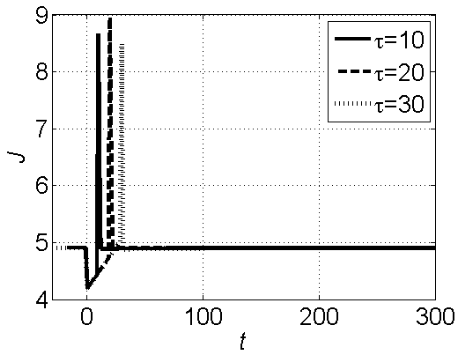


Рис. 5. Динамика прибыли

В разделе 2.3 для решения задачи оптимизации составной функции с запаздывающим характеристическим параметром предлагается новый комбинаторно-аналитический метод, основанный на использовании индикаторных предикатных функций $C^{(k)}(t)$, которые указывают состояние рынка: $C^{(k)}(t) = 1$ − присутствие товара в $k$-ой зоне, $C^{(k)}(t) = 0$ − отсутствие товара в $k$-ой зоне ($k = 1,2,3$ − номера зон: товарного дефицита, затоваривания, динамического равновесия).

Введение предикатных индикаторных функций делает задачу оптимизации формально гладкой и позволяет получить компактное аналитическое выражение условий оптимальности. Целевая функция (1) переписывается следующим образом:

$$J(t)=Q(t)P(t)C^{(1)}+(Q_m-aP(t))P(t)\left(C^{(2)}+C^{(3)}\right)-Q(t)P_1+Q^O(t)(P_1-P_2)-$$
$$-\frac{R}{2}(P(t)-P(t-1))^2\Rightarrow\sup_{P(t)|Q(t)}. \qquad (2)$$

Опуская аргумент $t$ и логически объединяя условия максимума этой функции для первого этапа оптимизации по всем зонам, получаем их точное аналитическое представление через предикатные функции:

$$\frac{\partial J}{\partial P}\left(C^{(1)}+C^{(2)}\right)+(Q_m-aP-Q)C^{(3)}=0,\ \ \frac{\partial^2 J}{\partial P^2}\left(C^{(1)}+C^{(2)}\right)-aC^{(3)}<0. \qquad (3)$$

Из условий (3) получается точное аналитическое выражение решения задачи оптимизации (2) через $Q(t)$ и предикатные функции. При необходимости проводится второй этап оптимизации, дающий оптимальное значение $Q(t)$ через $\{C^{(k)},\ k=1,2,3\}$.

Такой подход позволяет построить универсальный комбинаторно-аналитический алгоритм точного решения задачи максимизации составной функции и исследовать рынок во всех зонах. Алгоритм выделения правильного решения заключается в следующем: в каждый момент времени $t$ выдвигаются гипотезы о том, в какой зоне окажется максимум прибыли через $\tau$ моментов времени. В задаче с одним товаром будет всего 3 гипотезы – на рынке дефицит товара, рынок затоварен или рынок находится в равновесии. Каждой гипотезе соответствует свой набор индикаторных предикатных функций. На каждом шаге решаются задачи оптимизации для каждой из трёх гипотез. После каждого решения находится фактическое значение индикаторных предикатных функций. Критерием отбора правильного решения является совпадение фактического и гипотетического предикатов. Если совпадения нет, то формируется следующая гипотеза. Окончательно выбирается гипотеза, для которой гипотетическое состояние и состояние после оптимизации совпадают. По ней продавец определяет объём заказа. Перебор гипотез осуществляется генератором размещений с повторениями. Изложенный метод назван **комбинаторно-аналитическим**.

В разделе 2.4 рассматриваются динамические модели рынка одного товара с идеальной стратегией и различными субоптимальными стратегиями поставки товара на рынок в условиях запаздывания. Идеальной названа стратегия поставки, точно соответствующая спросу (она не всегда реализуема). Субоптимальные стратегии снижают прибыль, но могут оказаться более удобными для продавца, чем оптимальная стратегия. Рассмотрены такие субоптимальные стратегии заказа товара как сбалансированная (без предсказания цены и спроса), с полиномиальным предсказанием, с предсказанием по неподвижной точке отображения гипотетической цены товара в оптимальную и др.

Для каждой из рассмотренных стратегий поставки товаров приводилось численное моделирование рынка. Асимптотически (при $t \to \infty$) все стратегии поставки дают одинаковый результат – поставки $Q^* = Q^{D*}$, равные асимптотически оптимальному спросу $Q^{D*} = (Q_m - aP_1)$, соответствующему оптимальной асимптотически равновесной цене $P^* = (Q_m + aP_1)/2a$.

В разделе 2.5. исследуется влияние флуктуаций покупательского спроса на переменные, описывающие функционирование рынка в условиях запаздывания поставки товара на рынок при детерминированной (оптимальной в отсутствие флуктуаций) стратегии поставки товара (раздел 2.2). Спрос принимает вид: $Q^D(t) = Q_m - aP(t) + \xi(t)$, где $\xi(t)$ – усечённый (для обеспечения неотрицательности спроса) стационарный некоррелированный нормальный случайный процесс с нулевым средним значением и стандартным отклонением σ. Обнаружено смещение равновесной цены, вызванное несимметрией (усечением) распределения спроса.

В **третьей главе** разработана динамическая математическая модель товарного рынка конкурирующих (сопутствующих) товаров с запаздыванием в поставках товара. Решается задача оптимизации стратегии поставок товаров на рынок в предположении детерминированности спроса. Критерием оптимальности функционирования рынка является максимизация суммарной прибыли продавца от продажи товаров с учётом влияния цен конкурирующих товаров на спрос товара каждого вида. Предложен алгоритм нахождения оптимального решения. Разработка этой модели оказалась возможной благодаря использованию нового комбинаторно-аналитического метода, использующего аппарат индикаторных предикатных функций, предложенный в разделе 2.3 главы 2. На рис. 6, 7 представлены динамика цен товаров на рынке конкурирующих товаров и динамика прибыли.

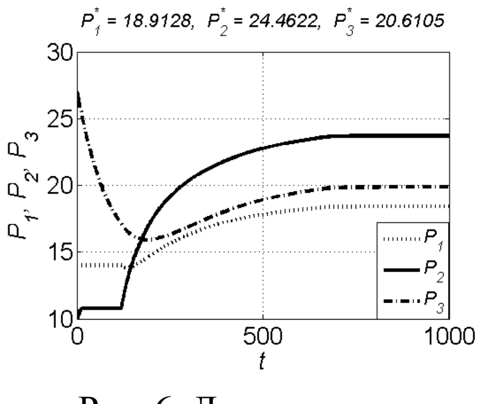


Рис. 6. Динамика цен

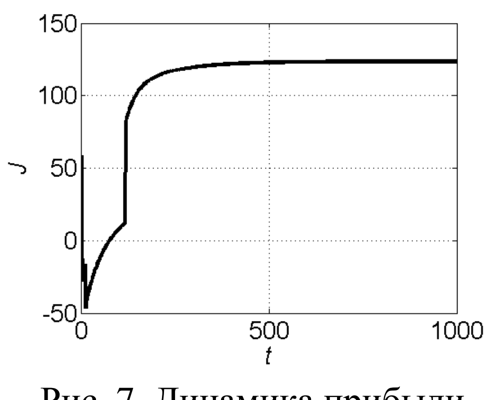


Рис. 7. Динамика прибыли

В **четвертой главе** исследуется динамическая математическая модель, функционирующая по максиминному критерию. Предлагается новый комбинаторно-аналитический метод решения непрерывно-дискретной максиминной задачи оптимизации, позволяющий свести задачу недифференцируемой максимизации нижней границы конечного множества дифференцируемых вогнутых функций к конечному набору задач дифференцируемой оптимизации. Предложенный метод рассмотрен на примере решения максиминной задачи для двух и трёх вогнутых квадратичных функций, зависящих от параметра.

В **пятой главе** описан программный комплекс моделирования функционирования товарного рынка в условиях запаздывания поставки товара.

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. Выделен класс моделей статических и динамических систем, функционирующих по критерию максимума составной функции с характеристическим параметром.

2. Разработана обобщённая математическая модель системы, функционирующей по критерию максимума кусочно-дифференцируемой составной функции с характеристическим параметром в статике и динамике, в том числе с запаздывающим аргументом, основанная на выделении зон возможной локализации максимума целевой функции.

3. Впервые предложен комбинаторно-аналитический метод формального сведения кусочно-гладкой задачи оптимизации составной функции с характеристическим параметром к гладкой путём введения в представление целевой функции предикатных индикаторных функций.

4. На основе предложенного комбинаторно-аналитического метода с использованием алгоритма генерации размещений с повторениями впервые разработан алгоритм («комбинаторно-аналитический») нахождения решения кусочно-дифференцируемой задачи оптимизации составной функции с характеристическим параметром, в том числе запаздывающим, как дифференцируемой.

5. Построена оригинальная математическая модель инерционного рынка одного и многих конкурирующих (и/или сопутствующих) товаров в качестве примера системы, функционирующей по критерию максимума кусочно-дифференцируемой составной функции (прибыли продавца) с характеристическим параметром (объёмом поставок товаров), не требующая знания линии предложения. Благодаря этому модель позволяет более глубоко изучать динамику переходных рыночных процессов в условиях лага поставок при различных стратегиях поставки товаров на рынок и исследовать явления ценового гистерезиса, отсутствующего в других моделях.

6. Создан комплекс программ имитационного моделирования и исследования предложенной динамической математической модели инерционного товарного рынка одного или многих товаров, функционирующего по критерию максимума прибыли продавца. Реализация модели рынка многих товаров существенно опирается на использование комбинаторно-аналитического метода.

7. Моделирование рынка с оптимальной поставкой на рынок одного или многих (конкурирующих и/или сопутствующих) товаров в условиях лага поставки проведено с использованием двух параллельно функционирующих взаимодействующих моделей – основной имитационной модели рынка (детерминированной или стохастической) и детерминированной прогнозирующей модели для предсказания будущего состояния рынка на время лага поставки.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### В журналах, рекомендованных ВАК России

1. Поддубный В.В., Романович О.В. Рестриктивная динамическая модель инерционного рынка одного товара с оптимальной поставкой товара на рынок в условиях запаздывания // Вестник Том. гос. ун-та. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика», 2011. – № 4 (17). – С. 16–24.

2. Поддубный В.В., Романович О.В. Имитационное статистическое моделирование рынка одного товара с оптимальной детерминированной стратегией поставки товара в условиях стохастичности спроса // Вестник Том. гос. ун-та. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика», 2012. – №1(18). – С. 28–38.

3. Поддубный В.В., Романович О.В. Математическое моделирование оптимального рынка конкурирующих товаров в условиях лага поставок // Компьютерные исследования и моделирование, 2012. – Т. 4. – №2. – С. 431–450.

4. Поддубный В.В., Романович О.В. Комбинаторно-аналитический метод максимизации негладкой точной нижней границы множества вогнутых гладких функций, зависящих от параметра // Вестник Том. гос. ун-та. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика», 2012. – №2(20). – С. 96–107.

### В других изданиях

5. Поддубный В.В., Романович О.В. Рынок как оптимальная самоуправляемая система // ИТММ–2007: Материалы VI Международной науч.-практич. конференции, 2007. – С. 144–148.

6. Поддубный В.В., Романович О.В. Рынок как рестриктивная самоуправляемая система с запаздыванием // ИТММ – 2008: Материалы VII Всероссийской науч.-практич. конференции с международным участием, 2008. – Ч. 1. – С. 202–206.

7. Поддубный В.В., Романович О.В. Рынок как самоуправляемая инерционная динамическая система с запаздыванием при сбалансированной стратегии поставок товара // Вестник Том. гос. ун-та. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика», 2009. –№ 4 (9). – С. 5–16.

8. Поддубный В.В., Романович О.В. Рынок как инерционная самоуправляемая система с запаздыванием и скользящим полиномиальным предсказанием спроса // ИТММ-2009: Материалы VIII Всероссийской науч.-практич. конференции с международным участием, 2009. – С. 302–308.

9. Поддубный В.В., Романович О.В. Рынок как инерционная самоуправляемая система с запаздыванием и предсказанием спроса по неподвижной точке // ИТММ-2010: Материалы IX Всероссийской науч.-практич. конференции с международным участием, 2010. – С.130–135.

10.Поддубный В.В., Романович О.В. Рынок с фиксированной линией спроса как оптимальная система // Труды X Международной ФАМЭТ конференции, 2011. – С. 318–323.

11.Поддубный В.В., Романович О.В. Оптимизация рестриктивной динамической системы с запаздывающим управлением на примере инерционного рынка одного товара // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики, информатики и биоинформатики», посвященной 100-летию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР А. А. Ляпунова, 2011. – С. 69.

12.Поддубный В.В., Романович О.В. Имитационная модель рынка одного товара с оптимальной детерминированной стратегией поставки товара в условиях стохастичности спроса // ИТММ-2011: Материалы X Всероссийской науч.-практич. конференции с международным участием, 2011. –Ч.2. – С.47–53.

13. Поддубный В.В., Романович О.В. Имитационная модель рынка одного товара с оптимальной стратегией поставки товара в условиях запаздывания // IX Международная конференция студентов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», 2012. – С. 642–644. [Электронный ресурс] – URL:
http://science-persp.tpu.ru/Previous%20Materials/Konf_2012.pdf .

14. Поддубный В. В., Романович О. В. Имитационное моделирование рынка многих товаров // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : Материалы 9-ой Российской конф. с международным участием, 2012. – С. 116.