МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И.А. Александров

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ
Часть 1

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.
КОМПЛЕКСНЫЕ ФУНКЦИИ.
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ.
РЯДЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ.
ЦЕЛЫЕ И МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

Учебное пособие

Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки высшего профессионального образования 010100 – Математика, 010200 – Математика и компьютерные науки, 010800 – Математика и математическое моделирование

Издательство Томского университета
2012

УДК 517.53 (075.8)
ББК 22.161.5 Я 73
А 46

Александров И.А.
А 46 Комплексный анализ: Комплексные числа. Комплексные функции. Интегральные теоремы. Ряды и произведения. Целые и мероморфные функции: Учеб. пособие. – Ч. 1. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2012. – 204 с.

ISBN 978-5-7511-2086-3

В книге дано современное построение теории комплексного числа как элемента поля, составленного из пар действительных чисел. Среди отображений комплексной плоскости выделяются как объект глубокого изучения голоморфные отображения, имеющие многочисленные применения в математике и составляющие важную часть аналитического аппарата во многих областях науки благодаря, в частности, интегральным теоремам. Изложены методы вычисления интегралов, основанные на этих теоремах. Доказаны основные теоремы о разложениях целых и мероморфных функций, о свойствах гамма-функции Эйлера. Исследуются многозначные функции как однозначные на римановых поверхностях.

Для студентов университетов, а также для специалистов в разных областях науки, желающих ознакомиться с основными положениями вводной части комплексного анализа.

УДК 517.53 (075.8)
ББК 22.161.5 Я 73

ISBN 978-5-7511-2086-3 © Александров И.А., 2012

ПРЕДИСЛОВИЕ

Начиная с середины XVI в. в работах математиков, занимавшихся поисками решений квадратных и кубических линейных алгебраических уравнений, появляются выражения вида $a+b\sqrt{-1}$, где a, b – действительные числа, $b \neq 0$. Тогда же такие выражения стали называть «мнимыми», отражая в термине неясность, загадочную алгебраическую и геометрическую сущность и даже мистичность этих величин. Вычисления, в ходе которых использовались выражения $a+b\sqrt{-1}$, старались по получению в итоге верного результата изложить без обращения к мнимым выражениям. Известно, что Исаак Ньютон (1643–1727) не включал мнимые величины в понятие числа, поскольку мнимые величины не выражают количества.

В конце XVIII в. стали появляться геометрические истолкования мнимых величин и основных операций над ними. Исчерпывающая ясность была внесена Карлом Фридрихом Гауссом (1777–1855) в письме к Фридриху Вильгельму Бесселю (1784–1846), датированном 1811 г. В нем он пишет: «Так же как совокупность всех действительных величин можно мыслить в виде бесконечной линии, так и совокупность всех величин, действительных и мнимых, можно сделать зримой посредством бесконечной плоскости, каждая точка которой, определяемая абсциссой a и ординатой b, будет как бы представлять величину $a+ib$». Всеобщую известность термин «комплексное число» (буквально – «сложное, составное число»), появившийся сначала в работах Лазаря Карно (1753–1823) в 1803 г., получил благодаря систематическому употреблению К. Гауссом начиная с 1828 г. Знак i для «мнимой единицы» $\sqrt{-1}$, использованный впервые Леонардом Эйлером (1707–1783) в 1777 г. (опубликовано в 1794 г.), стал общепринятым благодаря К. Гауссу.

В свой первый петербургский период работы Л. Эйлер начинает заниматься изучением функций комплексного переменного. Изучая свойства простейших обыкновенных дифференциальных уравнений, Л. Эйлер приходит к формуле (1741 г.) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, первоначально рассмотренной им как парадокс. Есть свидетельства, что даже век спустя окончив вывод формулы Эйлера перед студентами Кембриджского университета, профессор Бергамин Пирс (1809–1880) сказал: «Джентльмены, это, наверное, правда, но она абсолютно парадоксальна; мы не можем понять её, и мы не знаем, что она значит, но мы показали её и поэтому мы знаем, что она должна быть достоверной».

Формула Эйлера позволяет распространить показательную функцию и тригонометрические функции на комплексную плоскость. Далее стало выясняться, что обстоятельному анализу действительных функций действительного переменного способствует выход в комплексную плоскость. Например, функция $1/\left(1+x^2\right)$ задана для всех действительных значений аргументов, но ее ряд Тейлора

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots$$

перестает сходиться при $|x| \geq 1$. Причину этого явления можно обнаружить, заметив, что на единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$ лежат точки – концы вертикального диаметра, в которых раскладываемая в ряд функция обращается в бесконечность.

Полное изучение свойств натурального логарифма стало возможным при замене действительного аргумента на комплексное число. Была выяснена многозначность такого логарифма, в частности, установлены его значения в точке –1: все они образуют счетное множество $(2k+1)\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$.

Были открыты интересные связи между элементарными функциями, которым нет аналогов в действительном анализе.

Систематическому изучению теории комплексных функций комплексного переменного, начало которому было положено в работах Жана де Ронда Даламбера (1707–1783) по сопротивлению жидкостей (1752 г.) и Л. Эйлера по движению жидкостей (1755), посвящен цикл работ Огюста Коши (1789–1857), начатый в 1814 г., «Мемуаром об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами». В этой работе рассматриваются функции, имеющие произ-

водную в смысле комплексного анализа, содержится теорема, называемая нами интегральной теоремой Коши, вводятся вычеты. В работе, опубликованной в 1831 г., получены условия и формулы для разложения комплексной функции комплексного переменного в степенной ряд и указано множество (круг) его сходимости. Обобщение этой теоремы на случай разложения функции в ряд в кольце было опубликовано в 1843 г. Пьером Альфонсом Лораном (1813–1854), французским математиком, по профессии военным инженером.

Успеху О. Коши в превращении теории функций комплексного переменного в новую самостоятельную область математических исследований, обогатившуюся в XIX в. многочисленными результатами, способствовало внедрение в математику повышенной строгости. Огюст Коши, Карл Фридрих Гаусс, Нильс Хендриг Абель (1802–1929), Бернхард Больцано (1781–1848), Карл Теодор Вейерштрасс (1815–1897) дали обоснование анализа, являющегося общепринятым в современной математике.

Если понятие комплексного числа воспринималось с трудом и даже с сопротивлениями со стороны части математиков, то теория функций комплексного переменного с самого начала получила признание специалистов.

В 1851 г. Георг Фридрих Бернхард Риман (1826–1866) представляет докторскую диссертацию по теории функций комплексного переменного с изложением результатов своих исследований, в частности, по конформным отображениям плоской области на плоскую область.

Термин «конформный» образован от латинского conformare (сообщить стройный вид). Первоначально он появился в картографии. В теорию отображений его ввел К. Гаусс (1843 г.). Термин выражает существенное свойство отображения: подобие в бесконечно малых частях. К. Гаусс указал на связь теории отображений с теорией функций комплексного переменного.

В своей диссертации Г. Риман приводит теорему о существовании среди дифференцируемых в области комплексных функций комплексного переменного таких функций, которые конформно отображают односвязную область на круг. Многочисленные попытки дать строгое доказательство теоремы Римана, предпринятые Карлом Германом Аквидусом Шварцем (1813–1921), Карлом Густавом Акселем Гарнаком (1851–1888), Анри Пуанкаре (1854–1912) и др.,

увенчались успехом только в 1900 г. Такое доказательство дано Вильямом Осгудом (1864–1943). Методами теории функций она доказана Константином Каратеодори (1873–1950), Паулем Кёбе (1852–1915) в 1912 г. и в 1921 г. Фридьешем Риссом (1880–1956) как решение задачи на экстремум.

Задачам реализации конформных отображений посвящена обширная литература с изложением точных и приближенных методов.

В диссертации Римана содержатся идеи преодоления трудностей, возникающих при изучении многозначных функций, позволивших построить безупречную теорию многозначных комплексных функций комплексного переменного, обогатившую действительный анализ.

К настоящему времени издано много книг с изучением основ теории функций комплексного переменного. Каждая из них ориентирована на тот или иной объем научных интересов читателя, о чем свидетельствуют объем книги и доступность изложения.

Настоящее учебное пособие адресуется студентам, изучающим математику в классических университетах с ориентацией на самостоятельную исследовательскую и педагогическую работу. В способе изложения материала легко обнаруживается лекционный стиль с тем вниманием к идеям и деталям в выполнении рассуждений, доказательствам теорем, выводам формул, который сложился у автора в результате многолетней работы со студентами-математиками, склонными к самостоятельной работе и старанию понять суть теории.

Представления о содержании учебного пособия дает подробное оглавление, показывающее, что от читателя требуются знания алгебры, математического анализа в объеме начальной университетской подготовки, владение языком математического анализа.

Теория комплексных чисел строится на основании теории действительных чисел, рассматриваемых как поле. Оно выступает как образец для построения поля с элементами, составленными из двух действительных чисел, и с определенными на этих парах понятиями суммы и произведения. Элементы построенного поля называют комплексными числами.

Отдельно рассматриваются комплексные функции действительного переменного и комплексные функции комплексного переменного. Вводятся понятия траектории, кривой как класс

эквивалентных траекторий с последующим использованием этих понятий в теории интеграла по кривой от комплексной функции комплексного переменного. Образованы метрические пространства, позволяющие стандартным образом вводить в множестве комплексных чисел и в его расширении за счет присоединения бесконечно удаленной точки понятия непрерывности, производной. Устанавливается связь между понятиями дифференцируемости в смысле действительного и в смысле комплексного анализа.

Среди комплексных функций комплексного переменного выделяются функции, имеющие производную. Такие функции, называемые голоморфными, составляют важную часть аналитического аппарата комплексного анализа. Построению простейших комплексных функций комплексного переменного, изучению их свойств посвящена третья глава. Здесь же приходится встретиться с многозначными функциями, выяснить природу многозначности и связь с поверхностями Римана.

Глава четвертая посвящена интегральным теоремам Коши для голоморфных функций в односвязных и многосвязных областях, для голоморфных функций с изолированными особенностями. Эти теоремы стали основой для эффективных методов вычисления интегралов, в том числе и несобственных, получения разложений голоморфных функций в степенные ряды и в ряды Лорана в кольце, установления связи вычетов со значениями интегралов по кривой.

В пятой главе для целых функций доказаны теоремы Вейерштрасса о разложениях таких функций на простейшие множители. Разложения мероморфных функций на первичные слагаемые были получены Магнусом Гёстой Миттаг-Леффлером (1846–1927). Теоремы о разложениях применяются к исследованию гамма-функции Эйлера.

В каждой главе имеется некоторое количество простейших примеров. Для закрепления навыков использования методов комплексного анализа следует обратиться к упражнениям и задачам, собранным в задачниках.

В конце каждой главы помещено небольшое количество сравнительно нетрудных задач, иллюстрирующих изложенный материал.

Выражаю благодарность Сергею Анатольевичу Копаневу за участие в обсуждениях многих вопросов, затронутых в книге, Лидии Сергеевне Копаневой, проверившей решение примеров и участвовавшей в подборе задач, Елене Петровне Кузнецовой, выполнившей весь набор книги на компьютере, Константину Васильевичу Ежову, содействовавшему в оформлении графики и дизайна книги.

И.А. Александров

Глава 1

МНОЖЕСТВО КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

В этой главе для построенных в ней комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и её расширения $\overline{\mathbb{C}}$ за счет присоединения к $\mathbb{C}$ бесконечно удаленной точки рассматриваются геометрические модели в виде соответственно плоскости $\mathbb{R}^2$ и сферы Римана S. Евклидова метрика переносится с $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{C}$, с S на $\overline{\mathbb{C}}$ и, как следствие, появляется возможность легко распространить на $\mathbb{C}$ и на $\overline{\mathbb{C}}$ теорию точечных множеств в метрических пространствах в объеме, необходимом для её использования в следующих главах.

§ 1. ПОЛЕ. ПОЛЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1.1. Поле. Рассмотрим некоторое непустое множество F, состоящее из элементов $x, y, z, u, v, \ldots$ произвольной природы, и будем считать, что для его элементов введено понятие *равенство* двух элементов, а также определены какими-то соглашениями понятия *сумма двух элементов* и *произведение двух элементов*, обозначаемые соответственно $=, +, \times$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что F – *поле*, если выполняются следующие девять правил, относящихся к операциям сложения и умножения:

1°) $x + y \in F, \quad x \times y \in F;$

2°) $x + y = y + x$ (коммутативный закон сложения);

3°) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативный закон сложения);

4°) $x \times y = y \times x$ (коммутативный закон умножения);

5°) $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ (ассоциативный закон умножения);

6°) $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$ (дистрибутивный закон);

7°) существуют в F элемент, обозначаемый 0 и называемый *нулем* в F, и элемент, обозначаемый 1 и называемый *единицей* в F, такие, что $x+0=x,\ x\times 1=x$;

8°) для каждого элемента $a\in F$ существует элемент x такой, что $a+x=0$;

9°) для каждого элемента $a\in F\setminus\{0\}$ существует элемент x такой, что $a\times x=1$.

Легко проверить, что множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел и множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел не образуют поля относительно обычных операций сложения и умножения, но множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, то есть чисел вида $m\setminus n$, где $m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}$, – образует поле.

Понятия «поле», а также «кольцо», «идеал», введенные Рихардом Юлиусом Вильгельмом Дедекиндом (1871 г.), легли в основу построения аксиоматического метода в алгебре и стали общепринятыми.

1.2. Упорядоченное поле. В поле F установлено понятие равенства и, следовательно, понятие неравенства, но правила 1°–9° не устанавливают понятий *больше* (обозначение: $>$) или *меньше*. Поэтому необходимы дополнительные правила, относящиеся к неравенствам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что поле F *упорядочено*, если для него выполняются следующие шесть правил:

10°) для любых x, y справедливо $x>y, x=y$, или $y>x$ (закон сравнимости);

11°) для данных x, y может быть справедливо только одно: $x>y,\quad x=y,\quad y>x$ (трихотомия);

12°) если $x>y$, а $y>z$, то $x>z$ (транзитивность);

13°) если $x>y$, то $x+z>y+z$ для любого z (аддитивность упорядочивания);

14°) если $x>y,\quad z>0$, то $x\times z>y\times z$ (мультикативность упорядочивания);

15°) если $x>y$, то $y<x$ (определение знака $<$).

Поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел упорядочено.

1.3. Поле действительных чисел. Понятие *действительное число* возникло путем расширения понятия рационального числа как под влиянием практических потребностей использования математики для выражения значения любой величины, так и в связи с потребностью выполнения операций над числами типа извлечения корня, нахождение логарифма и т.д. Строгие теории действительного числа были созданы в конце XIX в. Г. Кантором, Р. Дедекиндом, К. Вейерштрассом. В отличие от множества рациональных чисел расширенное множество чисел, даваемое этими теориями и называемое действительными числами, обладает свойством полноты, состоящим в том, что всякая фундаментальная последовательность является сходящейся. Если выбрать отрезок конечной длины и принять её за единицу, то каждому отрезку сопоставляется определенное действительное число – его длина.

Геометрически множество действительных чисел изображается направленной (ориентированной) прямой, а отдельные числа – точками на ней. Поэтому совокупность действительных чисел часто называют *числовой прямой*, а отдельные числа на ней – точками. Каждой точке прямой соответствует действительное число, и, подобно прямой, множество действительных чисел непрерывно.

Из способа введения действительных чисел следует выполнение для них условий $1^\circ - 9^\circ$ и условий $10^\circ - 15^\circ$ его упорядоченности. Поле действительных чисел обозначают $\mathbb{R}$ и представляют символом

$$\mathbb{R} = \{x, +, \times, 0, 1\}.$$

Поле $\mathbb{Q}$ является подполем поля $\mathbb{R}$, то есть является полем относительно операций сложения и умножения, заданных в $\mathbb{R}$. Оба поля упорядочены.

§ 2. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

2.1. Построение поля $\mathbb{C}$. Комплексное число. В качестве F рассмотрим множество элементов $\langle x, y \rangle$, составленных из пар действительных чисел x, y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две пары $\langle x_1, y_1\rangle$, $\langle x_2, y_2\rangle$ считаем *равными* (обозначение $\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle$) тогда и только тогда, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Запись $\langle x_1, y_1\rangle \neq \langle x_2, y_2\rangle$ означает, что пары не равны, то есть либо $x_1 \neq x_2$, либо $y_1 \neq y_2$, либо имеют место оба эти неравенства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Суммой* пар $\langle x_1, y_1\rangle$, $\langle x_2, y_2\rangle$ называют пару $\langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle$. Введенную операцию называют *сложением* и пользуются обозначением

$$\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Произведением* пар $\langle x_1, y_1\rangle$, $\langle x_2, y_2\rangle$ называют пару $\langle x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1\rangle$. Введенную операцию называют *умножением*. Для обозначения этой операции используют как равноправные знаки $\times, \cdot$, принятые для обозначения умножения действительных чисел. Таким образом,

$$\langle x_1, y_1\rangle \times \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1\rangle.$$

Для сокращения записи вместо $\langle x_1, y_1\rangle \cdot \langle x_2, y_2\rangle$ пишут: $\langle x_1, y_1\rangle\langle x_2, y_2\rangle$.

Легко проверяемые равенства

$$\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_2, y_2\rangle + \langle x_1, y_1\rangle,$$
$$\langle x_1, y_1\rangle\langle x_2, y_2\rangle = \langle x_2, y_2\rangle\langle x_1, y_1\rangle$$

показывают, что сложение и умножение коммутативны.

Для любых трех пар $\langle x_1, y_1\rangle$, $\langle x_2, y_2\rangle$, $\langle x_3, y_3\rangle$ справедливы равенства

$$\big(\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle\big) + \langle x_3, y_3\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \big(\langle x_2, y_2\rangle + \langle x_3, y_3\rangle\big),$$

$$\big(\langle x_1, y_1\rangle\langle x_2, y_2\rangle\big)\langle x_3, y_3\rangle = \langle x_1, y_1\rangle\big(\langle x_2, y_2\rangle\langle x_3, y_3\rangle\big),$$

означающие ассоциативность соответственно сложения и умножения, а равенство

$$\langle x_1, y_1\rangle\big(\langle x_2, y_2\rangle + \langle x_3, y_3\rangle\big) = \langle x_1, y_1\rangle\langle x_2, y_2\rangle + \langle x_1, y_1\rangle\langle x_3, y_3\rangle$$

показывает, что имеет место свойство дистрибутивности.

Легко видеть, что

$$\langle x, y\rangle + \langle 0,0\rangle = \langle x, y\rangle, \quad \langle x, y\rangle\langle 1,0\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Таким образом, для рассматриваемого множества пар с введенными понятием равенства и операциями сложения и умножения выполняются правила 1°–7°. Роль нуля и единицы выполняют соответственно $\langle 0,0\rangle$ и $\langle 1,0\rangle$.

Введем операцию, обратную операции сложения, называемую *вычитанием*, и операцию, обратную умножению, называемую *делением* так, чтобы выполнялись правила 8° и 9°.

Пусть даны пары $\langle x_1, y_1\rangle$, $\langle x_2, y_2\rangle$. Существует ли пара $\langle x, y\rangle$ такая, что

$$\langle x_1, y_1\rangle + \langle x, y\rangle = \langle x_2, y_2\rangle ?$$

Согласно определению суммы и равенства пар это уравнение равносильно системе двух линейных алгебраических уравнений

$$x_1 + x = x_2,$$

$$y_1 + y = y_2.$$

Она имеет и притом единственное решение

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1.$$

Пару $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ называют *разностью* пар $\langle x_2, y_2\rangle$, $\langle x_1, y_1\rangle$ и записывают в виде $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle - \langle x_1, y_1\rangle$.

Полагая здесь $\langle x_2, y_2\rangle = \langle 0,0\rangle$, имеем $\langle -x_1, -y_1\rangle = -\langle x_1, y_1\rangle$.

Аналогично вводится операция, обратная умножению. Её называют *делением*.

Пусть даны пары $\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle$. Существует ли пара $\langle x, y\rangle$ такая, что

$$\langle x_1, y_1\rangle\langle x, y\rangle = \langle x_2, y_2\rangle ?$$

Согласно определению произведения и равенства пар это уравнение равносильно системе двух линейных алгебраических уравнений:

$$x_1 x - y_1 y = x_2,$$
$$y_1 x + x_1 y = y_2.$$

Исключим из рассмотрения случай, когда $\langle x_1, y_1 \rangle = \langle 0, 0 \rangle$. При любой оставшейся возможности $\langle x_1, y_1 \rangle \neq \langle 0, 0 \rangle$ или, что то же самое, $x_1^2 + y_1^2 \neq 0$. Но тогда определитель системы отличен от нуля и она имеет и притом единственное решение

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Пара

$$\left\langle \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \right\rangle$$

называется *частным* от деления $\langle x_2, y_2 \rangle$ на $\langle x_1, y_1 \rangle$ и обозначается $\langle x_2, y_2 \rangle : \langle x_1, y_1 \rangle$, либо $\dfrac{\langle x_2, y_2 \rangle}{\langle x_1, y_1 \rangle}$, либо $\langle x_2, y_2 \rangle \big/ \langle x_1, y_1 \rangle$.

Для рассматриваемого множества пар выполняются также правила 8° и 9° определения поля. Построенное поле представим символом

$$\{\langle x, y \rangle, +, \times, \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}$$

и, как общепринято, назовем *полем* $\mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элементы поля $\mathbb{C}$ называют *комплексными числами*.

Проведенное выше построение чисто арифметической теории комплексных чисел было предложено в 1837 г. Уильямом Роуаном Гамильтоном (1805–1865), ирландским математиком, разработавшим теорию кватернионов.

Поле $\mathbb{C}$, в отличие от поля $\mathbb{R}$ и поля $\mathbb{Q}$, не упорядочено. Отношения больше, меньше для комплексных чисел не вводятся.

2.2. Алгебраическая форма записи комплексного числа. Сложение и умножение элементов поля $\mathbb{C}$ вида $\langle x, 0 \rangle$ приводят к элементам того же вида:

$$\langle x_1, 0 \rangle + \langle x_2, 0 \rangle = \langle x_1 + x_2, 0 \rangle,$$

$$\langle x_1,0\rangle\langle x_2,0\rangle=\langle x_1x_2,0\rangle,$$

и поэтому множество таких элементов образует подполе поля $\mathbb{C}$, совпадающее с полем $\mathbb{R}$, если полагать $\langle x,0\rangle=x$:

$$\{\langle x,0\rangle,+,\times,\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle\}=\{x,+,\times,0,1\}.$$

Для обозначения пары $\langle 0,1\rangle$ вводится символ i, который называется *мнимой единицей*. Для нее $\langle 0,1\rangle\langle 0,1\rangle=\langle -1,0\rangle=-1$, то есть $i\times i=i^2=-1$.

Будем обозначать комплексное число $\langle x,y\rangle$ одной буквой, полагая $z=\langle x,y\rangle$. С помощью мнимой единицы комплексное число z можно представить в *алгебраической* форме: $z=x+iy$, поскольку

$$\langle x,y\rangle=\langle x,0\rangle+\langle 0,y\rangle=\langle x,0\rangle+\langle 0,1\rangle\langle y,0\rangle=x+iy.$$

Число x называют *действительной* частью комплексного числа $z=x+iy$, а число y – *мнимой* частью комплексного числа z и пишут: $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$, используя сокращения от французских слов Reel (действительный) и Imaginaire (мнимый).

Число $x-iy$ называют *сопряженным* с числом $x+iy$. Для комплексного числа, сопряженного с числом z, используется обозначение $\overline{z}$. Переход от данного числа z к сопряженному называется операцией *комплексного сопряжения* или, короче, *сопряжения*.

Имеют место следующие равенства:

$$\overline{x+iy}=x-iy,\quad \overline{x-iy}=x+iy,$$

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2,\ \overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2,\ z=\overline{\overline{z}}.$$

Комплексное число z совпадает со своим сопряженным тогда и только тогда, когда оно действительное, то есть когда $\operatorname{Im}z=0$.

Легко проверить, что если $z=x+iy$, то

$$\operatorname{Re}z=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad \operatorname{Im}z=\frac{z-\overline{z}}{2i},\quad z\overline{z}=x^2+y^2.$$

2.3. Сложение и умножение комплексных чисел в алгебраической форме. Сложение (вычитание) двух комплексных чисел, согласно определению осуществляемое по формуле

$$\langle x_1,y_1\rangle\pm\langle x_2,y_2\rangle=\langle x_1\pm x_2,y_1\pm y_2\rangle,$$

можно выполнить, обращаясь к алгебраической форме записи этих чисел. Имеем

$$\langle x_1, y_1\rangle \pm \langle x_2, y_2\rangle = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)$$

и, действуя как с обычными двучленами, получаем

$$\langle x_1, y_1\rangle \pm \langle x_2, y_2\rangle = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

Видим, что действительная часть суммы (разности) двух комплексных чисел равна сумме (разности) их действительных частей, а мнимая часть равна сумме (разности) их мнимых частей.

По определению произведения двух комплексных чисел имеем

$$\langle x_1, y_1\rangle\langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1\rangle.$$

Представим множители в левой части равенства в алгебраической форме, произведем умножение двучленов по обычным правилам, заменим i^2 на -1 и соберем действительные слагаемые и слагаемые с множителем i, т.е. проведем следующие вычисления:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2 =$$
$$= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) = \langle x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1\rangle.$$

Видим, что они приводят к результату, соответствующему определению произведения.

Операции сложения и умножения, а следовательно, вычитания и деления, можно производить над комплексными числами вида $z = x + iy$, пользуясь алгебраическими правилами с заменой во встречающихся выражениях $i \times i$ на -1.

Пример. Преобразуем выражение

$$w = (1 - 2i)(3 + i)i - \frac{3 - 4i}{1 - i}$$

с целью представить w в алгебраической форме. Имеем

$$w = \left[3 + 2 - i(6 - 1)\right]i - \frac{(3 - 4i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} =$$
$$= (5 - 5i)i - \frac{3 + 4 + (-4 + 3)i}{2} = 5i + 5 - \frac{1}{2}(7 - i) = \frac{3}{2} + \frac{11}{2}i. \triangleleft$$

§ 3. КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ $\mathbb{C}$

3.1. Геометрическое изображение комплексных чисел. Следуя Гауссу, поставим в соответствие комплексному числу $z = x + iy$ точку $M(x, y)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовой прямоугольной системой координат Oxy, очевидно, единственную. Обратно: точке $M(x, y)$ поставим в соответствие число $z = x + iy$, также единственное. Между плоскостью и множеством комплексных чисел установлено взаимно однозначное соответствие. Число z называют *аффиксом* точки $M(x, y)$. В дальнейшем часто точку $M(x, y)$ с аффиксом z будем обозначать через z и говорить: точка z.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называют *комплексной плоскостью* и обозначают $\mathbb{C}$.

При таком изображении комплексных чисел ось абсцисс представляет действительные числа и поэтому называется также *действительной* осью, а на оси ординат располагаются числа вида $iy, -\infty < y < \infty$, и поэтому её называют *мнимой* осью. Началу координат соответствует число нуль. Его называют *нулевой* точкой. Координатные линии (семейство прямых с уравнением $\operatorname{Re} z = \text{const}$ и семейство прямых с уравнением $\operatorname{Im} z = \text{const}$) ортогональны.

Геометрия на плоскости с декартовой прямоугольной системой координат Oxy и на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ совпадают. В описании фигур, линий и т.д. точки $M(x, y)$ заменяют на их аффиксы $z = x + iy$. Говорят, например: отрезок с концами z_1, z_2, треугольник с вершинами z_1, z_2, z_3, окружность с центром z_0 и т.д.

На рис. 1 показано, что суммой чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ является число, получающееся как четвертая вершина параллелограмма с тремя заданными вершинами $0, z_1, z_2$ (предполагается, что они не лежат на одной прямой), а разность – как четвертая вершина параллелограмма с тремя заданными вершинами $0, z_1, -z_2$.

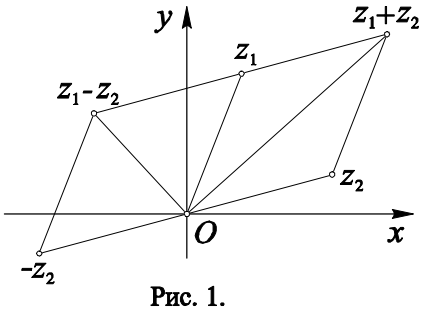


Рис. 1.

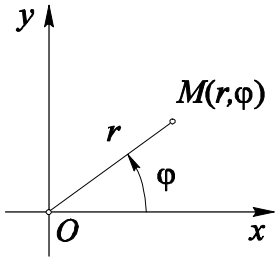


Рис. 2 .

3.2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Наряду с декартовой прямоугольной системой координат Oxy для записи комплексного числа удобно пользоваться полярной системой координат с полюсом полярной системы в точке O и с направлением полярной оси Ox . Обозначим полярные координаты точки $M(x,y)$ с аффиксом z через r и φ (рис. 2). При этом положительное направление отсчета угла φ выбирается так, что точкам оси Ox соответствует $\varphi = 0$, а точкам оси Oy соответствует $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда если $M \neq 0$, $M(x,y) = M(r,\varphi)$, где $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$

Полярная система координат криволинейная. Она состоит из координатных линий: концентрических окружностей (с уравнением $r = \text{const}$) и лучей (с уравнением $\varphi = \text{const}$), образующих в точках пересечения прямые углы.

Число r , равное расстоянию от нуля до z , называется *модулем* числа z . Для точки $z = 0$ считаем $r = 0$. Число φ называется *аргументом* числа z . Понятие «аргумент» на точку $z = 0$ не распространяется.

Очевидно, $x^2 + y^2 = r^2$, и поэтому модуль числа $z = x + iy \in \mathbb{C}$ равен $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r \geq 0$. Обычно модуль числа z обозначают $|z|$, так что $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ есть абсолютная величина числа z .

Если заданы полярные координаты (r,φ) точки z , то её декартовы координаты x, y определяются однозначно.

Если даны декартовы координаты точки $M(x,y) \neq O$, то её модуль $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ определяется однозначно, а для нахождения аргумента φ имеем систему уравнений:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r},$$

для которой если φ – решение, то $\varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ тоже решения.

Аргумент φ точки z определяется однозначно только при дополнительном условии: он принадлежит промежутку длиной 2π, содержащему нуль. Обычно считают $0 \le \varphi < 2\pi$, а принадлежащее этому промежутку решение системы обозначают $\arg z$.

Комплексное число можно представить в форме

$$z = |z|(\cos\arg z + i\sin\arg z),$$

называемой *тригонометрической* формой записи комплексного числа.

3.3. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Эта форма удобна для геометрического представления операции умножения комплексных чисел.

Согласно определению произведения комплексных чисел

$$z_1 = \langle r_1\cos\varphi_1, r_1\sin\varphi_1\rangle, z_2 = \langle r_2\cos\varphi_2, r_2\sin\varphi_2\rangle$$

имеем

$$z_1 z_2 = \left\langle \begin{matrix} r_1\cos\varphi_1\cdot r_2\cos\varphi_2 - r_1\sin\varphi_1\cdot r_2\sin\varphi_2, \\ r_1\sin\varphi_1\cdot r_2\cos\varphi_2 + r_1\cos\varphi_1\cdot r_2\sin\varphi_2 \end{matrix} \right\rangle.$$

Используя формулы косинуса и синуса суммы углов и алгебраическую запись комплексного числа, получаем

$$z_1 z_2 = \langle r_1 r_2\cos(\varphi_1+\varphi_2), r_1 r_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)\rangle =$$
$$= r_1 r_2\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i r_1 r_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

и окончательно

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right].$$

Видим, что модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент (с точностью до слагаемого, кратного 2π) – сумме аргументов сомножителей. Это свойство распространяется на конечное число сомножителей

$$z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k),\ k = 1,2,...,n,\ n = 3,4,...$$

и дается формулой

$$z_1 z_2 ... z_n = r_1 r_2 ... r_n\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n)\right].$$

Следует иметь в виду, что даже если каждый угол $\varphi_k \in [0, 2\pi)$, то вычисленный по данной формуле аргумент произведения может не оказаться значением аргумента этого произведения, а отличаться от него на слагаемое, кратное 2π.

Пример. Для произведения комплексных чисел $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{5}\pi + i\sin\frac{7}{5}\pi\right), z_2 = \cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi$ имеем $z_1 z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{5}\pi + i\sin\frac{11}{5}\pi\right)$, но $\arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{5}$. ◁

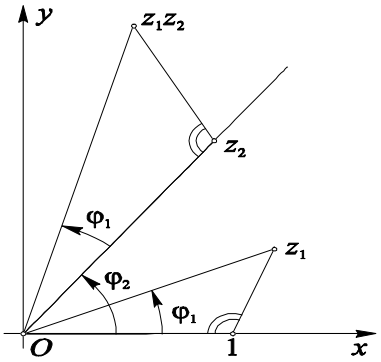


Рис. 3.

На рис. 3 показано построение произведения $z_1 z_2$: для треугольника с вершинами в точках $0, 1, z_1$ построен подобный треугольник с вершинами $0, z_2, z_1 z_2$. Углы этих треугольников равны φ_1 в общей вершине 0 и равны в вершинах $1, z_2$.

По определению частное, полученное от деления комплексного числа $z_2 = x_2 + iy_2$ на комплексное число $z_1 = x_1 + iy_1$, $x_1^2 + y_1^2 \neq 0$, дается формулой

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2},$$

которая при $z_2 = 1$ принимает вид

$$\frac{1}{z_1} = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} - i\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Непосредственная проверка показывает, что $\frac{z_2}{z_1} = z_2\frac{1}{z_1}$. Это равенство позволяет представить операцию деления z_2 на z_1 операци-

ей умножения z_2 на $\dfrac{1}{z_1}$. Поэтому достаточно ограничиться построением точки $w=\dfrac{1}{z_1}$ и использовать известное геометрическое изображение произведения.

Будем считать сначала, что точка z_1 лежит в круге радиуса 1 и с центром в нуле (рис. 4). Из точки z_1, $0<|z_1|<1$, восстановим перпендикуляр к лучу, идущему из 0 через точку z_1. В точке u пересечения перпендикуляра с окружностью проведем касательную к окружности и отметим точку v пересечения касательной с лучом. Из подобия прямоугольного треугольника с вершинами z_1, u, v треугольнику с вершинами $u, v, 0$ имеем равенство

$$\frac{|z_1|}{|u|}=\frac{|u|}{|v|},$$

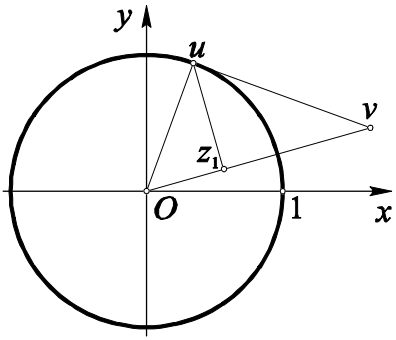


Рис. 4.

которое вместе с равенством $|u|=1$, следующим из принадлежности точки u окружности $x^2+y^2=1$, дает: $|z_1||v|=1$.

О точке v говорят, что она получена *инверсией* точки z_1 относительно рассматриваемой окружности или, иначе, точки z_1, v *симметричны относительно окружности* радиуса 1. Аргументы точек z_1 и v одинаковы и пусть равны φ. Имеем

$$z_1=|z_1|(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad v=\frac{1}{|z_1|}(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Точка $\bar{v}$ симметрична точке v относительно действительной оси. Положим $w=\frac{1}{v}$, то есть $w=\frac{1}{|z_1|}\left(\cos\varphi - i\sin\varphi\right)$. Построение w окончено.

Видим, что точка w получена из z_1 симметрией относительно окружности и симметрией относительно действительной оси.

Если $|z_1|>1$, то построение точки $w=\frac{1}{z_1}$ следует вести в обратном порядке.

Точке $z_1, |z_1|=1$, преобразование инверсии ставит в соответствие эту же точку и $w=\frac{1}{z_1}$ получается как точка, симметричная z_1 относительно действительной оси.

Возвращаясь к формуле $\frac{z_2}{z_1}=z_2\frac{1}{z_1}, z_1\neq 0$, представим комплексные числа в тригонометрической форме $z_k=|z_k|\left(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k\right)$, $k=1,2$, имеем

$$\frac{z_2}{z_1}=|z_2|\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)\cdot\frac{1}{|z_1|}\left(\cos\varphi_1-i\sin\varphi_1\right)=$$

$$=\frac{|z_2|}{|z_1|}\left(\cos\left(\varphi_2-\varphi_1\right)-i\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right)\right).$$

3.4. Показательная форма записи комплексного числа. Пользуясь формулой Эйлера

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

отличному от нуля комплексному числу

$$z=|z|\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right),\ \varphi=\arg z,$$

можно придать форму

$$z=|z|e^{i\varphi},$$

называемую *показательной* формой записи комплексного числа. Преимущество этой формы записи, связанной с полярной системой

координат, состоит в том, что здесь можно брать в качестве φ любое решение системы:

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}, \quad z = x + iy, \quad z \neq 0,$$

а не ограничиваться тем φ, которое принадлежит промежутку $[0, 2\pi)$. Множество $\operatorname{Arg} z$ всех решений системы счетно, и оно дается как совокупность чисел $\operatorname{Arg}_k z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, то есть $\operatorname{Arg} z = \{..., \operatorname{Arg}_{-1} z, \arg z, \operatorname{Arg}_1 z, ...\}$.

Операции умножения и деления в показательной форме записи комплексных чисел приобретают наиболее простой вид:

$$\langle x_1, y_1 \rangle \cdot \langle x_2, y_2 \rangle = z_1 z_2 = \left(r_1 e^{i\varphi_1}\right)\left(r_2 e^{i\varphi_2}\right) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\langle x_1, y_1 \rangle : \langle x_2, y_2 \rangle = \left(r_1 e^{i\varphi_1}\right) : \left(r_2 e^{i\varphi_2}\right) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

§ 4. РАСШИРЕННАЯ КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ $\overline{\mathbb{C}}$

4.1. Сфера Римана. Бесконечно удаленная точка. Во многих случаях наряду с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$ необходимо рассматривать расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$, получающуюся присоединением к $\mathbb{C}$ некоторого «идеального» элемента – бесконечно удаленной точки $z = \infty$. Наглядной моделью расширенной плоскости является сфера.

В трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ с декартовой прямоугольной системой координат $O\xi\eta\zeta$ возьмем сферу

$$S = \left\{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0\right\}$$

с центром в точке $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ и радиусом $\frac{1}{2}$. Плоскость $\zeta = 0$ примем за плоскость $\mathbb{C}$ и будем считать ось $O\xi$ совпадающей с действительной осью плоскости $\mathbb{C}$, а ось $O\eta$ – с её мнимой осью. Фиксируем точку $z = x + iy \in \mathbb{C}$, отличную от нуля. Через точку $N(0, 0, 1)$ («северный

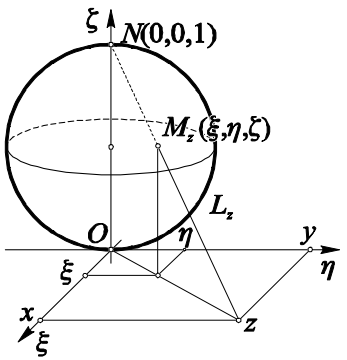


Рис. 5.

полюс» сферы S) и точку $(x,y,0)$ проведем прямую l (рис. 5). Она имеет уравнение

$$\frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y}=\frac{\zeta-1}{-1}$$

и пересекает сферу S, кроме точки N, в точке M_z, координаты которой ξ,η,ζ находятся из системы трех уравнений:

$$\xi=x(1-\zeta),\quad \eta=y(1-\zeta),$$
$$\xi^2+\eta^2=\zeta(1-\zeta).$$

Подставляя ξ и η из двух первых уравнений в третье и учитывая, что $\zeta\neq 1$, $x^2+y^2=|z|^2$, получаем $(1-\zeta)|z|^2=\zeta$ и после простых вычислений находим координаты

$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2},\quad \eta=\frac{y}{1+|z|^2},\quad \xi=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

точки M_z – *стереографического образа точки* $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Стереографическим образом точки $z=0$ на сфере S является $(0,0,0)$ – «южный полюс» сферы S. Для $z=0$ формулы, как легко проверить, остаются верными. Видим, что между комплексной плоскостью $\mathbb{C}$ и сферой S, из которой удалена точка $N(0,0,1)$, установлено взаимно однозначное соответствие.

Дополним теперь комплексную плоскость $\mathbb{C}$ «идеальным» элементом ∞, сопоставленным «северному полюсу» сферы S и только ему, и будем называть этот элемент *бесконечно удаленной точкой* или *бесконечностью*. Название «бесконечно удаленная точка» оправдывается тем, что при приближении M к «северному полюсу» сферы точка z на плоскости неограниченно удаляется от нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ называют *расширенной комплексной плоскостью* и обозначают: $\overline{\mathbb{C}}$, то есть

$$\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}.$$

Итак, установлено взаимно однозначное соответствие между $\overline{\mathbb{C}}$ и S посредством стереографического проецирования. Поэтому можно, когда это представляется удобным для ведения рассуждений, отождествлять $\overline{\mathbb{C}}$ с S и $\mathbb{C}$ с $S \setminus \{(0,0,1)\}$. Точки сферы S можно считать изображениями комплексных чисел. Действия над комплексными числами, представленными точками сферы, будем производить как соответствующие действия над проекциями точек на $\overline{\mathbb{C}}$ с последующей стереографической проекцией результата на сферу S. Такая интерпретация множества комплексных чисел, пополненного бесконечностью, предложена Г. Риманом (1851 г.). Сферу S называют *сферой Римана* или *сферой комплексных чисел.*

4.2. Операции с участием бесконечности. В определенных случаях можно рассматривать точку ∞ как равноправную с точками комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Особая природа ∞ выступает в алгебраическом аспекте: в отличие от точек $z \in \mathbb{C}$ точка ∞ не участвует в алгебраических операциях, а $\overline{\mathbb{C}}$ не является полем.

Определенным операциям с участием бесконечности удается придать смысл. По определению полагают:

$$1^\circ)\ \infty + z = z + \infty, \text{ где } z \in \mathbb{C};$$

$$2^\circ)\ \frac{z}{\infty} = 0, \frac{\infty}{z} = \infty, \text{ где } z \in \mathbb{C};$$

$$3^\circ)\ \frac{z}{0} = \infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty, \text{ где } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}.$$

Операции $\infty \pm \infty$, $\infty \cdot 0$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, а также $\frac{0}{0}$ лишены смысла. Отметим здесь, что для точки ∞ лишены смысла понятия «действительная часть», «мнимая часть», «аргумент», но естественно положить $|\infty| = +\infty$.

§ 5. ПРОСТРАНСТВА НАД ПОЛЕМ $\mathbb{C}$ И НАД $\overline{\mathbb{C}}$

5.1. Метрическое пространство $\{\mathbb{C}, r\}$. Каждой паре комплексных чисел z_1, z_2 поставим в соответствие действительное число

$r(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$ – расстояние между z_1,z_2, равное длине отрезка с концами z_1,z_2. Легко проверить, что оно удовлетворяет условиям (аксиомам) метрического пространства:

$1^\circ)$ $r(z_1,z_2)\ge 0$, $r(z_1,z_1)=0$, и, если $r(z_1,z_2)=0$, то $z_1=z_2$;

$2^\circ)$ $r(z_1,z_2)=r(z_2,z_1)$ (аксиома симметрии);

$3^\circ)$ $r(z_1,z_2)\le r(z_1,z_3)+r(z_3,z_2)$ (неравенство треугольника).

Таким образом, поле $\mathbb{C}$ с указанным расстоянием образует *метрическое пространство* $\{\mathbb{C},r\}$, для краткости обозначаемое также $\mathbb{C}$, очевидно, совпадающее с $\mathbb{R}^2$.

5.2. Метрическое пространство $\{\overline{\mathbb{C}},\rho\}$. За расстояние $\rho(z_1,z_2)$ между точками z_1,z_2 расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ примем евклидово расстояние между точками M_{z_1},M_{z_2}, являющимися стереографическими образами точек z_1,z_2 на сфере Римана, то есть положим

$$\rho(z_1,z_2)=r(M_{z_1},M_{z_2}),$$

где $r(M,N)$ – расстояние между точками M и N трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$. Так как $\rho(M,N)$ удовлетворяет аксиомам метрического пространства, то $\rho(z_1,z_2)$ - метрика. Её называют *сферической* (иначе: *хордальной*).

Множество $\overline{\mathbb{C}}$ вместе с заданной на нем метрикой $\rho(z_1,z_2)$ представляет собой *метрическое пространство* $\{\overline{\mathbb{C}},\rho\}$, обозначаемое также для краткости $\overline{\mathbb{C}}$.

Выведем формулу для вычисления расстояния $\rho(z_1,z_2)$ между точками $z_1\in\overline{\mathbb{C}}$, $z_2\in\overline{\mathbb{C}}$.

Пусть $z_k=x_k+iy_k$ $(k=1,2)$ – точка в $\mathbb{C}$ и $M_{z_k}(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$ – её стереографический образ. Согласно определению сферического расстояния и формул для координат точек M_{z_k} $(k=1,2)$ имеем

$$\rho^2(z_1,z_2)=(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2=$$

$$=\left(\frac{z_1}{1+|z_1|^2}-\frac{z_2}{1+|z_2|^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{1+|z_1|^2}-\frac{y_2}{1+|z_2|^2}\right)^2+\left(\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2}-\frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}\right)^2.$$

После раскрытия скобок, перегруппировки слагаемых и упрощений получим

$$\rho^2(z_1,z_2)=\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2}+\frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}-2\frac{x_1x_2+y_1y_2+|z_1z_2|^2}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)}.$$

Приведем сумму членов, стоящих в правой части, к общему знаменателю и после приведения подобных членов найдем, что

$$\rho^2(z_1,z_2)=\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)}=\frac{|z_1-z_2|^2}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)}.$$

Пусть $z_1=x_1+iy_1\in\mathbb{C}, z_2=\infty$. Тогда $\xi_2=\eta_2=0,\zeta_2=1$ и

$$\rho^2(z_1,\infty)=\xi_1^2+\eta_1^2+(\zeta_1-1)^2=\left(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2-\zeta_1\right)+(1-\zeta_1)=$$

$$=1-\zeta_1=1-\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2}=\frac{1}{1+|z_1|^2}.$$

В частности, $\rho(0,\infty)=1$, $\rho(1,\infty)=1/\sqrt{2}$.

В ходе выкладок учли, что точка $M_{z_1}(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$ лежит на сфере Римана и поэтому $\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2-\zeta_1=0$.

Таким образом, сферическое расстояние дается формулой

$$\rho(z_1,z_2)=\begin{cases}\dfrac{|z_1-z_2|}{\sqrt{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)}} & \text{при } z_1\in\mathbb{C}, z_2\in\mathbb{C},\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & \text{при } z_1\in\mathbb{C}, z_2=\infty.\end{cases}$$

Легко видеть, что $0\le\rho(z_1,z_2)\le 1$ для любых пар точек z_1,z_2 из $\overline{\mathbb{C}}$.

5.3. Топологические пространства. Метрические пространства $\{\mathbb{C}, r\}$, $\{\overline{\mathbb{C}}, \rho\}$ превратим в топологические пространства, указав в каждом из них фундаментальную систему окрестностей.

Обратимся сначала к $\{\mathbb{C}, r\}$. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$. Круг

$$U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : r(z, z_0) < \varepsilon\},\ \varepsilon > 0,$$

называют ε-*окрестностью точки* z_0.

Пусть $\mathrm{M} \subset \mathbb{C}$ – непустое множество. Точка $z_0 \in \mathrm{M}$ называется *внутренней* для M, если существует ε-окрестность точки z_0, лежащая в M. Множество M называется *открытым*, если все его точки – внутренние. Другими словами, множество M открыто, если оно не содержит точек, не являющихся внутренними для M. В связи с этим пустое множество $\varnothing$ естественно отнести к открытым множествам. Очевидно, ε-окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ – открытое множество, $\mathbb{C}$ – открытое множество.

Можно показать, что объединение любого числа открытых множеств и пересечение конечного числа открытых множеств являются открытыми множествами. Это важное свойство совокупности всех открытых множеств на $\mathbb{C}$ охватывается высказыванием: на $\mathbb{C}$ задана *топология*, а $\mathbb{C}$ с указанной топологией образует *топологическое пространство*, обозначаемое $\mathbb{C}$.

Теперь обратимся к $\{\overline{\mathbb{C}}, \rho\}$. Пусть $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Множество

$$V(z_0, \varepsilon) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \rho(z, z_0) < \varepsilon\},\ \varepsilon > 0,$$

называют *сферической* ε-*окрестностью точки* z_0.

На сфере Римана сферической ε-окрестности $V(z_0, \varepsilon)$ соответствует сферическая шапочка, получающаяся пересечением S с трехмерным шаром с центром в точке M_{z_0} и радиуса ε. Если $0 < \varepsilon < \rho(z_0, \infty)$, то сферической шапочке не принадлежит «северный полюс».

Из неравенства $\rho^2(z, z_0) < \varepsilon^2$ с учетом формулы для сферического расстояния получаем

$$|z - z_0|^2 < \varepsilon^2 \left(1 + |z|^2\right)\left(1 + |z_0|^2\right)$$

и после несложных преобразований имеем

$$\left(1-\varepsilon^2 a_0\right)|z|^2 - z_0\overline{z} - \overline{z}_0 z < \varepsilon^2 a_0 - |z_0|^2,$$

где $a_0 = 1+|z_0|^2$. Поскольку $\varepsilon^2 < \rho^2(0,\infty)$, то $0<1-\varepsilon^2 a_0<1$. Значит,

$$\left(z-\frac{z_0}{1-\varepsilon^2 a_0}\right)\left(\overline{z}-\frac{\overline{z}_0}{1-\varepsilon^2 a_0}\right) \le \frac{\varepsilon^2 a_0 - |z_0|^2}{1-\varepsilon^2 a_0} + \frac{|z_0|^2}{\left(1-\varepsilon^2 a_0\right)^2},$$

то есть

$$\left|z-\frac{z_0}{1-\varepsilon^2 a_0}\right|^2 \le \frac{\varepsilon^2\left(1-\varepsilon^2\right)a_0^2}{\left(1-\varepsilon^2 a_0\right)^2}.$$

Итак, при $z_0 \in \mathbb{C}$ множество $V(z_0,\varepsilon) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z-b_\varepsilon| < r_\varepsilon\right\}$ – круг (рис. 6). Точка z_0 лежит на отрезке, соединяющем 0 с центром круга $b_\varepsilon = z_0/\left(1-\varepsilon^2 a_0\right)$, а радиус круга равен

$$r_\varepsilon = \frac{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}\,a_0}{1-\varepsilon^2 a_0}.$$

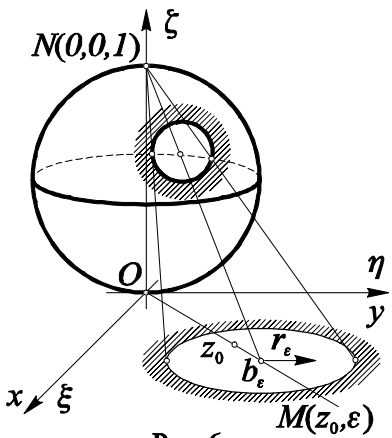


Рис. 6.

Если $z_0 = \infty$, то $V(\infty,\varepsilon)$, $0<\varepsilon<1$, характеризуется неравенством $\rho(z,\infty) < \varepsilon$, имеющим вид $\dfrac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} < \varepsilon$

и показывающим, что $V(\infty,\varepsilon) = \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon^2}-1}\right\}$ – внешность круга $U\left(0,\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon^2}-1}\right)$, дополненного ограничивающей его окружностью.

Полученную систему ε-окрестностей точек $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ можно заменить на более простую. Заметим, что за счет выбора чисел ε можно обеспечить вложение

$$U(z_0, \varepsilon_1) \subset V(z_0, \varepsilon) \subset U(z_0, \varepsilon_2)$$

окрестностей. Поэтому можем ε-окрестностью точки z_0 в $\left\{\overline{\mathbb{C}}, \rho\right\}$ считать $U(z_0, \varepsilon)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, а окрестностью бесконечно удаленной точки – множество $\left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > R\right\}$, $R > 0$.

Пусть $\mathrm{M} \subset \overline{\mathbb{C}}$ – непустое множество. Как и выше, вводятся понятия внутренней точки и открытого множества, топологии на $\overline{\mathbb{C}}$ и топологического пространства $\overline{\mathbb{C}}$.

5.4. Область и её границы. *Проколотой ε-окрестностью точки* z_0 называют ε-окрестность точки z_0, из которой исключена точка z_0.

Точку z_0 называют *предельной* точкой множества M, если любая проколотая ε-окрестность этой точки содержит хотя бы одну точку, принадлежащую M.

Множество, получающееся присоединением к непустому множеству M всех его предельных точек, называют *замыканием* M и обозначают $\overline{\mathrm{M}}$.

Множество M, содержащее более одной точки, называют *связным*, если для любого его разбиения на два непустых непересекающихся подмножества хотя бы одно из них содержит предельную точку другого. Иначе говоря, множество M связно, если не существует двух непустых непересекающихся множеств M_1 и M_2, $\mathrm{M}_1 \bigcup \mathrm{M}_2 = \mathrm{M}$, удовлетворяющих условиям $\overline{\mathrm{M}}_1 \bigcap \mathrm{M}_2 = \varnothing$, $\mathrm{M}_1 \bigcap \overline{\mathrm{M}}_2 = \varnothing$.

Непустое открытое связное множество $D \subset \mathbb{C}$ или $\overline{\mathbb{C}}$ называют *областью*. Точку расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, являющуюся предельной для области D, но не принадлежащую области D (то есть такую, что в любой её окрестности имеются как точки из D, так и точки, не принадлежащие D), называют *граничной* точкой области D. Множество всех граничных точек области D называют *границей* этой области и обозначают frD (читают: фронт D), если не вводят в конкретных случаях других, более удобных обозначе-

ний. Область называют *конечной*, если ей не принадлежит бесконечно удаленная точка. Для такой области бесконечность может быть граничной точкой.

З а д а ч и

1. В множестве пар $\langle x, y\rangle$ действительных чисел x, y введем понятия равенства и суммы, так же как для комплексных чисел: $\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 + x_2, x_2 + y_2\rangle$, а понятие произведения введем отличным образом:

$$\langle x_1, y_1\rangle * \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1x_2 + y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2\rangle.$$

Полагая $z = \langle x, y\rangle$, $j = \langle 0,1\rangle$, имеем

$$z = \langle x, y\rangle = \langle x, 0\rangle + \langle 0, y\rangle = \langle x, 0\rangle + \langle 0,1\rangle\langle 0, y\rangle = x + jy.$$

Такую систему называют системой *гиперболических* комплексных чисел.

Точки $z = x + jy$, $\overline{z} = x - jy$ называют *сопряженными,* а число $\|z\| = \sqrt{z * \overline{z}}$ – *модулем* числа z.

а) Введите операцию деления $z_2 : z_1$, покажите, что частное дается формулой

$$z_2 : z_1 = \frac{z_2 * \overline{z}_1}{\|z\|^2} \operatorname{sign}\left(z_1 * \overline{z}_2\right),$$

где $\operatorname{sign} x$ – знак действительного числа x, и что $\left(z_2 : z_1\right) * z_1 = z_2$.

б) Найдите геометрическое место делителей нуля.

в) Найдите геометрическое место точек, для которых $\|z\| = 1$.

2. Найти середину отрезка с концами z_1, z_2.

3. Найти точку на отрезке с концами z_1, z_2, которая делит отрезок в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$.

4. Найти четвертую вершину параллелограмма с тремя последовательными вершинами z_1, z_2, z_3.

5. Найти геометрическое место точек $z=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k z_k$, где $z_1, z_2 ..., z_n$ – вершины выпуклого многоугольника и $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n=1, \lambda_k>0$.

6. Найти геометрические места точек, представленных условиями $\left(a\in\mathbb{C}, b\in\mathbb{C}\right)$:

а) $|z-a|=|z-b|$; б) $\mathrm{Re}(az+b)=2$;

в) $|z-a|+|z-b|=4$; г) $|z|<1-\mathrm{Re}\,z$; д) $\mathrm{Re}\left(z(1-i)\right)<\sqrt{2}$;

е) $0<\arg\dfrac{i-z}{z+i}<\dfrac{\pi}{2}$; ж) $\dfrac{\pi}{4}<\arg(z+i)<\dfrac{\pi}{2}$.

7. Доказать тождество $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$ и указать его геометрический смысл.

8. Представить квадратные корни а) $\sqrt{3+4i}$, б) $\sqrt{-7+24i}$ в алгебраической форме записи.

9. Показать, что

а) уравнение прямой $ax+by+c=0,\quad a^2+b^2\neq 0$, где a,b,c – действительные числа, заменой $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2}$ преобразуется к виду: $\overline{B}z+B\overline{z}+c=0$, где $B=\dfrac{a+ib}{2}$;

б) уравнение окружности

$$A\left(x^2+y^2\right)+ax+by+C=0, a^2+b^2-AC>0$$

этой же заменой преобразуется к виду

$$A|z|^2+\overline{B}z+B\overline{z}+C=0, B=\frac{a+ib}{2},$$

а с указанием центра и радиуса – к виду

$$\left|z-\frac{B}{A}\right|=\sqrt{\frac{B^2-AC}{A^2}}.$$

10. Показать, что если точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности, то

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \text{ – действительное число.}$$

11. Доказать, что уравнение окружности, проходящей через точки z_1, z_2, z_3, не лежащие на одной прямой, можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} |z|^2 & z & \overline{z} & 1 \\ |z_1|^2 & z_1 & \overline{z}_1 & 1 \\ |z_2|^2 & z_2 & \overline{z}_2 & 1 \\ |z_3|^2 & z_3 & \overline{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

12. Доказать, что уравнение $\left|\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right| = K, \quad K > 0, \quad K \neq 1$, является уравнением окружности. Найти её центр и радиус.

13. Записать в комплексной форме уравнение кривой второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + ax + by + c = 0.$$

14. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} z_1 + 3z_2 = 1 - i, \\ 3z_1 - iz_2 = 1 - 3i; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (1+i)z_1 - (1-i)z_2 = 0, \\ (2+i)z_1 - (1-2i)z_2 = 0. \end{cases}$

15. Выполнить графически инверсию прямой относительно окружности. (Указание. Рассмотреть отдельно случаи, когда прямая пересекает окружность, касается её и не пересекается с ней).

16. Доказать, что прямые и окружности на $\mathbb{C}$ переходят при стереографическом проецировании в окружности на сфере Римана.

17. Каково взаимное расположение точек сферы Римана, которые соответствуют следующим точкам плоскости: а) z и $\overline{z}$; б) z и $-z$; в) z и $-\overline{z}$?

18. Доказать, что треугольник с вершинами в точках z_1, z_2, z_3, лежащих на окружности с центром в точке $z = 0$, является равносторонним тогда и только тогда, когда $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Глава 2

КОМПЛЕКСНАЯ ФУНКЦИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО И КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Вводимые в этой главе основные понятия для отображений множества действительных чисел и множества комплексных чисел в комплексную плоскость внешне одинаковы. Однако дифференцирование отображения из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ оказывается возможным только при выполнении определенных условий на дифференцируемость действительной и мнимой частей такого отображения. Они записываются в форме условий Коши – Римана. Понятие интеграла от непрерывных комплексных функций действительного и комплексного переменного вводится сначала для случая, когда множеством интегрирования является траектория, а затем – кривая. Рассматриваются жордановы, гладкие и кусочно-гладкие кривые.

§ 1. КОМПЛЕКСНАЯ ФУНКЦИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1.1. Основные понятия. Пусть E – множество действительных чисел (то есть $E \subset \mathbb{R}^1$) и $\mathbb{C}$ – множество всех комплексных чисел (то есть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $\varphi : E \to \mathbb{C}$ называют *комплексной функцией действительного переменного.*

Её можно записать в виде $z = \varphi(t)$, $t \in E$, а также полагая $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$, $z = x + iy$ и отделяя действительную и мнимую части в формуле $z = \varphi(t)$, в виде отображения $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$ множества E на плоскость $\mathbb{R}^2$.

Вместо декартова представления комплексного числа можно использовать его тригонометрическую или показательную форму за-

писи. Например, если $z = \rho e^{i\theta}$, где $\rho = |z|$, $\theta = \arg z$, то $\rho\cos\theta = \varphi_1(t)$, $\rho\sin\theta = \varphi_2(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число $A \in \mathbb{C}$ называют *пределом функции* $\varphi(t)$ *в точке* t_0, если для числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что из условия $0 < |t - t_0| < \delta$, $t \in E$, следует: $|\varphi(t) - A| < \varepsilon$. В этом случае число A записывают в виде $A = \lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t)$, $t \in E$.

Аналогично вводятся понятия: предел функции $\varphi(t)$ в точке t_0 справа (слева) и используются для предельных значений обозначения: $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} \varphi(t)$, $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} \varphi(t)$.

Если существует $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t)$, $t \in E$, то существуют пределы

$$\lim_{t \to t_0} \varphi_1(t), \quad \lim_{t \to t_0} \varphi_2(t) \quad \text{и} \quad \lim_{t \to t_0} \varphi(t) = \lim_{t \to t_0} \varphi_1(t) + i \lim_{t \to t_0} \varphi_2(t), \quad t \in E.$$

Справедливо обратное.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $\varphi : E \to \mathbb{C}$ называется *непрерывной в точке* $t_0 \in E$, если для числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что из условия $|t - t_0| < \delta$, $t \in E$, следует: $|\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \varepsilon$, то есть если $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = \varphi(t_0)$, $t \in E$.

Аналогично вводят понятия: *предел функции* $\varphi(t)$ *в точке* t_0 *справа (слева)* и используют записи:

$$\lim_{t \to t_0 + 0} \varphi(t) = \varphi(t_0), \quad \lim_{t \to t_0 - 0} \varphi(t) = \varphi(t_0).$$

Если функция $\varphi(t)$ непрерывна в точке t_0, то $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ непрерывны в t_0. Справедливо обратное.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $\varphi : E \to \mathbb{C}$ называется *непрерывной на множестве* $E_1 \subset E$, если она непрерывна в каждой точке множества E_1. В случае $E_1 = E$ говорят, что φ непрерывна на E.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число $\Phi \in \mathbb{C}$ называют *производной функции* $\varphi(t)$ *в точке* t_0, если для числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что из условия $0 < |t - t_0| < \delta$, $t \in E$, следует:

$$\left| \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} - \Phi \right| < \varepsilon, \quad t \in E \setminus \{t_0\}.$$

В этом случае число Φ записывают в виде $\Phi = \varphi'(t_0)$.

Аналогично вводятся понятия: *правосторонняя* (*левосторонняя*) *производная функции* $\varphi(t)$ *в точке* t_0 и используются обозначения: $\varphi'(t_0 + 0), \quad \varphi'(t_0 - 0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $\Phi : E_1 \to \mathbb{C}$ называется *производной функции* $\varphi : E \to \mathbb{C}$ *на множестве* $E_1 \subset E$, если $\Phi(t) = \varphi'(t)$, $t \in E_1$. О функции φ говорят, что она – *первообразная для* $\Phi(t)$ на множестве E_1.

Операцию нахождения производной φ' для φ называют *дифференцированием* φ (в точке или на множестве). Производная $\varphi'(t_0)$ может быть вычислена по формуле $\varphi'(t_0) = \varphi_1'(t_0) + i\varphi_2'(t_0)$, где $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ – действительная и мнимая части функции $\varphi(t)$.

Интеграл от непрерывной функции $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$ на отрезке $[a, b]$, по определению это комплексное число

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_a^b \varphi_1(t)\,dt + i\int_a^b \varphi_2(t)\,dt,$$

где оба интеграла в правой части – интегралы Римана. Их существование следует из теории действительных функций действительного переменного, то есть из действительного анализа.

1.2. Траектории и кривые. Пусть E – отрезок $[a, b]$, $a < b$, действительной оси.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Непрерывное отображение $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ называют *траекторией* и обозначают: $([a, b], \varphi, \mathbb{C})$ или, для краткости, одной буквой, например γ.

Графиком отображения $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ является множество точек $(t,\varphi(t))\in[a,b]\times\mathbb{C}$ пространства $\mathbb{R}^3$. О точке $\varphi(a)$ говорят, что она – начало траектории γ, а о $\varphi(b)$ – конец этой траектории. На плоскости $\mathbb{C}$ уравнение $z=\varphi(t),\quad a\le t\le b$, задает линию с концами $\varphi(a),\varphi(b)$ и является её *параметрическим* уравнением. Одна и та же линия может в указанном смысле соответствовать различным траекториям.

На множестве траекторий установим отношение эквивалентности, используя замену переменной.

Пусть $([a_1,b_1],\varphi_1,\mathbb{C})$, $([a_2,b_2],\varphi_2,\mathbb{C})$ – две траектории и $\lambda_1:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^1$, $\lambda_2:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^1$ – две непрерывные на отрезке $[\alpha,\beta]$, $\alpha<\beta$, действительные строго монотонно возрастающие функции, удовлетворяющие условиям: $\lambda_k([\alpha,\beta])=[a_k,b_k]$, $\lambda_k(\alpha)=a_k$, $\lambda_k(\beta)=b_k$, $(k=1,2)$ (рис. 1).

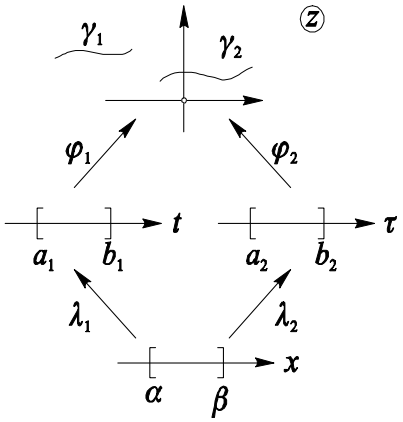


Рис. 1.

Рассмотрим функции $\varphi_1(\lambda_1(x)),\varphi_2(\lambda_2(x)),\ x\in[\alpha,\beta]$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Траектории

$$\gamma_1=([a_1,b_1],\varphi_1,\mathbb{C}),$$

$$\gamma_2=([a_2,b_2],\varphi_2,\mathbb{C})$$

называются *эквивалентными*, если существуют функции $\lambda_1(x),\lambda_2(x)$ на $[\alpha,\beta]$, удовлетворяющие указанным выше условиям и такие, что $\varphi_1(\lambda_1(x))=\varphi_2(\lambda_2(x))$ на $[\alpha,\beta]$.

Последнему условию можно придать форму

$$\varphi_1(t)=\varphi_2(\tau(t)),\ \text{где}\ \tau(t)=\lambda_2(\lambda_1^{-1}(t)),\quad t\in[a_1,b_1],$$

указывающую, что γ_1 получается из γ_2 заменой переменной.

Нетрудно проверить, что во множестве эквивалентных траекторий выполняются обычные аксиомы эквивалентности о рефлексивности $(\gamma \sim \gamma)$, симметрии (если $\gamma_1 \sim \gamma_2$, то $\gamma_2 \sim \gamma_1$) и транзитивности (если $\gamma_1 \sim \gamma_2$ и $\gamma_2 \sim \gamma_3$, то $\gamma_1 \sim \gamma_3$), и поэтому траектории разбиваются на множества (классы), в каждом из которых содержатся только эквивалентные друг другу траектории.

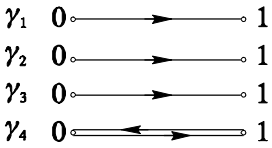


Рис. 2.

Пример. Рассмотрим траектории $\gamma_1 = \big([0,1], t, \mathbb{C}\big)$, $\gamma_2 = \big([0,1], t^2, \mathbb{C}\big)$, $\gamma_3 = \big([0,\pi/2], \sin t, \mathbb{C}\big)$, $\gamma_4 = \big([0,\pi], \sin t, \mathbb{C}\big)$ (рис. 2). Во всех случаях множества значений функций $z = t, 0 \le t \le 1$; $z = t^2, 0 \le t \le 1$; $z = \sin t, 0 \le t \le \pi/2$; $z = \sin t, 0 \le t \le \pi$, одинаковы. Это отрезок $[0,1]$. Траектории $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ попарно эквивалентны. Траектория γ_4 состоит из двух отрезков единичной длины, проходимых точкой $z = \sin t$ на $[0,\pi/2]$ и на $[\pi/2,\pi]$ в противоположных направлениях. Видим, что γ_4 не эквивалентна каждой из траекторий $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. $\triangleleft$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Класс эквивалентных траекторий называется *кривой*.

Пусть Γ – кривая, то есть множество всех попарно эквивалентных траекторий вида $\gamma = \big([a,b], \varphi, \mathbb{C}\big)$. Для них общим является множество точек $\varphi\big([a,b]\big)$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и направление обхода этого множества от точки $\varphi(a)$ к $\varphi(b)$, представляющее геометрический образ кривой. Когда не вызывает сомнения, такой образ будем понимать как кривую, а отображение $z = \varphi(t), \quad a \le t \le b$, – как её параметрическое уравнение.

Понятия «траектория» и «кривая» можно обобщить, заменяя в определении траектории непрерывное отображение $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ отрезка $[a,b]$ на непрерывное отображение $\varphi : [a,b) \to \overline{\mathbb{C}}$ полуин-

тервала $[a,b)$ (или $(a,b]$, (a,b)), $-\infty < a < b < +\infty$. Тогда становится возможным рассматривать траектории и кривые, уходящие на бесконечность.

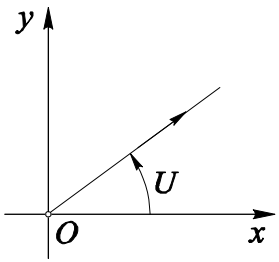


Рис. 3.

Примеры. Траектории

$\gamma = \left(\left[0, \dfrac{\pi}{2} \right), e^{i\varphi} \operatorname{tg} t, \overline{\mathbb{C}} \right)$ соответствует луч (рис. 3), идущий из точки $z = 0$ под углом $\varphi \in [0, 2\pi)$ к действительной оси и заканчивающийся в $z = \infty$.

Траектории

$\gamma = \left([-1, 0), t - i\left(1 + \dfrac{1}{t}\right), \overline{\mathbb{C}} \right)$ соответствует дуга гиперболы (рис. 4), начинающаяся в точке $z = -1$ и оканчивающаяся в точке $z = \infty$. ◁

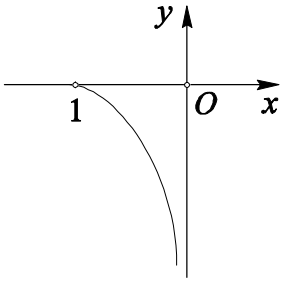


Рис. 4.

1.3. Жордановы траектории и кривые. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Траектория $\gamma = \left([a, b], \varphi, \mathbb{C} \right)$ называется *простой жордановой*, если отображение $z = \varphi(t)$ отрезка $[a,b]$ в $\mathbb{C}$ взаимно однозначно, то есть если $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ для любых пар различных точек из $[a,b]$.

О кривой Γ говорят, что она – *простая жорданова* (*простая дуга*), если составляющие её траектории – простые жордановы.

Пример. Кривая с параметрическим уравнением $z = 3\cos t + 2i \sin t$, $0 \le t \le \pi$ (полуэллипс), – простая жорданова, начинающаяся в точке $z = 3$ и оканчивающаяся в $z = -3$. ◁

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Траектория $\gamma = \left([a, b], \varphi, \mathbb{C} \right)$ называется *замкнутой жордановой*, если отображение $z = \varphi(t)$ интервала $[a, b)$ в $\mathbb{C}$ взаимно однозначно, а $\varphi(a) = \varphi(b)$.

О кривой Γ говорят, что она *замкнутая жорданова*, если составляющие её траектории – замкнутые жордановы.

Пример. Кривая с параметрическим уравнением $z = 3\cos t + 2i\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$ (эллипс), – замкнутая жорданова. $\triangleleft$

Имеет место следующая важная теорема Камиля Мари Эдмона Жордана (1838–1922). Её доказательство можно найти в специальной литературе:

Теорема (Жордан). *Замкнутая жорданова кривая* Γ *делит плоскость на две односвязные области, имеющие* Γ *общей границей; одна из этих областей ограниченная – внутренность* Γ*, другая содержит* ∞ *- внешность* Γ*. Дополнение простой (незамкнутой) жордановой кривой* Γ *состоит из одной односвязной области, содержащей* ∞ *и имеющей* Γ *своей границей.*

Простым жордановым траекториям вида $\varphi : [a, b) \to \overline{\mathbb{C}}$ соответствуют *обобщенно* жордановы кривые.

1.4. Гладкие и кусочно-гладкие траектории и кривые. По общепринятой терминологии непрерывную функцию называют функцией класса C^0 в области её рассмотрения. В дальнейшем нам потребуются траектории и кривые более высокого порядка гладкости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Траектория $\left([a, b], \varphi, \mathbb{C}\right)$ называется *непрерывно дифференцируемой,* если функция $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$, $a \le t \le b$, непрерывно дифференцируема на $[a,b]$, то есть функция $\varphi'(t) = \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t)$ непрерывна на $[a, b]$ (в точках a и b рассматриваются односторонние производные). В этом случае траектория относится к классу C^1.

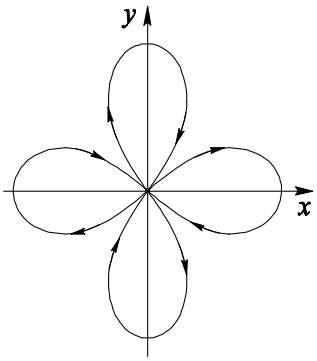


Рис. 5.

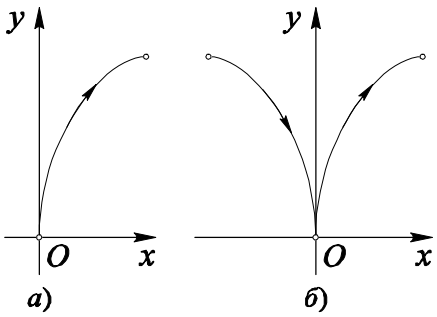
Пример. Траектория $\gamma = \left([0, 2\pi], \cos 2te^{it}, \mathbb{C}\right)$, имеющая вид четырехлистного цветка, непрерывно дифференцируема (рис. 5). $\triangleleft$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Непрерывно дифференцируемая траектория $\left([a, b], \varphi, \mathbb{C}\right)$ называется *гладкой*, если $\varphi'(t) \ne 0$, $a \le t \le b$.

Пример. Траектория $\left(\left[0,2\pi\right], e^{it}, \mathbb{C}\right)$ (окружность) – гладкая. ◁

Требование гладкости равносильно требованию существования касательной к кривой – графику отображения $\varphi:\left[a,b\right]\to\mathbb{C}$ – и непрерывного вращения этой касательной при движении по кривой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Траектория, составленная из конечного числа гладких траекторий, называется *кусочно-гладкой*.



а) *б)*

Рис. 6.

Примеры. Траектория $\gamma=\left(\left[0,1\right], t^2\left(t+i\right), \mathbb{C}\right)$ [дуга полукубической параболы (рис. 6,*а*)] гладкая; траектория $\gamma=\left(\left[-1,1\right], t^2\left(t+i\right), \mathbb{C}\right)$ – кусочно-гладкая (рис. 6,*б*). Треугольник, прямоугольник – кусочно-гладкие жордановы кривые. ◁

Если $\gamma_1=\left(\left[a_1,b_1\right],\varphi_1,\mathbb{C}\right)$ – гладкая траектория, то эквивалентные ей траектории, как обычно, получаются заменой параметра по указанной выше формуле $\tau\left(t\right)=\lambda_2\left(\lambda_1^{-1}\left(t\right)\right)$, $t\in\left[a_1,b_1\right]$, дающей непрерывную строго возрастающую функцию. Но такая замена без дополнительных условий может перевести гладкую траекторию в негладкую. Потребуем, чтобы замена параметра $\tau\left(t\right)$ была непрерывно дифференцируемой функцией с положительной производной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Гладкой* кривой называется класс траекторий, получающийся из гладкой траектории всевозможными непрерывно дифференцируемыми заменами $\tau\left(t\right)$ с положительной производной.

Определение *кусочно-гладкой* кривой предоставляется читателю.

Иногда будем пользоваться другим, геометрическим определением кривой (как геометрического места точек, или множества точек, удовлетворяющих некоторому уравнению, и т.д.). Тогда под жордановой, гладкой, кусочно-гладкой кривой будем понимать её свойства, соответствующие свойствам её параметрического представления $z=\varphi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, $\alpha<\beta$.

Пример. Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>0, b>0$, имеет параметрическое представление $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, то есть $z=a\cos t+ib\sin t$, $t\in[0,2\pi]$, показывающее, что траектория (и кривая) – замкнутая жорданова гладкая. ◁

§ 2. КОМПЛЕКСНАЯ ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2.1. Основные понятия. Пусть E – множество на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $f:E\to\overline{\mathbb{C}}$ называют *комплексной функцией комплексного переменного.*

Её можно записать в виде $w=f(z)$, $z\in E$, а также, пользуясь декартовой записью комплексного числа на $\mathbb{C}$ и полагая $w=u+iv$, $z=x+iy$, $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$, представить как отображение $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ множества $E\subset\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$.

Вместо декартова представления комплексного числа используют его тригонометрическую или показательную форму записи.

Условимся обозначать круг $\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<d\}$, $d>0$, с центром в точке z_o и радиуса d через $U(z_0,d)$, а этот же круг, но с выколотым центром – через $U(z_0,d)$. Очевидно, $U(z_0,\varepsilon)$ – круговая ε-окрестность точки z_0. Круговой окрестностью $U(\infty,\varepsilon)$ точ-

ки ∞ является дополнение к замыканию $U(0,\varepsilon)$, то есть $U(\infty,\varepsilon)=\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{U(0,\varepsilon)}$, $\varepsilon>0$, а $U\left(\infty,\varepsilon\right)=\mathbb{C}\setminus\overline{U\left(0,\varepsilon\right)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка $A\in\overline{\mathbb{C}}$ (число $A\in\mathbb{C}$) называется *пределом функции* $f(z)$ *в точке* $z_0\in\overline{\mathbb{C}}$, если для числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что из условия $z\in\overset{\circ}{U}\left(z_0,\delta\right)$ следует: $f(z)\in U(A,\varepsilon)$. В этом случае точку A записывают в виде

$$A=\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} f(z).$$

Аналогично вводится понятие: предел функции $f(z)$ в точке z_0 по множеству E, $z_0\in\overline{E}$ и используется для предельного значения обозначение $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E\setminus\{z_0\}}} f(z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f:E\to\overline{\mathbb{C}}$ называется *непрерывной в точке* $z_0\in E$ (в смысле $\overline{\mathbb{C}}$), если для числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что из условия $z\in U\left(z_0,\delta\right)$ следует $f(z)\in U\left(f\left(z_0\right),\varepsilon\right)$, то есть если $\lim\limits_{z\to z_0} f\left(z\right)=f\left(z_0\right)$.

Пример. Функция $f(z)=\dfrac{1}{z}$ непрерывна (в топологии $\overline{\mathbb{C}}$) в точках $z=0$, $z=\infty$, поскольку $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\infty=f(0)$, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0=f(\infty)$. $\triangleleft$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f:E\to\overline{\mathbb{C}}$ называется *непрерывной на множестве* $E_1\subset E$, если она непрерывна в каждой точке множества E_1. В случае $E_1=E$ говорят, что f непрерывна на E.

Подобно тому, как это делается в действительном анализе, доказываются следующие свойства непрерывных (в смысле $\overline{\mathbb{C}}$) функций на замкнутых множествах $E\subset\overline{\mathbb{C}}$.

Функция f, непрерывная на замкнутом множестве E, ограничена (то есть существует число $\mathrm{M}>0$ такое, что $\left|f(z)\right|\le\mathrm{M}$ на E).

Функция f, непрерывная на замкнутом множестве E, достигает своей верхней и нижней грани (*то есть существуют* $z_1 \in E, z_2 \in E$ *такие, что* $|f(z)| \le |f(z_1)|$, $|f(z)| \ge |f(z_2)|$ *для* $z \in E$).

Функция f, непрерывная на замкнутом множестве $E \subset \mathbb{C}$, *равномерно непрерывна на* E (*то есть для числа* $\varepsilon > 0$ *существует число* $\delta > 0$ *такое, что* $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$, *если* $|z_1 - z_2| < \delta$, $z_1 \in E$, $z_2 \in E$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число $\Phi \in \mathbb{C}$ называется *производной функции* $f(z)$ *в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$ (в смысле $\mathbb{C}$), если для числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что из условия $z \in \overset{\circ}{U}(z_0, \delta)$ следует неравенство

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \Phi \right| < \varepsilon.$$

В этом случае число Φ записывают в виде $\Phi = f'(z_0)$ и говорят, что $f(z)$ *дифференцируема в точке* z_0.

Аналогично вводится понятие *производной функции* $f(z)$ *в точке* z_0 *по множеству* E, $z_0 \in E$, и для производной используется обозначение: $f'(z_0)$ *по множеству* E или $f_E'(z_0)$.

Функция, дифференцируемая в точке z_0, непрерывна в ней.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $\Phi : E_1 \to \mathbb{C}$ называется *производной функции* $f : E \to \mathbb{C}$ *на множестве* $E_1 \subset E$ (в смысле $\mathbb{C}$), если $\Phi(z) = f'(z)$, $z \in E_1$, и о функции $f(z)$ говорят, что она *дифференцируема на множестве* E_1.

Функция $f : E \to \mathbb{C}$, дифференцируемая на E, непрерывна на E.

Операцию нахождения производной f' для f называют *дифференцированием* (в смысле $\mathbb{C}$).

2.2. Условия Коши – Римана. Установим связь между дифференцируемостью комплексной функции комплексного переменного $f = u + iv$ (в смысле $\mathbb{C}$) и дифференцируемостью её действитель-

ной и мнимой частей $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$, $z=x+iy$ в смысле $\mathbb{R}^2$.

Теорема 1 (Коши – Риман). *Для дифференцируемости функции $f: D\to\mathbb{C}$ в точке $z_0=x_0+iy_0$ области $D\subset\mathbb{C}$ необходимо и достаточно выполнения двух условий:*

а) функции $u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0,y_0) (в смысле $\mathbb{R}^2$);

б) в этой точке

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y},\ \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} \qquad \text{(К. – Р.)}$$

(*условия Коши – Римана*).

▷ Необходимость. Пусть существует производная $f'(z_0)=\Phi$. Тогда для числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что $\left|f(z)-f(z_0)-\Phi(z-z_0)\right|<\varepsilon|z-z_0|$, если $|z-z_0|<\delta$. Для сокращения записи будем пользоваться обозначениями

$$\Delta f(z_0)=f(z)-f(z_0)=\Delta u(x_0,y_0)+i\Delta v(x_0,y_0)=\Delta u+i\Delta v,$$

$$z-z_0=\Delta z=(x-x_0)+i(y-y_0)=\Delta x+i\Delta y,\ \Phi=\Phi_1+i\Phi_2.$$

Представив указанное выше неравенство в виде

$$\left|\Delta u+i\Delta v-(\Phi_1+i\Phi_2)(\Delta x+i\Delta y)\right|<\varepsilon|\Delta z|$$

и учитывая, что $|\operatorname{Re} w|\le|w|$, $|\operatorname{Im} w|\le|w|$, получаем неравенства

$$\left|\Delta u-\Phi_1\Delta x+\Phi_2\Delta y\right|<\varepsilon|\Delta z|,\ \left|\Delta v-\Phi_2\Delta x-\Phi_1\Delta y\right|<\varepsilon|\Delta z|.$$

Они показывают, что $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0,y_0) (в смысле $\mathbb{R}^2$) и имеют частные производные по x и по y:

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=\Phi_1,\quad \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}=-\Phi_2,$$

$$\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}=\Phi_2,\quad \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}=\Phi_1.$$

Значит, выполняется условие «а». Очевидным образом устанавливается справедливость условия «б».

Заметим, что из существования частных производных функций $u(x,y)$, $v(x,y)$ по x и по y в точке (x_0,y_0) не следует дифференцируемость $u(x,y),v(x,y)$ в этой точке.

Достаточность. Пусть выполнены условия «а», «б». Докажем, что существует $f'(z_0)$.

Согласно условию «а») для приращений функций $u(x,y),v(x,y)$ в точке (x_0,y_0) имеем

$$u(x,y)-u(x_0,y_0)=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+o(|z-z_0|),$$

$$v(x,y)-v(x_0,y_0)=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+o(|z-z_0|),$$

где, как обычно, $o(|z|)$ обозначает малую высшего порядка относительно $|z|$, то есть величину, отношение которой к $|z|$ стремится к нулю при $z\to 0$: $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{o(|z|)}{|z|}=0$.

Отсюда с учетом «б» получаем

$$u(x,y)-u(x_0,y_0)=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)-\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}(y-y_0)+o(|z-z_0|),$$

$$v(x,y)-v(x_0,y_0)=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}(y-y_0)+o(|z-z_0|).$$

Умножим последнее равенство на i и почленно сложим его с предыдущим. Получим формулу

$$f(z)-f(z_0)=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}(z-z_0)+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}(z-z_0)+o(|z-z_0|)=$$

$$=\left[\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\right](z-z_0)+o(|z-z_0|),$$

из которой при $z \neq z_0$ следует, что

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}+\frac{o(|z-z_0|)}{z-z_0}.$$

Значит, существует

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x},$$

и он является производной $f'(z_0)$.◁

Следствие. В ходе доказательства теоремы установлена формула для вычисления производной $f'(z_0)$ (в смысле $\mathbb{C}$) через производные от u,v (в смысле $\mathbb{R}^2$):

$$f'(z_0)=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x},\quad z_0=x_0+iy_0.$$

С учетом условий Коши – Римана имеем также

$$f'(z_0)=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}-i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}=$$
$$=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}.$$

Читатель уже отметил, что понятия предела, непрерывности, известные из курса действительного анализа, простым образом переносятся на функции комплексного переменного. Внешне понятие производной выглядит также как хорошо знакомое. Однако теорема Коши – Римана показывает, что дифференцируемость в смысле комплексного анализа (в смысле $\mathbb{C}$) не сводится к дифференцируемости в смысле $\mathbb{R}^2$. Для дифференцируемости в смысле $\mathbb{C}$ должны выполняться два равенства (К. – Р.). Но даже для «простых» функций, например $f(z)=x+2iy$, эти условия нигде не выполняются. Поэтому функция $f(z)=x+2iy$ нигде не дифференцируема в смысле $\mathbb{C}$. Тем не менее множество дифференцируемых в смысле $\mathbb{C}$ функций имеет свойства и применения, значение которых трудно переоценить.

Правила дифференцирования действительных функций действительного переменного распространяются на комплексные функции комплексного переменного. Укажем основные правила.

Если $f = \text{const}$, то $f' = 0$.

$\left(af + bg\right)' = af' + bg'$, где a, b – комплексные числа.

$\left[f\left(g(z)\right)\right]' = f'\left(g(z)\right)g'(z)$.

2.3. Голоморфность. Дифференцируемость функции в смысле $\mathbb{C}$ в точке не влечет за собой появление совокупности свойств функции, значимых в применениях. Они проявляются, если потребуем, чтобы функция была дифференцируемой в окрестности точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция f называется *голоморфной в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если f дифференцируема в смысле $\mathbb{C}$ в некоторой окрестности этой точки.

Пример. Функция $f(z) = |z|^2 = z\overline{z} = x^2 + y^2$ дифференцируема в смысле $\mathbb{R}^2$ на всей плоскости. В смысле $\mathbb{C}$ она дифференцируема, согласно условиям (К. – Р.), только в точке $z = 0$ и поэтому не является голоморфной в $z = 0$ (нет окрестности $U(0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, в которой существует $f'(z)$). ◁

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f(z)$ *голоморфна в бесконечно удаленной точке* $z = \infty$, если функция $\varphi(\zeta) = f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ голоморфна в точке $\zeta = 0$.

Эти два определения позволяют рассматривать голоморфные функции на множествах расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Если $\mathrm{M} \subset \overline{\mathbb{C}}$ – открытое множество, то понятие дифференцируемости $f : \mathrm{M} \to \overline{\mathbb{C}}$ на M в смысле $\overline{\mathbb{C}}$ и голоморфности f на M совпадают. В частности, если f имеет производную f' в области, то f голоморфна в этой области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется *целой*, если она голоморфна в $\mathbb{C}$.

Пример. Степенная функция $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, – целая функция. ◁

Нетрудно доказать, что сумма и произведение голоморфных функций в области D также голоморфны в этой области.

Пример. Функция $f(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0$, $n\in\mathbb{N}$, с комплексными постоянными $a_n,\ldots,a_0$ - голоморфная в $\mathbb{C}$ функция, то есть целая. $\triangleleft$

Множество голоморфных в области D функций образует кольцо.

О функции $f(z)$, заданной на замкнутом множестве M, в частности на кривой, говорят, что она голоморфна на M, если существуют открытое множество $D\supset\mathrm{M}$ и функция $\varphi(z)$ такие, что $f(z)=\varphi(z)$ на M и $\varphi(z)$ голоморфна в D.

§ 3. ИНТЕГРАЛ

3.1. Интеграл по кривой. Предполагается, что читатель знаком с теорией интеграла Римана.

Пусть $\gamma=\big([a,b],\varphi,\mathbb{C}\big)$, $-\infty<a<b<+\infty$, – гладкая траектория, то есть функция φ класса C^1 и $\varphi'(t)\neq 0$, $a\le t\le b$.

Предположим, что на множестве $\varphi\big([a,b]\big)\subset\mathbb{C}$ задана непрерывная функция комплексного переменного.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Интегралом от функции f по траектории γ* называется число, обозначаемое $\int\limits_\gamma f(z)\,dz$, равное числу

$$\int\limits_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt=\int\limits_a^b \mathrm{Re}\big[f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\big]dt+i\int\limits_a^b \mathrm{Im}\big[f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\big]dt.$$

Оба интеграла в правой части равенства существуют, поскольку в них действительные подынтегральные функции непрерывны.

Теорема 2. *Интегралы от непрерывной функции $f(z)$ по эквивалентным траекториям равны.*

$\triangleright$ Пусть $\gamma_k=\big([a_k,b_k],\varphi_k,\mathbb{C}\big)$, $k=1,2$, – эквивалентные траектории: $\gamma_1\sim\gamma_2$, и

$$I_k=\int\limits_{\gamma_k} f(z)dz\,.$$

Согласно определению

$$I_k = \int_{a_k}^{b_k} f\left(\varphi_k(t)\right)\varphi_k'(t)\,dt.$$

В силу условия $\gamma_1 \sim \gamma_2$ и гладкости траекторий существуют непрерывно дифференцируемые функции $\lambda_k(x)$, $k=1,2$, на $[\alpha,\beta]$ такие, что $\varphi_1\left(\lambda_1(x)\right) = \varphi_2\left(\lambda_2(x)\right)$, $x \in [\alpha,\beta]$,
откуда

$$\varphi_1'\left(\lambda_1(x)\right)\lambda_1'(x) = \varphi_2'\left(\lambda_2(x)\right)\lambda_2'(x) \text{ на } [\alpha,\beta].$$

Выполним замену переменной $t = \lambda_k(x)$ в интеграле I_k. Получим для I_k представление

$$I_k = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi_k\left(\lambda_k(x)\right)\right)\varphi_k'\left(\lambda_k(x)\right)\lambda_k'(x)\,dx, \quad k=1,2,$$

показывающее с учетом двух последних равенств, что $I_1 = I_2$.◁

Доказанная теорема позволяет корректно ввести понятие интеграла от комплексной функции комплексного переменного вдоль кривой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Интегралом от функции* f *по кривой* Γ называют число, обозначаемое $\int_\Gamma f(z)\,dz$ или $\int_\Gamma f\,dz$, равное числу $\int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt$, где $\left([a,b],\varphi,\mathbb{C}\right)$ – любая траектория из класса траекторий, определяющих кривую Γ.

3.2. Свойства интеграла по кривой. Линейность. Если функции *f* и *g* непрерывны на гладкой кривой $\Gamma \subset \mathbb{C}$, то для комплексных постоянных *a* и *b*

$$\int_\Gamma (af + bg)\,dz = a\int_\Gamma f dz + b\int_\Gamma g dz,$$

что непосредственно следует из определения интеграла.

Аддитивность. Пусть непрерывная кривая Γ с началом в точке z_1 и концом в точке z_2 делится точкой z_3 на гладкие дуги Γ_1 с концами в точках z_1, z_3 и Γ_2 с концами в точках z_3, z_2. Тогда

$$\int_{\Gamma} f dz = \int_{\Gamma_1} f dz + \int_{\Gamma_2} f dz .$$

Это свойство легко доказывается и распространяется на кусочно-гладкие кривые. Читатель сможет сделать это самостоятельно.

Ориентируемость. Функция $\varphi(t), t \in [a,b]$, класса C^1 и функция $\varphi^-(t) = \varphi(a+b-t), \ t \in [a,b]$, очевидно, того же класса C^1 имеют одинаковые графики. Соответствующие им траектории $\gamma = ([a,b], \varphi, \mathbb{C})$, $\gamma^- = ([a,b], \varphi^{-1}, \mathbb{C})$ отличаются друг от друга противоположными направлениями обхода и принадлежат разным кривым Γ, Γ^- соответственно, отличающимся, как принято говорить, ориентацией.

Если f непрерывна, то

$$\int_{\Gamma} f dz = -\int_{\Gamma^-} f dz .$$

Действительно,

$$-\int_{\Gamma^-} f(z) dz = -\int_a^b f\left(\varphi^-(t)\right)\left(\varphi^-(t)\right)' dt =$$

$$= -\int_a^b f\left(\varphi(a+b-t)\right)\left(\varphi(a+b-t)\right)' dt.$$

Выполним замену переменной t на τ по формуле $\tau = a+b-t$. Получим

$$-\int_{\Gamma^-} f(z) dz = \int_a^b f\left(\varphi(\tau)\right)\varphi'(\tau) d\tau = \int_{\Gamma} f(z) dz$$

и, таким образом, убеждаемся, что интеграл при перемене ориентации на кривой меняет свой знак на противоположный.

Свойство ориентируемости распространяется на кусочно-гладкие кривые.

Для кривой, заданной параметрическим уравнением $z=\varphi(t)$, $t\in[a,b]$, положительной ориентации соответствует движение точки z по кривой от её начала $\varphi(a)$ к концу $\varphi(b)$.

Если кривая задана как геометрическое место точек, то в случае, когда она ограничивает односвязную область, за положительное направление на кривой принимают то из двух возможных направлений, при котором область остается слева.

Пример. Границей круга $U(z_0,\rho)$, $z_0\in\mathbb{C}$, $\rho>0$, является окружность $\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|=\rho\}$. Положительное направление на ней – против хода стрелки часов (с центром циферблата в точке z_0). Границей окрестности $U(\infty,\rho)$, $\rho>0$, в $\overline{\mathbb{C}}$ является окружность $\{z\in\mathbb{C}:|z|=\rho\}$. Положительное направление на ней (относительно области $U(\infty,\rho)$) – по ходу стрелки часов. $\triangleleft$

3.3. Простейшие примеры вычисления интеграла по кривой. Основываясь непосредственно на определении интеграла, вычислим несколько интегралов, которые потребуются нам уже в следующем параграфе и многократно в дальнейшем.

1. Пусть $f(z)=1$ и $\Gamma\subset\mathbb{C}$ – простая жорданова гладкая дуга, соединяющая точку z_1 с точкой z_2. Вычислим интеграл

$$I=\int_\Gamma 1\,dz.$$

Пусть $\gamma=([a,b],\varphi,\mathbb{C})$ – некоторая траектория, представляющая кривую Γ. Пусть $\varphi(t)=\varphi_1(t)+i\varphi_1(t)$. Тогда, поскольку $\varphi(a)=z_1$, $\varphi(b)=z_2$, имеем

$$I=\int_a^b 1\cdot\varphi'(t)\,dt=\int_a^b\varphi_1'(t)\,dt+i\int_a^b\varphi_2'(t)\,dt=$$

$$=\varphi_1(b)-\varphi_1(a)+i\big(\varphi_2(b)-\varphi_2(a)\big)=\varphi_1(b)-\varphi_1(a)=z_2-z_1.$$

Итак, интеграл I равен разности z_2-z_1 и не зависит от кривой Γ, соединяющей точку z_1 с точкой z_2.

Если $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – замкнутая жорданова кусочно-гладкая кривая, то $I = 0$.

2. Пусть $f(z) = z$ и $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – простая жорданова гладкая дуга, соединяющая точку z_1 с z_2. Вычислим интеграл

$$I_1 = \int_{\Gamma} z dz.$$

Пусть $\gamma = \left([a,b], \varphi, \mathbb{C}\right)$ – некоторая траектория, представляющая кривую Γ. Пусть $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_1(t)$. Тогда, поскольку $\varphi(a) = z_1$, $\varphi(b) = z_2$, имеем

$$I_1 = \int_a^b \varphi(t)\varphi'(t)dt = \int_a^b \left[\varphi_1(t) + i\varphi_2(t)\right]\left[\varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t)\right]dt =$$

$$= \int_a^b \left[\varphi_1(t)\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)\varphi_2'(t)\right] + i\int_a^b \left[\varphi_1(t)\varphi_2'(t) + \varphi_1(t)\varphi_2'(t)\right]dt.$$

Воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница и, проведя простые преобразования, получим

$$I = \frac{1}{2}\left[\varphi_1^2(t) - \varphi_2^2(t)\right]\Big|_a^b + i\left[\varphi_1(t)\varphi_2(t)\right]\Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\varphi_1^2(t) - \varphi_2^2(t) + 2i\varphi_1(t)\varphi_2(t)\right]\Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\varphi_1(t) + i\varphi_2(t)\right]^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}\varphi^2(t)\Big|_a^b = \frac{\varphi^2(b) - \varphi^2(a)}{2} = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}.$$

Итак, интеграл I_1 равен полуразности квадратов чисел z_2 и z_1 и не зависит от кривой Γ, соединяющей z_1 с z_2.

Если $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – замкнутая жорданова кусочно-гладкая кривая, то $I_1 = 0$.

3. Пусть $f(z) = (z - z_0)^n$, где $z_0 \in \mathbb{C}$ и n – целое число. Пусть Γ – окружность с центром в точке z_0 и радиуса $R > 0$. Вычислим интеграл

$$K_n = \int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz.$$

Кривая Γ ограничивает круг $U(z_0, R)$, и по соглашению о выборе направлений следует положительным направлением на Γ полагать направление против хода часовой стрелки. Одной из траекторий, представляющих ориентированную кривую Γ, является функция $z = z_0 + Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Для нее

$$K_n = \int_0^{2\pi} R^n e^{int} \cdot Re^{it} \cdot idt = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Воспользовавшись формулой Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, преобразуем K_n к виду

$$K_n = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} \cos(n+1)tdt - R^{n+1} \int_0^{2\pi} \sin(n+1)tdt.$$

При $n = -1$ имеем

$$K_{-1} = \int_\Gamma \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Если же $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, то, как легко видеть, $K_n = 0$.

Итак,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 1, \\ 0 \text{ при } n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\} \end{cases},$$

где $\Gamma = \partial U(z_0, R)$ – ориентированная граница круга $U(z_0, R)$.

3.4. Оценка интеграла по кривой. При решении многих задач с использованием интеграла не обязательно знать его точное значение, а достаточно иметь оценку модуля интеграла определенным числом, каким-либо образом связанным с интегралом. Приведем часто используемую теорему об оценке интеграла от непрерывной функции по гладкой кривой.

Теорема 3. *Пусть функция f непрерывна на гладкой кривой Γ. Тогда*

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \le MS,$$

где $M = \max\limits_{z \in \Gamma} |f(z)|$, S – длина кривой Γ.

▷ Если

$$I = \int_{\Gamma} f(z)dz = 0,$$

то оценка очевидна. Если $I \neq 0$, то, представив число I в показательной форме: $I = |I|e^{i\theta}$, получим

$$|I| = e^{-i\theta}\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} e^{-i\theta} f(z)dz = \operatorname{Re}\int_{\Gamma} e^{-i\theta} f(z)dz.$$

Пусть $\gamma = \left([a,b],\varphi,\mathbb{C}\right)$ – некоторая гладкая траектория, определяющая кривую Γ: $z = \varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$, $t \in [a,b]$. Согласно определению и свойствам интеграла имеем

$$|I| = \operatorname{Re}\int_a^b e^{-i\theta} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt\int_a^b = \int_a^b \operatorname{Re}\left[e^{-i\theta} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\right]dt \leq$$

$$\leq \int_a^b \left|f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\right|dt = \int_a^b \left|f\left(\varphi(t)\right)\right|\left|\varphi'(t)\right|dt \leq M\int_a^b \left|\varphi'(t)\right|dt.$$

Дифференциал длины гладкой кривой Γ дается формулой

$$ds = \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t)}dt = \left|\varphi'(t)\right|dt,$$

использовав которую и переходя к натуральной параметризации кривой $\Gamma: z = \varphi\left(t(s)\right)$, получаем оценку

$$|I| \leq \int_{\Gamma} \left|f\left(z(s)\right)\right|ds \leq MS. \ \triangleleft$$

З а д а ч и

1. Указать кривые, соответствующие следующим траекториям:

а) $\left([\pi,2\pi],\cos t,\mathbb{C}\right)$, б) $\left((-\pi,\pi],\cos t,\mathbb{C}\right)$, в) $\left([-1,1],(1+it)^2,\mathbb{C}\right)$.

2. Указать кривую, составленную из траекторий

$$\left(\left[-\frac{\pi}{2},2\pi\right],e^{it},\mathbb{C}\right),\left([0,2\pi],\frac{3t}{\pi}-4,\mathbb{C}\right).$$

3. Принадлежат ли одному классу траектории $\big([-1,1],t,\mathbb{C}\big)$, $\big([0,1],2t-1,\mathbb{C}\big)$?

4. Доказать, что функции $z, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, \overline{z}, |z|$ непрерывны в $\mathbb{C}$. Являются ли они дифференцируемыми в смысле $\mathbb{C}$?

5. Будет ли функция $1/(1-z)$, непрерывная в круге $U(0,1)$, равномерно непрерывной в этом круге?

6. Доказать, что для функции $f(z)=u(\rho,\varphi)+iv(\rho,\varphi)$, $z=\rho e^{i\varphi}$, условия Коши – Римана имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial \rho}.$$

7. Доказать, что для функции $f(z)=R(x,y)e^{i\Phi(x,y)}$, $z=x+iy$, условия Коши – Римана имеют вид

$$\frac{\partial R}{\partial x}=R\frac{\partial \Phi}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial y}=-R\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

8. Выполняются ли условия Коши – Римана для функций $z, z^2, z^n, \cos z, \sin z$?

9. Доказать, что функция $f(z)=\overline{z}$ нигде не дифференцируема.

10. Вычислить следующие интегралы по кривой:

а) $\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z}$, где Γ – дуга параболы $y^2=x+1$ от точки $z_1=-i$ до точки $z_2=x+i\sqrt{1+x}$.

б) $\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z}$, где Γ – дуга окружности $x^2+y^2=1, x\ge 0$;

в) $\int\limits_{\Gamma}\sin z dz$, где Γ – отрезок с концами в точках $z=0, z=\frac{\pi}{2}+i$.

Глава 3

ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ

В этой главе мы будем изучать свойства функций $f(z)$, заданных указанием определенных действий (операций) над комплексным числом $z \in \mathbb{C}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$. Вид рассматриваемых выражений обычно ассоциируется с функциями, известными и широко используемыми в теории действительных функций одного действительного переменного, математическом анализе, теории дифференциальных уравнений и в других областях математики и её применений. Имея закон f как набор действий над z, будем устанавливать ту совокупность E точек $z \in \mathbb{C}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$, на которой выражение, дающее $f(z) \in \mathbb{C}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$, имеет смысл, то есть будем находить множество определения функции. Будем исследовать функцию $f : E \to \mathbb{C}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ на непрерывность, дифференцируемость, голоморфность, устанавливать вид множества $f(E)$ или $f(E_1)$, где $E_1 \subset E$, а также будем выяснять свойства обратных отображений с использованием поверхностей Римана.

Отображения с производной, не принимающей значения нуль, обладают свойством конформности.

§ 1. СТЕПЕНЬ И КОРЕНЬ

1.1. Степенная функция. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Каждой точке $z \in \mathbb{C}$ поставим в соответствие число, равное произведению $\underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ раз}}$, обозначаемому z^n. Доопределим z^n в бесконечности значением ∞. Функцию $z^n : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ называют *степенной* функцией или *степенью* (и читают: z в степени n). Степенная функция определена и непре-

рывна на $\overline{\mathbb{C}}$, голоморфна на $\mathbb{C}$, $\left(z^n\right)' = nz^{n-1}$ для $z \in \mathbb{C}$, оставляет неподвижными точки $z = 0$, $z = \infty$, а при $n = 1$ – каждая точка из $\overline{\mathbb{C}}$ отображается в себя (то есть осуществляется тождественное отображение $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$).

Луч l с параметрическим уравнением $z = te^{i\varphi}$, $0 \le t < \infty$, идущий из точки $z = 0$ на бесконечность и образующий с действительной осью угол φ, $0 \le \varphi < 2\pi$, отображением $w = z^n$ переводится в луч L с параметрическим уравнением $w = t^n e^{in\varphi}$, идущий из точки $w = 0$ на бесконечность и образующий с действительной осью угол $n\varphi$.

Окружность γ с параметрическим уравнением $z = re^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, с центром в точке $z = 0$ и радиуса r, $0 < r < \infty$, отображением $w = z^n$ переводится в окружность Γ с параметрическим уравнением $w = r^n e^{in\varphi}$.

Иными словами, траектория $l = \left([0,\infty), te^{i\varphi}, \mathbb{C}\right)$, $0 \le \varphi < 2\pi$, отображается на траекторию $L = \left([0,\infty), t^n e^{i\varphi}, \mathbb{C}\right)$, а траектория $\gamma = \left([0,2\pi], re^{i\varphi}, \mathbb{C}\right)$, $0 < r < \infty$, – на траекторию $\Gamma = \left([0,2\pi], r^n e^{in\varphi}, \mathbb{C}\right)$.

Ортогональные траектории l, γ отображаются соответственно на ортогональные траектории L, Γ и, значит, степенная функция прямые углы с вершиной $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ переводит в прямые углы с вершиной $w = z^n$. Углы с вершиной $z = 0$ при степенном отображении увеличиваются в n раз.

1.2. Корень. Фиксируем точку $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и найдем те значения $z \in \mathbb{C}$, которым степенная функция $w = z^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, ставит в соответствие w. Положим

$$w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha),\ 0 \le \alpha < 2\pi,\ z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Условие $z^n = w$ равносильно системе уравнений

$$|z|^n \cos n\varphi = |w|\cos\alpha,\ |z|^n \sin n\varphi = |w|\sin\alpha,$$

поскольку

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi\,.$$

Решение этой системы имеет вид

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}\,,\ n\varphi = \alpha + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Множество точек

$$z = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z}\,,$$

содержит ровно n различных точек

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),$$

соответствующих значениям $k = 0,1,...,n-1$.

Рассмотрим функцию f, ставящую в соответствие точке $w = |w|e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ точку z_k, нулю – нуль и бесконечности – бесконечность, и обозначим её через $\sqrt[n]{w}$. Введенная функция называется *корнем* n-й степени. Она определена на $\overline{\mathbb{C}}$ и многозначна, точнее, n-значна на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0,\infty\}$. Её значениями в точке $z = 1$, то есть значениями $\sqrt[n]{1}$, являются числа $e_0 = 1$, $e_1 = e^{\frac{2\pi}{n}i}$, $e_2 = e^{\frac{2\pi}{n}2i}$, …, $e_{n-1} = e^{\frac{2\pi i}{n}(n-1)}$ (рис. 1) – вершины вписанного в единичную окружность $\partial U(0,1)$ правильного многоугольника.

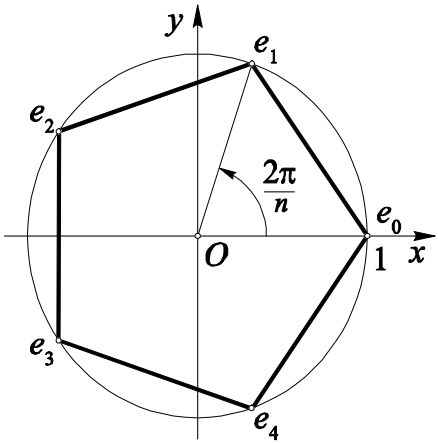


Рис. 1 (*n*=5).

1.3. Риманова поверхность для $\sqrt[n]{w}$. Множеству комплексных чисел $w=|w|e^{i\alpha}$, $0\le|w|<\infty$, $0\le\alpha<2\pi$, соответствует множество Δ – комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с *разрезом* по лучу, идущему из нуля по положительной части действительной оси (рис. 2). Разрез имеет два края: верхний – на нем $w=|w|$, $(\alpha=0)$ – и нижний – геометрически совпадающий с верхним краем, но исключаемый из рассмотрения условием $\arg w=\alpha\in[0,2\pi)$.

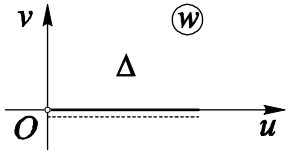


Рис. 2 (*w=u+iv*).

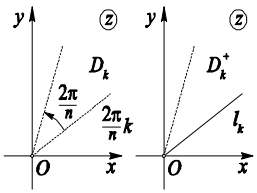
Представим плоскость $\mathbb{C}$ комплексного переменного $z=|z|e^{i\varphi}$ как объединение n попарно непересекающихся множеств

$$D_k^+=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|>0,\frac{2\pi}{n}k\le\varphi<\frac{2\pi}{n}(k+1)\right\},\ k=0,1,...,n-1,$$

получающихся присоединением к угловой области

$$D_k=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|>0,\frac{2\pi}{n}k<\varphi<\frac{2\pi}{n}(k+1)\right\}$$

луча $l_k=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|>0,\arg z=\frac{2\pi}{n}k\right\}$, входящего в границу области D_k (рис. 3). Объединение $\bigcup_{k=0}^{n-1}D_k^+$ совпадает с $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Каждая функция



а) б)

Рис. 3 (*z=x+iy*).

$\left(\sqrt[n]{w}\right)_k=\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$, $k=0,1,...,n-1$, однозначна на w-плоскости с разрезом, то есть на Δ, и имеет значения,

принадлежащие D_k^+ и заполняющие это множество. Для преодоления неудобств, связанных с многозначностью $\sqrt[n]{w}$, поступим, воспроизводя идею Римана, следующим образом. Возьмем n комплексных плоскостей с разрезом $\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_{n-1}$ и будем считать, что они расположены друг над другом и получены сдвигом вверх по направлению, ортогональному плоскости Δ_0 (рис. 4). Соединим (склеим) нижний край разреза на D_0 с верхним краем разреза на D_1, нижний край разреза на D_1 с верхним краем разреза на Δ_2 и т.д. Наконец, соединим нижний край разреза на D_{n+1} с верхним краем разреза на D_0 (эта процедура не может быть проиллюстрирована построениями в $\mathbb{R}^3$) (рис. 5). Получается связная поверхность R_n – *поверхность Римана для* $\sqrt[n]{w}$, имеющая следующее свойство. Поднимем точку $w \in \Delta_0$ на плоскости $\Delta_1, ..., \Delta_{n-1}$. Будем перемещать точку w, взятую на Δ_0, по непрерывной кривой, лежащей на R_n и не пересекающей линию склейки Δ_0 с Δ_1, в точку w на Δ_1. Тогда значение $\left(\sqrt[n]{w}\right)_0 \in D_0^+$ непрерывно переместится в значение $\left(\sqrt[n]{w}\right)_1 \in D_1^+$, причем $\left(\sqrt[n]{w}\right)_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}} \left(\sqrt[n]{w}\right)_0$. Читатель легко убедится, что подобным образом реализуется переход от $\left(\sqrt[n]{w}\right)_{k_1}$ к $\left(\sqrt[n]{w}\right)_{k_2}$. На

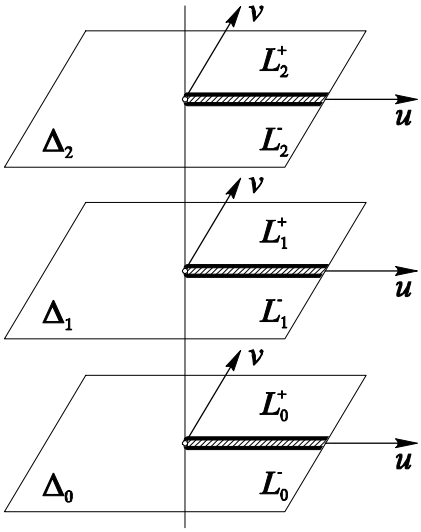


Рис. 4.

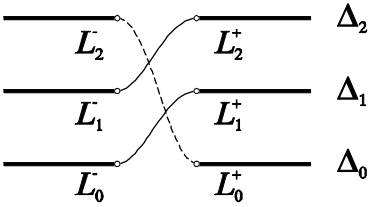


Рис. 5.

поверхности R_n можно рассматривать ε-окрестности точки и распространить понятие непрерывности $\sqrt[n]{w}$.

Таким образом, функция $\sqrt[n]{w}$, n-значная на комплексной плоскости, становится однозначной на своей римановой поверхности. Точка $z=0$ является *точкой ветвления* римановой поверхности R_n (точнее, алгебраической точкой ветвления порядка n).

§ 2. МНОГОЧЛЕН И РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

2.1. Многочлен. *Многочленом* над полем $\mathbb{C}$ называют функцию вида

$$f(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0,\ z\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N},$$

где $a_n, a_{n-1},\ldots,a_1,a_0$ – комплексные числа, $a_n\neq 0$. Число n называют *порядком* (*степенью*) многочлена. Степенная функция представляет собой частный случай многочлена. Функцию $f(z)=a_0$, $a_0\neq 0$, считаем многочленом нулевой степени.

Многочлен непрерывен на $\mathbb{C}$, имеет производную

$$f'(z)=na_n z^{n-1}+(n-1)a_{n-1}z^{n-2}+\ldots+a_1,\ z\in\mathbb{C},$$

и, следовательно, является голоморфной функцией в $\mathbb{C}$, то есть целой функцией. Точки, в которых многочлен обращается в нуль, называют *корнями* (*нулями*) многочлена.

Многочлен первого порядка

$$w=a_1 z+a_0,\ a_1\neq 0,$$

называют *линейной* функцией. Она сводится к композиции трех отображений: $z_1=ze^{i\arg a_1}$, $z_2=|a_1|z_1$, $w=z_2+a_0$, геометрически представляющих последовательно поворот плоскости вокруг нуля на угол $\alpha=\arg a_1$, растяжение (сжатие) плоскости в $|a_1|$ раз и перенос начала из $z_2=0$ в точку a_0 посредством сдвига плоскости. Прямые

и окружности линейной функцией переводятся соответственно в прямые и окружности. Обратная функция для линейной функции – линейная функция.

Многочлен второй степени

$$w = a_2 z^2 + a_1 z + a_0,\ a_2 \neq 0,$$

преобразуется к виду

$$w = a_2 \left[\left(z + \frac{a_1}{2a_2} \right)^2 + \frac{4a_0 a_2 - a_1^2}{4a_2^2} \right],$$

показывающему, что многочлен получается как композиция последовательных отображений

$$z_1 = z + \frac{a_1}{2a_2},\ z_2 = z_1^2,\ z_3 = z_2 + \frac{4a_0 a_2 - a_1}{4a_2^2},\ w = a_2 z_3,$$

из которых три – линейные отображения, а одно дается степенной функцией второго порядка.

Обратная функция

$$z = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2 + 4a_2 w}}{2a_2}$$

однозначна на двулистной римановой поверхности квадратного корня, имеющей ветвление в точке

$$w = \frac{4a_0 a_2 - a_1^2}{4a_2}.$$

Только в этой точке обратная функция имеет единственное значение: $z - \frac{a_1}{2a_2}$. В точке $w = 0$ функция принимает два значения. Они даются формулой

$$z = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2},$$

представляющей нули уравнения

$$a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0.$$

2.2. Рациональная функция. Так называют функцию вида

$$f(z)=\frac{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0}{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_1 z+b_0},$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0; b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0$ – комплексные числа, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. *Рациональная* функция – это отношение двух многочленов порядка $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$. Её значения конечны во всех точках плоскости $\mathbb{C}$, за исключением множества V нулей знаменателя. На множестве $\mathbb{C} \setminus V$ функция непрерывна, имеет производную и, следовательно, голоморфна в $\mathbb{C} \setminus V$.

2.3. Функция Жуковского. Рациональную функцию

$$w=J(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

называют *функцией Жуковского*. Она играет важную роль в теоретической гидродинамике при построении и изучении профиля крыла самолета. Николай Егорович Жуковский (1847–1921) первым применил методы и результаты теории комплексных функций комплексного переменного к расчету потоков идеального газа вокруг твердых тел, дал формулу для подъемной силы крыла самолета.

Функция Жуковского определена в $\mathbb{C}$, непрерывна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, имеет производную

$$J'(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right), z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

и, следовательно, голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Легко видеть, что $J\left(\overline{\mathbb{C}}\right)=\overline{\mathbb{C}}$. В точках z и $\frac{1}{z}$, связанных двойной симметрией: симметрией относительно единичной окружности и симметрией относительно действительной оси, функция Жуковского имеет одинаковые значения: $J(z)=J\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

Фиксируем точку $w \in \mathbb{C}$ и найдем те значения $z \in \mathbb{C}$, которым функция Жуковского $J(z)$ ставит в соответствие w. Решая уравнение

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=w,\ w\in\mathbb{C},$$

находим функцию

$$z=w+\sqrt{w^2-1}\,,$$

обратную функции Жуковского, то есть функцию

$$J^{-1}(w)=w+\sqrt{w^2-1}\,.$$

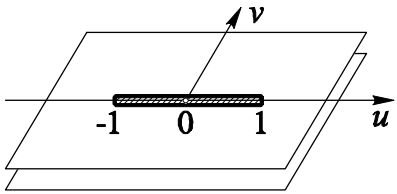


Рис. 6 (*w=u+iv*).

Она однозначна на двулистной римановой поверхности, состоящей из двух плоскостей, соединенных по прямолинейным разрезам вдоль отрезков с концами $w=-1$, $w=1$. При этом нижний берег разреза одной плоскости соединяется с верхним берегом разреза другой плоскости (рис. 6).

2.4. Дробно-линейная функция. Рациональную функцию

$$w=L(z)=\frac{az+b}{cz+d}\,,$$

представляющую собой отношение двух линейных функций с неравными нулю комплексными коэффициентами *a,b,c,d,* $c\neq 0$, $ad-bc\neq 0$, называют *дробно-линейной.* Дополнительные условия на коэффициенты объясняются тем, что при $c=0$, $ad-bc\neq 0$ функция превращается в линейную (она относится к многочленам), а при $c\neq 0$, $ad-bc=0$ функция $L(z)=\text{const}$.

Функция $L(z)$ определена на $\overline{\mathbb{C}}$, принимает в бесконечности значение $\frac{a}{c}$, в точке $z=-\frac{d}{c}$ имеет значение ∞. Производная

$$L'(z)=\frac{ad-bc}{\left(cz+d\right)^2}$$

существует на $\mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ и, следовательно, $L(z)$ голоморфна на комплексной плоскости с исключенной точкой $-\frac{d}{c}$. Для ответа на

вопрос о голоморфности $L(z)$ в бесконечно удаленной точке рассмотрим отображение

$$\varphi(\zeta) = L\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{a + b\zeta}{c + d\zeta}.$$

Для него производная

$$\varphi'(\zeta) = \frac{bc - ad}{(c + d\zeta)^2}$$

существует в окрестности нуля и, согласно определению голоморфности, $L(z)$ – голоморфная функция в бесконечно удаленной точке.

Таким образом, $L(z)$ – голоморфная функция в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Обратная для $w = L(z)$ функция

$$z = L^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a},\ w \in \overline{\mathbb{C}},$$

является также дробно-линейной. Поэтому $w = L(z)$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между точками расширенных комплексных плоскостей.

Представим дробно-линейное отображение в виде

$$w = P + \frac{Q}{z - R},\ \text{где}\ \ P = \frac{a}{c},\ Q = \frac{ad - bc}{c^2},\ R = \frac{d}{c},$$

и рассмотрим его как композицию отображений

$$z_1 = z - R,\ z_2 = \frac{1}{z_1},\ z_3 = Qz_2,\ w = z_3 + P.$$

Линейные отображения переводят прямые в прямые, окружности в окружности. Преобразование $z_2 = \frac{1}{z_1}$ переводит окружности (на z_1-плоскости они представляются уравнением

$$A|z|^2 + \overline{B}z_1 + B\overline{z_1} + C = 0,\ A \neq 0\ )$$

и прямые (они представляются уравнением

$$\overline{B}z_1 + B\overline{z}_1 + C = 0\ )$$

в кривую с уравнением

$$C\left|z_2\right|^2 + B\overline{z}_2 + \overline{B}z_2 + A = 0$$

и, следовательно, являющуюся окружностью, если $C \neq 0$, или прямой, если $C = 0$.

Каждая окружность, лежащая на сфере Римана, стереографически проецируется на плоскость окружностью или прямой (в них переходят окружности, проходящие через «северный полюс сферы»). Поэтому имеются основания говорить об окружностях и прямых на плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, используя термин «окружность» как собирательный. Пользуясь этим термином, установленное свойство можно сформулировать следующим образом: при дробно-линейном отображении любая окружность плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ переходит в окружность на $\overline{\mathbb{C}}$. Это свойство, называемое *круговым*, является одним из важнейших свойств дробно-линейного отображения.

§ 3. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ЛОГАРИФМ

3.1. Определение функции e^z. Фиксируем точку $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. При достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ точка $\dfrac{z}{n}$ лежит в круге $U(0,1)$, а точка $1 + \dfrac{z}{n}$ – в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Рассмотрим числовую последовательность $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ с общим членом $w_n = \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$. Докажем существование предела этой последовательности при $n \to \infty$ и найдем его, вычислив $\lim\limits_{n\to\infty} |w_n|$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \arg w_n$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} |w_n| = \lim_{n\to\infty} \left|1 + \frac{x+iy}{n}\right|^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = e^x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\arg w_n=\lim_{n\to\infty}\left[n\arg\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[n\operatorname{arctg}\frac{y}{x+n}\right]=y\,.$$

Пользуясь тригонометрической формой записи комплексного числа, получаем

$$\lim_{n\to\infty}w_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^x\left(\cos y+i\sin y\right).$$

Итак, предел последовательности $\left\{w_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ найден. Действительная (мнимая) часть предела, представленного в алгебраической форме записи комплексного числа, равна произведению значения e^x известной из действительного анализа показательной функции e^x, $-\infty<x<+\infty$, и значения функции косинус (синус) в точке y, $-\infty<y<\infty$.

Распространим известную действительную функцию e^x действительного переменного с действительной оси на комплексную плоскость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию

$$e^z=e^x\left(\cos y+i\sin y\right),\ z=x+iy\,,$$

называют *показательной* (и читают: e в степени z).

Для этой функции также используется обозначение $\exp z$ (экспонента z).

Из вышеизложенного следует, что определению e^z можно придать другой вид, используя понятие предела числовой последовательности:

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n,\ z\in\mathbb{C}\,.$$

3.2. Свойства функции e^z. Отметим основные свойства показательной функции.

Функция e^z непрерывна на $\mathbb{C}$, её вещественная часть $u(x,y)=e^x\cos y$ и мнимая часть $v(x,y)=e^x\sin y$ удовлетворяет условиям Коши – Римана на $\mathbb{C}$ и поэтому функция e^z голоморфна на $\mathbb{C}$, является целой функцией. Легко видеть, что $\left(e^z\right)'=e^z$.

Так как $\left|e^z\right| = e^x$, то e^z не принимает нулевого значения.

Сужение функции e^z на действительную ось совпадает с e^x: $e^z\Big|_{z=x} = e^x$.

Сужение функции e^z на мнимую ось (на ней $x = 0$) приводит к классической *формуле Эйлера* (опубликована в 1743 г.):

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

связывающей значения показательной функции для мнимых значений аргумента с косинусом и синусом. Пользуясь формулой Эйлера, можем записать (как это было объявлено в гл. 1, п. 3.4) любое комплексное число (в дополнение к алгебраической и тригонометрической) в *показательной* форме: $z = re^{i\varphi}$, если $z \neq 0$, где r – модуль, а φ – аргумент числа z. В частности,

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}};\ -1 = e^{i\pi};\ 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}};\ e^{2k\pi i} = 1,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Непосредственной проверкой устанавливается равенство

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2},$$

составляющее содержание *теоремы сложения для показательной функции.*

Действительно, пусть $z_k = x_k + iy_k \neq 0$, $k = 1,2$. Тогда

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}\left(\cos y_1 + i \sin y_1\right)e^{x_2}\left(\cos y_2 + i \sin y_2\right) =$$
$$= e^{x_1+x_2}\left[\cos\left(y_1 + y_2\right) + i \sin\left(y_1 + y_2\right)\right] = e^{z_1+z_2}.$$

Полагая в теореме сложения $z_1 = z$, $z_2 = -z$, получаем $e^z e^{-z} = e^0 = 1$, откуда $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$, $z \in \mathbb{C}$.

Пользуясь формулой Эйлера, находим, что $e^{z+2\pi i} = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, и тем самым устанавливаем важное свойство функции e^z: она периодическая с периодом $2\pi i$ и, следовательно, числа $2k\pi i$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, также являются её периодами. Убедимся в том, что других периодов функция e^z не имеет. Пусть $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – период показательной функции. Тогда $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ и $e^{z+a} = e^z$, $z \in \mathbb{C}$. Пользуясь теоремой сложения и тем, что $e^z \neq 0$, получаем

$e^{a_1+ia_2}=1$, или, что то же самое, $e^{a_1}\left(\cos a_2+i\sin a_2\right)=1$. Для a_1, a_2 имеем отсюда систему двух уравнений:

$$e^{a_1}\cos a_2=1,\ e^{a_1}\sin a_2=0.$$

Сложим почленно квадраты левых и правых частей уравнений. Получим $e^{2a_1}=1$, откуда $a_1=0$. Система уравнений $\cos a_2=1$, $\sin a_2=0$ имеет отличными от нуля решениями только числа $a_2=2k\pi$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$. Итак, кроме уже отмеченных периодов, других периодов e^z не имеет. Число $2\pi i$ называют *основным периодом* функции e^z.

Пример. Для действительных значений x из соотношений

$$\cos nx+i\sin nx=e^{inx}=\left(\cos x+i\sin x\right)^n,\ n\in\mathbb{N},$$

по формуле бинома Ньютона имеем

$$\cos nx=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n}i^{n-k}\binom{n}{k}\cos^k x\sin^{n-k}x,$$

$$\sin nx=\operatorname{Im}\sum_{k=0}^{n}i^{n-k}\binom{n}{k}\cos^k x\sin^{n-k}x.$$

В частности,

$\cos 2x=2\cos^2 x-1$, $\sin 2x=2\sin x\cos$,

$\cos 3x=4\cos^2 x-3\cos x$, $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$,

$\cos 4x=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$, $\sin 4x=\cos x\left(4\sin x-8\sin^3 x\right)$,

$\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$, $\sin 5x=5\sin x-20\sin^3 x+16\sin^5 x$.

Пример. Найдем сумму $I=1+e_1^s+\ldots+e_{n-1}^s$, где $n=2,3,\ldots$, $s=1,2,\ldots,n-1$ и $e_k=e^{\frac{2\pi i}{n}k}$. Так как $e_1^s e_k^s=e_{k+1}^s$, то $\left(1-e_1^s\right)\left(1+e_1^s+\ldots+e_{n-1}^s\right)=1-e_n^s=0$. Отсюда $I=0$. ◁

3.3. Логарифм. Пусть $w, w\neq0$ – комплексное число. Поставим ему в соответствие все решения уравнения $e^z=w$. Представим w в показательной форме: $w=|w|e^{i\varphi}$, $\varphi=\arg w$, $|w|>0$,

$0 \le \varphi < 2\pi$, а z – в алгебраической: $z = x + iy$. Согласно уравнению $e^{x+iy} = |w| e^{i\varphi}$, или, что то же самое, $e^x e^{iy} = |w| e^{i\varphi}$. Отсюда следует, что $e^x = |w|$, $y = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Значит, все решения рассматриваемого уравнения даются формулой $z = x + iy = \ln|w| + i(\varphi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, показывающей, что множество решений счетно.

Обозначим через $(\operatorname{Ln} w)_k$ отображение $z = \ln|w| + i\{\arg w + 2k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$, множества (см. рис. 2) $\Delta = \{w \in \mathbb{C} : |w| > 0,\ 0 \le \arg w < 2\pi\}$ на множество $D_k^+ = \{z \in \mathbb{C} : -\infty < \operatorname{Re} z < \infty,\ 2\pi k \le \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1)\}$, представляющее собой область (полосу) (рис. 7)

$$D_k = \left\{ \begin{matrix} z \in \mathbb{C}, -\infty < \operatorname{Re} z < \infty, \\ 2\pi k \le \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1) \end{matrix} \right\},$$

дополненную прямой $\Gamma_k = \{z \in \mathbb{C}, -\infty < \operatorname{Re} z < \infty, \operatorname{Im} z = 2k\pi\}$.

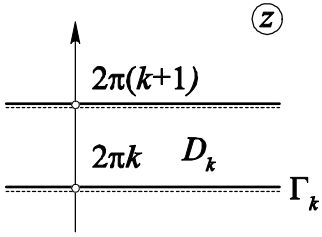


Рис. 7.

Отображение $(\operatorname{Ln})_k : D_k^+ \to \Delta$, обратное к отображению $e^z : \Delta \to D_k^+$, называют *логарифмом*. Оно однозначно в D_k^+ и имеет производную. Найдем её. Пусть w, w_0 – две различные точки в D_k. Тогда при $z = (\operatorname{Ln} w)_k$, $z_0 = (\operatorname{Ln} w_0)_k$

$$\frac{(\operatorname{Ln} w)_k - (\operatorname{Ln} w_0)_k}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{w - w_0} = 1 : \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0}$$

и с учетом дифференцируемости e^z и формулы $(e^z)' = e^z$ имеем

$$(\operatorname{Ln} w)'_k = 1 : \lim_{z \to z_0} \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^{(\operatorname{Ln} w)_k}} = \frac{1}{w}.$$

Видим, что для каждой функции $\left(\operatorname{Ln} w\right)_k$ существует производная $\left(\operatorname{Ln} w\right)'_k = \dfrac{1}{w}$, не зависящая от k. Значит, $\left(\operatorname{Ln} w\right)_k$ – голоморфная функция в D_k^+.

Объединение $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} D_k^+$ совпадает с $\mathbb{C}$. Каждому множеству D_k^+ соответствует плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль положительной части действительной оси, то есть множество Δ. Составим счетный набор таких множеств (рис. 8), полагая $\exp D_k^+ = \Delta_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Соединим (склеим) Δ_k с Δ_{k+1} $\left(k \in \mathbb{Z}\right)$ способом, уже использованным при построении поверхности Римана корня: нижний край разреза на Δ_k соединим с верхним краем разреза на Δ_{k+1} (рис. 9). В результате получается связная поверхность – *поверхность Римана для логарифма,* обладающая следующим свойством. Если точка w движется по кривой, начинающейся в точке $w_0 \in \Delta_k$, не пересекающей линии склейки с Δ_{k+1} и Δ_{k-1} и оканчивающейся в $w_0 \in \Delta_k$, то соответствующая при отображении $\left(\operatorname{Ln} w\right)_k$ точка z опишет кривую, лежащую в D_k, начинающуюся и оканчивающуюся в точке $z_0 = \left(\operatorname{Ln} w_0\right)_k \in D_k$. Результат аналогичного построения будет другим, если точка w движется по кривой, начинающейся в точке $w_0 \in \Delta_k$, но пересекающей в некоторой точке линию склейки с Δ_{k+1} (или с Δ_{k-1}) и оканчивающейся соответственно в Δ_{k+1} или в Δ_{k-1}.

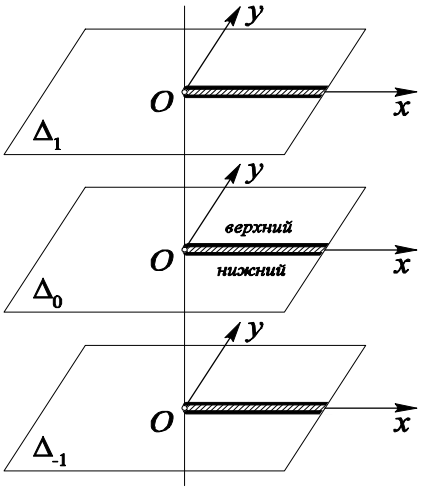


Рис. 8.

Тогда концевой точке w_1 кривой будут соответствовать точки $z_1 = \left(\operatorname{Ln} w_0\right)_{k+1} \in D_{k+1}$ или $z_1 = \left(\operatorname{Ln} w_0\right)_{k-1} \in D_{k-1}$. В частности, если $w_0 \in \Delta_k$ и $w_1 = w_0 \in \Delta_{k+1}$, то $z_1 = z_0 + 2\pi i$.

На построенной римановой поверхности функция логарифма однозначна. Её обозначают $\operatorname{Ln} w$, а о функциях $\left(\operatorname{Ln} w\right)_k$ говорят как об её однозначных *ветвях*, заданных на плоском множестве. Точка $w = 0$ поверхности Римана для логарифма называется *логарифмической* точкой ветвления.

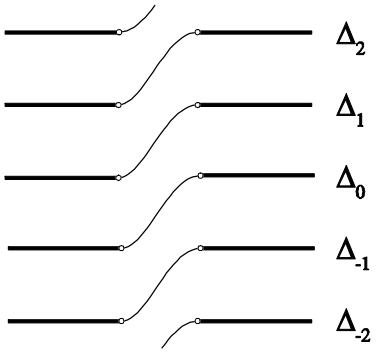


Рис. 9.

Все ветви $\left(\operatorname{Ln} w\right)_k$, $k \in \mathbb{Z}$, кроме $\left(\operatorname{Ln} w\right)_0$, не принимают действительных значений. Отображение $\ln w = \left(\operatorname{Ln} w\right)_0 : \Delta_0 \to D_0^+$ имеет вид $\ln w = \ln|w| + i \arg w$ и, значит, только точкам $w = |w| > 0$ ставит в соответствие действительные числа.

Бесконечнозначные функции обычно обозначают сокращением от их названий, с большой буквы.

§ 4. ОБЩАЯ СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

4.1. Определение общей степенной функции. В § 1 введена степенная функция z^n с показателем n, являющимся натуральным числом. Более широкий класс функций получается при замене n на комплексное число.

Пусть $\mu = a + ib \in \mathbb{C}$. *Общей степенной* функцией z^μ называют функцию, даваемую формулой

$$z^\mu = e^{\mu \operatorname{Ln} z},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Общая степенная функция при $\mu = n$, $n \in \mathbb{N}$, совпадает со степенной функцией.

Действительно,

$$z^{\mu}\Big|_{\mu=n} = e^{n\operatorname{Ln} z} = e^{n(\ln z + 2k\pi i)} = e^{n\ln z} e^{2nk\pi i} = e^{n\ln z} = e^{n(\ln|z| + i\arg z)} = |z|^n e^{in\arg z} = z^n,$$

и, следовательно, $z^{\mu}\Big|_{\mu=n}$ – степенная функция с показателем n.

Отметим другие свойства общей степенной функции с действительным μ.

Если $\mu = -n$, $n \in \mathbb{N}$, то $z^{\mu}\Big|_{\mu=-n} = e^{-n\operatorname{Ln} z} = \dfrac{1}{e^{n\operatorname{Ln} z}} = \dfrac{1}{z^n}$. Значит, z^n и z^{-n} связаны формулой $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Функция z^{-n}, $n \in \mathbb{N}$, рациональная. Её производная $\left(z^{-n}\right)' = -\dfrac{n}{z^{n+1}}$ существует для всех z, кроме нуля и, следовательно, z^{-n} – голоморфная функция в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Рассмотрим общую степенную функцию при $\mu = \dfrac{1}{n}$, $n = 2,3,\ldots$. Имеем

$$z^{\mu}\Big|_{\mu=\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln} z} = e^{\frac{1}{n}(\ln z + 2k\pi i)} = e^{\frac{1}{n}\ln z} e^{\frac{2k\pi i}{n}} =$$

$$= e^{\frac{1}{n}(\ln|z| + i\arg z)} e^{\frac{2k\pi i}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln|z|} e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}.$$

В произведении, стоящем в правой части цепочки равенств, первый множитель – определенное положительное число, а второй множитель принимает ровно n значений, получаемых при $k = 0,1,\ldots,n-1$. Такое произведение представляет собой корень n-й степени, введенный в п. 1.2. Значит, $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$.

Выясним свойства общей степенной функции, если $\mu = \dfrac{p}{q}$ – положительное рациональное число, отличное от целого числа. Согласно определению общей степенной функции, свойств $\operatorname{Ln} z$ и показательной функции имеем

$$z^{\mu}\Big|_{\mu=\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q}\operatorname{Ln} z} = e^{\frac{p}{q}(\ln z+2k\pi i)} = e^{\frac{p}{q}\ln z}\, e^{\frac{2kp\pi i}{q}} = e^{\frac{p}{q}\ln|z|}\, e^{i\frac{p}{q}(\arg z+2k\pi)}.$$

Последняя формула показывает, что z^{μ} принимает ровно q различных значений, одним их которых является $\sqrt[q]{|z|^{p}}\, e^{i\frac{p}{q}\arg z}$, а остальные $q-1$ значений отличаются от него только множителем вида $e^{\frac{2kp\pi}{q}}$, $k=1,2,...,q-1$. Значит, $z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^{p}}$ – q-значная функция.

Завершим рассмотрение общей степенной функции с действительным показателем μ случаем, когда μ – иррациональное положительное число. В этом случае функция

$$z^{\mu} = e^{\mu \operatorname{Ln} z} = |z|^{\mu}\, e^{i\mu(\arg z+2k\pi)},\ k\in\mathbb{Z},$$

имеет однозначно определенный модуль $|z^{\mu}| = |z|^{\mu}$ и бесконечное множество значений аргумента, и, следовательно, общая степенная функция бесконечнозначна.

Примеры: а) $z^{\sqrt{2}}\Big|_{z=i} = i^{\sqrt{2}} = e^{i\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+2k\right)\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$;

б) $z^{\sqrt{2}}\Big|_{z=-1} = (-1)^{\sqrt{2}} = e^{i\sqrt{2}(1+2k)\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$;

в) $z^{\pi}\Big|_{z=-1} = (-1)^{\pi} = e^{i(2k+1)\pi^2}$, $k\in\mathbb{Z}$. $\triangleleft$

4.2. Общая степенная функция с комплексным показателем. Обратимся теперь к общей степенной функции с комплексным показателем $\mu=\alpha+i\beta$, $\beta\neq 0$, то есть к функции

$$z^{\alpha+i\beta} = e^{(\alpha+i\beta)\operatorname{Ln} z},\ z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Поскольку

$$(\alpha+i\beta)\operatorname{Ln} z = (\alpha+i\beta)\left(\ln|z| + i\arg z + 2k\pi i\right) = Q+i\Phi,$$

где

$$Q = \alpha\ln|z| - \beta\arg z - 2k\beta\pi,\quad \Phi = \beta\ln|z| + \alpha\arg z + 2k\alpha\pi,$$

то $z^{\alpha+i\beta} = e^{Q}e^{i\Phi}$. Видим, что $|z^{\alpha+i\beta}| = e^{Q}$, $\arg z^{\alpha+i\beta} = \Phi$ – бесконечнозначные функции.

Примеры. Вычислим значение функции z^i в точках $z=i$, $z=1$. Имеем

$$i^i = e^{i\left(\ln|i|+\frac{\pi}{2}i+2k\pi i\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}}e^{-2k\pi},\ k\in\mathbb{Z};$$

$$1^i = e^{i\operatorname{Ln}1} = e^{i(\ln 1+2k\pi i)} = e^{-2k\pi},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Заметим, что указанные значения общей степенной функции z^i – действительные числа.

§ 5. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ И ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

5.1. Функции $\operatorname{ch}z$, $\operatorname{sh}z$. *Гиперболический косинус* $\operatorname{ch}z$ и *гиперболический синус* $\operatorname{sh}z$ определяются на комплексной плоскости соответственно формулами

$$\operatorname{ch}z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\quad \operatorname{sh}z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}\quad z\in\mathbb{C}.$$

Обе функции непрерывны, имеют производные

$$\left(\operatorname{ch}z\right)'=\operatorname{sh}z,\quad \left(\operatorname{sh}z\right)'=\operatorname{ch}z,\quad z\in\mathbb{C},$$

и, значит, голоморфны на $\mathbb{C}$. Они периодические с основным периодом $2\pi i$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что на $\mathbb{C}$

$$\operatorname{ch}\left(-z\right)=\operatorname{ch}z,\quad \operatorname{sh}\left(-z\right)=-\operatorname{sh}z,$$

$$\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1.$$

В тождестве

$$2\left(ab+\frac{1}{ab}\right)=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right) \qquad (1)$$

положим $a=e^{z_1}$, $b=e^{z_2}$ и согласно определению $\operatorname{ch}z, \operatorname{sh}z$ придем к *теореме сложения для гиперболического косинуса:*

$$\operatorname{ch}\left(z_1+z_2\right)=\operatorname{ch}z_1\operatorname{ch}z_2+\operatorname{sh}z_1\operatorname{sh}z_2,\ z_1\in\mathbb{C},\ z_2\in\mathbb{C}.$$

В частности, $\operatorname{ch}2z=\operatorname{ch}^2 z+\operatorname{sh}^2 z$.

Аналогично, пользуясь тождеством

$$2\left(ab-\frac{1}{ab}\right)=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)+\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right), \qquad (2)$$

получаем *теорему сложения для гиперболического синуса:*

$$\operatorname{sh}\left(z_1+z_2\right)=\operatorname{sh}z_1\operatorname{ch}z_2+\operatorname{ch}z_1\operatorname{sh}z_2,\quad z_1\in\mathbb{C},\quad z_1\in\mathbb{C}.$$

В частности,

$$\operatorname{sh}2z=2\operatorname{sh}z\operatorname{ch}z.$$

Пример. Представим $\operatorname{ch}z, \operatorname{sh}z$ в алгебраической форме записи. Полагая $z=x+iy$, имеем, пользуясь теоремой сложения для показательной функции и формулой Эйлера,

$$\operatorname{ch}z=\frac{1}{2}\left(e^{x+iy}+e^{-x=iy}\right)=\frac{1}{2}\left[e^x\left(\cos y+i\sin y\right)+e^{-x}\left(\cos y-i\sin y\right)\right]=$$

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cos y+i\frac{e^x-e^{-x}}{2}\sin y.$$

Итак, $\operatorname{ch}z=\operatorname{ch}x\cos y+i\operatorname{sh}x\sin y$. $\triangleleft$

Аналогично находим, что $\operatorname{sh}z=\operatorname{sh}x\cos y+i\operatorname{ch}x\sin y$.

Функции $\operatorname{ch}z, \operatorname{sh}z$ на $\mathbb{C}$ не ограничены, поскольку квадраты их модулей, как это следует из приводимых ниже вычислений:

$$\left|\operatorname{ch}z\right|^2=\operatorname{ch}^2x\cos^2y+i\operatorname{sh}^2\sin^2y=$$

$$=\operatorname{ch}^2x\cos^2y+\left(\operatorname{ch}^2x-1\right)\sin^2y=\operatorname{ch}^2x-\sin^2y=\operatorname{sh}^2x+\cos^2y$$

и

$$\left|\operatorname{sh}z\right|^2=\operatorname{sh}^2x\cos^2y+i\operatorname{ch}^2\sin^2y=$$

$$=\operatorname{sh}^2x\cos^2y+\left(\operatorname{sh}^2x+1\right)\sin^2y=\operatorname{sh}^2x+\sin^2y=\operatorname{sh}^2x+\cos^2y,$$

представляются суммами, в которых вторые слагаемые ограничены, а первые могут принимать сколь угодно большие значения.

Функция $\operatorname{ch}z$ обращается в нуль только в точках

$$z=\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)i,\ k\in\mathbb{Z},$$

а $\operatorname{sh}z$ – только в точках $z=k\pi i$. Все они лежат на мнимой оси.

Функцию $\operatorname{ch} z$ можно рассматривать как композицию функции Жуковского и показательной функции:

$$\operatorname{ch} z = J(u) = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right), \quad u = e^z,$$

а функцию $\operatorname{sh} z$ – как композицию функции Жуковского, показательной функции и линейных функций:

$$\operatorname{sh} z = -iv, \quad v = J(t), \quad t = iu, \quad u = e^z.$$

5.2. Функции $\operatorname{Arch} w$, $\operatorname{Arsh} w$**.** Функция, обратная к гиперболическому косинусу, получается как решение уравнения

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = w, \quad w \in \mathbb{C},$$

то есть уравнения $e^{2z} - 2we^z + 1 = 0$, и обозначается $\operatorname{Arch} w$:

$$\operatorname{Arch} w = \operatorname{Ln}\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right).$$

Функция $\operatorname{Arch} w$ бесконечнозначна, поскольку является композицией с участием бесконечнозначного логарифма и двузначной функции, обратной функции Жуковского. Однозначная ветвь $\operatorname{Arch} w$ имеет производную

$$\left(\operatorname{Arch} w\right)' = \frac{1}{\sqrt{w^2 - 1}},$$

однозначную на поверхности Римана, состоящей из двух плоскостей, соединенных по противоположным берегам разреза от -1 до 1. Решая уравнение

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = w, \quad w \in \mathbb{C},$$

приходим к функции $\operatorname{Arsh} w$, обратной $\operatorname{sh} z$:

$$\operatorname{Arsh} w = \operatorname{Ln}\left(w + \sqrt{w^2 + 1}\right).$$

На поверхности Римана, состоящей из двух плоскостей, соединенных по противоположным сторонам разреза от $-i$ до i, производная

$$\left(\operatorname{Arsh} w\right)' = \frac{1}{\sqrt{w^2 + 1}} \text{ однозначна.}$$

5.3. Функции $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$. *Гиперболический тангенс* $\operatorname{th} z$ и *гиперболический котангенс* $\operatorname{cth} z$ определяются на комплексной плоскости соответственно формулами:

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1}.$$

Обе функции принимают на комплексной плоскости конечные значения, за исключением для $\operatorname{th} z$ множества V точек $z_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)i, k \in \mathbb{Z}$, и для $\operatorname{cth} z$ – множества V'_k точек $z'_k = k\pi i, k \in \mathbb{Z}$, в которых функции обращаются в бесконечность. Обе функции непрерывны на $\mathbb{C}$, за исключением указанных точек, лежащих, очевидно, на мнимой оси. В точках непрерывности

$$\left(\operatorname{th} z\right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}, \quad \left(\operatorname{cth} z\right)' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 z},$$

и, следовательно, $\operatorname{th} z$ – голоморфная функция в $\mathbb{C}\setminus V$, а $\operatorname{cth} z$ – голоморфная функция в $\mathbb{C}\setminus V'$. Функции $\operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$ – периодические. Основной период равен $i\pi$.

Теорема сложения для $\operatorname{th} z$ получается непосредственно из теорем сложения для $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$. Действительно,

$$\operatorname{th}\left(z_1+z_2\right) = \frac{\operatorname{ch}(z_1+z_2)}{\operatorname{sh}(z_1+z_2)} = \frac{\operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2}{\operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2}.$$

После деления числителя и знаменателя на $\operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2$ получаем

$$\operatorname{th}\left(z_1+z_2\right) = \frac{\operatorname{th} z_1 + \operatorname{th} z_2}{1+\operatorname{th} z_1 \operatorname{th} z_2}, \quad z_1 \in \mathbb{C}\setminus V, \quad z_2 \in \mathbb{C}\setminus V.$$

Аналогично устанавливаем, что

$$\operatorname{cth}\left(z_1+z_2\right) = \frac{1+\operatorname{cth} z_1 \operatorname{cth} z_2}{\operatorname{cth} z_1 + \operatorname{cth} z_2}, \quad z_1 \in \mathbb{C}\setminus V', \quad z_2 \in \mathbb{C}\setminus V'.$$

5.4. Функции $\operatorname{Arth} w, \operatorname{Arcth} w$. Функциями, обратными для функций $w = \operatorname{th} z$, $w = \operatorname{cth} z$, являются соответственно функции

$$\operatorname{Arth} w = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+w}{1-w}, \quad \operatorname{Arcth} w = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{w+1}{w-1},$$

образованные композицией дробно-линейных функций и логарифма.

Отметим, что производные

$$\left(\operatorname{Arth} w\right)' = \frac{1}{1+w^2}, \quad \left(\operatorname{Arcth} w\right)' = \frac{1}{1-w^2},$$

взятые от однозначных ветвей многозначных функций $\operatorname{Arth} w, \operatorname{Arcth} w$, – рациональные функции, не зависящие от выбора ветви дифференцируемых функций.

§ 6. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

6.1. Функции $\cos z, \sin z$**.** Формулу Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, -\infty < x < \infty,$$

или, что то же самое, но с заменой x на $-x$,

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x, -\infty < x < \infty,$$

можно представить в равносильной форме:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2},$$

лежащей в основе алгебраическо-аналитической разработки тригонометрии на комплексной плоскости.

По определению *косинус* и *синус* для $z \in \mathbb{C}$ вводятся следующими формулами:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}.$$

Обе функции непрерывны на $\mathbb{C}$, имеют основной период 2π. Поскольку производные $\left(\cos z\right)' = -\sin z, \quad \left(\sin z\right)' = \cos z$ существуют в каждой точке $z \in \mathbb{C}$, то $\cos z$, $\sin z$ – голоморфные функции на $\mathbb{C}$ и представляют собой, как и $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, примеры целых функций.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin\left(-z\right) = -\sin z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

При установлении дальнейших свойств функций $\cos z$, $\sin z$ будем использовать теоремы сложения.

В тождестве (1) положим $a = e^{iz_1}$, $b = e^{iz_2}$. Согласно определению $\cos z$, $\sin z$ получим *теорему сложения для косинуса:*

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad z_1 \in \mathbb{C}, \quad z_2 \in \mathbb{C}.$$

В частности, $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$. Из теоремы сложения для косинуса следуют формулы

$$\cos(z_1 + z_2) + \cos(z_1 - z_2) = 2\cos z_1 \cos z_2,$$
$$\cos(z_1 + z_2) - \cos(z_1 - z_2) = -2\sin z_1 \sin z_2,$$

принимающие после замены $\zeta_1 = z_1 + z_2, \zeta_2 = z_1 - z_2$ вид

$$\cos\zeta_1 + \cos\zeta_2 = 2\cos\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}\cos\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2}, \quad \zeta_1 \in \mathbb{C}, \quad \zeta_2 \in \mathbb{C},$$
$$\cos\zeta_1 - \cos\zeta_2 = -2\sin\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}\sin\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2}, \quad \zeta_1 \in \mathbb{C}, \quad \zeta_2 \in \mathbb{C},$$

и известные как формулы преобразования суммы (разности) косинусов и синусов к виду, удобному для логарифмирования.

Полагая в этих формулах $\zeta_1 = \zeta, \zeta_2 = 0$, получаем

$$\cos\zeta + 1 = 2\cos^2\frac{\zeta}{2}, \quad \cos^2\zeta - 1 = -2\sin^2\frac{\zeta}{2}, \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

Пользуясь тождеством (2) с $a = e^{iz_1}$, $b = e^{iz_2}$, получаем *теорему сложения для синуса*:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \quad z_1 \in \mathbb{C}, \quad z_2 \in \mathbb{C}.$$

В частности, $\sin 2z = 2\sin z \cos z$. Так как

$$\sin(z_1 + z_2) + \sin(z_1 - z_2) = 2\sin z_1 \cos z_2,$$
$$\sin(z_1 + z_2) - \sin(z_1 - z_2) = 2\cos z_1 \sin z_2,$$

то после замены $\zeta_1 = z_1 + z_2$, $\zeta_2 = z_1 - z_2$ эти формулы принимают вид

$$\sin\zeta_1 + \sin\zeta_2 = 2\sin\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}\cos\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2}, \quad \zeta_1 \in \mathbb{C}, \quad \zeta_2 \in \mathbb{C},$$
$$\sin\zeta_1 - \sin\zeta_2 = 2\cos\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}\sin\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2}, \quad \zeta_1 \in \mathbb{C}, \quad \zeta_2 \in \mathbb{C}.$$

Полагая в теореме сложения для косинуса $z_1 = z$, $z_2 = \dfrac{\pi}{2}$, а затем $z_1 = z$, $z_2 = \pi$,
получаем формулы *приведения*:

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z, \quad \cos\left(z + \pi\right) = -\cos z,$$

$$\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = \sin z, \quad \cos\left(z - \pi\right) = -\cos z.$$

Аналогичные формулы для синуса имеют вид

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \quad \sin\left(z + \pi\right) = -\sin z,$$

$$\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos z, \quad \sin\left(z - \pi\right) = -\sin z.$$

Связь между тригонометрическими и гиперболическими косинусами и синусами дается формулами

$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z, \quad \sin(iz) = i \operatorname{sh} z,$$

легко выводимыми из определений функций $\cos z$, $\operatorname{ch} z$ и $\sin z$, $\operatorname{sh} z$.

Пример. Представим $\cos z$, $\sin z$ в алгебраической форме записи. Полагая $z = x + iy$, имеем, пользуясь теоремой сложения для косинуса и связью между гиперболическими и тригонометрическими косинусами и синусами,

$$\cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

Аналогично находим

$$\sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y. \quad \triangleleft$$

Функции $\cos z$, $\sin z$ на $\mathbb{C}$ не ограничены, поскольку квадраты их модулей

$$\left|\cos z\right|^2 = \left(\cos x \operatorname{ch} y\right)^2 + \left(\sin x \operatorname{sh} y\right)^2 =$$

$$= \cos^2 x \left(1 + \operatorname{sh}^2 y\right) + \left(1 - \cos^2 x\right) \operatorname{sh}^2 y = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y,$$

и

$$|\sin z|^2 = (\sin x \operatorname{ch} y)^2 + (\cos x \operatorname{sh} y)^2 =$$
$$= \sin^2 x(1 + \operatorname{sh}^2 y) + (1 - \sin^2 x)\operatorname{sh}^2 y = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$$

представляются суммами, в которых первые слагаемые ограничены, а $\operatorname{sh}^2 y$ может принимать произвольно большие значения.

Функция $\cos z$ обращается в нуль в точках $z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, а $\sin z$ – в точках $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, лежащих на действительной оси. Во всех других точках комплексной плоскости функции имеют значения, отличные от нуля.

Функцию $\cos z$ можно рассматривать как композицию, составленную из функции Жуковского, показательной функции и линейной функции

$$\cos z = J(u) = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right), u = e^{\zeta}, \zeta = iz,$$

а функцию $\sin z$ – как композицию, составленную из функции Жуковского, показательной функции и линейных функций

$$\sin z = J(u), u = iv, v = e^{\zeta}, \zeta = iz.$$

6.2. Функции $\operatorname{Arc}\cos w, \operatorname{Arc}\sin w$**.** Функция, обратная к косинусу, получается как решение уравнения

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = w, \quad w \in \mathbb{C},$$

то есть уравнения $e^{2iz} - 2we^{iz} + 1 = 0$ и обозначается $\operatorname{Arc}\cos w$:

$$\operatorname{Arc}\cos w = -i \operatorname{Ln}\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right).$$

Функция $\operatorname{Arc}\cos w$ бесконечнозначна, поскольку является композицией с участием бесконечнозначного логарифма и двузначной функции, обратной функции Жуковского.

Однозначная ветвь $\operatorname{Arccos} w$ имеет производную

$$\left(\operatorname{Arc}\cos w\right)' = -\frac{1}{\sqrt{w^2-1}},$$

однозначную на поверхности Римана, состоящей из двух плоскостей, соединенных по противоположным краям разреза от –1 до 1.

Решая уравнение

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = w, \quad w \in \mathbb{C},$$

получаем бесконечнозначную функцию, обратную функции $w = \sin z$:

$$\operatorname{Arcsin} w = -i \operatorname{Ln}\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right).$$

Однозначная ветвь $\operatorname{Arcsin} w$ имеет производную

$$\left(\operatorname{Arcsin} w\right)' = \frac{1}{\sqrt{w^2-1}},$$

однозначную на поверхности Римана, состоящей из двух плоскостей, соединенных по противоположным краям разреза от –1 до 1.

6.3. Функции $\operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z$**.** *Тангенс* $\operatorname{tg} z$ *и котангенс* $\operatorname{ctg} z$ определяются на комплексной плоскости соответственно формулами:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = i\frac{1-e^{2iz}}{1+e^{2iz}}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}.$$

Обе функции принимают на комплексной плоскости конечные значения, за исключением для $\operatorname{tg} z$ множества V точек $z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, и для $\operatorname{ctg} z$ – множества V' точек $k\pi, k \in \mathbb{Z}$, в которых функции обращаются в бесконечность. Обе функции непрерывны на $\mathbb{C}$, за исключением указанных точек. В таких точках непрерывности

$$\left(\operatorname{tg} z\right)' = \frac{1}{\cos^2 z}, z \in \mathbb{C} \setminus V, \quad \left(\operatorname{ctg} z\right)' = -\frac{1}{\sin^2 z}, z \in \mathbb{C} \setminus V'$$

и, значит, $\operatorname{tg} z$ – голоморфная функция в $\mathbb{C} \setminus V$, а $\operatorname{ctg} z$ – голоморфная функция в $\mathbb{C} \setminus V'$.

Функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ – периодические. Основной период π.

Из четности $\cos z$, нечетности $\sin z$ и определения $\operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z$ следует: $\operatorname{tg}(-z) = -\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg}(-z) = -\operatorname{ctg} z$, $z \in \mathbb{C}$, то есть нечетность $\operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z$.

Согласно определению $\operatorname{tg} z$ и в силу теорем сложения для $\cos z$ и $\sin z$

$$\operatorname{tg}(z_1 + z_2) = \frac{\sin(z_1 + z_2)}{\cos(z_1 + z_2)} = \frac{\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2}{\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2}.$$

Отсюда следует равенство

$$\operatorname{tg}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{tg} z_1 + \operatorname{tg} z_2}{1 - \operatorname{tg} z_1 \operatorname{tg} z_2}, \quad z_1 \in \mathbb{C} \setminus V, \quad z_2 \in \mathbb{C} \setminus V,$$

составляющее *теорему сложения для тангенса.*

В частности,

$$\operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus V.$$

Аналогично устанавливаем *теорему сложения для котангенса:*

$$\operatorname{ctg}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{ctg} z_1 \operatorname{ctg} z_2 - 1}{\operatorname{ctg} z_1 + \operatorname{ctg} z_2}, \quad z_1 \in \mathbb{C} \setminus V', \quad z_2 \in \mathbb{C} \setminus V'.$$

В частности,

$$\operatorname{ctg} 2z = \frac{\operatorname{ctg}^2 z - 1}{2 \operatorname{ctg} z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus V'.$$

Связь между тригонометрическими и гиперболическими тангенсами и котангенсами дается формулами: $\operatorname{tg}(iz) = i \operatorname{th} z$, $\operatorname{ctg}(iz) = -i \operatorname{cth} z$.

6.4. Функции $\operatorname{Arctg} z$**,** $\operatorname{Arcctg} z$**.** Функциями, обратными для функций $w = \operatorname{tg} z$, $w = \operatorname{ctg} z$, являются соответственно бесконечнозначные функции

$$\operatorname{Arctg} w = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{i - w}{i + w}, \quad \operatorname{Arcctg} w = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{w + i}{w - i},$$

образованные композициями дробно-линейных функций и логарифма. Для их однозначных ветвей

$$\left(\operatorname{Arctg} w\right)' = \frac{1}{1+w^2}, \quad \left(\operatorname{Arcctg} w\right)' = -\frac{1}{1+w^2}, \quad w \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}.$$

З а д а ч и

1. Решить уравнения: а) $z^2 - (2+3i)z - 1 + 3i = 0$; б) $z^2 + (3-2i)z + 4i = 0$.

2. Доказать, что дробно-линейное отображение $w = L(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$, имеет только две неподвижные точки (в них, по определению, $L(z) = z$), которые в частном (каком?) случае сливаются в одну. Записать формулу для нахождения неподвижных точек.

3. Указать общий вид дробно-линейного преобразования, ставящего в соответствие трем различным точкам z_1, z_2, z_3 расширенной комплексной плоскости три различные точки w_1, w_2, w_3 расширенной комплексной плоскости.

Ответ: $\dfrac{w-w_1}{w-w_2} : \dfrac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \dfrac{z-z_1}{z-z_2} : \dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$.

4. Найти дробно-линейное отображение, ставящее в соответствие мнимой оси единичную окружность $\partial U(0,1)$.

5. Представить геометрически траекторию $\left([-\infty, \infty), t + i(at+b), \mathbb{C}\right)$, где a, b – действительные числа.

6. Представить геометрически траекторию $\left((-\infty, \infty), e^{t+i(at+b)}, \mathbb{C}\right)$, где a, b – действительные числа.

7. Представить геометрически на сфере Римана стереографические образы следующих траекторий:

а) $\left([0, \infty), t + it^2, \mathbb{C}\right)$; б) $\left([1, \infty), t + i\ln t, \mathbb{C}\right)$;

в) $\left(\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], t + i\operatorname{tg} t, \mathbb{C}\right)$; г) $\left(\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right], t + i\operatorname{tg} t, \mathbb{C}\right)$.

8. Показать, что функцию Жуковского $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ можно представить как композицию следующих функций: $z_1=\frac{z-1}{z+1}$, $z_2=z_1^2$, $w=\frac{1+z_2}{1-z_2}$.

9. Доказать справедливость формулы Муавра $\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$ для любого целого значения n.

10. Найти все значения следующих логарифмов: а) $\operatorname{Ln}\left(1+i\right)$; б) $\operatorname{Ln} e$; в) $\operatorname{Ln} i$.

11. Вычислить следующие значения: а) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$; б) $\operatorname{sh} i$; в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}i$.

12. Найти все значения: а) $\operatorname{Arc}\cos 1$; б) $\operatorname{Arc}\cos 2$; в) $\operatorname{Arc}\sin 2$; г) $\operatorname{Arc}\sin i$; д) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}(2i)$.

13. Найти все значения функции $z^{\mu}, \mu\in\mathbb{C}$: а) $\left(-1\right)^{\sqrt{3}}$; б) e^e; в) $\left(-1\right)^i$; г) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$.

Глава 4

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

К основным теоремам об интегралах, доказанным в этой главе, относятся четыре: интегральная теорема Коши для голоморфных функций в односвязных областях, её распространение на конечносвязные области, основная теорема Коши о вычетах – обобщение интегральной теоремы Коши на случай голоморфных функций с изолированными особенностями, и о важной интегральной формуле Коши. Эти теоремы и формула имеют многочисленные применения для вычисления интегралов, включая несобственные интегралы, разложения функций в ряды, нахождения числа нулей и полюсов функции и многие другие приложения. Большую информационную ценность о свойствах голоморфных функций представляют её изолированные особые точки: полюсы и существенно особые точки – и связанные с ними вычеты.

§ 1. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ

1.1. Формулировка теоремы. Одной из основных в теории комплексных функций комплексного переменного является следующая

Теорема 1 (интегральная теорема Коши). *Если* $f : D \to \mathbb{C}$ *– голоморфная функция в односвязной области* $D \subset \mathbb{C}$*, ограниченной замкнутой жордановой кусочно-гладкой кривой* $\Gamma = \partial D$*, непрерывная в* $\overline{D}$*, то*

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, отметим её следствия.

Следствие 1. Если $f : D \to \mathbb{C}$ – голоморфная функция в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и Γ – замкнутая жорданова кусочно-гладкая кривая, лежащая в D, то

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Действительно, Γ ограничивает односвязную область $D_1 \subset D$, является её границей. На Γ функция f голоморфна и, следовательно, непрерывна. Остается применить теорему Коши к области D_1.

Следствие 2. Если $f : D \to \mathbb{C}$ – голоморфная функция в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и Γ_1, Γ_2 – две лежащие в D простые жордановы кусочно-гладкие кривые, каждая из которых соединяет точку $z_1 \in D$ с точкой $z_2 \in D$, то

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

Действительно, пусть Γ_3 – лежащая в D кривая со свойствами кривых Γ_1, Γ_2 и не имеющая с каждой из них общих точек, кроме z_1, z_2. Легко видеть, что $\Gamma_1 \cup \Gamma_3^-$, $\Gamma_2 \cup \Gamma_3^-$ ограничивают односвязные области, лежащие в D. По следствию 1

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3^-} f(z)\,dz = 0, \qquad \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3^-} f(z)\,dz = 0.$$

Отсюда, пользуясь аддитивностью интеграла, находим равенства

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz, \quad \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz,$$

указывающие на совпадение интегралов от f по кривым Γ_1, Γ_2.

Читатель самостоятельно может вывести из следствия 2 следствие 1 и убедиться, что они эквивалентны.

Замечание. Первоначальная формулировка интегральной теоремы была предложена О. Коши (1825 г.) в форме, совпадающей по существу со следствием 2, но с дополнительным условием о непрерывности производной $f'(z)$ в области D. Первое полное доказательство интегральной теоремы было дано в 1884 г. Эдуардом Гурса (1858–1936).

Мы разделим доказательство интегральной теоремы Коши на несколько частей, составляющих содержание разд. 1.2–1.5.

1.2. Лемма Гурса. ***Лемма 1*** (Гурса). *Если функция* $f : D \to \mathbb{C}$ *голоморфна в области* $D \subset \mathbb{C}$ *и* K *– квадрат, лежащий вместе со своей границей в области* D*, то интеграл*

$$I\left(\partial K\right) = \int\limits_{\partial K} f(z)dz = 0.$$

Следует иметь в виду, что здесь и далее квадрат K – область, то есть открытое множество, ограниченное замкнутой жордановой кусочно-гладкой кривой (состоящей из четырех равных отрезков). Ориентированную границу квадрата обозначаем ∂K.

▷ Доказательство леммы проведем, рассуждая от противного. Предположим, что существует односвязная область $D \subset \mathbb{C}$, голоморфная в D функция f и квадрат $K_0 \subset D$ такие, что

$$I\left(\partial K_0\right) = \int\limits_{\partial K_0} f(z)dz \neq 0.$$

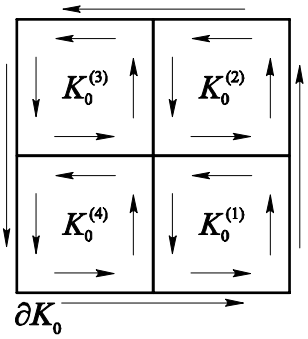


Рис. 1.

Пусть $M = \left|I(\partial K_0)\right|$. Очевидно, $M > 0$.

Двумя отрезками, соединяющими середины противоположных сторон квадрата K_0, разделим его на четыре квадрата $K_0^{(1)}, K_0^{(2)}, K_0^{(3)}, K_0^{(4)}$ (рис. 1). Проинтегрируем f по границе каждого из этих квадратов и сложим результаты. Поскольку по сторонам смежных квадратов интегрирование проводится дважды, причем в противоположных направлениях, то приходим в силу аддитивности интеграла к равенству

$$I\left(\partial K_0\right) = \sum_{s=1}^{4} I\left(\partial K_0^{(s)}\right).$$

Из него следует, что

$$M \le \sum_{s=1}^{4} \left|I\left(\partial K_0^{(s)}\right)\right|.$$

Предположим, что $\left|I\left(\partial K_0^{(s)}\right)\right| < \dfrac{M}{4}$ для всех $s \in \{1,2,3,4\}$. Тогда $M < M$, что невозможно. Значит, среди квадратов $K_0^{(s)}$ есть хотя бы один квадрат, пусть K_1, такой, что $\dfrac{M}{4} \le \left|I\left(\partial K_1\right)\right|$.

Повторим указанную выше процедуру, использованную для K_0, но теперь уже по отношению к K_1. Получим квадрат K_2, для которого

$$\frac{M}{4^2} \le \left|I\left(\partial K_2\right)\right|.$$

Продолжая далее построение и выбор квадратов, придем к последовательности $\{K_m\}_{m=0}^{\infty}$ открытых квадратов $K_m, K_{m+1} \subset K_m$, таких, что для интеграла от f по границе квадрата K_m, $m \in \mathbb{N}$, выполняется оценка

$$\frac{M}{4^m} \le \left|I\left(\partial K_m\right)\right|.$$

Дополним полученную оценку снизу оценкой сверху.

Пересечение $\bigcap\limits_{m=0}^{\infty} \overline{K}_m$ замыканий квадратов K_m состоит из единственной точки. Обозначим её ζ. Очевидно, $\zeta \in \overline{K}_0 \subset D$. Длину кривой Γ будем обозначать здесь и далее $\partial л.\,\Gamma$.

Отметим, что в силу построения квадратов

$$\partial л.\partial K_m = \frac{\partial л.\partial K_0}{2^m}$$

и, если $z \in \partial K_m$, то

$$\left|z - \zeta\right| < \partial л.\partial K_m = \frac{\partial л.\partial K_0}{2^m}.$$

По условию леммы в точке ζ (и в её окрестности) существует производная f', то есть для числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что

$$\left|\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta)\right| < \varepsilon, \quad z \in U(\zeta, \delta) \subset D.$$

Отсюда с учетом предыдущего неравенства имеем

$$\left|f(z)-f(\zeta)-f'(\zeta)(z-\zeta)\right|<\varepsilon|z-\zeta|<\varepsilon\frac{\partial л.\partial K_0}{2^m},\quad z\in\overline{K_m}.$$

В силу сходимости последовательности замкнутых квадратов $\overline{K}_m$ к точке ζ существует m_0 такое, что все $\overline{K}_m\subset U(\zeta,\delta)$ при $m\geq m_0$.

Воспользовавшись проведенными ранее вычислениями простейших интегралов

$$\int\limits_{\partial K}1\cdot dz=\int\limits_{\partial K_m}zdz=0$$

и свойством линейности интеграла, запишем легко проверяемое равенство

$$I(\partial K_m)=\int\limits_{\partial K_m}f(z)dz=\int\limits_{\partial K_m}\left[f(z)-f(\zeta)-f'(\zeta)(z-\zeta)\right]dz.$$

Проведем оценку $\left|I(\partial K_m)\right|$ сверху при $m\geq m_0$. Имеем

$$\left|I(\partial K_m)\right|<\varepsilon\frac{\partial л.\partial K_0}{2^m}\cdot\frac{\partial л.\partial K_0}{2^m}.$$

Объединяя оценку $\left|I(\partial K_m)\right|$ сверху и снизу, имеем при $m\geq m_0$

$$\frac{M}{4^m}\leq\left|I(\partial K_m)\right|<\varepsilon\frac{(\partial л.\partial K_0)^2}{4^m},$$

откуда получаем неравенство $M<\varepsilon(\partial л.\partial K_0)^2$, из которого следует, что $M=0$. Сделанное в начале доказательства предположение о существовании ситуации, когда лемма неверна и, следовательно, $M>0$, привело к противоречию. Лемма доказана. ◁

1.3. Модуль непрерывности функции. Одной из основных характеристик непрерывных функций является *модуль непрерывности*. Для комплексных функций комплексного переменного он определяется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть функция $f:E\to\mathbb{C}$ непрерывна на множестве $E\subset\mathbb{C}$. Функция

$$\omega_{f,E}(\delta)=\sup\left|f(z')-f(z'')\right|$$

действительного переменного $\delta, \delta \geq 0$, где z', z'' – точки множества E такие, что $|z' - z''| \leq \delta$, называется *модулем непрерывности* функции f на E.

Очевидно, $\omega_{f,E}(0) = 0$ и $\omega_{f,E}(\delta_1) \leq \omega_{f,E}(\delta_2)$, если $0 \leq \delta_1 < \delta_2$. Функция $\omega_{f,E}(\delta)$ непрерывна. С расширением множества E она не убывает, то есть

$$\omega_{f,E_1}(\delta) \leq \omega_{f,E_2}(\delta), \quad E_1 \subset E_2,$$

в чем читатель легко убедится самостоятельно.

В случае, когда E – замыкание открытого множества, в частности, замыкание односвязной области, $\sup$ в определении модуля непрерывности можно заменить на $\max$.

Мы используем модуль непрерывности $\omega_{f,\Gamma}$ для оценки интеграла от непрерывной функции f на замкнутой жордановой кусочно-гладкой кривой.

Лемма 2. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ. Пусть f непрерывна на $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$. Тогда*

$$\left| \int_\Gamma f(z)\,dz \right| \leq \omega_{f,\overline{D}}(diam\Gamma) \cdot дл.\Gamma,$$

где $diam\Gamma$ – диаметр кривой Γ.

▷ Пусть $\zeta \in \Gamma$. Пользуясь тем, что интеграл от функции f 1 по замкнутой кривой равен нулю, запишем

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma [f(z) - f(\zeta)]dz.$$

Так как $z \in \Gamma, \zeta \in \Gamma$, то $|z - \zeta| \leq diam\Gamma$ и $|f(z) - f(\zeta)| \leq \omega_{f,\Gamma}(diam\Gamma)$. Согласно теореме об оценке модуля интеграла имеем

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \leq \omega_{f,\Gamma}(diam\,\Gamma) \cdot S,$$

где $S = дл.\Gamma$. ◁

1.4. Сравнение длин. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область $D \subset \mathbb{C}$ с положительно ориентированной (относительно D) замкнутой кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial D$. Фиксируем $\delta, 0 < \delta < \left(1/3\right) diam\Gamma$ и, исключив из $\mathbb{C}$ семейства вертикальных и горизонтальных прямых

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = k\frac{\delta}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = k\frac{\delta}{\sqrt{2}} \right\}, \; k \in \mathbb{Z},$$

получим семейство $\mathbb{C}K\left(\delta\right)$ конгруэнтных квадратов с диаметром δ. Каждому квадрату принадлежит точка, у которой действительная и мнимая части – рациональные числа. Следовательно, множество $\mathbb{C}K(\delta)$ счетно и оно может быть представлено как последовательность $\left\{K_n(\delta)\right\}_{n=1}^{\infty}$. Выделим из нее две подпоследовательности: подпоследовательность $\left\{K_\alpha\right\}, \alpha \in A$, квадратов со следующими двумя свойствами: пересечение $K_\alpha \bigcap D = \Delta_\alpha \neq \varnothing$, $\bar{K}_\alpha \bigcap \partial D \neq \varnothing$ и подпоследовательность $\left\{K_\beta\right\}, \beta \in B$, квадратов, лежащих в D вместе с границей, то есть таких, что $\bar{K}_\beta \subset D$ (рис. 2).

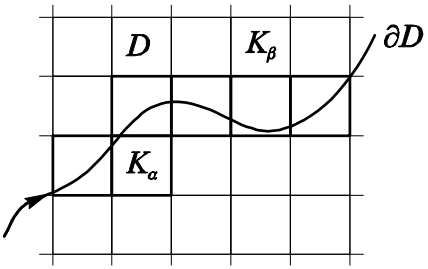


Рис. 2.

Легко видеть, что эти подпоследовательности составлены из конечного числа элементов и что они не имеют общих элементов.

Множество Δ_α открыто. Оно состоит из конечного или счетного множества связных компонент. Для большей наглядности и сокращения записи рассуждений, но, как может проверить читатель, с сохранением итоговых результатов ограничимся случаем, когда Δ_α представляется объединением своими связными компонентами $\Delta_\alpha^1, ..., \Delta_\alpha^{s_\alpha}$, где s_α – натуральное число (рис. 3). Области $\Delta_\alpha^{(k)}$,

$k = 1,2,...,s_\alpha$, ограничены замкнутыми жордановыми кусочно-гладкими кривыми, в чем читателю предлагается убедиться самостоятельно. Длина границы множества Δ_α определяется как сумма длин границ составляющих Δ_α односвязных областей $\Delta_\alpha^{(k)}$:

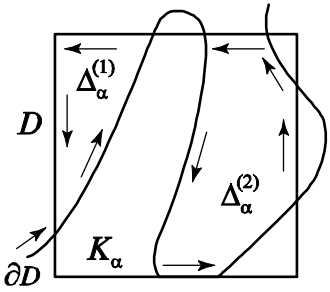


Рис. 3.

$$\partial л.\Delta_\alpha = \sum_{k=1}^{s_\alpha} \partial л.\Delta_\alpha^{(k)} .$$

Лемма 3. *В указанных выше обозначениях справедливо неравенство*

$$\sum_{\alpha \in A} \partial л.\partial\Delta_\alpha \le 55\partial л.\Gamma$$

при $\delta \in \left(0, \frac{1}{3} diam\partial D\right)$.

▷ Длина границы множества Δ_α равна сумме длин дуг пересечения ∂D с Δ_α, общих дуг границ $\partial D, \partial K_\alpha$ и дуг пересечения границы квадрата K_α с областью D, то есть

$$\partial л.\partial\Delta_\alpha = \partial л.\left(\partial D \bigcap K_\alpha\right) + \partial л.\left(\partial D \bigcap \partial K_\alpha\right) + \partial л.\left(D \bigcap \partial K_\alpha\right).$$

Сумма двух последних слагаемых не превосходит длины границы квадрата K_α, и поэтому $\partial л.\partial\Delta_\alpha \le \partial л.\left(\partial D \bigcap K_\alpha\right) + 2\sqrt{2}\delta, \alpha \in A.$ Просуммируем эти неравенства по α. Получим

$$\sum_{\alpha \in A} \partial л.\partial\Delta_\alpha \le \sum_{\alpha \in A} \partial л.\left(\partial D \bigcap K_\alpha\right) + 2\sqrt{2}\sum_{\alpha \in A} \delta.$$

Переходим к оценке сверху сумм, стоящих в правой части неравенства. Так как $K_{\alpha_1} \bigcap K_{\alpha_2} = \varnothing$, $\alpha_1 \in A, \alpha_2 \in A$, то

$$\sum_{\alpha \in A} \partial л.\left(\partial D \bigcap K_\alpha\right) \le \partial л.\partial D.$$

Для оценки $\sum_{\alpha\in A}\delta$ выполним сначала следующие построения.

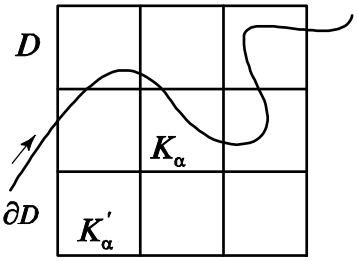


Рис. 4.

Около каждого квадрата K_α, $\alpha\in A$, образуем квадрат $\overline{K'_\alpha}$ (рис. 4), присоединяя к K_α замыкания восьми смежных замкнутых квадратов (имеющих с $\overline{K}_\alpha$ хотя бы общую сторону или вершину). По условию $3\delta < diam\,\partial D$ и поскольку в $\overline{K}_\alpha$ есть хотя бы одна точка границы области D, а $\partial D\bigcap K'_\alpha\neq\varnothing$, то

$$\partial л.\left(\partial D\bigcap\overline{K}_\alpha\right)\geq\sqrt{2}\delta.$$

Нетрудно увидеть, учитывая возможность прохождения ∂D по границе двух смежных квадратов, что

$$\sum_{\alpha\in A}\partial л.\left(\partial D\bigcap K'_\alpha\right)\leq 9\sum_{\alpha\in A}\partial л.\left(\partial D\bigcap\overline{K}_\alpha\right)\leq$$

$$\leq 9\sum_{\alpha\in A}\partial л.\left(\partial D\bigcap K_\alpha\right)+9\cdot 2\sum_{\alpha\in A}\partial л.\left(\partial D\bigcap\partial K_\alpha\right)\leq 27\partial л.\partial D.$$

Теперь имеем

$$\sum_{\alpha\in A}\partial л.\partial\Delta_\alpha < \partial л\partial D+2\cdot 27\partial л.\partial D=55\partial л.\partial D.\ \triangleleft$$

1.5. Окончание доказательства теоремы. Сохраним обозначения, использованные в 1.1–1.4. Легко видеть, что

$$I(\partial D)=\sum_{\alpha\in A}\int\limits_{\partial\Delta_\alpha}f(z)dz+\sum_{\beta\in B}\int\limits_{\partial K_\beta}f(z)dz.$$

По лемме 1 вторая сумма в правой части равенства равна нулю, и поэтому с учетом представления открытого множества Δ_α через связные компоненты имеем

$$I(\partial D)=\sum_{\alpha\in A}\sum_{k=1}^{s_\alpha}\int\limits_{\partial\Delta_\alpha^{(k)}}f(z)dz.$$

Для $\left|I\left(\partial D\right)\right|$ получаем оценку

$$\left|I(\partial D)\right| \le \sum_{\alpha\in A}\sum_{k=1}^{s_k}\left|\int\limits_{\partial\Delta_\alpha^{(k)}} f(z)dz\right|.$$

По лемме 2 и пользуясь свойствами модуля непрерывности, имеем

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta_\alpha^{(k)}} f(z)dz\right| \le \omega_{f,\partial\Delta_\alpha^{(k)}}\left(diam\,\partial\Delta_\alpha^{(k)}\right)\cdot \partial л.\partial\Delta_\alpha^{(k)} \le \omega_{f,\bar{D}}\left(\delta\right)\cdot \partial л.\partial\Delta_\alpha^{(k)}.$$

Поэтому и с использованием леммы 3, имеем

$$\left|I\left(\partial D\right)\right| \le \omega_{f,\bar{D}}\left(\delta\right)\sum_{\alpha\in A}\sum_{k=1}^{s_\alpha}\partial л.\partial\Delta_\alpha^{(k)} = \omega_{f,\bar{D}}\left(\delta\right)\sum_{\alpha\in A}\partial л.\partial\Delta_\alpha \le 55\omega_{f,\bar{D}}\left(\delta\right)\partial л.\partial D.$$

Пусть число $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности f в $\bar{D}$ существует число $\delta_0 > 0$ такое, что $55\omega_{f,\bar{D}}\left(\delta\right)\partial л.\partial D < \varepsilon, \quad 0 < \delta < \delta_0$.

Значит, с учетом условия на $\mathbb{C}K\left(\delta\right)$, имеем неравенство $\left|I\left(\partial D\right)\right| < \varepsilon$ при $0 < \delta < \delta^*$, где $\delta^* = \min\left\{\delta_0, \frac{1}{3}diam\,\partial D\right\}$. Ввиду произвольности выбора ε имеем: $\left|I(\partial D)\right| = 0$, то есть

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0. \ \triangleleft$$

§ 2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ КОШИ НА МНОГОСВЯЗНЫЕ ОБЛАСТИ

2.1. Области типа $s+1, s\in\mathbb{N}$**.** Напомним, что область – непустое открытое связное множество. Об области на $\overline{\mathbb{C}}$ говорят, что она m-связна $\left(m = 1,2,...\right)$, если её граница состоит из m связных компонент, в частности, область односвязна (m=1), двусвязна (m=2).

Пример. Круг $\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z\right|<1\right\}$ – односвязная область; кольцо $\left\{z\in\mathbb{C}: r<\left|z\right|<R\right\}$, $0<r<R<\infty$, ограничено двумя окружностями и является двусвязной областью. $\triangleleft$

Среди многосвязных областей на комплексной плоскости выделим конечносвязные области, получающиеся из односвязной области $D_0 \subset \mathbb{C}$ исключением лежащих в D_0 односвязных областей $D_1, D_2, ..., D_s$, $s \in \mathbb{N}$, а также их границ. Будем считать, что области $D_0, D_1, ..., D_k$ ограничены замкнутыми жордановыми кусочно-гладкими кривыми и что замыкания $\overline{D}_1, \overline{D}_2, ..., \overline{D}_s$ этих областей попарно не пересекаются (рис. 5). Граница области $D = D_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{s} \overline{D}_k$ состоит из $s+1$ связных компонент, и поэтому D – $(s+1)$-связная область. Ориентированная граница каждой из областей $D_0, D_1, ..., D_s$, то есть соответственно $\Gamma_0 = \partial D_0$, $\Gamma_1 = \partial D_1, ..., \Gamma_s = \partial D_s$, определяется общим правилом, согласно которому при движении по границе области область остается слева.

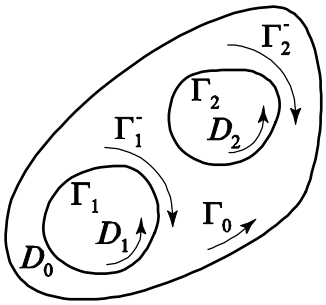


Рис. 5 (при S=2).

Введем понятие «ориентированная граница области D».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ориентированной границей области* D называется сумма

$$\Gamma = \partial D = \Gamma_0 + \bigcup_{k=1}^{s} \Gamma_k^-.$$

Точки границы Γ характеризуются общим свойством: положительному направлению движения по Γ соответствует то направление, при котором область D остается слева.

Будем говорить и писать, что $(s+1)$-связная область имеет тип $s+1$, если она ограничена $s+1$ замкнутыми жордановыми кусочно-гладкими попарно непересекающимися кривыми $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_s$, $s \in \mathbb{N}$, причем $\Gamma_1, ..., \Gamma_s$ лежат внутри Γ_0 (см. теорему Жордана).

Пример. Круговое кольцо $D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, $z \in \mathbb{C}$, $0 < r < R < \infty$, ограничено двумя концентрическими окружностями.

Ориентированная граница ∂D этого кольца состоит из окружности радиуса R, проходимой против хода стрелки часов, и окружности радиуса r, проходимой по ходу стрелки часов:

$$\partial D = \partial U(z_0, R) \cup \left(\partial U\left(z_0, r\right)\right)^{-}.$$

Кольцо имеет тип 2. $\triangleleft$

2.2. Интегральная теорема Коши для областей типа $s+1$. Пусть функция f непрерывна на связных компонентах границы области D типа $s+1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ *Интеграл от функции f по ориентированной границе ∂D области D типа $s+1$* – это число, обозначаемое

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz$$

и равное следующей сумме интегралов от f по связным компонентам границы ∂D:

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_0} f(z)dz + \sum_{k=1}^{s} \int\limits_{\Gamma_k^-} f(z)dz,$$

где $\Gamma_k = \partial D_k$.

Это определение распространяет на $(s+1)$-связные области свойство аддитивности интеграла.

Теорема 2 (интегральная теорема Коши для многосвязной области). *Если $f: D \to \mathbb{C}$ – голоморфная функция в области D типа $s+1$, $s \in \mathbb{N}$, непрерывная в $\overline{D}$, то*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

$\triangleright$ Соединим кривую Γ_0 с кривой Γ_1 простой жордановой гладкой дугой γ_0, лежащей в D (рис. 6), затем соединим Γ_1 с Γ_2 простой жордановой гладкой дугой γ_1, лежащей

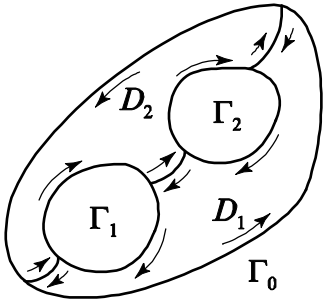


Рис. 6 (при S=2).

в D и не пересекающейся с γ_0. Продолжим этот процесс построения дуг γ_k, завершая его построением простой жордановой гладкой дуги γ_s, соединяющей Γ_s с Γ_0, лежащей в D, и не пересекающейся с уже построенными дугами $\gamma_0,...,\gamma_{s-1}$.

Рассматривая дуги $\gamma_1,...,\gamma_s$ как разрезы области D, получаем из D две односвязные области D_1, D_2 с замкнутыми жордановыми кусочно-гладкими границами.

По интегральной теореме Коши

$$\int\limits_{\partial D_1} f(z)dz = 0, \quad \int\limits_{\partial D_2} f(z)dz = 0.$$

Складывая эти равенства почленно, получим

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz + \sum_{k=1}^{s} \int\limits_{\gamma_k} f(z)dz + \sum_{k=1}^{s} \int\limits_{\gamma_k^-} f(z)dz = 0,$$

и поскольку интегралы от f по γ, по γ^- различаются только знаком и суммы взаимно уничтожаются, то

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0. \ \triangleleft$$

§ 3. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ КОШИ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

К числу специальных функций, определяемых с помощью интегралов от элементарных функций, относятся играющие существенную роль в математической физике интегралы Френеля:

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x \cos t^2 dt, \quad S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x \sin t^2 dt.$$

Задача: найти $\lim\limits_{x\to\infty} C(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} S(x)$.

Решение. Функция $f(z)=e^{iz^2}=\cos z^2+i\sin z^2$ на $\mathbb{R}$ равна $f(t)=e^{it^2}=\cos t^2+i\sin t^2$ и голоморфна в $\mathbb{C}$. По интегральной теореме Коши

$$\int_{\gamma} e^{iz^2}dz=0$$

по любой кусочно-гладкой кривой γ. Выберем в качестве γ круговой треугольник Δ_R с вершинами $z_1=0$, $z_2=R, R>0$, $z_3=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}R=Re^{i\frac{\pi}{4}}$ и со сторонами: γ_1 – отрезок от z_1 до z_2, γ_2 – дуга окружности с центром z_1 радиуса R от z_2 до z_3, γ_3 – отрезок от z_3 до z_1. По свойству аддитивности интеграла и интегральной теореме Коши

$$\int_{\partial\Delta_R} e^{iz^2}dz=\int_{\gamma_1} e^{iz^2}dz+\int_{\gamma_2} e^{iz^2}dz+\int_{\gamma_3} e^{iz^2}dz=0$$

при любом $R>0$. Отсюда имеем

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\partial\Delta_R} e^{iz^2}dz=0.$$

Параметрическое представление отрезка γ_1 возьмем в виде $z=t$, $0\le t\le R$. Используя формулу Эйлера, получаем

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz=\int_0^R e^{it^2}dt=\int_0^R\cos t^2dt+i\int_0^R\sin t^2dt.$$

Дугу γ_2 представим параметрическим уравнением $z=\mathrm{R}e^{it}$, $0\le t\le\pi/4$. Вновь используя формулу Эйлера и теорему умножения для показательной функции, получаем

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz=\int_0^{\pi/4} e^{i\left(\mathrm{R}e^{it}\right)^2}\cdot Rie^{it}dt=$$

$$=iR\int_0^{\pi/4} e^{iR^2(\cos 2t+i\sin 2t)}e^{it}dt=iR\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin 2t}\cdot e^{i\left(R^2\cos 2t+t\right)}dt.$$

Оценим сверху модуль интеграла. Имеем

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \le R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin 2t}dt = \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin x}dx.$$

Так как при $x\in(0,\pi/2)$ график функции $y=\sin x$ лежит над прямой $y=\frac{2}{\pi}x$, то на $[0,\pi/2]$ справедливо неравенство $\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$, позволяющее продолжить оценку интеграла от f по γ_2:

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \le \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\frac{2}{\pi}t}dt\,.$$

После выполнения в интеграле замены переменной по формуле $x=R^2\frac{2}{\pi}t$ приходим к оценке

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \le \frac{\pi}{4R}\int_0^{R^2} e^{-x}dx = \frac{\pi}{4R}\left(1-e^{-R^2}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)dz = 0.$$

Отрезок γ_3 от точки z_3 до z_1 представим параметрическим уравнением $z=e^{i\pi/4}(1-t)R$, $0\le t\le 1$.

Подсчитаем интеграл от функции f по γ_3. Имеем

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = -e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^1 e^{-(1-t)^2R^2}dt = -e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-x^2}dx.$$

Отсюда, учитывая известную формулу Гаусса для интеграла вероятностей, имеем

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_3} f(z)dz = -e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Объединяя полученные результаты вычислений интегралов по $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, получаем в пределе при $R \to \infty$ формулу

$$\int_0^{\infty} \cos t^2 dt + i \int_0^{\infty} \sin t^2 dt + 0 - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0,$$

откуда

$$\int_0^{\infty} \cos t^2 dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_0^{\infty} \sin t^2 dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Таким образом, задача имеет решение:

$$\lim_{x\to\infty} C(x) = \lim_{x\to\infty} S(x) = \frac{1}{2}.$$

В ходе решения задачи использована формула

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Её можно получить следующим образом.

Пусть $K = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < R, |\mathrm{Im}\, z| < R\}$ – квадрат со сторонами $2R$, $R > 0$, $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \sqrt{2}R\}$ – круг, $u = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ – круг. Очевидно, $u \subset K \subset U$.

Запишем неравенство

$$\int_u e^{-x^2-y^2} dxdy < \int_K e^{-x^2-y^2} dxdy < \int_U e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Двойной интеграл по K преобразуется к виду

$$\int_K = \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-x^2-y^2} dxdy = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx\right)^2 = 4\left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right).$$

Интегралы по u и U после перехода от декартовой к полярной системе координат легко вычисляются:

$$\int_u = \int_0^{2\pi}\int_0^R e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\varphi = \pi\left(1 - e^{-R^2}\right),$$

$$\int\limits_U = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\sqrt{2}R} e^{-\rho^2} \rho \, d\rho \, d\varphi = \pi\left(1 - e^{-2R^2}\right).$$

Исходное неравенство преобразуется к виду

$$\pi\left(1 - e^{-R^2}\right) < 4\left(\int\limits_0^R e^{-x^2} dx\right) < \pi\left(1 - e^{-2R^2}\right).$$

Отсюда после предельного перехода при $R \to \infty$ имеем в пределе

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

§ 4. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

4.1. Интеграл Коши. Так называют функцию $F(z)$, заданную интегралом

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \; z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma,$$

взятым по жордановой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset \mathbb{C}$, и, как легко видеть, являющуюся значением интеграла, зависящего от параметра. Если функция $\varphi : \Gamma \to \mathbb{C}$ непрерывна, то интеграл существует для $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$.

Функцию

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}$$

называют *ядром* Коши с *плотностью* $\varphi(\zeta)$.

Теорема 3 (о голоморфности интеграла Коши). *Функция*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

с непрерывной плотностью на жордановой кусочно-гладкой кривой Γ *имеет производную в точке* $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ *(следовательно,* $F(z)$ *голоморфна в* $\mathbb{C} \setminus \Gamma$*), и, кроме того, имеет место формула*

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} dz.$$

▷ Для точек $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, $z - z_0 = \Delta z \neq 0$, справедлива формула

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)},$$

позволяющая предположить, что

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^2}.$$

Докажем, что функция

$$I(z) = \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^2}$$

стремится к нулю при $z \to z_0$. Имеем

$$I(z) = \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2}.$$

Оценим $|I(z)|$ сверху. Пусть $M = \max\limits_{\zeta \in \Gamma} |\varphi(\zeta)|$, $2\rho = dist(z_0, \Gamma)$, $|z - z_0| < \rho$. Тогда на Γ

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2} \right| \leq C, \; C = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{4\rho^3},$$

и $|I(z)| \leq C |z - z_0| \, \partial л.\Gamma$. Возьмем число $\varepsilon > 0$. Тогда при $|z - z_0| < \delta$, где $\delta = \min\left\{ \rho, \dfrac{\varepsilon}{C \, \partial л.\Gamma} \right\}$, выполняется неравенство $|I(z)| < \varepsilon$. Остается обратиться к определению производной. ◁

Повторяя в существенном проведенное доказательство, приходим к теореме о существовании производной интеграла Коши произвольного порядка.

Теорема 4 (о бесконечной дифференцируемости интеграла Коши). *Функция*

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

с непрерывной плотностью на жордановой кусочно-гладкой кривой Γ *имеет производную* $F^{(n)}(z)$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, *в точке* $z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma$, *и, кроме того,*

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{(n+1)}}d\zeta,\quad n=2,3,\ldots .$$

▷ Проведем индукцию по n. При $n=1$ (и при $n=0$) формула справедлива.

Допустим, что мы доказали существование производной порядка $n-1$ и указанную в теореме формулу.

Для точек z и z_0, принадлежащих связной компоненте множества $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, напишем, используя формулу бинома Ньютона:

$$F^{(n-1)}(z)-F^{(n-1)}(z_0)=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\varphi(\zeta)\frac{(\zeta-z_0)^n-(\zeta-z_0+z_0-z)^n}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)^n}d\zeta=$$

$$=(z-z_0)\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)^n}\sum_{k=1}^{n}C_n^k(\zeta-z_0)^{n-k}(z_0-z)^{k-1}d\zeta.$$

Функцию

$$I(z)=\frac{F^{(n-1)}(z)-F^{(n-1)}(z_0)}{z-z_0}-\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$$

представим, выполнив несложные преобразования, в виде

$$I(z)=(z-z_0)\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)^{n+1}}T(\zeta)d\zeta,$$

где

$$T(\zeta)=n\sum_{k=1}^{n}C_n^k(\zeta-z_0)^{n-k}(z_0-z)^{k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}C_n^{k+1}(\zeta-z_0)^{n-k}(z_0-z)^{k-1}.$$

Оценим $|I(z)|$ сверху. Пусть $M = \max\limits_{\zeta\in\Gamma}|\varphi(\zeta)|$, $2\rho = dist(z_0,\Gamma)$, $|z-z_0|<\rho$. Тогда на Γ

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)^{n+1}}T(\zeta)\right| < C,$$

где

$$C = \frac{1}{2\pi}\frac{M}{2^{n+1}\rho^{2n+1}}\left[\sum_{k=1}^{n}C_n^k 2^{n-k}\rho^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1}C_n^k 2^{n-k}\rho^{n-1}\right].$$

Согласно теореме об оценке интеграла, имеем

$$|I(z)| < (n-1)!|z-z_0|C\,дл.\Gamma.$$

Возьмем число $\varepsilon>0$. Тогда при $|z-z_0|<\delta$, где $\delta = \min\left\{\rho, \dfrac{\varepsilon}{(n-1)!C\,дл.\Gamma}\right\}$, выполняется неравенство $|I(z)|<\varepsilon$. Остается обратиться к определению производной. $\triangleleft$

Установленная в теоремах связь между непрерывной функцией на кривой и представленной интегралом Коши голоморфной функцией находит важные применения как в теоретических, так и в практических вопросах, например механики сплошной среды.

Связь между значениями голоморфной функции и её значениями на кривой устанавливается интегральной формулой Коши, к выводу которой переходим.

4.2. Вывод интегральной формулы Коши. Формула, к выводу которой мы обращаемся, является одной из основных в теории функций комплексного переменного.

Теорема 5 (интегральная формула Коши). *Если $f: D\to\mathbb{C}$ – голоморфная функция в односвязной области $D\subset\mathbb{C}$, ограниченной замкнутой жордановой кусочно-гладкой кривой $\Gamma=\partial D$, непрерывна в $\overline{D}$, то*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z_0},\ z_0\in D.$$

$\triangleright$ Пусть $z_0\in D$. Исключим из области D замыкание ρ-окрестности $U(z_0,\rho)$, $\rho<dist(z_0,\Gamma)$. Получим двусвязную область

$D_1 = D \setminus U\left(\overline{z_0, \rho}\right)$ типа 2. В этой области функция $F(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ голоморфна как отношение голоморфной функции к голоморфной функции, не принимающей в D_1 значения нуль. По теореме 2

$$\int\limits_{\partial D_1} F(\zeta) d\zeta = 0,$$

или, что то же самое (с точностью до постоянного множителя),

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = 0.$$

Вычислим второй интеграл. Предварительно представим его в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta) - f\left(z_0\right)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{f\left(z_0\right)}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(z_0, \rho)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}.$$

Ранее было показано, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(z_0, \rho)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 1$$

и, значит,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f\left(\zeta\right)}{\zeta - z_0} d\zeta = f\left(z_0\right) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(z_0, \rho)} \frac{f\left(\zeta\right) - f\left(z_0\right)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Из этого равенства следует, что второе слагаемое в правой части не зависит от ρ. Покажем, что оно равно нулю. Возьмем число $\varepsilon > 0$. По условию f непрерывна на $\overline{D}$ и, следовательно, равномерно непрерывна на $\overline{D}$. Существует число $\delta > 0$ такое, что $\left|f(z) - f(z_0)\right| < \varepsilon$, если $\left|z - z_0\right| < \delta$. Выберем $\rho < \delta$. Тогда, выполнив оценку модуля интеграла, получим неравенство

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(z_0, \rho)} \frac{f\left(\zeta\right) - f\left(z_0\right)}{\zeta - z_0} d\zeta \right| < \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon,$$

показывающее в силу произвольности ε, что оцениваемый интеграл равен нулю. Вывод формулы окончен. $\triangleleft$

Читателю предлагается самостоятельно распространить интегральную формулу Коши на области D типа $s+1$, в частности, на кольцо $K(z_0, r, R)$, и убедиться в том, что и в этом случае

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,\ z \in D\,.$$

Пример. Докажем, что если функция f голоморфна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, ограниченной замкнутой жордановой кусочно-гладкой кривой $\Gamma = \partial D$, непрерывна в $\overline{D}$ и $|f(z)| < M$, $M > 0$ на ∂D, то $|f| \le M$ в D. Пользуясь интегральной формулой Коши и оценками интеграла, имеем

$$\left|f^n(z_0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f^n(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M^n}{d} \cdot \partial л.\partial D,\ z_0 \in D.$$

Здесь $d = \min\limits_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - z_0|$ – расстояние от точки z_0 до границы области D. Так как $d > 0$ и

$$\left|\frac{f(z_0)}{M}\right| \le \sqrt[n]{\frac{\partial л.\partial D}{2\pi d}},$$

то, устремляя n к бесконечности и учитывая, что $\partial л.\partial D \ge 2\pi d$, получим в пределе, что $|f(z_0)| \le M$. Видим, что $|f| \le M$ в D. $\triangleleft$

Пример. Пусть функция f голоморфна в круге $U(z_0, R)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$, непрерывна в $\overline{U(z_0, R)}$ и $|f(z)| \le M$, $M > 0$, на окружности $\partial U(z_0, R)$, за исключением точки ζ_0, в которой $|f(\zeta_0)| < M$.

Покажем, что $|f(z_0)| < M$.

Действительно, поскольку $|f(\zeta_0)| < M$, то в силу непрерывности f на $\partial U(z_0, R)$ существует на этой окружности замкнутая дуга

γ_1, $\zeta_0 \in \gamma_1$, на которой $|f(\zeta)| \le M - d$, $d > 0$. В силу теоремы о среднем и свойств интеграла по кривой имеем

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{\partial U(z_0,R)} |f(\zeta)|\,ds = \frac{1}{2\pi R}\left[\int\limits_{\gamma_1} |f(\zeta)|\,ds + \int\limits_{\gamma_2} |f(\zeta)|\,ds\right],$$

где γ_2 – дуга, дополнительная к γ_1 на $\partial U(z_0, R)$. Так как $|f(\zeta)| \le M$ на γ_2, то находим, что

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi R}\left[(M-d)\,\partial л.\gamma_1 + M\,\partial л.\gamma_2\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi R}\left[M \cdot 2\pi R - d\,\partial л.\gamma_1\right] = M - \frac{d\,\partial л.\gamma_1}{2\pi R} < M. \quad \triangleleft$$

Пример. Вычислить интеграл (типа интеграла Коши, см. п. 4.1)

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(0,1)} \frac{\operatorname{Re}\zeta}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \partial U(0,1).$$

На единичной окружности $\Gamma = \partial U(0,1)$

$$\operatorname{Re}\zeta = \frac{1}{2}\left(\zeta + \overline{\zeta}\right) = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \text{ и поэтому}$$

$$F(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta.$$

Так как

$$\frac{\zeta^2 + 1}{\zeta(\zeta - z)} = 1 + \left(z + \frac{1}{z}\right)\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{z\zeta},$$

то в силу свойства линейности интеграла имеем

$$F(z) = \frac{1}{4\pi i}\left\{\int_\Gamma 1 \cdot d\zeta + \left(z + \frac{1}{z}\right)\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{z}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta}\right\}.$$

Как известно, первый интеграл равен нулю, а третий равен $2\pi i$. Значит,

$$F(z) = \frac{1}{4\pi i}\left(z + \frac{1}{z}\right)\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2z}.$$

Дальнейшие вычисления зависят от положения z относительно окружности Γ, так как согласно интегральной формуле Коши и интегральной теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 1, \text{ если } |z|<1, \\ 0, \text{ если } |z|>1. \end{cases}$$

В итоге имеем

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{2}, \text{ если } z \in U(0,1), \\ -\dfrac{1}{2z}, \text{ если } z \in \overline{U(0,1)}. \end{cases} \triangleleft$$

4.3. Бесконечная дифференцируемость голоморфной функции. Доказанная теорема 2 совместно с теоремой 4 о бесконечной дифференцируемости интеграла Коши приводит к важному свойству бесконечной дифференцируемости голоморфной функции.

Теорема 6 (о бесконечной дифференцируемости голоморфной функции). *Если* $f: D \to \mathbb{C}$ *– голоморфная функция в области* $D \subset \mathbb{C}$, *то она имеет в* D *производную любого порядка* $n \in \mathbb{N}$ *и, кроме того,*

$$\frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial U(z,\rho)}\frac{f(z)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta,\ z \in D,$$

где $U(z,\rho)$ *–* ρ*-окрестность точки* z, *лежащая в* D.

$\triangleright$ В силу интегральной формулы Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U(z,\rho)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = f(z).$$

По теореме 4 о бесконечной дифференцируемости интеграла Коши

$$\frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U(z,\rho)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right] = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial U(z,\rho)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta.$$

Таким образом, в каждой точке $z \in D$ существует производная $f^{(n)}(z)$. $\triangleleft$

Из доказанной теоремы и определения голоморфности в области следует, что производная любого порядка от голоморфной функции голоморфна в этой же области.

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(0,2)} \frac{\cos\zeta}{(\zeta - 1)^4} d\zeta.$$

Воспользуемся интегральной теоремой Коши для $f(z) = \cos z$. Имеем при $z \in U(0,2)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(0,2)} \frac{\cos\zeta}{\zeta - z} d\zeta = \cos z.$$

В силу теоремы 6 имеем

$$\frac{3!}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(0,2)} \frac{\cos\zeta}{(\zeta - z)^4} d\zeta = (\cos z)''' = \sin z.$$

Полагая здесь $z = 1$, находим: $I = \dfrac{\sin 1}{6}$. $\triangleleft$

Читатель может самостоятельно распространить интегральную формулу Коши на области типа $s+1$, $s > 0$.

4.4. Теорема о среднем для голоморфной функции. Интегральная формула Коши выражает интересное свойство голоморфной функции: её значения в области полностью определяются её значениями на границе области.

Из теоремы 5 вытекает

Теорема 7 (о среднем). *Значение функции f, голоморфной в области $D \subset \mathbb{C}$, равно в любой точке $z \in D$ среднему арифметическому значению этой функции по границе окрестности $U(z, \rho) \subset D$, $\rho > 0$, точки z, то есть* $f(z) = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\varphi}) d\varphi$.

$\triangleright$ По интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(z,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Представим границу круга $U(z,\rho)$ параметрическим уравнением $\zeta = z + \rho e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Имеем для $f(z)$ представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\varphi}) \rho d\varphi,$$

доказывающее теорему. ◁

Теорема о среднем показывает, что значения голоморфной функции, если сказать образно, очень тесно связаны, что существенно отличает свойства голоморфных функций от свойств дифференцируемых функций действительного переменного.

§ 5. ПЕРВООБРАЗНАЯ ДЛЯ ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ

5.1. Первообразная. Пусть в области $D \subset \mathbb{C}$ задана функция $f : D \to \mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Голоморфная функция $F : D \to \mathbb{C}$ называется *первообразной для* f *в* D, *если* $F' = f$ *в* D.

Примеры: а) $\sin z$ – первообразная для $\cos z$ в $\mathbb{C}$;

б) $\frac{1}{z}$ – первообразная для $-\frac{1}{z^2}$ в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;

в) $\operatorname{tg} z$ – первообразная для $\frac{1}{\cos^2 z}$ в $\mathbb{C} \setminus \mathrm{M}$, где M – множество точек $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ◁

Теорема 8 (об общем виде первообразной). *Если* F *– первообразная для* f *в* D, *то множество всех первообразных для* f *в* D *дается формулой* $\{F + C\}$, *где* C *– комплексная постоянная.*

▷ Так как $(F + C)' = F'$, то $F + C$ – первообразная для f в D.

Предположим, что F и F_1 – первообразные для f в D: $F' = f$, $F_1' = f$ в D. Тогда функция $\Phi = F_1 - F$ голоморфна в D. Поскольку $\Phi' = 0$ в D и

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y},$$

где $u(x,y)=\operatorname{Re}\Phi(z)$, $v(x,y)=\operatorname{Im}\Phi(z)$, $z=x+iy$, то

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=0.$$

Интегрируя эту систему уравнений, легко находим, что $u(x,y)=C_1$, $v(x,y)=C_2$ и, следовательно, $\Phi(z)=C_1+iC_2$. Значит, $F_1=F+C$. ◁

Теперь необходимо дать ответ на вопрос о существовании первообразной, указав достаточные условия в терминах, характеризующих f и D.

5.2. Существование первообразной. Ограничимся рассмотрением непрерывных в односвязной области $D\subset\mathbb{C}$ функций f, для которых интеграл по любой замкнутой жордановой кривой $\Gamma\subset D$ равен нулю.

Отметим важное свойство таких функций. Пусть γ_1,γ_2 – две простые жордановы кусочно-гладкие кривые, лежащие в D, имеющие общее начало $z_0\in D$ и общий конец $z\in D$ (рис. 7). Тогда

$$\int_{\gamma_1} f(\zeta)\,d\zeta=\int_{\gamma_2} f(\zeta)\,d\zeta.$$

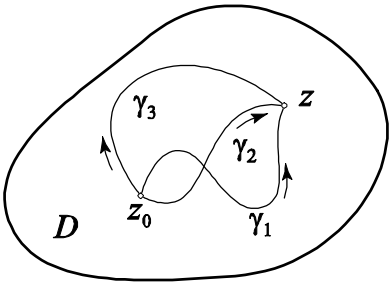


Рис. 7.

Действительно, возьмем в D простую жорданову кусочно-гладкую кривую γ_3 с началом z_0 и концом z_3, не имеющую с γ_1,γ_2 других общих точек. Замкнутые жордановы кусочно-гладкие кривые $\gamma_1\cup\gamma_3^-,\gamma_2\cup\gamma_3^-$ ограничивают каждая односвязную область, лежащую в D. По следствию 1 интегральной теоремы Коши имеем

$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_3^-} f(\zeta)d\zeta=0,\quad \int_{\gamma_2\cup\gamma_3^-} f(\zeta)d\zeta=0,$$

откуда в силу определения интеграла по составной кривой и изменения знака интеграла при смене направления на пути интегрирования имеем равенства

$$\int_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_3} f(\zeta)d\zeta, \quad \int_{\gamma_2} f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_3} f(\zeta)d\zeta,$$

доказывающие приведенное выше свойство.

Отразим независимость интеграла от выбора конкретного пути интегрирования с началом в точке z_0 и концом в точке z в обозначении интеграла, полагая

$$\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta.$$

Теорема 9 (о существовании первообразной). *Пусть функция f непрерывна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и интеграл от f по любой замкнутой жордановой кусочно-гладкой кривой, лежащей в D, равен нулю. Тогда f имеет первообразную в D, и ею является функция*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta,\ z_0 \in D,\ z \in D.$$

▷ Убедимся, используя определение производной, что существует $F'(z)$ в D и что $F'(z) = f(z)$ в D.

Пусть $z_0 \in D$, $z \in D$, $z + \Delta z \in U(z,\rho) \subset D$, $\rho > 0$, $\Delta z \neq 0$.

Представим разность

$$I(z,\Delta z) = \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)$$

в интегральной форме. После простых вычислений имеем

$$I(z,\Delta z) = \frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,d\zeta\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \left[f(\zeta) - f(z)\right]d\zeta.$$

На любой кривой $\gamma \subset U(z,\rho)$, соединяющей z с $z+\Delta z$, функция $f(\zeta)-f(z)$ равномерно непрерывна. Поэтому для числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$, если $\zeta \subset U(z,\delta)$. В качестве γ возьмем отрезок с началом в точке z и концом в точке $z+\Delta z$. Оценка

$$|I(z,\Delta z)| \le \frac{1}{\Delta z}\cdot \varepsilon |\Delta z| = \varepsilon$$

означает, если $|\Delta z| < \min\{\rho,\delta\}$, то

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) = 0.$$

Отсюда согласно определению производной следует, что существует $F'(z)$ и $F'(z)=f(z)$, $z \in D$. $\triangleleft$

Теорема 10 (о существовании первообразной для голоморфной функции). *Если функция f голоморфна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то f имеет первообразную в D, и ею является*

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta,\ z_0 \in D,\ z \in D.$$

$\triangleright$ По следствию 1 интегральной теоремы Коши $\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta = 0$ по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой, лежащей в D. Остается применить предыдущую теорему. $\triangleleft$

Следствие. Все первообразные голоморфной в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ функции f даются формулой

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta + C,\ z_0 \in D,\ z \in D,\ C=\text{const},$$

причем каждая из этих функций – первообразная для f в D.

В теореме 10 условие односвязности области D существенно, поскольку для многосвязных областей $F(z)$ может не быть однозначной функцией.

5.3. Теорема Мореры. Мы определили ранее понятие голоморфности функции в области, потребовав существование производной функции в этой области. Следующая теорема указывает на возможность другого подхода к определению голоморфности.

Теорема 11 (интегральное условие голоморфности. Морера). *Если функция f непрерывна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и интеграл от f по любой замкнутой жордановой кусочно-гладкой кривой равен нулю, то f голоморфна в D.*

Коши f непрерывна в D $\exists f'$ в D	Морера f непрерывна в D $\forall \oint f = 0$
$\forall \oint f = 0$	$\exists f'$ в D

▷ По теореме 9 функция f имеет в области D первообразную $F : F'(z) = f(z)$ в D. Поскольку F имеет производную в D, то она голоморфна в D и, следовательно, согласно теореме 6 имеет производные всех порядков, в частности, существует $F''(z)$. Но это означает, в силу равенства $f'(z) = F''(z)$ в D, что f имеет в D производную, то есть по определению f голоморфна в D. ◁

Теорему Мореры можно рассматривать как обратную к интегральной теореме Коши.

5.4. Формула Ньютона – Лейбница. Один из методов вычисления интегралов по простым жордановым кусочно-гладким кривым основан на использовании аналога известной из действительного анализа формулы Ньютона – Лейбница.

Теорема 12. *Если функция f голоморфна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и γ – простая жорданова кусочно-гладкая кривая с началом z_0 и концом z_1, лежащая в D, то*

$$\int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\,d\zeta = \Phi(z_1) - \Phi(z_0),$$

где Φ – любая первообразная функция f в D.

▷ Пусть Φ – некоторая первообразная функция f в D. Тогда $\Phi(z)$ находится в семействе функций

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta + C, \quad C = \text{const},$$

то есть

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta + C$$

при некотором выборе постоянного слагаемого. Очевидно, при $z = z_0$ интеграл равен нулю и поэтому $C = \Phi(z_0)$. Таким образом,

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \Phi(z_1) - \Phi(z_0). \triangleleft$$

Пример. Вычислим интеграл

$$I = \int_{0}^{(1+i)\pi} \sin\zeta d\zeta.$$

Функция $\sin z$ голоморфна в $\mathbb{C}$ и $(\cos z)' = -\sin z$. По формуле Ньютона – Лейбница $I = -\cos(1+i)\pi + \cos 0$. Выполнив несложные вычисления, упрощающие запись I:

$I = -\cos\pi\cos i\pi + \sin\pi\sin i\pi + 1 = \cos i\pi + 1 = \operatorname{ch}\pi + 1,$ получаем окончательно $I = 2\operatorname{ch}^2 \pi/2$. $\triangleleft$

§ 6. РАЗЛОЖЕНИЕ ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ В СТЕПЕННОЙ РЯД

6.1. Основная теорема. Отправляясь от интегральной формулы Коши, докажем одну из основных теорем о свойствах голоморфных функций. Через *frD* («фронт D») обозначаем границу области D,

а через $dist\left(z_0, frD\right)$ – расстояние от точки $z_0 \in D$ до границы области D.

Теорема 13. *Пусть функция f голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}$. Пусть z_0 – точка области D и $d = dist\left(z_0, frD\right)$. Тогда в круге $U(z_0, d)$ функцию f можно представить степенным рядом*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n$$

с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f\left(\zeta\right) d\zeta}{\left(\zeta - z_0\right)^{n+1}}, \ n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\},$$

где $\gamma_\rho = \partial U\left(z_0, \rho\right)$ – окружность с центром в точке z_0 и радиуса $\rho \in \left(0, d\right)$.

▷ По интегральной теореме Коши имеем для $z \in U\left(z_0, \rho\right)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f\left(\zeta\right)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Воспользуемся очевидным равенством и известной формулой для геометрической прогрессии для разложения $1/\left(\zeta - z\right)$ в степенной ряд. Имеем

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\left(\zeta - z_0\right)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z - z_0\right)^n}{\left(\zeta - z_0\right)^{n+1}}.$$

Ряд справа равномерно относительно $\zeta \subset \gamma_\rho$ сходится, если z принадлежит замкнутому множеству $E \subset U\left(z_0, \rho\right)$, поскольку существует $q \in \left(0,1\right)$ такое, что

$$\max_{z \in E} \max_{\zeta \in \gamma_\rho} \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = q < 1.$$

Равномерная сходимость этого ряда не нарушится при почленном умножении ряда на непрерывную на γ_ρ функцию $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$. Имеем при $z \in E$

$$f(z) = \int_{\gamma_\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{2\pi i} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Пользуясь теоремой о почленном интегрировании рядов, получаем отсюда, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

где коэффициенты

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

определяются интегралом, не зависящим от $\rho, 0 < \rho < d$. $\triangleleft$

Эти же коэффициенты в соответствии с теоремой 9 о бесконечной дифференцируемости голоморфной функции представляются формулой

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

и поэтому разложение $f(z)$ по степеням разности $z - z_0$ преобразуется к виду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n,$$

известному как *ряд Тейлора* для $f(z)$ в точке z_0.

Из доказательства теоремы следует, что представляющий голоморфную функцию $f(z)$ ряд сходится в $U(z_0, d)$ и равномерно сходится на любом замкнутом множестве, лежащем в этом круге. Число d совпадает с радиусом сходимости ряда.

Примеры. Разложим в степенной ряд функцию $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ около точки $z=0$. Здесь $d=1$ и в $U(0,1)$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n .$$

Такая же задача для функции $\sin z$ (для нее $d=\infty$) приводит к степенному ряду

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

сходящемуся во всей плоскости $\mathbb{C}$. $\triangleleft$

6.2. Единственность разложения. Из проведенного доказательства теоремы не следует, что не существует иного, кроме указанного в теореме 13, разложения $f(z)$ около z_0 в степенной ряд. Дополнением к теореме 13 является

Теорема 14 (о единственности разложения в степенной ряд). *В условиях теоремы 13 разложение f в степенной ряд единственно.*

$\triangleright$ Предположим, что $f\left(z\right)$ имеет разложение в $U\left(z_0,d\right)$ в степенной ряд по степеням $z-z_0$ вида

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n\left(z-z_0\right)^n$$

и, следовательно, ряд

$$f(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n\left(\zeta-z_0\right)^n$$

равномерно сходится на γ_ρ. Умножим обе части этого равенства на $\dfrac{1}{2\pi i}\left(\zeta-z_0\right)^{-k-1}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и проинтегрируем полученный ряд

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{\left(\zeta-z_0\right)^{k+1}}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}d_n\left(\zeta-z_0\right)^{n-k-1}$$

почленно по γ_ρ. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\left(\zeta-z_0\right)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}d_n\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\left(\zeta-z_0\right)^{n-k-1}d\zeta .$$

Как было показано ранее,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\upsilon}\left(\zeta - z_0\right)^{n-k-1} d\zeta = \begin{cases} 1 \text{ при } n = k, \\ 0 \text{ при } n \neq k. \end{cases}$$

Поэтому

$$d_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\left(\zeta - z_0\right)^{k+1}} = c_k. \quad \triangleleft$$

Представление функции степенным рядом не зависит от способа получения разложения, состоящего из разнообразных обоснованных технических действий.

6.3. Ограниченные целые функции. В общей теории голоморфных функций находит применения теорема, доказанная Жозефом Лиувиллем (1809–1882), выражающая одно из свойств целых функций.

Теорема 15 (Лиувилль). *Если функция* f *голоморфна в* $\mathbb{C}$ *и ограничена, то* $f = \text{const}$.

$\triangleright$ По теореме 13 функция f представима степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta, \quad 0 < \rho < d = \infty.$$

Так как f ограничена на $\mathbb{C}$, то существует постоянная $M > 0$ такая, что $|f(z)| < M$, $z \in \mathbb{C}$. На окружности γ_ρ, представленной параметрическим уравнением $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, для модуля коэффициента c_n имеем оценку

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{|f(\zeta)|\rho d\varphi}{\rho^{n+1}} \le \frac{M}{\rho^n},$$

откуда в силу произвольности ρ в пределе при $\rho \to \infty$ получаем $|c_n| = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Значит, $f(z) = c_0$ в $\mathbb{C}$. $\triangleleft$

Теорему Лиувилля можно сформулировать другим образом: если f голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}$, то f постоянна. Читатель может убедиться в этом самостоятельно, обращаясь к определению голоморфности в бесконечно удаленной точке.

§ 7. РАЗЛОЖЕНИЕ ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ В РЯД ЛОРАНА

7.1. Ряд Лорана. Рассмотрим два функциональных ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z-z_0\right)^n,\ z_0 \in \mathbb{C}, \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{\left(z-z_0\right)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \left(z-z_0\right)^n,\ z_0 \in \mathbb{C}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Рядом Лорана* называют сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{\left(z-z_0\right)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z-z_0\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(z-z_0\right)^n.$$

Ряд Лорана сходится на множестве точек $z \in \mathbb{C}$, в которых сходятся оба исходных ряда. Это означает, что ряд Лорана сходится в точке $z \in \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда существуют пределы

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{n=1}^{s} \frac{c_{-n}}{\left(z-z_0\right)^n} = T(z), \quad \lim_{l\to\infty} \sum_{n=0}^{l} c_n \left(z-z_0\right)^n = S(z)$$

частичных сумм рассматриваемых рядов. При этом

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(z-z_0\right)^n = T(z) + S(z).$$

Обозначим через R, $R>0$ радиус круга сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z-z_0\right)^n$, а через $\frac{1}{r}$, $r \geq 0$, – радиус круга сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n$, получающегося из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{\left(z-z_0\right)^n}$ заменой $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$. Тогда, если $0 \leq r < R < \infty$, ряд Лорана будет сходиться на множестве

$$K\left(z_0; r, R\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : r < \left|z-z_0\right| < R\right\},$$

то есть в кольце, ограниченном концентрическими окружностями с радиусами r, R с общим центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, а также, быть может, в некоторых граничных точках этого кольца.

Случаи, когда $K(z_0;0,R)$, $K(z_0;r,\infty)$, $K(z_0;0,\infty)$, не исключаются. Отметим, что

$$K(z_0;0,R) = \dot{U}(z_0,R),\ K(z_0;r,\infty) = \dot{U}\left(\infty,\frac{1}{r}\right),$$

$$K(z_0;0,\infty) = \mathbb{C}\setminus\{z_0\}.$$

О функции $f(z)$ говорят, что она представлена рядом Лорана в кольце $K(z_0;r,R)$, если в этом кольце

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

и называют сумму $T(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ *главной* частью, а сумму $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ – *правильной* частью разложения $f(z)$ в кольце $K(z;r,R)$.

7.2. Разложение в ряд функции, голоморфной в кольце. Заменим в теореме 13 условие голоморфности функции в круге $U(z_0,\rho)$ на условие её голоморфности в кольце $K(z_0;r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$, $0 \le r < R \le \infty$. Повторим в существенном с небольшим дополнением доказательство этой теоремы и представим $f(z)$ разложением по положительным и отрицательным степеням разности $z - z_0$ в $K(z_0;r,R)$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

Теорема 16 (Лоран). *Пусть функция f голоморфна в кольце $K(z_0;r,R)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le \infty$. Тогда в $K(z_0;r,R)$ функция f представима рядом Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где γ_ρ *– окружность с центром в точке* z_0 *и радиуса* $\rho \in (r, R)$.

▷ Фиксируем замкнутое множество $E \subset K(z_0; r, R)$ и рассмотрим такое кольцо $K(z_0; r_1, R_1)$, $r < r_1 < R_1 < R$, чтобы E лежало в нем. В кольце $K_1 = K(z_0; r_1, R_1)$ и на его границе функция f голоморфна.

По интегральной формуле Коши для кольца при $z \in E$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Ориентированная граница ∂K_1 состоит из окружности $\gamma_{R_1} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z_0| = R_1\}$, проходимой против хода часовой стрелки, и окружности $\gamma_{r_1}^- = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z_0| = r_1\}$, проходимой по ходу часовой стрелки: $\partial K_1 = \gamma_{R_1} \cup \gamma_{r_1}^-$. Поэтому $f(z) = S(z) + T(z)$, где

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \quad T(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \ z \in E.$$

Разложим подынтегральную функцию в первом из этих интегралов по положительным, а во втором – по отрицательным степеням разности $z - z_0$. Получим:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} f(z)\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

$$-\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{z - z_0}\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=1}^{\infty} f(\zeta)\frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}.$$

Ряды равномерно сходятся относительно $\zeta \in \gamma_{r_1}$, $\zeta \in \gamma_{R_1}$, если $z \in E$, поскольку существуют $q_1 \in (0,1), q_2 \in (0,1)$ такие, что

$$\max_{z\in E}\max_{\zeta\in\gamma_{r_1}}\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = q_1 < 1, \quad \max_{z\in E}\max_{\zeta\in\gamma_{R_1}}\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| = q_2 < 1.$$

Пользуясь теоремой о почленном интегрировании рядов, получаем

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

и

$$T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n},$$

где

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} f(\zeta)(\zeta-z_0)^{-n+1}\,d\zeta, n \in \mathbb{N}.$$

Обе окружности, по которым выполняется интегрирование, можно, не меняя значений интегралов, заменить на окружность $\gamma_\rho, r_1 \le \rho \le R_1$ и затем написать, заменив c_{-n}, $n \in \mathbb{N}$, на c_n, $n = -1, -2, \ldots$, формулу для разложения f по целым степеням $z - z_0$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}. \quad \triangleleft$$

Следуя доказательству теоремы 14 о единственности разложения функции в степенной ряд, нетрудно доказать единственность разложения голоморфной функции в ряд Лорана. Для получения коэффициентов ряда Лорана, нередко удобнее вместо вычисления интегралов использовать другие законные приемы, поскольку все они приводят к одному и тому же результату.

Пример. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(2-z)}$ в ряд Лорана в кольце $K(0;1,2)$.

Функция $f(z)$ рациональная. Представим её в виде суммы простейших дробей:

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2-z}.$$

Первая из них голоморфна в $K(0;1,2)$ при $|z|>1$, а вторая – при $|z|<2$. Воспользовавшись известными разложениями в геометрические ряды

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n},\qquad \frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},$$

получаем представление $f(z)$ в $K(0;1,2)$ в виде ряда Лорана

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Очевидно, её лорановскими коэффициентами являются числа

$$c_n=\begin{cases}1 \text{ при } n=-1,\ -2,...,\\ \dfrac{1}{2^{n+1}} \text{ при } n=1,\ 2.... \end{cases}\triangleleft$$

§ 8. ТОЧКИ НАРУШЕНИЯ ГОЛОМОРФНОСТИ ФУНКЦИИ

8.1. Изолированные особые точки. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка $z_0\in\overline{\mathbb{C}}$ называется *изолированной особой точкой* (*особенностью*) голоморфной функции f, если в z_0 функция f не задана или не

голоморфна, но существует число $\delta > 0$ такое, что в $\overset{\circ}{U}(z_0, \delta)$ функция f голоморфна.

Примеры: а) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ в точке $z = 0$ не определена, но в $\overset{\circ}{U}(0, \delta), \delta > 0$, она голоморфна. Значит, $z = 0$ – изолированная особая точка функции $\dfrac{\sin z}{z}$;

б) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ определена на $\overline{\mathbb{C}}$, но производная $-\dfrac{1}{z^2}$ существует всюду, кроме точки $z = 0$. Значит, $z = 0$ – изолированная особая точка функции $\dfrac{1}{z}$;

в) $f(z) = z$ голоморфна в $\mathbb{C}$, но не голоморфна в ∞, поскольку $\varphi(\zeta) = f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right) = \dfrac{1}{\zeta}$ не имеет производной в $\zeta = 0$;

г) $f(z) = \operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ голоморфна в $\mathbb{C}$, кроме точек $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, являющихся изолированными особыми точками котангенса. Точка $z = \infty$ является примером неизолированной особой точки, поскольку она – предельная точка изолированных особенностей и, следовательно, нет окрестности $U(\infty, \delta) \setminus \{\infty\}$, где $\operatorname{ctg} z$ – голоморфная функция. $\triangleleft$

В дальнейшем мы многократно сможем убедиться, что свойства голоморфных функций связаны с их особыми точками. В определенном смысле можно сказать, что основная информация о голоморфных функциях содержится в окрестностях особых точек.

8.2. Типы изолированных особенностей. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ – изолированная особая точка голоморфной функции f. Существует кольцо $K(z_0;0,\delta) = \overset{\circ}{U}(z_0,\delta), \delta > 0,$ в котором f голоморфна и согласно теореме 16 представима рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

с *главной* частью

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

и *правильной* частью

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n .$$

Основой классификации изолированных особых точек, разделяющих их на три типа, является число отличных от нуля коэффициентов в главной части разложения f в ряд Лорана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется *существенно особой точкой* функции f, если $T(z)$ имеет бесконечно много отличных от нуля коэффициентов.

Пример. Функция $f(z) = e^{1/z} + e^z$ имеет изолированную особую точку $z = 0$. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в $\overset{\circ}{U}(0,\delta), \delta > 0$. Получим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Видим, что в главной части разложения все коэффициенты $c_{-n} = \frac{1}{n!}, n = 1,2,\ldots,$ отличны от нуля. Значит, $z = 0$ – существенно особая точка функции $f(z)$. $\triangleleft$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется *полюсом* функции f, если $T(z)$ имеет хотя бы одно, но только конечное число отличных от нуля коэффициентов.

В случае полюса главная часть разложения функции в ряд Лорана имеет вид

$$T(z)=\sum_{n=1}^{m}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0},$$

где $c_{-m}\neq 0$.

Число m называют *порядком (кратностью)* полюса. Если $m=1$, то полюс называют также простым.

Пример. Функция $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^3}$, уже представленная рядом Лорана в проколотой окрестности точки $z=1$, имеет в этой точке полюс третьего порядка. ◁

Пример. Функция $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(2-z)}$ имеет особенности в точках $z=1$, $z=2$. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $K(1;1,2)$. В результате простых вычислений имеем

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{1-(z-1)}=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n.$$

В полученном разложении $f(z)$ в рад Лорана в $K(1;1,2)$ главная часть $T(z)=\dfrac{1}{z-1}$, правильная часть $S(z)=1+(z-1)+(z-1)^2+\ldots$. В точке $z=1$ функция имеет простой полюс. ◁

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка $z_0\in\mathbb{C}$ называется *устранимой* особенностью функции f, если $T(z)=0$ (то есть когда все коэффициенты c_{-n}, $n=1,2,\ldots$, главной части разложения равны нулю).

Пример. Функция $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ в $K(0;0,\infty)$ раскладывается в ряд Лорана с использованием разложения $\sin z$ в степенной ряд следующим образом:

$$f(z)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots.$$

Видим, что $z=0$ – устранимая особенность. ◁

Особенность названа устранимой, поскольку функцию $f(z)$ можно доопределить в z_0 по непрерывности, полагая $f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0} S(z)$, и превратить $f(z)$ в голоморфную функцию в $U(z_0,\delta)$, $\delta>0$.

Обратимся теперь к случаю, когда $z_0=\infty$ – изолированная особая точка голоморфной функции. Существует проколотая окрестность $U(\infty,\delta)$, $\delta>0$, в которой функция $f(z)$ голоморфна. Отображением $\zeta=\dfrac{1}{z}$ переведем $U(\infty,\delta)$ в проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}(0,1/\delta)$ нуля. В ней функция $\varphi(\zeta)=f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ имеет разложение в ряд Лорана вида

$$\varphi(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{\zeta^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n\zeta^n,$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta$$

и $\gamma_\rho=\partial U(0,\delta_1)$ – положительно ориентированная окружность. Для $f(z)$ полученное разложение преобразуется в разложение

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n},$$

в котором первая сумма справа – *главная* часть, а вторая – *правильная* часть разложения в ряд Лорана. Естественно, распространяя введенную выше терминологию на случай $z_0=\infty$, следующим образом классифицировать особенности f в бесконечности:

если среди коэффициентов главной части имеется бесконечно много отличных от нуля, то ∞ – *существенно особая* точка;

если среди коэффициентов главной части имеется хотя бы один, но конечное число отличных от нуля, то ∞ – *полюс*; главная часть превращается в многочлен

$T(z)=c_{-m}z^m+c_{-m+1}z^{m-1}+\ldots+c_{-1}z,\ c_{-m}\neq 0,$ порядок которого принимают за порядок полюса;

если все коэффициенты главной части равны нулю, то ∞ – *устранимая* изолированная особая точка.

Пример. Для функции $f(z)=e^{1/z}+e^z$ точки $z=0$, $z=\infty$ – существенно особые точки; для функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ точка $z=\infty$ – существенно особая. ◁

Пример. Функция $f(z)=z$ имеет на ∞ полюс первого порядка, а $f(z)=z^2+az+b$ – полюс второго порядка. ◁

8.3. Связь полюсов с нулями. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть число $A\in\mathbb{C}$ и функция $f:E\to\mathbb{C}$ задана на множестве $E\subset\overline{\mathbb{C}}$. Точку $z\in E$, в которой $f(z)=A$, называют A*-точкой* функции f и, если $A=0$, – её *нулем.*

Пример. $f(z)=e^z$ не имеет нулей; её A-точками, $A\neq 0$, являются точки $z=\ln|A|+i\left(\arg A+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$. ◁

Пусть функция f голоморфна в области $D\subset\mathbb{C}$ и отлична от постоянной. Пусть $z_0\in D\setminus\{\infty\}$ – нуль функции f. Тогда согласно теореме 13 о разложении голоморфной функции в степенной ряд в точке z_0

$$f(z)=\sum_{n=m}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n,\ c_m\neq 0,\ m\geq 1.$$

Число m называют *порядком (кратностью)* нуля функции f в точке z_0. Таким образом, f имеет в z_0 нуль порядка m тогда и только тогда, когда

$$f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(m-1)}\left(z_0\right)=0,\quad f^{(m)}\left(z_0\right)\neq 0.$$

Пусть $z_0=\infty$ и $f\left(\infty\right)=0$. Тогда функция $\varphi\left(\zeta\right)=f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ голоморфна в нуле и $\varphi\left(0\right)=0$. Её разложение в степенной ряд имеет вид

$$\varphi(\zeta)=\sum_{n=m}^{\infty}c_n\zeta^n,\ c_m\neq 0,\ m\geq 1,$$

показывающий, что φ имеет в $\zeta=0$ нуль порядка m. Будем считать, что f имеет в бесконечности нуль порядка m. Очевидно, разложение f в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$f(z)=\frac{c_m}{z^m}+\frac{c_{m+1}}{z^{m+1}}+\ldots=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{c_n}{z^n},\ c_m\neq 0,\ m\geq 1.$$

Нуль первого порядка обычно называют простым.

Теорема 17 (о связи между полюсом и нулем). *Точка $z_0\in\mathbb{C}$ является полюсом порядка m, $m\geq 1$, голоморфной функции f тогда и только тогда, когда z_0 – нуль порядка m функции $g=1/f$.*

▷ Пусть $z_0\in\mathbb{C}$ – полюс порядка m функции f. В некоторой проколотой окрестности $U(z_0,\delta)$, $\delta>0$, разложение f в ряд Лорана имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z),$$

где $\varphi(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\ldots$ – голоморфная функция в точке z_0, $\varphi(z_0)=c_{-m}\neq 0$.

Функция $\psi(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}$ является отношением голоморфных в z_0 функций, причем $\varphi(z_0)\neq 0$. Значит, $\psi(z)$ голоморфна в точке z_0 и представляется в её окрестности степенным рядом

$$\psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n,\ b_0=\frac{1}{\varphi(z_0)}=\frac{1}{c_{-m}}\neq 0.$$

Для $g(z)$ имеем разложение

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\psi(z)=(z-z_0)^m\left[b_0+b_1(z-z_0)+\ldots\right],$$

показывающее согласно определению порядка нуля, что $g(z)$ в точке z_0 имеет нуль порядка m.

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ – нуль порядка m функции g. В проколотой окрестности $U(z_0, \delta)$, $\delta > 0$, разложение g в степенной ряд имеет вид

$$g(z) = b_m (z - z_0)^m + b_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \ldots = (z - z_0)^m \psi(z),$$

где

$$\psi(z) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z - z_0)^n -$$

голоморфная функция в точке z_0, $\psi(z_0) = b_m \neq 0$, не принимающая в $U(z_0, \delta)$ значения нуль. Функция $\varphi(z) = \dfrac{1}{\psi(z)}$ представляется как голоморфная в точке z_0 степенным рядом

$$\varphi(z) = c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \ldots \quad c_m = \frac{1}{b_m} \neq 0.$$

Для $f(z)$ имеем разложение

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = (z - z_0)^{-m} \varphi(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \left[c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \ldots \right],$$

показывающее согласно определению порядка полюса, что $f(z)$ в точке z_0 имеет полюс порядка m. ◁

Пример. Функция $f(z) = \dfrac{\sin z}{z(z-1)(z-2)^3}$ имеет устранимую особенность в $z = 0$, простой полюс в $z = 1$, полюс порядка 3 в $z = 2$, существенно особую точку в $z = \infty$. ◁

§ 9. ТЕОРЕМА КОШИ О ВЫЧЕТАХ

9.1. Интегрирование функций с изолированными особенностями. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область, ограниченная замкнутой жордановой кусочно-гладкой кривой $\Gamma = \partial D$.

Предположим, что функция f голоморфна в D, непрерывна в $\overline{D}$, кроме точек $z_1, ..., z_s$, $s \in \mathbb{N}$, лежащих в D, в которых f имеет изолированные особые точки. Сложный процесс вычисления интеграла

$$\int_{\partial D} f(\zeta) d\zeta$$

благодаря методам, развитым в теории голоморфных функций, может быть существенно упрощен. Начнем с построения области D_1. Исключим из D достаточно малые δ-окрестности $U(z_k, \delta)$, $k = 1, ..., s$, $\delta > 0$, вместе с их граничными окружностями. Число δ можно выбрать настолько малым, что замкнутые круги $\overline{U(z_k, \delta)}$ попарно не пересекаются. Очевидно, D_1 – область типа $s+1$. Согласно интегральной теореме Коши для таких областей

$$\int_{\partial D_1} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Так как ориентированная граница ∂D_1 состоит из ориентированной границы ∂D области D и из s окружностей, представляющих собой границы исключенных окрестностей $U(z_0, \delta)$, проходимых по ходу часовой стрелки, то

$$\int_{\partial D} f(\zeta) d\zeta - \sum_{k=1}^{s} \int_{\partial U(z_0, \delta)} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Назовем эту формулу формулой локализации.

Вычисление интеграла по границе области D сведено, таким образом, к вычислению интегралов по сколь угодно малым окружностям с центрами в изолированных особых точках функции f. Такие интегралы могут быть вычислены с помощью так называемых вычетов, которые в свою очередь нередко, как будет видно из дальнейшего, находятся дифференцированием и другими законными приемами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Вычетом* функции $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, в изолированной особой точке $a \in D$ называется число, обозначаемое $\operatorname*{res}_{z=a} f$, равное интегралу

$$\operatorname*{res}_{z=a} f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(a,\delta)} f(\zeta)\, d\zeta,$$

при условии, что в δ-окрестности точки a других особенностей функция f не имеет.

Читатель легко убедится самостоятельно в том, что интеграл не зависит от выбора достаточно малых δ.

Теорема 18 (теорема Коши о вычетах). *Пусть односвязная область $D \subset \mathbb{C}$ ограничена замкнутой жордановой кусочно-гладкой кривой. Если функция $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ голоморфна в D и непрерывна в $\overline{D}$, за исключением конечного множества точек $z_k \in D$, $k = 1,...,s$, $s \in \mathbb{N}$, в которых f имеет изолированные особенности, то*

$$\int\limits_{\partial D} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{s} \operatorname*{res}_{z=z_k} f.$$

▷ Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться формулой локализации и определением вычета. ◁

9.2. Вычет и ряд Лорана. Вычет $\operatorname*{res}_{z=a} f$ определяется формулой, как легко видеть, совпадающей при $a \in \mathbb{C}$ с формулой для коэффициента c_{-1} в разложении функции f в ряд Лорана в проколотой окрестности точки a, то есть с формулой

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(a,\delta)} f(\zeta) d\zeta.$$

Поэтому в изолированной особой точке $a \in \mathbb{C}$ функции f вычет $\operatorname*{res}_{z=a} f = c_{-1}$ – коэффициенту при $(z-a)^{-1}$ в разложении f в ряд Лорана в проколотой окрестности точки a. Слагаемое $\dfrac{c_{-1}}{z-a}$ входит в главную часть разложения f в ряд Лорана в проколотой окрестности точки a.

Если $a = \infty$, то интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U(\infty,\delta)} f(\zeta)d\zeta$$

равен коэффициенту c_1 при z^{-1}, и поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U(0,\delta)} f(\zeta)d\zeta = c_1,$$

где интеграл берется по окружности, лежащей в D, имеющей центр в нуле и ориентированной по ходу часовой стрелки. Эту формулу можно записать иначе, выполнив интегрирование по границе круга $U(0,R)$ достаточно большого радиуса. Имеем

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f = c_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U(0,R)} f(\zeta)d\zeta.$$

9.3. Вычисление вычета в простом полюсе. Пусть f имеет в точке a простой полюс.

Согласно определению разложение f в проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ в ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots, c_{-1} \neq 0.$$

Умножим обе части равенства на $z-a$ и перейдем к пределу при $z \to a$. Получим в пределе формулу

$$c_{-1} = \lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right]$$

для $\operatorname*{res}_{z=a} f$. Формула особенно удобна, если

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где φ и ψ голоморфны в точке a, $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$. Тогда

$$c_{-1} = \lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right] = \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Пример. Найдём вычет функции $f(z)=\dfrac{\cos z}{\sin z}$ в точке $a=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Легко видеть, что в $z=a$ функция f имеет полюс первого порядка, и поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=k\pi} f=\frac{\cos k\pi}{\cos k\pi}=1. \ \triangleleft$$

9.4. Вычисление вычета в полюсе порядка m. Пусть f имеет полюс порядка m, $m\geq 2$, в точке a. Разложение f в точке $a\in\mathbb{C}$ в ряд Лорана имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\ldots, \quad c_{-m}\neq 0.$$

Для устранения отрицательных степеней разности $z-a$ в правой части умножим обе части равенства на $(z-a)^m$. Получим

$$(z-a)^m f(z)=c_{-m}+\ldots+c_{-1}(z-a)^{m-1}+c_0(z-a)^{m+1}+\ldots .$$

Продифференцируем обе части $m-1$ раз, а затем перейдем к пределу при $z\to a$. Получим в пределе формулу

$$c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]$$

для вычисления вычета в полюсе m-го порядка.

Для вычисления вычета в существенно особой точке аналогичной формулы не существует, и надо обычно находить всю главную часть функции разложения в ряд Лорана в окрестности такой точки.

Разложение f в ряд Лорана в точке ∞, являющейся для f полюсом порядка m, $m\geq 1$, имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=1}^{m}c_{-n}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}, \quad c_{-m}\neq 0.$$

Подстановка $\zeta = \dfrac{1}{z}$ приводит к функции $\varphi(\zeta) = f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ с разложением в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $\zeta = 0$

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{\zeta^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n .$$

Для вычисления $\operatorname*{res}_{z\to\infty} f = -c_1$ умножим обе части равенства на ζ^m, продифференцируем $m+1$ раз и перейдем к пределу при $\zeta \to 0$. Получим после выполнения указанных действий формулу

$$c_1 = \frac{1}{(m+1)!} \lim_{\zeta\to 0} \frac{d^{m+1}}{d\zeta^{m+1}} \left[\frac{1}{\zeta^m} f\left\{ \frac{1}{\zeta} \right\} \right].$$

Пример. Вычислим $I = \displaystyle\int_{\partial U\left(2,\frac{1}{2}\right)} \frac{\zeta d\zeta}{(\zeta-1)(\zeta-2)^2}$.

Функция $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ в круге $U(2,1/2)$ с центром в точке $z = 2$ и радиуса $1/2$ имеет единственную особую точку – полюс порядка 2. Вторая изолированная особая точка $z = 1$ (простой полюс для f) находится вне этого круга. Согласно теореме Коши о вычетах $I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=2} f$. Пользуясь формулой для вычета относительно полюса, имеем $\operatorname*{res}_{z=2} f = \dfrac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 2} \dfrac{d}{dz} \left[\dfrac{(z-2)^2 z}{(z-1)(z-2)^2} \right] = \lim_{z\to 2} \dfrac{d}{dz} \dfrac{z}{(z-1)} = -1.$

Таким образом, $I = -2\pi i$. ◁

9.5. Полная сумма вычетов. ***Теорема 19*** (о полной сумме вычетов). *Если функция $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ голоморфна в $\mathbb{C}$ за исключением конечного множества точек $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1,...,s$, $s \in \mathbb{N}$, в которых f имеет изолированные особенности, то сумма вычетов f в точках $z_1, ..., z_s$ и вычета в бесконечности равна нулю, то есть*

$$\sum_{k=1}^{s} \operatorname*{res}_{z=z_k} f + \operatorname*{res}_{z=\infty} f = 0.$$

▷ Возьмем число $R>0$ настолько большое, чтобы точки $z_1,...,z_s$ принадлежали кругу $U(0,R)$. Согласно теореме Коши о вычетах интеграл от f по ориентированной границе круга $U(0,R)$ равен сумме вычетов в точках $z_1,...,z_s$, то есть

$$\int\limits_{\partial U(0,R)} f(\zeta)d\zeta = \sum_{k=1}^{s} \operatorname*{res}_{z=z_k} f\,.$$

Но этот же интеграл по определению вычета в бесконечности равен

$$\int\limits_{\partial U(0,R)} f(\zeta)d\zeta = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f.$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^{s} \operatorname*{res}_{z=z_k} f + \operatorname*{res}_{z=\infty} f = 0. \quad \triangleleft$$

Доказанная теорема позволяет во многих случаях при интегрировании функций существенно упростить вычисления.

Пример. Вычисление интеграла

$$I = \int\limits_{\partial U(0,4)} \frac{\zeta^4 d\zeta}{(\zeta-3)(\zeta^{10}-1)},$$

если использовать теорему Коши о вычетах, сводится к подсчету вычетов функции

$$f(z) = \frac{z^4}{(z-3)(z^{10}-1)}$$

в одиннадцати простых полюсах и затем к использованию формулы

$$I = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=3} f + \sum_{k=0}^{9} \operatorname*{res}_{z=z_k} f\right), \text{ где } z_k = e^{\frac{2\pi i}{10}k}.$$

По теореме 19 имеем $I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f$. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{1}{z^7}\frac{1}{\left(1-\frac{3}{z}\right)\left(1-\frac{1}{z^{10}}\right)},$$

показывающем, что в разложении $f(z)$ в бесконечности в ряд Лорана главная часть равна нулю, а правильная содержит степени $\frac{1}{z}$, начиная с седьмой степени. Поэтому $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} f = 0$ и $I = 0$. $\triangleleft$

9.6. Сумма порядков нулей и полюсов. Пусть функция f голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}$ и имеет в D полюсы в точках $z_1, ..., z_s$, $s \in \mathbb{N}$, соответственно порядка $m_1, ..., m_s$ и нули в точках $z_1^1, ..., z_q^1$, $q \in \mathbb{N}$, соответственно порядка $n_1, ..., n_q$. Между числами $P = m_1 + ... + m_s$, $N = n_1 + ... + n_q$ существует простая связь, выражаемая формулой, к выводу которой переходим.

Теорема 20. *Пусть функция f голоморфна в односвязной области D и непрерывна в $\bar{D}$, за исключением множества $V = \{z_1, ..., z_s\}$, $s \in \mathbb{N}$, точек $z_k \in D$, в которых f имеет полюсы соответственно порядка $m_1, ..., m_s$. Предположим, что D ограничена замкнутой жордановой кусочно-гладкой кривой и что функция f не принимает на ∂D нулевого значения. Если $W = \{z_1', ..., z_q'\}$, $q \in \mathbb{N}$, – множество всех нулей функции f в D и соответственно $n_1, .., n_q$ их кратности, то*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = N - P,$$

где $N = n_1 + ... + n_q$, $P = m_1 + ... + m_s$.

$\triangleright$ Функция $F(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ голоморфна в $\bar{D} \setminus (V \cup W)$ и имеет в точках множеств V, W изолированные особые точки. По теореме Коши о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} F(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^{s} \operatorname{res}\limits_{z=z_k} F + \sum_{k=1}^{q} \operatorname{res}\limits_{z=z_k'} F.$$

Вычислим вычеты. Согласно условию в точке z_k функция имеет полюс порядка m_k и поэтому в окрестности $U(z_k,\delta)$, $\delta>0$, представляется в виде

$$f(z)=\frac{\varphi_k(z)}{(z-z_k)^{m_k}},$$

где $\varphi_k(z)$, $\varphi_k(z_k)\neq 0$, – голоморфная функция в $U(z_k,\delta)$. В этой же окрестности $F(z)$ представляется в виде суммы

$$F(z)=-\frac{m_k}{z-z_k}+\frac{\varphi_k'(z)}{\varphi_k(z)},$$

показывающей, что главная часть разложения $F(z)$ в точке z_k в ряд Лорана равна $-\dfrac{m_k}{z-z_k}$. Следовательно, $\operatorname{res}\limits_{z=z_k} F=-m_k$.

В окрестности $U(z_k',\delta)$, $\delta>0$, функция f, имеющая в z_k' нуль порядка n_k, представляется в виде

$$f(z)=(z-z_k')^{n_k}\,\psi_k(z),$$

где $\psi_k(z)$, $\psi_k(z_k')\neq 0$, – голоморфная функция в $U(z_k',\delta)$. В этой же окрестности имеем формулу

$$F(z)=\frac{n_k}{z-z_k'}+\frac{\psi_k'(z)}{\psi_k(z)},$$

показывающую, что главной частью разложения $F(z)$ в точке z_k' в ряд Лорана является $\dfrac{n_k}{z-z_1'}$. Следовательно, $\operatorname{res}\limits_{z=z_k'} F=n_k$.

Объединяя результаты проведенных вычислений, приходим к утверждению теоремы. $\triangleleft$

Применим доказанную теорему к решению центрального вопроса алгебры многочленов.

Теорема 21 (основная теорема алгебры многочленов). *Многочлен*

$$P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0,\quad a_n\neq 0,\quad n\in\mathbb{N},$$

с комплексными коэффициентами $a_n,...,a_0$ *имеет на комплексной плоскости ровно* n *нулей.*

▷ Единственной особой точкой для $P_n(z)$ на $\overline{\mathbb{C}}$ является точка ∞. Она – полюс $P_n(z)$ порядка n. Поскольку $\lim\limits_{z\to\infty} P_n(z)=\infty$, то существует $R>0$ такое, что $\left|P_n\left(z\right)\right|>0$ во внешности круга $U\left(0,R\right)$. Другими словами, все нули многочлена $P_n(z)$ принадлежат $U\left(0,R\right)$. Согласно теореме 20 о числе нулей и полюсов

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U\left(0,R\right)}\frac{P_n'\left(\zeta\right)}{P_n\left(\zeta\right)}d\zeta=N,$$

где N – общее число нулей многочлена $P_n(z)$ в $U\left(0,R\right)$, а значит, и в $\mathbb{C}$. По определению вычета в бесконечности

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U\left(0,R\right)}\frac{P_n'\left(\zeta\right)}{P_n\left(\zeta\right)}d\zeta=-\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{P_n'}{P_n}.$$

Подсчитаем этот вычет. Напишем $P_n\left(z\right)=z^n\psi\left(z\right)$, где

$$\psi\left(z\right)=a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+...+\frac{a_0}{z^n},\quad a_n\neq 0,-$$

голоморфная функция в бесконечности. Так как

$$\frac{P_n'\left(z\right)}{P_n\left(z\right)}=\frac{n}{z}+\frac{\psi'\left(z\right)}{\psi\left(z\right)},$$

то, учитывая, что $z=\infty$ для $\dfrac{\psi'\left(z\right)}{\psi\left(z\right)}$ является нулем не ниже второго порядка, получаем $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty}\dfrac{P_n'}{P_n}=-n$. Значит, $N=n$. ◁

Отметим, что для вычисления вычета не обязательно находить все слагаемые в соответствующем ряде Лорана. Достаточно выделить тот его член, коэффициент которого равен вычету.

9.7. Использование вычетов для вычисления интегралов по замкнутой кривой или отрезку. Ограничимся рассмотрением в качестве образцов применения теоремы Коши о вычетах несколькими примерами.

1. Вычислим интеграл

$$I = \int_{\Gamma} \frac{\zeta d\zeta}{(\zeta-1)(\zeta-2)^2}$$

по кривой $\Gamma = \left\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - 2| = \frac{3}{2}\right\}$, проходимой против хода стрелки часов.

Распространим подынтегральную функцию с Γ на $\mathbb{C}$. Получим голоморфную в $\mathbb{C} \setminus \{1,2\}$ функцию

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$$

с простым полюсом в точке $z=1$ и полюсом порядка 2 в точке 2. Во внутренности окружности Γ лежат оба полюса. По теореме Коши о вычетах и пользуясь формулой для подсчета вычета в полюсе, имеем

$$I = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=1} f + \operatorname*{res}_{z=2} f\right) = 2\pi i\left[\lim_{z\to 1}\frac{z}{z-2} + \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)\right] =$$

$$= 2\pi i[-1-1] = -4\pi i.$$

2. Интеграл вида $I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$,

где $R(u,v)$ – рациональная функция переменных u, v, может быть вычислен по следующей методике. Образуем функцию

$$R_1(z) = \frac{1}{z} R\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right].$$

Если $R_1(z)$ имеет в круге $U(0,1)$ полюсы только в точках $z_1, ..., z_s$ и голоморфна на $\partial U(0,1)$, то, пользуясь формулами Эйлера и выполнив замену $\zeta = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, получим:

$$I = -i \int\limits_{\partial U(0,1)} R\left[\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \frac{1}{2i}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta} = -i \int\limits_{\partial U(0,1)} R_1(\zeta)\, d\zeta.$$

В соответствии с теоремой Коши о вычетах имеем $I = 2\pi \sum\limits_{k=1}^{s} \operatorname{res}\limits_{z=z_k} R_1$.

В частности, если $I(a) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta + a}$, $|a| > 1$, $\operatorname{Im} a = 0$, то в принятых выше обозначениях

$$R_1(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + a} = \frac{2}{z^2 + 2az + 1}.$$

Нулями знаменателя являются точка $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ из единичного круга и точка $z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$, принадлежащая внешности замыкания этого круга. Значит,

$$I(a) = 2\pi \operatorname*{res}_{z=z_1} R_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

9.8. Использование вычетов для вычисления несобственных интегралов.

Метод вычисления несобственных интегралов от действительных функций действительного переменного, основанный на применении теоремы Коши о вычетах, мы проиллюстрируем, обращаясь к типичным ситуациям.

Теорема 22. *Пусть функция f голоморфна в верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ за исключением конечного множества $V = \{z_1, ..., z_s\}$ точек $z_k \in \Pi^+$, $k = 1, ..., s$, и непрерывна в $\overline{\Pi}^+ \setminus V$. Если $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\in\overline{\Pi}^+}} [zf(z)] = 0$, то* $v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{s} \operatorname{res}\limits_{z=z_k} f$,

где интеграл понимаем в смысле главного значения (то есть по определению $v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx$).

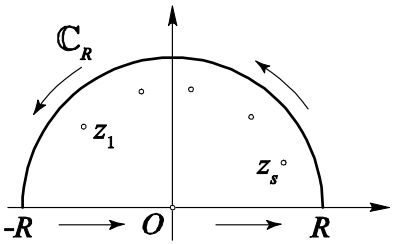


Рис. 8.

▷ Рассмотрим полукруг $D_R^+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$. Его граница состоит из отрезка $[-R, R]$ и круговой дуги C_R (рис. 8). Возьмем $R > R_0 = \max\limits_{k\le s}|z_k|$ и применим теорему Коши о вычетах. Имеем равенство

$$\int\limits_{\partial D_R^+} f(\zeta)d\zeta = 2\pi i\sum_{k=1}^{s}\operatorname*{res}_{z=z_k} f,$$

которое запишем в виде

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \int\limits_{C_R} f(\zeta)d\zeta = 2\pi i\sum_{k=1}^{s}\operatorname*{res}_{z=z_k} f.$$

Каждый из интегралов зависит от R. Покажем, что интеграл по C_R стремится при $R\to\infty$ к нулю.

Оценим сверху модуль интеграла от f, взятого по полуокружности C_R. В силу условия теоремы для числа $\varepsilon > 0$ существует число $R_1 > 0$ такое, что $\left|Re^{i\theta} f\left(Re^{i\theta}\right)\right| < \varepsilon/\pi$ при $R > R_1$ равномерно относительно θ, $0 \le \theta \le \pi$. Значит, при $R > \max\{R_0, R_1\}$

$$\left|\int\limits_{C_R} f(\zeta)d\zeta\right| = \left|\int\limits_{C_R} \zeta f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\right| \le \int\limits_{C_R} |\zeta f(\zeta)|\frac{d\zeta}{|\zeta|} < \frac{\varepsilon}{\pi}\cdot\frac{\pi R}{R} = \varepsilon$$

и согласно определению предела $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(\zeta)d\zeta = 0.$

Теперь легко видеть, что существует

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{s}\operatorname*{res}_{z=z_k} f. \quad \triangleleft$$

Пример. Вычислим интеграл $I_m = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{\left(x^2+1\right)^{m+1}}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, очевидно, сходящийся, поскольку он мажорируется сходящимся интегралом от $\dfrac{1}{x^{2(m+1)}}$. Распространим подынтегральную функцию с действительной оси на всю плоскость $\mathbb{C}$, полагая $f(z) = \dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^m}$. В Π^+ эта функция имеет единственную изолированную особую точку – полюс $z_1 = i$ порядка m. Поэтому

$$I_m = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} f = 2\pi i \frac{1}{m!} \lim_{z\to i} \frac{d^m}{dz^m} \frac{1}{\left(z+i\right)^{m+1}} = \frac{\pi(2m)!}{4^m \left(m!\right)^2}. \quad \triangleleft$$

Теорема 23. *Пусть функция f голоморфна в верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ за исключением конечного множества $V = \{z_1, ..., z_s\}$ точек $z_k \in \Pi^+$, $k = 1,...,s$, и непрерывна в $\overline{\Pi}^+ \setminus V$. Если $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\in\Pi^+}} f(z) = 0$ и $\alpha > 0$, то*

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{s} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left[f(z) e^{i\alpha z} \right],$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

$\triangleright$ Дословно повторяя начало доказательства предыдущей теоремы, получим

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x) e^{i\alpha x} dx + \int\limits_{C_R} f(\zeta) e^{i\alpha\zeta} d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{s} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left[f(z) e^{i\alpha z} \right].$$

По условию теоремы для числа $\varepsilon > 0$ найдется число $R > 0$ такое, что $\max\limits_{1\le k\le s} |z_k| < R$ и $|f(z)| < \dfrac{\alpha\varepsilon}{\pi}$, $|z| > R$. Проведем оценку сверху модуля второго интеграла. Имеем, полагая $\zeta = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$,

$$\left| \int\limits_{C_R} f(\zeta) e^{i\alpha\zeta} d\zeta \right| \le \int\limits_0^{\pi} \left| f(\zeta) e^{i\alpha\zeta} \right| Rd\theta \le \frac{2\alpha R\varepsilon}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin\theta} d\theta.$$

Так как $\sin\theta > \frac{2\theta}{\pi}$ при $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, то, продолжая оценку, после несложных вычислений получаем неравенство

$$\left| \int_{C_R} f(\zeta) e^{i\alpha\zeta} d\zeta \right| < \varepsilon\left(1 - e^{-\alpha R}\right) < \varepsilon,$$

указывающее, что

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(\zeta) e^{i\alpha\zeta} \zeta d\zeta = 0.$$

Но тогда

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x) e^{-i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{s} \operatorname{res}_{z=z_k} \left[f(z) e^{i\alpha z} \right],$$

и теорема доказана. ◁

Пример. Вычислим интеграл $I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x \sin \alpha x}{x^2 + 1} dx.$

Предварительно преобразуем запись интеграла, воспользовавшись формулой Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Имеем

$$I(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{Im} e^{i\alpha x}}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{i\alpha x}}{x^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{z e^{i\zeta z}}{z^2 + 1} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[2\pi i \lim_{z\to i} \frac{z e^{i\alpha z}}{z + i} \right] = \frac{\pi e^{-\alpha}}{2}. \; \triangleleft$$

9.9. Обращение голоморфной функции. Согласно теоремам 13 и 9 голоморфную в области $D \subset \mathbb{C}$ функцию $f(z)$ можно представить в окрестности точки $z \in \mathbb{C}$ степенным рядом $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где $\gamma_\rho = \partial U(z_0, \rho)$ – окружность с центром в точке z_0, имеющая достаточно малый радиус $\rho > 0$ (достаточно, чтобы $\overline{U(z_0, \rho)} \subset D$).

Предположим, что $c_1 = f'(z_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $U(z_0, r)$, $0 < r < \rho$, функция $f(z)$ однолистна, то есть $f(z_1) \neq f(z_2)$, если z_1, z_2 – любая пара различных точек из $U(z_0, r)$. В области $\Delta = f(U(z_0, r))$ w-плоскости лежит некоторый круг $V(w_0, d) = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < d\}$, $d > 0$, $w_0 = f(z_0)$, в котором функция $g(w)$, обратная к $f(z)$, голоморфна и представляется степенным рядом $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (w - w_0)^n$, где $b_0 = g(w_0) = z_0$, $b_n = \dfrac{g^{(n)}(w_0)}{n!}$. Из условия $g(f(z)) = z$ при $z \in g(V(w_0, d))$ следует равенство $g'(f(z)) f'(z) = 1$ и, в частности, $g'(f(z_0)) f'(z_0) = 1$. Поэтому $b_1 = \dfrac{1}{c_1} \neq 0$. Связь между коэффициентами $b_1, b_2, \ldots$ и $c_1, c_2, \ldots$ при $c_0 = b_0 = 0$ можно найти способом неопределенных коэффициентов, воспользовавшись равенством

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \right]^n = z - z_0$$

и сравнением коэффициентов при одинаковых степенях $z - z_0$ в левой и правой частях этого равенства. Такой способ приводит к необходимости решать бесконечную систему линейных уравнений относительно $b_1, b_2, b_3, \ldots$. Начальная часть этой системы имеет вид:

$$\begin{aligned}
&c_1 b_1 = 1, \\
&c_2 b_1 + c_1^2 b_2 = 0, \\
&c_3 b_1 + 2 c_1 c_2 b_2 + c_1^3 b_3 = 0, \\
&c_4 b_1 + \left(2 c_1 c_3 + c_2^2\right) b_2 + 3 c_1^2 c_2 b_3 + c_1^4 b_4 = 0.
\end{aligned}$$

Общее решение задачи о разложении функции $g(w)$ в степенной ряд по степеням $w - w_0$ было дано Жозефом Луи Лагранжем (1736–1813) в 1770 г.

Теорема 24 (формула Лагранжа). *Пусть функция* $w = f(z), f'(z_0) \neq 0$, *голоморфна и однолистна в окрестности точки* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Тогда в окрестности точки* $w_0 = f(z_0)$ *функция* $z = g(w)$, *обратная к* $f(z)$, *может быть представлена степенным рядом*

$$g(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \right)^n \right] (w - w_0)^n .$$

▷ При фиксированном $w \in V(w_0, d)$ функция

$$F(z) = \frac{zf'(z)}{f(z) - w}$$

голоморфна в круге $U(z_0, r)$ за исключением точки $z = g(w)$, в которой $F(z)$ имеет, очевидно, полюс первого порядка. По теореме 19 о вычетах интеграл

$$I(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U(z_0, r)} F(\zeta) d\zeta,$$

взятый по ориентированной границе круга $U(z_0, r)$, равен вычету функции $F(z)$ в точке $g(w)$, то есть

$$I(w) = \operatorname*{res}_{z = g(w)} F(z) = \left[\frac{zf'(z)}{\left(f(z) - w \right)'} \right]_{z = g(w)} = g(w).$$

Следовательно, в круге $V(w_0, d)$ функция $g(w)$ может быть представлена в виде

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U(z_0, r)} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta .$$

Разложим подынтегральную функцию в ряд по степеням $w - w_0$.

Имеем

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}=\frac{\zeta f'(\zeta)}{f'(\zeta)-w_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{w-w_0}{f(\zeta)-w_0}}.$$

Поскольку $w\in V(w_0,d)$ и $\zeta\in\partial U(z_0,r)$, то

$$\left|\frac{w-w_0}{f(\zeta)-w_0}\right|<q<1$$

и

$$\frac{1}{1-\dfrac{w-w_0}{f(\zeta)-w_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-w_0}{f(\zeta)-w_0}\right)^n.$$

Значит, $g(w)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial U(z_0,r)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta f'(\zeta)(w-w_0)^n}{\left(f(\zeta)-w_0\right)^{n+1}}d\zeta.$

Используя свойство равномерной сходимости подынтегрального ряда на окружности $U(z_0,r)$, можем ряд почленно проинтегрировать и получить для $g(w)$ представление в виде степенного ряда:

$$g(w)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(w-w_0)^n=z_0+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(w-w_0)^n,$$

где

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U(z_0,r)}\frac{\zeta f'(\zeta)}{\left(f(\zeta)-w_0\right)^{n+1}}d\zeta,\ n\in\mathbb{N}.$$

Преобразуем полученную формулу для b_n, пользуясь легко проверяемым равенством

$$\frac{d}{dz}\frac{z}{\left(f(z)-w_0\right)^n}=\frac{1}{\left(f(z)-w_0\right)^n}-\frac{nzf'(z)}{\left(f(z)-w_0\right)^{n+1}}.$$

Интеграл по окружности $\partial U(z_0,r)$ от функции в левой части этого равенства равен нулю. Поэтому

$$n\int_{\partial U(z_0,r)}\frac{\zeta f'(\zeta)}{\left(f(\zeta)-w_0\right)^{n+1}}d\zeta=\int_{\partial U(z_0,r)}\frac{d\zeta}{\left(f(\zeta)-w_0\right)^n},$$

и для коэффициента b_n получаем формулу

$$b_n = \frac{1}{2\pi i n} \int\limits_{\partial U(z_0,r)} \frac{d\zeta}{\left(f(\zeta) - w_0\right)^n}, n \in \mathbb{N}.$$

Функция

$$\frac{1}{\left(f(z) - f(z_0)\right)^n}$$

имеет в круге $U(z_0, r)$ единственную особую точку – полюс порядка n в центре круга. По теореме 13 о вычетах

$$b_n = \frac{1}{n} \operatorname{res}_{z=z_0} \frac{1}{\left(f(z) - f(z_0)\right)^n}.$$

Пользуясь формулой для вычета относительно полюса порядка n, имеем:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{1}{\left(f(z) - f(z_0)\right)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \right)^n,$$

и поэтому для b_n справедлива формула

$$b_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \right)^n. \triangleleft$$

Пример. Функция $w = f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. В точке $z = 1$ $f(z)$ имеет полюс второго порядка. В $U(0,1)$ функция однолистна и конформно отображает его на область $f(U(0,1))$, представляющую собой w-плоскость с исключенным лучом, выходящим из точки $w = \dfrac{1}{4}$ и лежащим на отрицательной части действительной оси. Разложение $f(z)$ по степеням z представляет собой ряд $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n z^n$, сходящийся в $U(0,1)$. Функция $g(w)$, обратная

к $f(z)$, двузначна в w-плоскости. Будем рассматривать однозначную ветвь $g(w)$ в $V\left(0,\frac{1}{4}\right)$, выделяемую условием $g(0)=0$.

Найдем разложение $g(w)$ по степеням w тремя способами.

Пусть $z=g(w)=w+b_2w^2+b_3w^3+b_4w^4+\ldots$ (учтено, что $f(0)=g(0)=0$, $f'(0)=g'(0)=1$). Условие $g\left(f(z)\right)=z$, $z\in U(0,1)$, представленное в виде подстановки ряда в ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}kz^k\right)^n=z,$$

приводит к системе линейных алгебраических уравнений для нахождения $b_2,b_3,\ldots$:

$$2+b_2=0,\ 3+4b_2+b_3=0,\ 4+10b_2+6b_3+b_4=0,\ \ldots.$$

Отсюда легко находим: $b_2=-2$, $b_3=5$, $b_4=-14$, … .

Второй способ основан на возможности явного представления функции $g(w)$ как решения квадратного уравнения

$$z=g(w)=\frac{1+2w-\sqrt{1+4w}}{2w}=\frac{\left(1-\sqrt{1+4w}\right)^2}{4w},$$

где однозначная ветвь квадратного корня выделяется условием $\sqrt{1}=1$ (другая ветвь удовлетворяет условию $\sqrt{1}=-1$). Разложим $g(w)$ в ряд по степеням w. Воспользуемся формулой бинома Ньютона. Получим:

$$g(w)=1+\frac{1}{2w}-\frac{1}{2w}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(4w)^n=-\frac{1}{2w}\sum_{n=2}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}4^nw^n.$$

После выполнения простых преобразований имеем

$$g(w)=-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}2^{2n+1}w^n=w-2w^2+5w^3-\ldots.$$

Теперь воспользуемся формулой Лагранжа. Поскольку $z_0 = 0$, $f(z_0) = 0$, то

$$\left(\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \right)^n = (1 - z)^{2n}$$

и

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (1 - z)^{2n} = (-1)^{n-1} 2n(2n-1)...(2n - (n-2))(1 - z)^{n+1}.$$

Согласно формуле Лагранжа

$$g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{n!(n+1)!} w^n.$$

Разложение $g(w)$ по степеням w получено.

Выражения, полученные для b_n в двух последних разложениях $g(w)$, хотя внешне различны, но согласно теореме 14 о единственности разложения в степенной ряд, представляют одно и то же число. В этом можно убедиться, показав непосредственным вычислением справедливость равенства

$$\binom{\frac{1}{2}}{n+1} \cdot 2^{2n+1} = \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{n!(n+1)!}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Имеем

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)...\left(-\frac{1}{2} - (n-1)\right) \frac{2^{2n+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Умножим обе части проверяемого равенства на $(-1)^{n-1} n!(n+1)!$. Получим

$$(-1)^{n-1} n! \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)...\left(-n + \frac{1}{2}\right) 2^{2n} = (2n)!.$$

Произведение в левой части формулы преобразуем и представим формулу в виде

$$2^n n! \left[1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)\right] = (2n)!,$$

или, что то же самое, в виде

$$\left[2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n\right]\left[1\cdot 3\cdot \ldots \cdot \left(2n-1\right)\right]=\left(2n\right)!.$$

Справедливость этой формулы очевидна. $\triangleleft$

Пример. Найдем разложение по степеням w функции $g(w)$, обратной функции $w=f(z)=\dfrac{z-1}{z^{\beta}}$, $\beta\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,-1\}$, в окрестности точки $z=1$. Согласно формуле Лагранжа

$$z=g(w)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\lim_{z\to 1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(z^{n\beta}\right)w^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{n\beta}{n-1}w^n.$$

Полученный результат применим для решения следующей задачи: разложить по степеням w тот корень x трехчленного уравнения $1-x+wx^{\beta}=0$, который при $w=0$ обращается в единицу. Для указанного корня имеем

$$z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{\beta n}{n-1}w^n=1+w+\beta w^2+\frac{3\beta^2-\beta}{2}w^3+\ldots. \ \triangleleft$$

9.10. Производящая функция для многочленов Лежандра. Многочлены Лежандра $P_n(x), n\in\mathbb{N}$, определяются формулой Родрига (1816 г.)

$$P_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

и имеют представление

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k\left(2n-2k\right)!}{k!\left(n-k\right)!\left(n-2k\right)!}x^{n-2k},$$

где $\left[a\right]$ – целая часть числа a. Отсюда

$$P_n(-1)=(-1)^n,\ P_{2n+1}(0)=0,\ P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{\left(2n\right)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2},\ P_n(1)=1.$$

Приведем первые 10 многочленов Лежандра:

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),\ P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right),$$

$$P_4\left(x\right)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right),\ P_5\left(x\right)=\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right),$$

$$P_6(x)=\frac{1}{16}\left(231x^6-315x^4+105x^2-5\right),$$

$$P_7(x)=\frac{1}{16}\left(429x^7-693x^5+315x^3-35x\right),$$

$$P_8(x)=\frac{1}{128}\left(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35\right),$$

$$P_9(x)=\frac{1}{128}\left(12155x^9-25740x^7+18018x^5-4620x^3+315x\right).$$

Теорема 25. *Коэффициентами разложения функции*

$$F(w)=\frac{1}{\sqrt{1-2xw+w^2}}$$

в ряд по степеням w *являются полиномы* $P_n(x)$*, то есть*

$$F(w)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)w^n,\ P_0(x)=1.$$

▷ Функция

$$w=f(z)=2\frac{z-x}{x^2-1}$$

комплексного переменного z (для неё x – действительный параметр) имеет, очевидно, простые полюсы в точках $z=-1$, $z=1$ и простой нуль в точке $z=x$. Обратная функция

$$z=g(w)=\frac{1}{w}\left(1-\sqrt{1-2xw+w^2}\right)$$

при $x\neq\pm1$ двузначна. Выделим её однозначную ветвь условием $g(0)=1$. Согласно теореме 24

$$z=g(w)=x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n w^n,$$

где $$b_n=\frac{1}{n!}\lim_{z\to x}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{z^2-1}{2}\right)^n=\frac{1}{n!2^n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n.$$

Продифференцировав по x равенство

$$\frac{1}{w}\left(1-\sqrt{1-2xw+w^2}\right)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!2^n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n w^n,$$

находим, что

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xw+w^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) w^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) w^n. \triangleleft$$

Функция в левой части этой формулы голоморфна в круге $U(0,r)$, где r – расстояние от точки $w=0$ до ближайшего к ней нуля функции $1-2xw+w^2$. В $U(0,r)$ функция $\left(1-2xw+w^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ представлена разложением в ряд по степеням w, коэффициентами которого являются многочлены Лежандра. Поэтому её называют *производящей* функцией для многочленов Лежандра.

Пример. Пусть A – точка массы 1, находящаяся на расстоянии a от начала координат O. Потенциал этой массы, вычисленный в точке M, находящейся на расстоянии r от O, дается формулой

$$V(M) = \frac{1}{|AM|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\alpha}},$$

где α – угол между отрезками OA и OM. Положим $x=\cos\alpha$, $u=\frac{a}{r}$. Тогда

$$V(M) = \frac{1}{r\sqrt{1-2xu+u^2}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n.$$

Это разложение сходится при $x\in[-1,1]$, если $r>a$. В случае $r<a$

$$V(M) = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\left(\frac{r}{a}\right)^n. \triangleleft$$

З а д а ч и

1. Определить тип точки $z=0$ для следующих функций:

а) $\sin\frac{1}{z}$; б) $\frac{z+3z^3}{\ln(1-2z)}$; в) $\exp\left(\frac{1}{z^2-z}\right)$;

г) $\dfrac{e^z}{\sin z - z + \dfrac{z^3}{6}}$; д) $\dfrac{1}{(z-1)\operatorname{tg} z}$.

2. Найти множества точек $z \in \overline{\mathbb{C}}$, в которых следующие функции не голоморфны:

а) $\dfrac{1}{z^3+1}$; б) $\dfrac{1}{z^2}e^{\frac{i}{z}}$; в) $\dfrac{z^2}{\cos z - 1}$; г) $\operatorname{tg}\dfrac{1}{z}$; д) $\dfrac{z^2}{\cos z - 1}$;

е) $z\cos\dfrac{1}{z} - z$; ж) $\dfrac{1}{\sin z} - \dfrac{1}{z}$.

3. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ – существенно особая точка для $f(z)$. Указать тип точки z_0 для функции $g(z) = \dfrac{1}{f(z)\left[f(z)-1\right]}$.

4. Разложить функцию $f(z) = \dfrac{1+z}{z(z-1)}$ в ряд Лорана в следующих областях: а) $U(0,1)$, б) $U(\infty,1)$.

5. Доказать, что целая функция $w = f(z)$, не принимающая значений из круга $U(w_0,\delta)$, $\delta > 0$, постоянна. (Указание. Воспользоваться теоремой Лиувилля).

6. Вычислить следующие интегралы:

а) $\int\limits_{\partial U(0,20)} \operatorname{ctg} z\,dz$; б) $\int\limits_{\partial U(3,3)} \dfrac{e^{2z}}{\left(z^2-1\right)\left(z^2-4\right)}dz$;

в) $\int\limits_{\partial U(0,1)} \dfrac{\sin^3 z}{z^3}dz$; г) $\int\limits_{\partial U(0,5)} \dfrac{z^2}{\sin z}dz$; д) $\int\limits_{\partial U(0,2)} \dfrac{1}{\sin^2 z}dz$;

е) $\int\limits_{\partial U(-2,1)} \dfrac{e^{2z}}{\left(2z+3\right)^2 z^2}dz$.

7. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{\partial U(0,2)} \dfrac{\cos z}{z^3}$.

Ответ: $I = -\pi i$.

8. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{\partial U(2i,2)} \dfrac{dz}{e^z + 1}$.

Ответ: $I = -1$.

9. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{\partial U(0,2)} (2z-1)\cos\dfrac{z}{z-1}dz$.

Ответ: $I = -2\pi i\left(\cos 1 + i\sin 1\right)$.

10. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{\partial U(0,4)} \dfrac{1}{z-2} e^{\frac{1}{z-1}} dz$.

Ответ: $I = 2\pi i$.

11. Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^\infty \dfrac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx,\ 0 < \alpha < 1$.

Ответ: $I = \dfrac{\pi}{\sin \alpha\pi}$.

12. Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos bx\, dx,\ \alpha > 0$. (Указание. Рассмотреть функцию $f(z) = e^{-az^2}$ и прямоугольник с вершинами $z_1 = -R$, $z_2 = -R + \dfrac{b}{2a}i$, $z_3 = R + \dfrac{b}{2a}i$, $z_4 = R$, $(R > 0)$. Применить интегральную теорему Коши).

Ответ: $I = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{4}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$.

13. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\cos(2\lambda\alpha x)dx,\ \lambda > 0, \alpha > 0$. (Указание. Применить интегральную теорему Коши к функции $f(z) = e^{-\lambda x^2}$, взяв в качестве пути интегрирования замкнутую жорданову кусочно-гладкую кривую, ограничивающую прямоугольник с вершинами $z_1 = -R$, $z_2 = R$, $z_3 = R + i\alpha$, $z_4 = -\mathrm{Re}^{i\alpha}$. Перейти к пределу при $R \to \infty$).

Ответ: $I = \sqrt{\pi} e^{-\lambda\alpha^2}$.

14. Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. (Указание. Применить интегральную теорему Коши к функции $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$, взяв в качестве пути интегрирования границу полукольца $K(0,r,R)\bigcap\Pi^{+}$, то есть кривую, составленную из отрезка $[-R,-r]$, дуги окружности $U(0,r)$, отрезка $[r,R]$ и дуги окружности $U(0,R)$. Перейти к пределу при $r\to 0$ и $R\to\infty$).

Ответ: $I=\frac{\pi}{2}$.

15. Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx,\ m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N},\ m<n$.

Ответ: $I=\frac{\pi}{2n\sin^2\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}$.

16. Вычислить интегралы: $I_1=\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos\mu x}{a^2+x^2}dx$; $I_2=\int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin\mu x}{a^2+x^2}dx$.

Ответ: $I_1=\frac{\pi e^{-\mu a}}{2a}$; $I_2=\frac{\pi e^{-\mu a}}{4\mu a}$.

17. Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}dx,\ \alpha\ge 0,\beta\ge 0$.

Ответ: $I=\frac{\pi}{2}(\beta-\alpha)$.

18. Разложить в степенной ряд или в ряд Лорана следующие функции:

а) $\frac{1}{z^3-1},\ z_0=1$; б) $z^4\sin\frac{1}{z}$; в) $\frac{ze^z}{z-1},\ z_0=1$; г) $4\sin^2 z+\cos\frac{1}{z},\ z_0=0$;

д) $\frac{z}{z^2+2z+2},\ z_0=0$; е) $z\sin\frac{1}{z-1},\ z_0=1$; ж) $z\cos\frac{1}{2z+1},\ z_0=-\frac{1}{2}$.

19. Пусть $p_1(z)$, $p_2(z)$ – многочлены соответственно степеней n_1, n_2. Какую особенность в бесконечности имеют следующие функции:

$$\text{а) } p_1(z)+p_2(z)\text{; б) } p_1(z)p_2(z)\text{; в) } \frac{p_1(z)}{p_2(z)}\text{;}$$

$$\text{г) } p_1(z)\exp\left(\frac{1}{p_2(z)}\right)\text{; д) } \frac{1}{p_1(z)}+\frac{1}{p_2(z)}\text{?}$$

20. Найти:

$$\text{а) } \operatorname*{res}_{z=0}\sin\frac{1}{z}\text{; б) } \operatorname*{res}_{z=0}\frac{\cos z}{z^3}\text{; в) } \operatorname*{res}_{z=1}\cos\frac{1}{z-1}\text{;}$$

$$\text{г) } \operatorname*{res}_{z=\infty}\cos\frac{1}{1-z}\text{; д) } \operatorname*{res}_{z=\infty}e^{\frac{1}{z}}\text{.}$$

Глава 5

ЦЕЛЫЕ И МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

В этой главе известные из курса алгебры результаты о разложении многочлена на множители получают развитие и распространение на целые функции, то есть на функции, голоморфные на $\mathbb{C}$. Если для целых функций с конечным числом нулей результаты близки к тем, которые известны для многочленов, то для целых функций с бесконечным множеством нулей для записи результатов требуются бесконечные произведения, составленные из первичных множителей Вейерштрасса. Аналогичная ситуация складывается для класса мероморфных на $\mathbb{C}$ функций, то есть для функций, голоморфных на $\mathbb{C}$, за исключением непустого множества полюсов. Мероморфная функция с конечным числом полюсов представляется в виде суммы простых дробей. Если же число полюсов бесконечно, то функция представляется рядом, каждое слагаемое которого определенным образом связано с соответствующим полюсом. Между мероморфными и целыми функциями существует связь типа известной связи рациональных функций с многочленами.

§ 1. РАЗЛОЖЕНИЕ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ НА ПЕРВИЧНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

1.1. Целая функция с полюсом на бесконечности. Отличная от постоянной целая функция имеет на бесконечности или полюс, или существенно особую точку.

Теорема 1. *Целая функция $f(z)$ с полюсом порядка n, $n \in \mathbb{N}$, в точке $z = \infty$ является многочленом степени n.*

▷ Согласно условию теоремы разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности бесконечности имеет вид

$$f(z) = c_n z^n + \ldots + c_1 z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \ldots, \; c_n \neq 0.$$

Функция

$$F(z)=f(z)-\left(c_n z^n+\ldots+c_1 z\right),$$

получающаяся вычитанием из $f(z)$ её главной части в бесконечности, голоморфна в $\mathbb{C}$ и ограничена. Согласно теореме Лиувилля $F(z)=c_0\in\mathbb{C}$ и, следовательно,

$$f(z)=c_n z^n+\ldots+c_1 z+c_0,\ c_n\neq 0.\triangleleft$$

Многочлен

$$P_n(z)=c_n z^n+c_{n-1}z^{n-1}+\ldots+c_1 z+c_0,\ c_n\neq 0,\ n\in\mathbb{N},$$

с коэффициентами из поля $\mathbb{C}$ имеет n нулей (с учетом их кратности). Пронумеруем нули многочлена $P_n(z)$, отличные от $z=0$, в порядке возрастания их модулей, повторяя при нумерации каждый нуль столько раз, какова его кратность. При равенстве модулей нулей многочлена P_n нули нумеруются в произвольном порядке, без учета их положения на линии постоянного модуля. Получим конечную последовательность $a_1,a_2,\ldots,a_{n-m}$, где $m\geq 0$ – кратность нуля многочлена $P_n(z)$ в точке $z=0$. В этих обозначениях многочлен $P_n(z)$ можно представить в виде произведения линейных множителей

$$P_n(z)=cz^n\left(1-\frac{z}{a_1}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{a_{n-m}}\right)=cz^m\prod_{k=1}^{n-m}\left(1-\frac{z}{a_k}\right),$$

где c – постоянная. Эта же формула дает решение задачи о нахождении многочлена с заданным множеством нулей (с точностью до постоянного отличного от нуля множителя).

1.2. Целая функция с существенно особой точкой на бесконечности. Такую функцию $f(z)$ называют *целой трансцендентной* функцией. Её разложение в ряд Лорана в проколотой окрестности бесконечности имеет вид

$$f(z)=\ldots+c_m z^m+\ldots+c_1 z+c_0=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n,$$

причем в последовательности $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеется бесконечно много элементов, отличных от нуля.

Как показывают примеры функций e^z, $P_n(z)e^z$, $\sin z$, целая трансцендентная функция может не иметь нулей, иметь их конечное или бесконечное множество.

Теорема 2. *Для того чтобы целая трансцендентная функция* $f(z)$ *не имела нулей, необходимо и достаточно, чтобы существовала целая функция* $g(z)$ *такая, что*

$$f(z) = e^{g(z)}.$$

▷ Достаточность. Очевидно.

Необходимость. Функция $F(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ голоморфна в $\mathbb{C}$, поскольку она равна отношению двух целых функций и знаменатель не обращается в нуль. Отсюда согласно теореме 10 гл. 4 следует, что функция

$$g(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \ln f(z_0) = \ln f(z)$$

целая. Это означает, что $f(z) = e^{g(z)}$. ◁

Теорема 3. *Пусть* $f(z)$ *– целая трансцендентная функция, принимающая значение нуль только в попарно различных точках* $a_0 = 0,\ a_1, ..., a_s$. *Пусть* $m_0, m_1, ..., m_s$ *– кратности соответствующих нулей. Тогда*

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \left(1 - \frac{z}{a_1}\right)^{m_1} ... \left(1 - \frac{z}{a_s}\right)^{m_s},$$

где $g(z)$ *– целая функция.*

▷ Функция

$$F(z) = \frac{f(z)}{z^m \left(1 - \frac{z}{a_1}\right)^{m_1} ... \left(1 - \frac{z}{a_s}\right)^{m_s}},$$

голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \{0, a_1, ..., a_s\}$, имеет в точках $0, a_1, ..., a_s$ устранимые особенности. Доопределив $F(z)$ в этих точках по непрерывности, получаем голоморфную в $\mathbb{C}$ функцию без нулей. В силу пре-

дыдущей теоремы $F(z)=e^{g(z)}$, где $g(z)$ – целая функция. Теорема доказана. $\triangleleft$

Существенно сложнее получается разложение на множители целых трансцендентных функций с бесконечным множеством нулей. К рассмотрению этого случая переходим, предварительно обратившись к доказательству теоремы, играющей фундаментальную роль в теории комплексных функций комплексного переменного и, в частности, применяемой в последующих доказательствах.

1.3. Свойство единственности голоморфной функции. ***Теорема 4*** (принцип единственности). *Пусть функция f голоморфна в области $D\subset\mathbb{C}$ и обращается в нуль на бесконечном множестве $E\subset D$, имеющем предельную точку в D. Тогда $f=0$ в D.*

$\triangleright$ Пусть z_0 – предельная точка множества $E\subset D$, лежащая в D. Тогда в силу непрерывности функции f в D имеем $f(z_0)=0$. По теореме 13 гл. 4 в $U(z_0,\delta_1)$, $0<\delta_1=dist\left(z_0,\mathrm{fr}\,D\right)$ функцию $f(z)$ можно представить разложением в ряд по неотрицательным степеням разности $z-z_0$. Предположим, что среди коэффициентов этого ряда хотя бы один, пусть c_m, отличен от нуля, а коэффициенты $c_0,c_1,...,c_{m-1}$ равны нулю. Тогда

$$f(z)=c_m\left(z-z_0\right)^m+c_{m+1}\left(z-z_0\right)^{m+1}+...=\left(z-z_0\right)^m\varphi\left(z\right),$$

где

$$\varphi\left(z\right)=c_m+c_{m+1}\left(z-z_0\right)+...,\ c_m\neq 0-$$

голоморфная в $U(z_0,\delta_1)$ функция, не обращающаяся в нуль при $z=z_0$. Поскольку φ непрерывна в точке $z_0\in D$, то существует окрестность $U(z_0,\delta_2)$, $\delta_2>0$, в которой $\varphi\left(z\right)\neq 0$. Тогда в $U(z_0,\delta)$, $\delta=\min\left(\delta_1,\delta_2\right)$, функция f обращается в нуль только в точке z_0, что противоречит определению z_0 как предельной точки множества E, на котором f равна нулю. Таким образом, все коэффициенты разложения f в ряд Тейлора в $U(z_0,\delta_1)$ равны нулю и, следовательно, $f=0$ в $U(z_0,\delta_1)$.

Пусть z^* – любая фиксированная точка области D. Соединим z_0 с z^* простой жордановой кусочно-гладкой кривой Q, лежащей в D. Пусть $d = dist\left(Q, \mathrm{fr}\, D\right)$. Очевидно $d > 0$. Возьмем число $\rho \in \left(0, d\right)$ и рассмотрим круг $U_s = U\left(z_s, \rho\right)$ с центром в точке $z_s \in Q$, $(s = 0,1,...,n)$, $n \in \mathbb{N}$, с радиусом ρ. Точки $z_1, z_2, ..., z_n$ выберем так, чтобы $z_{s+1} \in U_s$ $\left(s = 0,1,...,n-1\right)$, а точка z^* принадлежала бы кругу U_s. Покажем, что $f = 0$ для любого s $\left(s = 1,...,n\right)$. При $s = 0$ утверждение доказано, поскольку $U(z_0, \rho) \subset U\left(z_0, \delta_1\right)$. Предположим, что $f = 0$ в круге $U_s \left(s \le n-1\right)$. Центр z_{s+1} круга U_{s+1} содержится в U_s и, следовательно, является предельной точкой для бесконечного множества, на котором $f = 0$; согласно доказанному выше частному случаю теоремы, следует, что $f = 0$ в U_{s+1}. Итак, $f = 0$ в U_s, в частности, $f(z^*) = 0$. $\triangleleft$

Следствие. Если две голоморфные в области $D \subset \mathbb{C}$ функции f и g совпадают на бесконечном множестве $E \subset D$ (то есть $f(z) = g(z)$, $z \in E$) и E имеет предельную точку в D, то $f = g$ в D.

Действительно, функция $F = f - g$ удовлетворяет в D условиям теоремы и поэтому $F = 0$ в D.

1.4. Бесконечные произведения. Бесконечное произведение с комплексными членами $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + c_n\right)$ называется *сходящимся*, если все множители $1 + c_n \ne 0$, $n \in \mathbb{N}$, и частичные произведения $\prod_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + c_k\right)$ имеют предел $\prod = \lim\limits_{n\to\infty}\prod_n \ne 0$. Число $\prod$ называют величиной произведения $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + c_n\right)$.

Так как $1+c_n=\dfrac{\prod_n}{\prod_{n-1}}$, то условие $c_n\to 0$ при $n\to\infty$ является необходимым для сходимости произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+c_n)$.

Для сходимости произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+c_n)$ необходима и достаточна сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+c_n)$ при надлежащем выборе логарифма.

Бесконечное произведение, множителями которого являются функции, голоморфные на множестве M, называют *сходящимся* на этом множестве, если среди множителей есть лишь конечное число обращающихся на M в нуль и после вычеркивания таких множителей произведение оказывается сходящимся в каждой точке множества M.

1.5. Последовательность Вейерштрасса. Пусть f – целая трансцендентная функция с бесконечным множеством Z_f нулей. Множество Z_f не может иметь предельную точку в $\mathbb{C}$, поскольку наличие такой точки в силу принципа единственности означало бы, что $f=0$ в $\mathbb{C}$. Легко видеть, что Z_f счетно, так как в каждом круге $\overline{U(0,r)}$, $r>0$, содержится конечное число нулей функции f.

Перенумеруем нули функции f, отличные от $z=0$, в порядке возрастания модулей, повторяя при нумерации каждый нуль столько раз, какова его кратность. При равенстве модулей нулей функции f нули нумеруются в произвольном порядке, без учета их взаимного расположения на линии постоянного модуля. Получим последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ нулей функции f, обладающую свойствами: $0<|a_k|\le|a_{k+1}|$, $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\infty$.

Числовую последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $a_k\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, удовлетворяющую условиям: $|a_k|\le|a_{k+1}|$, $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\infty$, назовем *последовательностью Вейерштрасса,* или, короче, *W-последовательностью.*

Пример. Для функции $\dfrac{\sin z}{z}$ последовательностью Вейерштрасса является $\{\pi,-\pi,2\pi,-2\pi,3\pi,-3\pi,...\}$. ◁

1.6. Первичные множители Вейерштрасса. ***Лемма 1.*** *Если* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– W-последовательность, то существует такая последовательность* $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *положительных чисел, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{z}{a_k}\right|^{p_k}=\left|\frac{z}{a_1}\right|^{p_1}+\left|\frac{z}{a_2}\right|^{p_2}+...$$

сходится при $z\in\mathbb{C}$.

▷ Достаточно привести пример последовательности $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ такой, что указанный в лемме ряд сходится для $x\in(0,\infty)$. Возьмем $p_k=k$. Фиксируем $x\in(0,\infty)$, и пусть ε, $0<\varepsilon<1$, – произвольное число. Существует такое число $N\in\mathbb{N}$, что $|a_k|>2x$ при $k>N$. Пусть $N_1=\max\left(N,\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right):\ln 2\right)$. Тогда сумма всех членов ряда, начиная с a_{N_1+1}, меньше ε. Действительно,

$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty}\left|\frac{z}{a_k}\right|^{k}\le\sum_{k=N_1+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{N_1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{N_1}<\varepsilon.$$

Значит, ряд сходится. ◁

Пример. Множество $\{k\pi\}$, $k\in\mathbb{Z}$, нулей функции $\sin z$ образует *W*-последовательность $\{\pi,-\pi,2\pi,-2\pi,3\pi,-3\pi,...\}$. Для неё в качестве последовательности $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию леммы, можно взять стационарную последовательность с общим членом $p_k=2$, поскольку ряд

$$\left(\frac{x}{\pi}\right)^2+\left(\frac{x}{\pi}\right)^2+\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+...,$$

рассматриваемый в лемме, сходится при $x\in(0,\infty)$. ◁

Легко видеть, что произведение биномов $\left(1-z/a_k\right)$, участвующих в разложении многочлена на множители, при увеличении их числа, вообще говоря, не сходится к голоморфной функции. Вейерштрасс предложил для записи разложения целой трансцендентной функции на множители – в случае бесконечного множества нулей функции – заменить биномы функциями

$$W\left(\xi,0\right)=1-\xi, W\left(\xi,p\right)=\left(1-\xi\right)e^{\xi+\frac{\xi^2}{2}+\ldots+\frac{\xi^p}{p}}, \left|\xi\right|<1,\ p\in\mathbb{N},$$

получившими название *первичные множители Вейерштрасса*.

Лемма 2. *Пусть* $\left|\xi\right|\le q<1$. *Тогда*

$$\left|\ln W\left(\xi,p\right)\right|<\frac{1}{1-q}\left|\xi\right|^{p+1}.$$

▷ Пользуясь разложением в степенной ряд функции $\ln\left(1-\xi\right)$, $\ln 1=0$, в круге $U(0,1)$, получаем

$$\ln W\left(\xi,p\right)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi^k}{k}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\xi^k}{k}=-\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{\xi^k}{k},$$

откуда при $\left|\xi\right|\le q<1$ имеем

$$\left|\ln W\left(\xi,p\right)\right|\le\left|\xi\right|^{p+1}\sum_{k=p+1}^{\infty}\left|\xi\right|^{k-p-1}\le\frac{1}{1-q}\left|\xi\right|^{p+1}.\ \triangleleft$$

1.7. Существование целой функции с бесконечным множеством нулей.

Теорема 5 (Вейерштрасс). *Какова бы ни была W- последовательность* $\left\{a_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, *существует целая трансцендентная функция* f, *имеющая нули во всех точках последовательности* $\left\{a_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ *и только в них* (при этом порядок нуля в точке $z=a_{k_0}$ таков, сколько членов, равных a_{k_0}, имеет данная последовательность).

▷ Пусть $E\subset\mathbb{C}$ – замкнутое ограниченное множество и число $R>0$ таково, что $E\subset\overline{U\left(0,R\right)}$.

В соответствии с условиями теоремы и леммой 1 существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что $|a_k| > 2R$ при $k > N$ и существует такая последовательность $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел p_k, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{p_k}$ сходится.

Рассмотрим последовательность

$$G_1(z) = W\left(\frac{z}{a_1}, p_1 - 1\right),$$

$$G_2(z) = W\left(\frac{z}{a_1}, p_1 - 1\right) W\left(\frac{z}{a_2}, p_2 - 1\right),$$

$$G_3(z) = W\left(\frac{z}{a_1}, p_1 - 1\right) W\left(\frac{z}{a_2}, p_2 - 1\right) W\left(\frac{z}{a_3}, p_3 - 1\right),$$

.....

голоморфных функций

$$G_n(z) = \prod_{k=1}^{n} W\left(\frac{z}{a_k}, p_k - 1\right),$$

где $W(\xi, p)$ – первичные множители Вейерштрасса.

Пусть точки $a_1, ..., a_{N_0}$ принадлежат кругу $U(0,R)$, а точки $a_{N_0+1}, a_{N_0+2}, ...$ – внешние для $U(0,R)$. Тогда все $G_n(z)$, при $n \geq N_0$, обращаются в нуль в точках $a_1, ..., a_{N_0}$ и отличны от нуля в остальных точках круга $U(0,R)$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(a_k) = 0$ для $a_k \in U(0,R)$.

Докажем, что функциональная последовательность $\{G_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится в $\overline{U(0,R)}$. Представим функцию $G_n(z)$ при $n > N$ в виде $G_n(z) = G_N(z) e^{\varphi_n(z)}$, где

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=N+1}^{n} \ln W\left(\frac{z}{a_k}, p_k - 1\right),$$

и, следовательно, $e^{\varphi_n(z)}$ – голоморфная функция, не имеющая нулей в $\overline{U(0,R)}$. Из оценок

$$\left|\varphi_n(z)\right| \le \sum_{k=N+1}^{n} \left|\ln W\left(\frac{z}{a_k}, p_k - 1\right)\right| \le 2 \sum_{k=N+1}^{n} \left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{p_k},$$

получаемых с использованием леммы 2 при $\delta = \frac{1}{2}$, достаточного признака Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов и голоморфности функции e^z в $\mathbb{C}$ следует равномерная сходимость $\left\{\varphi_n(z)\right\}_{n=1}^{\infty}$ в $\overline{U(0,R)}$ и, следовательно, на E к голоморфной функции. Голоморфную на $\overline{U(0,R)}$ функцию

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} W\left(\frac{z}{a_k}, p_k - 1\right)$$

обозначим $F(z)$. В силу произвольности R функция F голоморфна в $\mathbb{C}$ и имеет нули в точках a_k, $k \in \mathbb{N}$, и только в них. ◁

1.8. Разложение целой функции на первичные множители Вейерштрасса.

Теорема 6 (Вейерштрасс). *Любую целую трансцендентную функцию f с бесконечным множеством нулей можно представить в виде*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{z}{a_k}, p_k - 1\right),$$

$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ – порядок нуля функции f в точке $z = 0$; $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ – W-последовательность, составленная из всех нулей функции f в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, занумерованных так, что $|a_k| \le |a_{k+1}|$, $k \in \mathbb{N}$, g – некоторая целая функция; положительные числа выбраны так, чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{z}{a_k}\right|^{p_k}$$

сходился при $z \in \mathbb{C}$.

▷ Для целой трансцендентной функции f образуем W-последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ нулей этой функции. Используя теорему 6, построим функцию

$$f_0(z)=\prod_{k=1}^{\infty}W\left(\frac{z}{a_k},p_k-1\right).$$

Пусть

$$\psi(z)=\frac{f(z)}{z^m f_0(z)},$$

где m – кратность нуля функции f в точке $z=0$. Функция ψ голоморфна в $\mathbb{C}$, кроме точек $0,a_1,a_2,\ldots$, в которых она имеет устранимые особенности. Доопределив ψ в этих точках по непрерывности, получим целую функцию без нулей в $\mathbb{C}$. Поэтому её можно представить в виде $\psi=e^{g(z)}$, где g – некоторая целая функция. В итоге имеем

$$f(z)=z^m e^{g(z)}f_0(z).\ \triangleleft$$

В представлении функции $f(z)$, указанном в теореме 7, последовательность чисел p_k определена неоднозначно, а значит, неоднозначно определена и функция $g(z)$.

1.9. Каноническое произведение. Представление функции $f(z)$, данное в теореме 7, значительно упрощается, если W-последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ подчиняется следующему дополнительному условию: ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^{\lambda}}$ сходится при некотором положительном λ. Обозначим в этом случае через p наименьшее целое число, при котором ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^{p+1}}$ сходится. Очевидно, $0\le p<\lambda$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{z}{a_k}\right|^{p+1}$ будет равномерно сходящимся на замкнутом ограниченном множестве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Равномерно сходящееся бесконечное произведение

$$\prod(z)=\prod_{k=1}^{\infty}W\left(\frac{z}{a_k},p\right)$$

называют *каноническим* произведением, а число p – *родом* канонического произведения.

В рассматриваемом случае в представлении

$$f(z)=z^m e^{g(z)}\prod_{k=1}^{\infty}W\left(\frac{z}{a_k},p_k-1\right)$$

бесконечное произведение обычно выбирают в форме канонического произведения. При этом функция $g(z)$ определяется однозначно.

Если $g(z)$ - многочлен, то $f(z)$ называется целой функцией *конечного рода*. Если $g(z)$ – не многочлен, то род функции считается бесконечным.

1.10. Разложение $\sin z$ **на множители.** В точке $z=0$ синус имеет нуль первого порядка, а остальные нули совпадают с нулями функции $q(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ и образуют W-последовательность $\{\pi,-\pi,2\pi,-2\pi,...\}$. В первичных множителях $W\left(\dfrac{z}{a_k},p_k-1\right)$ можно взять $p_k=2$, поскольку ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{k\pi}\right)^2$ сходится. Согласно теореме 7 и пользуясь каноническим произведением, имеем

$$q(z)=e^{g(z)}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}W\left(\frac{z}{k\pi},1\right)W\left(-\frac{z}{k\pi},1\right)=$$

$$=e^{g(z)}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{k\pi}\right)e^{\frac{z}{k\pi}}\left(1+\frac{z}{k\pi}\right)e^{-\frac{z}{k\pi}}=e^{g(z)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Из равенства $q(0)=1$ следует, что $g(0)=0$. Функция g будет определена позднее: в п. 3.4 будет доказано, что $g=0$ в $\mathbb{C}$

и, следовательно, разложение $\sin z$ на множители примет окончательный вид

$$\sin z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) = z\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{z}{k\pi}\right)e^{\frac{z}{k\pi}},$$

где штрих у знака произведения указывает на равенство единице множителя при $k=0$. Каноническое произведение для $\sin z$ имеет род 1.

Укажем некоторые следствия формулы

$$\sin z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right). \qquad (*)$$

1. При $z=\pi/2$ находим, что

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

Отсюда получаем формулу Валлиса (1616–1703)

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2}{4k^2-1}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots,$$

ставшую одним из первых примеров (опубл. в 1655 г.) использования бесконечных произведений.

2. В формуле

$$\frac{\sin z}{z\left(1-\dfrac{z^2}{\pi^2}\right)}=\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

заменим $\sin z$ на $\sin(\pi-z)$ и перейдем к пределу при $z\to\infty$. Получим в пределе

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

3. Заменим в (*) z на $2z$. Учитывая, что $\sin 2z = 2\sin z\cos z$, получим

$$2z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)\cos z = 2z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Отсюда

$$\cos z = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{kz^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right). \qquad (**)$$

4. Поскольку $\operatorname{sh} z = -i\sin iz$, то из (**) имеем

$$\operatorname{sh} z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{k^2\pi^2}\right).$$

5. Так как $\operatorname{ch} z = \cos iz$, то из (**) имеем

$$\operatorname{ch} z = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 + \frac{4z^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right).$$

6. Из формулы (**) и формулы $\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$ следует равенство

$$\frac{\pi\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(1-\frac{2z}{\pi}\right)\left(z+\frac{\pi}{2}\right)} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right).$$

Переход здесь к пределу при $z \to \frac{\pi}{2}$ приводит к формуле

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

7. Из (**) посредством выделения коэффициентов при $z^2, z^4, \ldots$ находим

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2}\right)z^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4\pi^4}\right]z^4 + \ldots.$$

Сопоставляя это разложение с известным разложением

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots,$$

получаем формулы Эйлера

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

8. По аналогии с 7, но заменяя $\sin z$ на $\cos z$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

§ 2. РАЗЛОЖЕНИЕ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ НА ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ

2.1. Мероморфная функция. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию f, голоморфную в области $D\subset\overline{\mathbb{C}}$, за исключением множества точек, в которых f имеет полюсы, называют *мероморфной в области* D. Функцию f, мероморфную в $\mathbb{C}$, обычно называют короче: *мероморфной*.

К числу мероморфных функций относятся постоянная и целые функции (они не имеют особых точек в $\mathbb{C}$), рациональные функции (то есть частные от деления многочлена на многочлен), частное от деления целой функции на целую функцию.

Известно, что каждая рациональная функция имеет конечное множество полюсов в $\mathbb{C}$. Отношение двух целых функций может иметь бесконечное множество полюсов в $\mathbb{C}$. В этом легко убедиться на примере отношения z и $\sin z$.

Пример функции $\operatorname{ctg} z$, мероморфной в $\mathbb{C}$, показывает, что для мероморфной функции бесконечность может не быть изолированной особенностью. Поэтому из мероморфности функции в $\mathbb{C}$ не следует, что функция мероморфна в $\overline{\mathbb{C}}$.

В любой ограниченной области мероморфная функция может иметь лишь конечное множество полюсов. В самом деле, если бы в такой области было бесконечно много полюсов, то существовала бы их последовательность, сходящаяся к некоторой конечной точке, которая была бы, очевидно, неизолированной особой точкой, и, следовательно, не могла бы быть полюсом для рассматриваемой функции.

Основные задачи теории мероморфных функций состоят в нахождении мероморфных функций по заданным особенностям и в представлении мероморфных функций в виде сумм и рядов простейших мероморфных функций, каждая из которых имеет единственную особенность в $\overline{\mathbb{C}}$.

2.2. Мероморфная функция в $\overline{\mathbb{C}}$ с конечным числом полюсов. Пусть f – мероморфная в $\overline{\mathbb{C}}$ функция с полюсами в точках $a_1, a_2, ..., a_n$, $n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Главная часть разложения f в проколотой окрестности a_k в ряд Лорана имеет вид

$$T_k\left(z; a_k, m_k\right) = \sum_{s=1}^{m_k} \frac{b_{-s}^{(k)}}{\left(z - a_k\right)^s}, \; b_{-m_k}^{(k)} \neq 0,$$

где m_k – порядок полюса, а в проколотой окрестности точки $z = \infty$ – вид

$$T\left(z; \infty, m\right) = \sum_{s=1}^{m} b_s z^s, \; b_m \neq 0,$$

где m – порядок полюса.

Функции $T_k\left(z; a_k, m_k\right)$ называют *простыми дробями*.

Легко видеть, что разность $f(z) - T_k\left(z; a_k, m_k\right)$ голоморфна в точке a_k, а разность $f(z) - T_k\left(z; \infty, m\right)$ голоморфна в бесконечности.

В курсе математического анализа доказывается широко используемая в теории интегрирования теорема о представлении рациональной функции в виде суммы целой части (ею является многочлен) и простейших дробей. Покажем, что аналогичными свойствами обладают функции, мероморфные в $\overline{\mathbb{C}}$. Случай, когда $f = \text{const}$ в $\overline{\mathbb{C}}$, исключаем из дальнейшего рассмотрения.

Теорема 7 (о разложении мероморфной в $\overline{\mathbb{C}}$ функции на простейшие дроби). *Если функция f мероморфна в $\overline{\mathbb{C}}$, то она является рациональной функцией.*

▷ Пусть функция голоморфна в $\mathbb{C}$ и имеет полюс порядка m на бесконечности. Тогда функция $g(z) = f(z) - T(z; \infty, m)$ голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}$ и согласно теореме Лиувилля постоянна в $\overline{\mathbb{C}}$:

$g(z)=c_0$, $c_0=\text{const}$. Значит, функция $f(z)=c_0+T(z;\infty,m)$ – многочлен степени m.

Пусть функция f имеет в точках $a_1,a_2,...,a_n$ полюсы соответственно порядков $m_1,m_2,...,m_n$, а в бесконечности – полюс порядка m. Тогда функция

$$g(z)=f(z)-T(z;\infty,m)-\sum_{k=1}^{n}T_k\left(z;a_k,m_k\right)$$

голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}$ и согласно теореме Лиувилля постоянна в $\overline{\mathbb{C}}: g(z)=c_0$, $c_0=\text{const}$. Значит,

$$f(z)=c_0+T(z;\infty,m)+\sum_{k=1}^{n}T_k\left(z;a_k,m_k\right)-$$

рациональная функция. $\triangleleft$

Теперь поставим задачу о нахождении мероморфной функции в области $D\subset\mathbb{C}$, которая в данных точках $a_1,a_2,...,a_n$, $n\in\mathbb{N}$ этой области имеет наперед заданные главные части разложения в ряд Лорана

$$T_k\left(z;a_k,m_k\right)=\sum_{s=1}^{m_k}\frac{b_{-s}^{(k)}}{\left(z-a_k\right)^s},\ b_{m_k}^{(k)}\neq 0.$$

Очевидно, одно из решений задачи дается формулой

$$f\left(z\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m_k}\frac{b_{-s}^{(k)}}{\left(z-a_k\right)^s},\ z\in D.$$

Решение не единственно, поскольку, суммируя $f(z)$ с любой голоморфной в D функцией, получаем решение той же задачи.

Отдельно остановимся на случае, когда $D=\mathbb{C}$. Легко видеть, что решение будет даваться указанной формулой и оно также не единственно. Точка $z=\infty$ может быть устранимой особенностью, полюсом или существенно особой точкой.

2.3. Мероморфная функция в $\mathbb{C}$ с бесконечным множеством полюсов. На плоскости $\mathbb{C}$ линией постоянного модуля является окружность $C_r=\left\{z:\left|z\right|=r\right\}$, где r – положительное число. На этой линии и только на ней комплексные числа имеют одинаковый мо-

дуль. Для данной мероморфной функции f с бесконечным множеством полюсов имеется счетное множество $\{c_{r_1}, c_{r_2}, ...\}$, $r_k < r_{k+1}$, таких линий постоянного модуля, что на каждой из них лежит хотя бы один полюс функции f, и все полюсы функции f (за исключением точки $z = 0$, если она является полюсом для f) лежат на указанных линиях. На окружности C_{r_n} $(n = 1, 2, ...)$ их может быть несколько, но всегда конечное число. Эти простые соображения позволяют расположить полюсы функции f в виде числовой последовательности, выполняющей в дальнейшем существенную роль.

Всегда можно считать функцию f голоморфной в точке $z = 0$, поскольку, если это не так, вместо f можно рассматривать функцию $f_1 = f - T_0$, где T_0 – главная часть разложения функции f в ряд Лорана в проколотой окрестности нуля; особенности функций f и f_1 в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ одинаковые.

Пронумеруем полюсы функции f, лежащие на C_{r_1}. Если полюсов несколько, то нумеруем их в произвольном порядке (без учета их взаимного расположения на C_{r_1}). Продолжим нумерацию полюсов, обращаясь к тем, которые лежат на C_{r_2}. Этот процесс продолжим далее, переходя от C_{r_2} к C_{r_3}, и, вообще, от C_{r_k} к $C_{r_{k+1}}$. В итоге получим числовую последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, в которой нет одинаковых элементов и, кроме того, они удовлетворяют условиям:

$$0 < |a_1| \le |a_2| \le ... \le |a_k| \le |a_{k+1}| \le ..., \lim_{k \to \infty} a_k = \infty.$$

Построенную последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ назовем *ML-последовательностью*, и если она составлена для f, то будем её обозначать $ML(f)$.

Далее будут встречаться функциональные ряды, составленные из мероморфных функций. Напомним, что в полюсах такие функции принимают значение ∞. Известное определение сходимости функционального ряда в точке сходимости и равномерной сходимости функционального ряда на множестве дается для случая функций, принимающих значения только в $\mathbb{C}$. Распространим эти понятия на

ряды, слагаемые в которых могут иметь значения в $\overline{\mathbb{C}}$. Ограничимся рядами, содержащими только мероморфные функции.

Назовем ряд из мероморфных функций сходящимся в точке z_0, если он имеет лишь конечное число членов с полюсом z_0, а после удаления из ряда этих членов ряд становится сходящимся в точке z_0.

Назовем ряд из мероморфных функций сходящимся (равномерно сходящимся) на множестве $E \subset \mathbb{C}$, если лишь конечное число его членов имеет полюсы на E и если после удаления из ряда этих членов ряд становится сходящимся (равномерно сходящимся) на E.

2.4. Существование мероморфной функции в $\mathbb{C}$ с бесконечным множеством полюсов.

Теорема 8 (Миттаг-Леффлер). *Какова бы ни была ML-последовательность* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *попарно различных точек* $a_k \in \mathbb{C}$, $0 < |a_k| \le |a_{k+1}|$, $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \infty$, *и последовательность функций*

$$T_k\left(z; a_k, m_k\right) = \sum_{s=1}^{m_k} \frac{b_{-s}^{(k)}}{\left(z-a_k\right)^s},\ b_{-m_k}^{(k)} \neq 0,$$

с произвольно взятыми комплексными коэффициентами $b_{-1}^{(k)}, \ldots, b_{-m_k}^{(k)}$, $m_k \in \mathbb{N}$, *существует мероморфная функция, имеющая в точках* $a_1, a_2, \ldots$ *и только в них полюсы с главными частями разложения в ряд Лорана соответственно* $T_1\left(z; a_1, m_1\right)$, $T_2\left(z; a_2, m_2\right), \ldots$.

▷ Фиксируем число r, $r > 0$, и некоторый сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k$ с положительными членами. Пусть число $N \in \mathbb{N}$ таково, что $|a_k| > 2r$ при $k > N$. В круге $U(0, |a_k|)$, $k = 1, 2, \ldots$, разложим функцию $T_k\left(z; a_k, m_k\right)$ в ряд по степеням z:

$$T_k\left(z; a_k, m_k\right) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(k)} z^j.$$

Вычтем из $T_k\left(z;a_k,m_k\right)$ частичную сумму $\sum_{j=0}^{s_k}c_j^{(k)}z^j$ этого ряда. Получим голоморфную в $U\left(0,\left|a_k\right|\right)$ функцию

$$Q_k\left(z;a_k,m_k,s_k\right)=T_k\left(z;a_k,m_k\right)-\sum_{j=0}^{s_k}c_j^{(k)}z^j,\ s_k\geq 0.$$

Выбор числа s_k произведем так, чтобы в $\overline{U(0,r)}$ выполнялось условие

$$\left|Q_k\left(z;a_k,m_k,s_k\right)\right|<q_k.$$

Отметим, что вместо рассматриваемой частичной суммы можно взять другой многочлен, пусть $P_k(z)$, для которого

$$\left|T_k\left(z;a_k,m_k\right)-P_k(z)\right|<q_k,\ z\in\overline{U(0,r)}.$$

Такая замена не отражается на дальнейшем ходе доказательства теоремы и может быть полезной при её использовании.

Ряд

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}Q_k\left(z;a_k,m_k,s_k\right),$$

составленный из голоморфных функций в $U(0,2r)$, называемых *первичными слагаемыми*, мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{k=N+1}^{\infty}q_k$ и поэтому, как известно, функция

$$Q(z)=\sum_{k=N+1}^{\infty}Q_k\left(z;a_k,m_k,s_k\right)$$

голоморфна в $\overline{U\left(0,r\right)}$. Значит, функция

$$F(z)=\sum_{k=1}^{N}Q_k\left(z;a_k,m_k,s_k\right)+Q\left(z\right)=\sum_{k=1}^{\infty}Q_k\left(z;a_k,m_k,s_k\right)$$

голоморфна в $\overline{U(0,r)}$, кроме только и лишь только тех точек $a_1,a_2,...,a_N$, принадлежащих $\overline{U(0,r)}$, в которых она имеет полюсы с

главными частями разложения в ряд Лорана соответственно $T_1(z;a_1,m_1), T_2(z;a_2,m_2),\ldots,T_N(z;a_N,m_N)$.

В силу произвольности выбора r ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k(z;a_k,m_k,s_k)$$

равномерно сходится к $f(z)$ внутри $\mathbb{C}$ (то есть на любом замкнутом ограниченном множестве). $\triangleleft$

Легко видеть, что указанная в теореме 8 функция $f(z)$ не является единственной. Например, при сложении её с произвольной целой функцией получаем функцию с теми же особенностями и главными частями разложения в ряд Лорана, которые имеет $f(z)$.

2.5. Разложение мероморфной функции в $\mathbb{C}$ на простые дроби. ***Теорема 9*** (Миттаг-Леффлер). *Пусть мероморфная функция и* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– её* $ML(f)$*-последовательность. Пусть* $T_k(z;a_k,m_k)$ *– главная часть разложения* f *в ряд Лорана в проколотой окрестности точки* a_k*. Тогда* $f(z)$ *можно представить в виде суммы*

$$f(z)=g(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k(z;a_k,m_k)-P_k(z)\right],$$

где g *– целая функция, а общий член ряда получается вычитанием из* T_k *некоторого многочлена* (например, представляющего собой частичную сумму ряда Тейлора функции T_k в точке $z=0$; в этом случае $f(z)=g(z)+\sum_{k=1}^{\infty}Q_k(z;a_k,m_k,s_k)$).

$\triangleright$ Согласно теореме 8 можно построить мероморфную функцию $F(z)$ с теми же полюсами и главными частями разложения в ряд Лорана, что и у $f(z)$. Разность $f-F=g$ – целая функция. Следовательно, $f=g+F$. Учитывая указанный в теореме 8 вид функции F, приходим к представлению $f(z)$, указанному в формулировке теоремы. $\triangleleft$

2.6. Случай простых полюсов. Остановимся на часто встречающемся случае, когда мероморфная функция f имеет бесконечно много полюсов и все они – первого порядка. Пусть $\{a_k\}_{k+1}^{\infty}$ – $ML(f)$-последовательность и

$$T_k\left(z;a_k,1\right)=\frac{b_{-1}^{(k)}}{z-a_k},\ b_{-1}^{(k)}=\operatorname*{res}_{z=a_k} f\neq 0.$$

Так как при $z\in\overline{U(0,r)}$, $r>0$ и $|a_k|>2r$

$$T_k\left(z;a_k,1\right)=-\frac{b_{-1}^{(k)}}{a_k}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a_k}\right)^j,$$

то первичное слагаемое $Q_k\left(z;a_k,1,s_k\right)$ дается формулой

$$Q_k\left(z;a_k,1,s_k\right)=\frac{b_{-1}^{(k)}}{z-a_k}+\frac{b_{-1}^{(k)}}{a_k}\left[1+\frac{z}{a_k}+\ldots+\left(\frac{z}{a_k}\right)^{s_k}\right]=\left(\frac{z}{a_k}\right)^{s_k+1}\frac{b_{-1}^{(k)}}{z-a_k}.$$

В силу теоремы 9 имеем

$$f(z)=g(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{s_k+1}\frac{b_{-1}^{(k)}}{z-a_k},$$

где g – целая функция. Здесь числа $s_k\in\mathbb{N}$ выбраны так, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}Q_k\left(z;a_k,1,s_k\right)$$

после выделения в нем слагаемых, в которых $|a_k|\le 2r$, равномерно сходится в $\overline{U(0,r)}$. Для этого достаточно, поскольку $2r<|a_k|$, чтобы ряд

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\frac{r}{|a_k|}\right)^{s_k+1}\left|\frac{b_1^{(k)}}{a_k}\right|,\ |a_{N+1}|\ge 2r,$$

сходился при $r>0$.

Особо интересен случай, когда во всех первичных слагаемых можно выбрать многочлен одной и той же степени, то есть когда $s_k = s\ (k = 1,2,...)$. Очевидно, для этого достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|b_{-1}^{(k)}\right|}{\left|a_k\right|^{s+2}}$$

сходился. Тогда

$$f(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{b_{-1}^{(k)}}{z - a_k} + \frac{b_{-1}^{(k)}}{a_k} \left[1 + \frac{z}{a_k} + ... + \left(\frac{z}{a_k} \right)^s \right] \right\}.$$

§ 3. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

3.1. Разложение $1/\sin z$ на простейшие дроби. Разложим на простейшие дроби мероморфную в $\mathbb{C}$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z},\ f(0) = 0,$$

имеющую в точках $a_{2k-1} = k\pi$, $a_{2k} = -k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, образующих ML-последовательность, полюсы первого порядка. Для этой функции

$$T_{2k-1}(z; k\pi, 1) = \frac{(-1)^k}{z - k\pi}, \quad T_{2k}(z; -k\pi, 1) = \frac{(-1)^k}{1 + k\pi}$$

и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|b_{-1}^{(k)}\right|}{\left|a_k\right|^{k+2}} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^{s+2}}$$

сходится при $s = 0$. Поэтому первичные слагаемые получаем вычитанием из T_k, $k \in \mathbb{N}$, свободного члена разложения T_k в ряд Тейлора в точке $z = 0$.

Согласно теореме 9 и свойствам равномерно сходящихся функциональных рядов имеем

$$f(z)=g(z)+\left[\frac{-1}{z-\pi}-\frac{1}{\pi}\right]+\left[\frac{-1}{z+\pi}-\frac{-1}{\pi}\right]+\ldots=$$

$$=g(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{z-k\pi}+\frac{(-1)^k}{k\pi}+\frac{(-1)^k}{z+k\pi}-\frac{(-1)^k}{k\pi}\right],$$

то есть

$$f(z)=g(z)+2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^2-k^2\pi^2},$$

где $g(z)$ – целая функция, $g(0)=0$.

Докажем, что $g=0$. Рассмотрим последовательность кругов $U(0,R_n)$, $R_n=n\pi+\frac{\pi}{2}$, $n\in\mathbb{N}$. В $\overline{U(0,R_n)}$ функция f мероморфна за исключением множества V точек $\pm k\pi$ ($k=1,2,\ldots,n$). Применяя к функции

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z},\ \zeta\in\overline{U(0,R_n)}\setminus V,\ z\in U(0,R_n)\setminus V$$

теорему Коши о вычетах и используя формулу для подсчета вычета в простом полюсе, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U(0,R_n)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=f(z)+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-1)^k}{k\pi-z}-\frac{(-1)^k}{k\pi+z}\right].$$

В частности, при $z=0$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U(0,R_n)}\frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta=0.$$

С учетом этих двух формул и формулы для $f(z)$ находим, что

$$g(z)=\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{\partial U(0,R_n)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}-2z\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-k^2\pi^2}.$$

Так как при $n\to\infty$ ряд в правой части этой формулы равномерно стремится к нулю на любом замкнутом ограниченном множестве,

то для доказательства равенства $g=0$ достаточно установить равномерную сходимость к нулю интеграла

$$I_n(z)=\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{\partial U(0,R_n)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}.$$

При $\zeta=\xi+i\eta$ имеем

$$|f(\zeta)|=\left|\frac{1}{\sin\zeta}-\frac{1}{\zeta}\right|\le\frac{1}{\sqrt{\sin^2\xi+\mathrm{sh}^2\,\eta}}+\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}.$$

Поскольку $\mathrm{sh}\,\eta>\eta$ для $\eta>0$, то на $\partial U(0,R_n)$

$$sh^2\eta>\eta^2=R_n^2-\xi^2,$$

где $\xi\in[-R_n,R_n]$. Функция $\varphi(\xi)=\sin^2\xi+R_n^2-\xi^2$, очевидно, четная; на отрезке $[0,R_n]$ она монотонно убывает от $\varphi(0)$ до $\varphi(R_n)$, $|\varphi(R_n)|=1$. Поэтому на $\partial U(0,R_n)$

$$\sqrt{\sin^2\xi+\mathrm{sh}^2\,\eta}>1$$

и, следовательно $|f(\zeta)|<1+1/R_n$; $\zeta\in\partial U(0,R_n)$. Из оценки

$$|I_n(z)|\le\frac{|z|}{2\pi}\left(1+\frac{1}{R_n}\right)\frac{2\pi R_n}{R_n(R_n-|z|)}$$

следует: $\lim\limits_{n\to\infty}I_n(z)=0$. Таким образом, $g=0$.

Итак, разложение функции $\dfrac{1}{\sin z}$ на простейшие дроби имеет вид:

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+{\sum_{k=-\infty}^{\infty}}'\frac{(-1)^k}{k\pi(-z-k\pi)}=\frac{1}{z}+2z\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^2-k^2\pi^2},$$

где «штрих» у суммы указывает на отсутствие в ней слагаемого при $k=0$.

3.2. Разложение $\mathrm{ctg}\,z$ **на простейшие дроби.** Незначительные изменения в проведенных выше вычислениях позволяют записать разложение на простейшие дроби мероморфной функции

$$f(z)=\mathrm{ctg}\,z-\frac{1}{z},\ f(0)=0,$$

имеющей в $\mathbb{C}$ в качестве особенностей только полюсы первого порядка в точках $\pm k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, образующих, очевидно, ML-последовательность $\{\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, ...\}$. Вычеты функции $f(z)$ в этих точках равны 1. В соответствии с теоремой 9

$$f(z) = g(z) + \left[\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right] + \left[\frac{1}{z+k\pi} - \frac{1}{k\pi}\right] + ... =$$

$$= g(z) + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right] + \left[\frac{1}{z+k\pi} - \frac{1}{k\pi}\right]\right\} = g(z) + 2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^2 - k^2\pi^2},$$

где $g(z)$ – целая функция. Повторяя применительно к рассматриваемой задаче проведенное выше доказательство равенства $g = 0$ в разложении $1/\sin z$ на простейшие дроби, устанавливаем, что и в данном случае $g = 0$. Таким образом,

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + 2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^2 - k^2\pi^2} = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right).$$

3.3. Разложение $1/\sin^2 z$ на простейшие дроби. Почленным дифференцированием полученного разложения на простейшие дроби находим

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(z-k\pi)^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-k\pi)^2}.$$

Этому разложению можно придать вид

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^2 + k^2\pi^2}{(z^2 - k^2\pi^2)^2},$$

дающий представление $1/\sin^2 z$ в виде ряда, составленного из рациональных функций.

3.4. Разложение $\ln(\sin z/z)$. Почленным интегрированием разложения $\operatorname{ctg} z$ на простейшие дроби получаем:

$$\ln\frac{\sin z}{z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\ln(z-k\pi) + \frac{z}{k\pi}\right] + C, \ln 1 = 0.$$

Постоянную интегрирования C найдем из условия равенства левой и правой частей этой формулы при $z = 0$. Имеем

$$C = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \ln(-k\pi)$$

и, значит,

$$\ln \frac{\sin z}{z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left[\ln\left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) + \frac{z}{k\pi} \right].$$

После потенцирования получаем формулу для разложения $\sin z$ на множители:

$$\sin z = z \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}} = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right),$$

показывающую, что в разложении $\sin z$ на множители, полученном в п. 1.10, функция $g = 0$.

3.5. Представление мероморфной функции через целые функции. Рациональная функция представляет собой отношение двух многочленов. В следующей теореме легко усмотреть аналогию этому факту в отношении между мероморфными и целыми функциями.

Теорема 10. *Любую функцию f, мероморфную в $\mathbb{C}$, можно представить как отношение двух целых функций.*

▷ Пусть f – мероморфная функция. Она имеет конечное или счетное множество полюсов. Построим целую функцию g, имеющую в каждом полюсе функции f нуль с кратностью, равной порядку рассматриваемого полюса и не имеющую других особенностей. Можно считать, что в случае бесконечного множества полюсов нули функции g образуют W-последовательность. Произведение $F = fg$ голоморфно в $\mathbb{C}$, поскольку в полюсах функции f оно имеет устранимые особенности и доопределяется в таких точках до голоморфности по непрерывности. Значит, F – целая функция и $f = F/g$. ◁

§ 4. ГАММА-ФУНКЦИЯ ЭЙЛЕРА

4.1. Постановка задачи и её решение. *Факториалом* называется функция, заданная на множестве целых неотрицательных чисел и

ставящая в соответствие числу $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ число 1 при $n = 0$ и число $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ при $n \in \mathbb{N}$. Эту функцию обозначают или $\prod(n+1)$ или $n!$, так что

$$\prod(n+1) = n! = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{при } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Эйлер (1739 г.) построил интерполяционную формулу

$$\gamma(v) = \int_0^\infty e^{-u} u^{v-1} du, v \in (0, \infty),$$

распространяющую факториал с множества точек $\{0,1,\ldots\}$ на все неотрицательные числа v так, что $\gamma(n) = \prod(n+1)$ при $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, а затем распространил её на комплексные числа заменой v на z, $\operatorname{Re} z > 0$. Он использовал формулу

$$\prod(n+1) = \gamma(n+1) = \int_0^1 (-\ln x)^n \, dx, n = 0,1,\ldots,$$

правило интегрирования по частям, и пришел к рекуррентной формуле

$$\gamma(n+1) = n\gamma(n).$$

Другой подход к распространению факториала состоит в указании голоморфной функции $f(z)$ в области, содержащей множество 0,1,2,…, значения которой удовлетворяют условию $f(n+1) = n!$ при $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Предположим, что существует голоморфная функция $f(z)$, $f(n+1) = n!$. Тогда она удовлетворяет функциональному уравнению $f(z+1) = zf(z)$. Для голоморфного решения этого уравнения имеем

$$\frac{d^2 \ln f(z)}{dz^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{d^2 \ln f(z+1)}{dz^2}.$$

Заменив здесь z на $z+1, z+2, ..., z+n$, получим еще n равенств. Сложим левые и правые части исходного и полученных равенств. После очевидных упрощений приходим к условию

$$\frac{d^2 \ln f(z)}{dz^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(z+k)^2} + \frac{d^2 \ln f(z+n+1)}{dz^2},$$

которому должна удовлетворять искомая функция.

Пусть

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}.$$

Из равномерной сходимости ряда внутри области $G = \mathbb{C} \setminus V$, где $V = \{0, -1, -2, ...\}$, и теоремы Вейерштрасса о голоморфности суммы ряда следует, что функция голоморфна в плоскости $\mathbb{C}$ с исключенными из нее точками 0, –1, –2, … . Легко видеть, что $\Phi(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(z+k)^2} + \Phi(z+n+1),$$

показывающему вместе с условием на $f(z)$, что можно в поиске $f(z)$ рассмотреть функции, являющиеся решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \ln f(z)}{dz^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2},$$

то есть уравнения

$$zw'' - w'^2 - z\Phi(z) = 0.$$

Проинтегрируем уравнение для $f(z)$ по простой дуге, лежащей в G и соединяющей точки $z=1$, с $z \in G$, при условии $f(1)=1$. Имеем

$$\frac{d \ln f(z)}{dz} = f'(1) + 1 - \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{z+k} \right).$$

Так как

$$\frac{d \ln f(z)}{dz} + \frac{1}{z} = \frac{d \ln f(z+1)}{dz},$$

то находим, что

$$\frac{d\ln f(z+1)}{dz} = f'(1) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{z+k}\right).$$

Интегрируя это уравнение от $z=0$ до $z \in G$, приходим с учетом условия $f(1)=1$ к равенству

$$\ln f(z+1) = f'(1)z + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{k} - \ln\frac{z+k}{k}\right),$$

содержащему подлежащую нахождению постоянную $f'(1)$. При $z=1$ с учетом условия $f(2)=1\cdot f(1)=1$ имеем для $f'(1)$ представление в виде ряда

$$f'(1) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{1+k}{k}\right).$$

Частичная сумма ряда, состоящая из первых n слагаемых ряда, легко подсчитывается:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(1+n).$$

Известно, что числовая последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ и что он равен постоянной Эйлера

$$C = 0{,}577215665\ldots .$$

Значит, $f'(1) = -C$. Таким образом, находим, что

$$\ln f(z+1) = -Cz + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{k} - \ln\frac{z+k}{k}\right).$$

Отсюда с учетом условия $f(z+1) = zf(z)$ находим функцию

$$f(z) = \frac{e^{-Cz}}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{z}{k}}}{1+\frac{z}{k}},$$

которую принято обозначать $\Gamma(z)$ (читается: гамма-функция от z).

Убедимся в том, что функция $\Gamma(z)$ дает решение поставленной задачи. Прежде всего заметим, что $\Gamma(z)$ голоморфна на $\mathbb{C}$, за ис-

ключением лишь множества V точек, в которых она имеет полюсы первого порядка.

Остается убедиться в справедливости равенства $\Gamma(n+1)=n!$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Установим более общее свойство функции $\Gamma(z)$: $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, $z\in G$, из которого равенство $\Gamma(n+1)=n!$ легко выводится. Условие

$$\frac{e^{-C(z+1)}}{z+1}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{z+1}{k}}}{1+\frac{z+1}{k}}=\frac{ze^{-Cz}}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{z}{k}}}{1+\frac{z}{k}}$$

легко преобразовывается при $z\in G$ к условию

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(z+k)e^{\frac{1}{k}}}{z+k+1}=(z+1)e^{C}.$$

Представив произведение, стоящее под знаком предела в развернутой форме и произведя сокращение одинаковых сомножителей (все они при $z\in G$ отличны от нуля), получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\exp\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right\}}{z+n+1}=e^{C}.$$

Эта формула верна, поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(1+n)-\ln\left(1+\frac{z}{1+n}\right)\right]=C$$

при любом $z\in\mathbb{C}$.

Итак, функция

$$\Gamma(z)=\frac{e^{-Cz}}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{z}{k}}}{1+\frac{z}{k}} \qquad (*)$$

распространяет факториал на область $G=\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$. Обозначение $\Gamma(z)$ и название «гамма-функция» были предложены Лежандром (1814 г.).

4.2. Свойства Γ-функции. Из формулы (*) следует, что $\Gamma(x)>0$ при $x>0$.

Последовательно применяя формулу $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, имеем

$$\Gamma(z+n)=(z+n-1)(z+n-2)\cdot\ldots\cdot(z-1)z\Gamma(z),\ n\in\mathbb{N},$$

и, в частности, $\Gamma(n+1)=n!$.

Гамма-функция не имеет нулей в $\mathbb{C}$. Поэтому

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{Cz}z\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right]\ -$$

целая функция. Её нулями являются точки множества V и только они. Все нули функции $1/\Gamma(z)$ – простые. Множителями Вейерштрасса для функции $1/\Gamma(z)$ являются функции $W(-z/k,1)$, $k\in\mathbb{N}$. Из (*) имеем

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=\frac{-1}{z^2\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)}.$$

Воспользовавшись формулой разложения синуса в бесконечное произведение

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right),$$

находим, что

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=-\frac{\pi}{z\sin\pi z}. \qquad (**)$$

Видим, что произведение $\Gamma(z)\Gamma(-z)$ – мероморфная функция с полюсами первого порядка в точках $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ и полюсом второго порядка в точке $z=0$. Из этой же формулы имеем представление

$$\frac{\sin\pi z}{\pi z}=\left[\frac{1}{z\Gamma(z)}\right]\left[-\frac{1}{z\Gamma(-z)}\right]$$

в виде произведения двух множителей, первый из которых имеет нули в точках $-1,-2,\ldots$, а второй – в точках $1,2,\ldots$.

Из (**) с учетом формулы $\Gamma(z-1)=-z\Gamma(-z)$ получаем *формулу приведения Эйлера*:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)+=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

В частности,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}=1,772453851...,$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\left(\frac{1}{2}+n-2\right)\cdot...\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Умножив обе части формулы приведения Эйлера на $(z+n)/\Gamma(1-z)$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, и воспользовавшись равенством $\sin\pi(z+n)=(-1)^n\sin\pi z$, приходим к формуле

$$(z+n)\Gamma(z)=\frac{\pi(z+n)}{\sin\pi(z+n)}\cdot\frac{(-1)^n}{\Gamma(1-z)},$$

позволяющей легко найти вычет функции $\Gamma(z)$ в точке $-n$:

$$\operatorname*{res}_{z=-n}\Gamma(z)=\lim_{z\to-n}(z+n)\Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{\Gamma(1+n)}=\frac{(-1)^n}{n!}.$$

4.3. Формула умножения. Такое название получила формула

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)...\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=n^{\frac{1}{2}-nz}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(nz),$$

где $n=2,3,...,\ z\in G$, установленная Гауссом.

Обратимся к её выводу. Пусть

$$w(z)=\frac{\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdot...\cdot\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(nz)}.$$

Заменяя в формуле

$$\frac{d^2 \ln \Gamma(z)}{dz^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(z+k)^2}$$

z на $z+\frac{1}{n},...,z+\frac{n+1}{n}$ и почленно складывая результаты с исходной формулой, получим равенство

$$\frac{d^2}{dz^2} \ln \left[\Gamma(z) \Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right) \cdot ... \cdot \Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) \right] =$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\left(z+\frac{l}{n}+k\right)^2} = n^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(nz+k)^2} = \frac{d^2 \ln \Gamma(nz)}{dz^2},$$

показывающее, что

$$\frac{d^2 \ln w(z)}{dz^2} = 0.$$

Интегрирование этого уравнения дает общий вид функции $\ln w(z)$:

$$\ln w(z) = C_0 z + C_1,$$

где C_0, C_1 – постоянные. Найдем их значения. Учитывая, что $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, и представление $\Gamma(z+n)$ через $\Gamma(z)$, получаем

$$w(z+1) = \frac{z\left(z+\frac{1}{n}\right) \cdot ... \cdot \left(z+\frac{n-1}{n}\right)}{(nz+n-1)(nz+n-2) \cdot ... \cdot (nz)} w(z).$$

После сокращения общих множителей в числителе и знаменателе правой части приходим к формуле

$$w(z+1) = \frac{1}{2n^2} w(z).$$

С другой стороны,

$$\ln w(z+1) = C_0 (z+1) + C_1 = \ln w(z) + C_0.$$

Из полученной формулы находим, что

$$C_0 = \ln \frac{1}{n^n} = -n \ln n,$$

следовательно, C_0 является действительным числом.

Переходим к нахождению C_1. Легко видеть, что $C_1 = \ln w(0)$. Воспользовавшись тем, что

$$\lim_{z\to 0}\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(nz)} = n,$$

получаем в результате предельного перехода при $z \to 0$ в формуле, определяющей функцию $w(z)$, значение

$$w(0) = n\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Так как каждый сомножитель в правой части – действительное положительное число, то $w(0) > 0$. Формулу для $W(0)$ можно упростить. Имеем

$$\left[\frac{w(0)}{n}\right]^2 = \Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma^2\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\Gamma^2\left(\frac{n-1}{n}\right) =$$

$$= \left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]\left[\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\right]\cdot\ldots\cdot\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Используя формулу приведения Эйлера, получаем

$$\left[\frac{w(0)}{n}\right]^2\cdot\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \pi^{n-1}.$$

Полагая в известной формуле

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = 2^{n-1}\prod_{l=1}^{n-1}\sin\left(x+\frac{l\pi}{n}\right),$$

справедливой для $x\in(-\infty,\infty)$ и $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $x = 0$, получаем

$$2^{n-1}\prod_{l=1}^{n-1}\sin\frac{l\pi}{n} = n,$$

и поэтому

$$\left[\frac{w(0)}{n}\right]^2\frac{n}{2^{n-1}} = \pi^{n-1}.$$

Отсюда с учетом неравенства $w(0) > 0$ имеем

$$w(0) = (2\pi)^{n-1}\sqrt{n}.$$

Таким образом,

$$\ln w(z) = \left(-n\ln n\right)z + \ln\left[\left(2\pi\right)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}\right].$$

Потенцированием полученного равенства приходим к формуле умножения Гаусса для Γ-функции. В частности, справедлива *формула удвоения* Лежандра:

$$\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi}e^{-z\ln 4}\Gamma\left(27\right).$$

З а д а ч и

1. Доказать, что

а) $\cos\frac{\pi z}{4} - \sin\frac{\pi z}{4} = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left[1+\frac{\left(-1\right)^k z}{2k-1}\right]$;

б) $1+\sin z = \frac{1}{8}\left(\pi+2z\right)^2\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{\pi+2z}{2k\pi}\right)^2\right]^2$;

в) $\frac{\sin\pi\left(z+a\right)}{\sin\pi a} = \frac{z+a}{a}\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{k-a}\right)\left(1+\frac{z}{k+a}\right)$;

г) $e^z - 1 = e^{\frac{z}{2}}z\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{4\pi^2k^2}\right)$;

д) $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = e^{g(z)}\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{k^2\pi^2}\right)$, g – целая функция.

2. Доказать, что

а) $\Gamma\left(1+z\right) = 4^z\prod\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$; б) $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{n}\right) = \frac{\left(2\pi\right)^{n-1}}{n}$;

в) $\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos\pi z}$; г) $\frac{\Gamma'\left(z+1\right)}{\Gamma\left(z+1\right)} = \frac{\Gamma'\left(z\right)}{\Gamma\left(z\right)} + \frac{1}{z}$.

3. Доказать, что $\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|=\sqrt{\frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi y}},\ -\infty<y<+\infty.$

4. Доказать, что для пси-функции $\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\psi(z)$ выполняются функциональные соотношения:

а) $\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z}$;) $\psi(z+n)=\psi(z)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z+k}$;

в) $\lim_{n\to\infty}\left[\psi(z+n)-\ln n\right]=0$; г) $\psi(1-z)=\psi(z)+\pi\operatorname{ctg}\pi z$.

5. Доказать, что $\operatorname{tg}\frac{\pi z}{2}=\frac{2z}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2-z^2}$.

6. Доказать, что $\frac{1}{1-z}=(1+z)\left(1+z^2\right)\left(1+z^4\right)\left(1+z^8\right)...$ в $U(0,1)$.

7. Доказать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{\alpha}\frac{(-1)^n}{z+n}=\frac{\Gamma(z)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(z+\alpha+1)},\ \operatorname{Re}\alpha>-1,\ z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,...\},$$

где $C_n^{\alpha}=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!},\ n\in\mathbb{N},\ C_0^{\alpha}=1$.

8. Доказать, что полином Лежандра $P_n(z)$, $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяет уравнению

$$\left(1-z^2\right)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+n(n+1)=0.$$

9. Доказать, что для полиномов Лежандра имеют место рекуррентные формулы:

а) $(n+1)P_{n+1}(z)-(2n-1)zP_n(z)+nP_{n-1}(z)=0;$

б) $\left(z^2-1\right)\frac{dP_n(z)}{dz}=n\left(zP_n(z)-P_{n-1}(z)\right);$

в) $\frac{dP_{n+1}(z)}{dz}-\frac{dP_{n-1}(z)}{dz}=(2n+1)P_n(z).$

10. Доказать неравенства:

а) при $x>1$ $P_0(x)<P_1(x)<\ldots<P_n(x)<\ldots$;

б) $\left|P_n(\cos\varphi)\right|^2>\dfrac{\sin(2n+1)\varphi}{(2n+1)\sin\varphi}$, $0<\varphi<\pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров И.А.* Теория функций комплексного переменного. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002.

2. *Маркушевич А.И.* Краткий курс теории аналитических функций. – М.: Наука, 2006.

3. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 2009.

4. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. – Т. 1. – М.: Наука, 1976.

5. *Волковысский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1975.

6. *Сборник* задач по теории аналитических функций (одного и нескольких комплексных переменных) / Под ред. М.А. Евграфова). – М.: Наука, 1972.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ ... 3

Глава 1. МНОЖЕСТВО КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ ... **9**
§ 1. Поле. Поле действительных чисел ... 9
1.1. Поле ... 9
1.2. Упорядоченное поле ... 10
1.3. Поле действительных чисел ... 11
§ 2. Поле комплексных чисел ... 11
2.1. Построение поля $\mathbb{C}$. Комплексное число ... 11
2.2. Алгебраическая форма записи комплексного числа ... 14
2.3. Сложение и умножение комплексных чисел в алгебраической форме ... 15
§ 3. Комплексная плоскость $\mathbb{C}$ ... 17
3.1. Геометрическое изображение комплексных чисел ... 17
3.2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа ... 18
3.3. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме ... 19
3.4. Показательная форма записи комплексного числа ... 22
§ 4. Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ ... 23
4.1. Сфера Римана. Бесконечно удаленная точка ... 23
4.2. Операции с участием бесконечности ... 25
§ 5. Пространства над полем $\mathbb{C}$ и над $\overline{\mathbb{C}}$ ... 25
5.1. Метрическое пространство $\{\mathbb{C}, r\}$ ... 25
5.2. Метрическое пространство $\{\overline{\mathbb{C}}, \rho\}$ ... 26
5.3. Топологические пространства ... 28
5.4. Область и её границы ... 30
Задачи ... 31

Глава 2. КОМПЛЕКСНАЯ ФУНКЦИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО И КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО ... 34
§ 1. Комплексная функция действительного переменного ... 34
1.1. Основные понятия ... 34
1.2. Траектории и кривые ... 36
1.3. Жордановы траектории и кривые ... 39
1.4. Гладкие и кусочно-гладкие траектории и кривые ... 40
§ 2. Комплексная функция комплексного переменного ... 42
2.1. Основные понятия ... 42
2.2. Условия Коши – Римана ... 44

2.3. Голоморфность ... 48
§ 3. Интеграл ... 49
3.1. Интеграл по кривой ... 49
3.2. Свойства интеграла по кривой ... 50
3.3. Простейшие примеры вычисления интеграла по кривой ... 52
3.4. Оценка интеграла по кривой ... 54
Задачи ... 55

Глава 3. ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ ... 57
§ 1. Степень и корень ... 57
1.1. Степенная функция ... 57
1.2. Корень ... 58
1.3. Риманова поверхность для $\sqrt[n]{w}$ ... 60
§ 2. Многочлен и рациональная функция ... 62
2.1. Многочлен ... 62
2.2. Рациональная функция ... 64
2.3. Функция Жуковского ... 64
2.4. Дробно-линейная функция ... 65
§ 3. Показательная функция и логарифм ... 67
3.1. Определение функции e^z ... 67
3.2. Свойства функции e^z ... 68
3.3. Логарифм ... 70
§ 4. Общая степенная функция ... 73
4.1. Определение общей степенной функции ... 73
4.2. Общая степенная функция с комплексным показателем ... 75
§ 5. Гиперболические и обратные гиперболические функции ... 76
5.1. Функции $\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ ... 76
5.2. Функции $\operatorname{Arcch} w$, $\operatorname{Arcsh} w$ ... 78
5.3. Функции $\operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$ ... 79
5.4. Функции $\operatorname{Arcth} w$, $\operatorname{Arccth} w$ ... 79
§ 6. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции ... 80
6.1. Функции $\cos z, \sin z$ ... 80
6.2. Функции $\operatorname{Arc}\cos w, \operatorname{Arc}\sin w$ ... 83
6.3. Функции $\operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z$ ... 84
6.4. Функции $\operatorname{Arctg} z, \operatorname{Arcctg} z$ ... 85
Задачи ... 86

Глава 4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ... 88
§ 1. Интегральная теорема Коши ... 88
1.1. Формулировка теоремы ... 88
1.2. Лемма Гурса ... 90
1.3. Модуль непрерывности функции ... 92
1.4. Сравнение длин ... 94
1.5. Окончание доказательства теоремы ... 96
§ 2. Распространение интегральной теоремы Коши на многосвязные области ... 97
2.1. Области типа $s+1, s \in \mathbb{N}$ ... 97
2.2. Интегральная теорема Коши для областей типа $s+1$ ... 99

§ 3. Пример применения интегральной теоремы Коши к вычислению интегралов.. 100
§ 4. Интегральная формула Коши ... 104
4.1. Интеграл Коши ... 104
4.2. Вывод интегральной формулы Коши ... 107
4.3. Бесконечная дифференцируемость голоморфной функции ... 111
4.4. Теорема о среднем для голоморфной функции ... 112
§ 5. Первообразная для голоморфной функции ... 113
5.1. Первообразная ... 113
5.2. Существование первообразной ... 114
5.3. Теорема Мореры ... 117
5.4. Формула Ньютона – Лейбница ... 117
§ 6. Разложение голоморфной функции в степенной ряд ... 118
6.1. Основная теорема ... 118
6.2. Единственность разложения ... 121
6.3. Ограниченные целые функции ... 122
§ 7. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана ... 123
7.1. Ряд Лорана ... 123
7.2. Разложение в ряд функции, голоморфной в кольце ... 124
§ 8. Точки нарушения голоморфности функции ... 127
8.1. Изолированные особые точки ... 127
8.2. Типы изолированных особенностей ... 128
8.3. Связь полюсов с нулями ... 132
§ 9. Теорема Коши о вычетах ... 134
9.1. Интегрирование функций с изолированными особенностями ... 134
9.2. Вычет и ряд Лорана ... 136
9.3. Вычисление вычета в простом полюсе ... 137
9.4. Вычисление вычета в полюсе порядка m ... 138
9.5. Полная сумма вычетов ... 139
9.6. Сумма порядков нулей и полюсов ... 141
9.7. Использование вычетов для вычисления интегралов по замкнутой кривой или отрезку ... 144
9.8. Использование вычетов для вычисления несобственных интегралов ... 145
9.9. Обращение голоморфной функции ... 148
9.10. Производящая функция для многочленов Лежандра ... 155
Задачи ... 157

Глава 5. ЦЕЛЫЕ И МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ ... 162
§ 1. Разложение целой функции на первичные множители ... 162
1.1. Целая функция с полюсом на бесконечности ... 162
1.2. Целая функция с существенно особой точкой на бесконечности ... 163
1.3. Свойство единственности голоморфной функции ... 165
1.4. Бесконечные произведения ... 166
1.5. Последовательность Вейерштрасса ... 167
1.6. Первичные множители Вейерштрасса ... 168
1.7. Существование целой функции с бесконечным множеством нулей ... 169
1.8. Разложение целой функции на первичные множители Вейерштрасса ... 171
1.9. Каноническое произведение ... 172
1.10. Разложение $\sin z$ на множители ... 173
§ 2. Разложение мероморфной функции на простейшие дроби ... 176
2.1. Мероморфная функция ... 176
2.2. Мероморфная функция в $\overline{\mathbb{C}}$ с конечным числом полюсов ... 177

2.3. Мероморфная функция в $\mathbb{C}$ с бесконечным числом полюсов 178
2.4. Существование мероморфной функции в $\mathbb{C}$ с бесконечным множеством полюсов 180
2.5. Разложение мероморфной функции в $\mathbb{C}$ на простые дроби 182
2.6. Случай простых полюсов 183
§ 3. Примеры применения теоремы Миттаг-Леффлера 184
3.1. Разложение $1/\sin z$ на простейшие дроби 184
3.2. Разложение $\operatorname{ctg} z$ на простейшие дроби 186
3.3. Разложение $1/\sin^2 z$ на простейшие дроби 187
3.4. Разложение $\ln(\sin z/z)$ 187
3.5. Представление мероморфной функции через целые функции 188
§ 4. Гамма-функция Эйлера 188
4.1. Постановка задачи и её решение 188
4.2. Свойства Γ-функции 193
4.3. Формула умножения 194
Задачи 197

ЛИТЕРАТУРА 199

Учебное издание

АЛЕКСАНДРОВ Игорь Александрович

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ
Часть 1

Учебное пособие

Редактор В.Г. Лихачева
Компьютерная верстка Т.В. Дьяковой

Подписано в печать 30.07.2012.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Печ. л. 12,5; усл. печ. л. 11,6; уч.-изд. л. 11,4. Тираж 500. Заказ

ООО «Издательство ТГУ», 634029, г. Томск, ул. Никитина, 4
ООО «Интегральный переплет», 634040, г. Томск, ул. Высоцкого, 28, стр. 1