УДК 530.145

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЧАСТИЦЫ В ДВУХЯМНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ И ПСЕВДО-СУПЕРСИММЕТРИЯ

В.Г. БАГРОВ, Б.Ф. САМСОНОВ, В.В. ШАМШУТДИНОВА

Аннотация. Мы демонстрируем возможность обнаружения когерентного разрушения туннелирования в двухуровневом приближении в двухямном потенциале за счет воздействия непериодическими гладкими возмущениями. Анализ поведения вероятности туннелирования показал, что вероятность осциллирует между некоторым минимальным значением, которое может превосходить 1/2, и максимальным значением, приближающимся к 1, и при приближении параметров возмущения к критическим происходит сглаживание осцилляций. В результате вероятность становится функцией, монотонно растущей со временем до некоторого предельного значения, которое может превышать 1/2. Эти непериодические возмущения были получены на основе обобщения метода операторов преобразования на систему Дирака с эффективным неэрмитовым гамильтонианом, описывающую эволюцию двухуровневой системы. Построены суперзаряды и супергамильтониан, которые вместе с операторами преобразования цепочки преобразований замыкают полиномиальную псевдо-супералгебру, что позволяет связать обнаруженный эффект с наличием полиномиальной псевдо-суперсимметрии у двухуровневой системы.

Ключевые слова: точно решаемые модели, преобразование Дарбу, псевдо-суперсимметрия.

1. Введение

Эволюция квантовой частицы в двухямном потенциале является одной из наиболее распространенных задач квантовой механики. Изучение квантовой динамики такой системы представляет интерес как для фундаментальной, так и для прикладной науки, особенно для различных областей физики, биологии и химии.

В начале 90-х годов была предсказана возможность подавления переходов частицы из одной ямы в другую при определенном выборе параметров внешних воздействий. Открытие этого явления принадлежит научной группе, возглавляемой Хангги [1]–[3], которые изучали локализацию квантовой частицы в двухямном потенциале под действием периодического поля. Это явление называют когерентным разрушением туннелирования [1], [3]–[7], динамической локализацией [8], [9] или захватом населенности [10], в зависимости от условий рассматриваемой задачи [11].

Стоит отметить, что первое сообщение о разрушении туннелирования было связано с изучением поведения двухуровневой системы в синусоидальном поле [12]. Вероятность перехода сильно зависела от выбора параметров внешнего сигнала. Позже это явление было переоткрыто. Исследование данного эффекта в двухямном потенциале в двухуровневом приближении было проведено в работе [4].

V.G. Bagrov, B.F. Samsonov, V.V. Shamshutdinova, Particle localization in a double-well potential and pseudo-supersymmetry.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям России по контракту No 02.740.11.0238, гранта НШ No 871.2008.2, гранта РФФИ No 06- 02-16719 и ФЦП Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы.

Поступила 22 июня 2009 г.

Когерентное разрушение туннелирования подразумевает локализацию квантовой частицы в одной из потенциальных ям, а именно, в той, в которой она находилась в начальный момент времени. Чаще всего это достигается за счет модуляции амплитуды или частоты периодических сигналов.

В данной работе мы демонстрируем возможность обнаружения обратного эффекта в двухямном потенциале в двухуровневом приближении, при котором частица локализована в яме, отличной от той, в которой она была первоначально, причем за счет воздействия непериодическими гладкими возмущениями.

Эти непериодические возмущения были получены при использовании методов суперсимметричной квантовой механики (SUSY QM) для изучения свойств двухуровневого атома во внешнем электромагнитном поле, что позволило установить наличие полиномиальной псевдосуперсимметрии у данной системы [13]–[15].

2. Двухямный потенциал в двухуровневом приближении

В этой работе мы ограничимся лишь качественным анализом физических явлений, возникающих при движении частицы в двухямном потенциале, и не будем иметь дело с точными количественными вычислениями, которые не представляют интереса в случае двухуровневого приближения.

Рассмотрим движение частицы в потенциале, состоящем из двух симметричных ям, разделенных барьером. Если бы барьер был бесконечным, то частица, находясь в одной из ям, не могла бы ее покинуть. Точные значения энергии частицы известны из курса квантовой механики [16], они не представляют в данном случае интереса. Более важным является тот факт, что уровни энергии являются двукратно вырожденными, поскольку отвечают движению частицы только в одной или в другой яме, и одинаковы для обеих ям. Возможность перехода через барьер конечной высоты приводит к расщеплению каждого из уровней на дублеты, соответствующие состояниям, в которых частица движется одновременно в обеих ямах. Интервал между дублетами намного больше, чем расстояние внутри них. Мы ограничим себя рассмотрением нижней пары энергетических уровней.

Для анализа туннельного эффекта сквозь потенциальный барьер конечной высоты целесообразно изменить базис, перейдя к волновым функциям, описывающим движение в каждой из ям. Эти функции представляют собой симметричную и антисимметричную комбинацию волновых функций, отвечающих уровням нижнего дублета [17].

Таким образом, все вычисления могут быть выполнены в двумерном подпространстве пространства состояний или, другими словами, в двухуровневом приближении [18].

В двухуровневом приближении движение частицы в двухямном потенциале под действием внешней силы $f = f(t)$ может быть описано уравнением Шредингера с псевдоспиновым гамильтонианом [19]

$$H_{tun} = E\sigma_1 + f(t)\sigma_3\,. \tag{1}$$

Здесь E — энергетическая щель между основным и возбужденным состояниями двухуровневой системы или ширина расщепления уровней двухямного потенциала, $\sigma_{1,2,3}$ — стандартные матрицы Паули. С другой стороны, эволюция двухуровневой системы во внешнем поле подчинена уравнению Шредингера с гамильтонианом [19]

$$H_E = E\sigma_3 - f\,(t)\,\sigma_1. \tag{2}$$

Эти два оператора связаны унитарным преобразованием $R = \exp(i\pi\sigma_2/4)$, т.е. поворотом на 90° вокруг оси Y. Эта связь позволяет обобщить результаты, полученные для двухуровневой системы, в нашем случае двухуровневого атома [13]–[15], на случай двухямного потенциала в двухуровневом приближении.

3. Преобразование Дарбу одномерного стационарного уравнения Дирака

Опишем основную идею используемого метода [20]. Матричное уравнение Шредингера двухямного потенциала при $f = f_0(t)$:

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0(t) & E\\ E & -f_0(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, \tag{3}$$

где ψ_1 и ψ_2 есть коэффициенты разложения волновой функции частицы по выбранному нами базису, может быть представлено в виде

$$h_0\Psi = E\Psi, \quad h_0 = \gamma\frac{d}{dt} + V_0\left(t\right), \tag{4}$$

$$V_0(t) = i\sigma_2 f_0\left(t\right), \quad \gamma = i\sigma_1, \quad \Psi = \left(\psi_1, \psi_2\right)^{\top}. \tag{5}$$

Уравнение (4) имеет вид одномерного стационарного уравнения Дирака с эффективным неэрмитовым гамильтонианом, в котором время играет роль пространственной переменной и $V_0\left(t\right)$ представляет собой матричнозначный потенциал, определяемый функцией $f_0\left(t\right)$, которая также называется потенциалом. Следуя установившейся терминологии, оператор h_0 будем называть гамильтонианом, хотя он не соответствует никакой квантовомеханической системе. Параметры f_0 и E являются вещественными по построению.

Пусть решения уравнения (4) известны и необходимо найти решения этого уравнения с другим потенциалом

$$h_1\Phi = E\Phi, \quad h_1 = \gamma\frac{d}{dt} + V_1\left(t\right), \tag{6}$$

где $V_1(t) = i\sigma_2 f_1\left(t\right)$. Данная задача может быть решена, если будет найден оператор L такой, что он удовлетворяет операторному равенству (соотношению сплетения) [21]:

$$Lh_0 = h_1 L\,. \tag{7}$$

В этом случае решения уравнения (6) можно получить, применяя оператор L к решениям исходного уравнения (4), $\Phi = L\Psi$. Соотношение сплетения (7) является неотъемлемой частью теории операторов преобразования и, в частности, операторов преобразования Дарбу [21].

Повторное применение выше описанного преобразования позволяет генерировать новые нетривиальные потенциалы, для которых уравнение Шредингера двухуровневой системы имеет точные решения. Результирующий оператор цепочки таких преобразований $L_{0,n} = L_{n-1,n}\ldots L_{1,2}L_{0,1}$ будет сплетать начальный и конечный гамильтонианы:

$$L_{0,n}h_0 = h_n L_{0,n}\,. \tag{8}$$

В [13]–[15] техника операторов преобразования, развитая для одномерного уравнения Дирака с эрмитовым гамильтонианом [20], была обобщена на случай неэрмитового оператора Гамильтона. Это позволило построить семейство новых возмущений двухуровневой системы, для которых уравнение Шредингера имеет точное решение. В данной работе представлен ряд точно решаемых возмущений для задачи о частице в двухямном потенциале, обладающих рядом специфических свойств.

4. Скрытая полиномиальная псевдо-суперсимметрия двухуровневой системы

Неэрмитовые гамильтонианы играют важную роль в современной физике и к настоящему времени нашли широкое применение в различных ее областях. Среди них особое место занимает класс псевдо-эрмитовых операторов [22].

Пусть A — линейный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве, и η — линейный, эрмитов, обратимый оператор. Оператор $A^{\sharp}$ называется псевдо-эрмитово сопряженным оператору A относительно η, если выполняется следующее равенство:

$$A^{\sharp} = \eta^{-1}A^{\dagger}\eta, \tag{9}$$

где $A^{\dagger}$ — обычный эрмитово сопряженный к A оператор. Оператор H называется псевдоэрмитовым относительно η, если $H^{\sharp} = H$, т.е.

$$H^{\dagger} = \eta H\eta^{-1}. \tag{10}$$

В [13] установлено, что для дираковских гамильтонианов (4) и (6), связанных преобразованием Дарбу, справедливо следующее соотношение:

$$h_{0,1} = J h_{0,1}^{\dagger} J\,, \quad J = \sigma_1, \tag{11}$$

которое свидетельствует о том, что эти операторы являются псевдо-эрмитовыми относительно оператора $J = \sigma_1$. Это обстоятельство позволило получить обобщение свойств факторизации операторов преобразования, имеющих место для эрмитовых операторов. Ниже приведены соотношения сплетения и им эрмитово сопряженные как для эрмитовых гамильтонианов, так и в случае псевдо-эрмитовых операторов.

Эрмитовые гамильтонианы	Псевдо-эрмитовые гамильтонианы
$Lh_0 = h_1 L$ $L^{\dagger} h_1 = h_0 L^{\dagger}$	$Lh_0 = h_1 L$ $JL^{\dagger}Jh_1 = h_0 JL^{\dagger}J$
$L^{\dagger}L = h_0^2 - \lambda^2$ $LL^{\dagger} = h_1^2 - \lambda^2$	$JL^{\dagger}JL = h_0^2 - \lambda^2$ $LJL^{\dagger}J = h_1^2 - \lambda^2$
$\lambda \in \mathbb{R}$	$i\lambda \in \mathbb{R}$
$L_{0,n}^{\dagger}L_{0,n} = P\left(h_0^2\right)$ $L_{0,n}L_{0,n}^{\dagger} = P\left(h_n^2\right)$	$JL_{0,n}^{\dagger}JL_{0,n} = P\left(h_0^2\right)$ $L_{0,n}JL_{0,n}^{\dagger}J = P\left(h_n^2\right)$

Установлено, что суперпозиция операторов $JL^{\dagger}JL$ преобразует решения уравнения с гамильтонианом h_0 в решения того же уравнения, т.е. является оператором симметрии этого уравнения. Совершенно аналогично, оператор $LJL^{\dagger}J$ является оператором симметрии уравнения с гамильтонианом h_1. Эти суперпозиции операторов могут быть представлены в виде полиномов соответствующего гамильтониана, как и в случае эрмитовых гамильтонианов. При этом для псевдо-эрмитовых операторов Гамильтона постоянная факторизации (см., например, [13], [20], [21]) должна быть чисто мнимой. Это условие обеспечивает вещественность внешнего воздействия (функции $f(t)$) после преобразования.

Введем следующие 4×4 матрицы для цепочки из n преобразований:

$$H = \begin{pmatrix} h_0 & 0 \\ 0 & h_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$Q_1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L_{0,n} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & JL_{0,n}^{\dagger}J \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Операторы Q_1 и Q_2 являются псевдо-эрмитовыми относительно J

$$Q_1 = \mathrm{J} Q_2^{\dagger} \mathrm{J}. \tag{14}$$

Легко заметить, что соотношения сплетения эквивалентны коммутационным соотношениям

$$[Q_1, H] = [Q_2, H] = 0, \tag{15}$$

а формулы факторизации можно записать в виде

$$Q_1 Q_2 + Q_2 Q_1 = (H^2 - \Lambda_1^2)(H^2 - \Lambda_2^2)\ldots(H^2 - \Lambda_n^2). \tag{16}$$

Очевидно, что операторы Q_1 и Q_2 являются нильпотентными. Формулы (14)–(16) демонстрируют, что операторы H, Q_1 и Q_2 замыкают полиномиальную псевдо-супер態алгебру [20], [22]. Их существование ассоциируется с наличием псевдо-суперсимметрии в системе [22]. С этой точки зрения с двухуровневой системой, следовательно, и с двухямным потенциалом в двухуровневом приближении, может быть связана полиномиальная псевдо-суперсимметрия. Поскольку псевдо-супералгебра не следует непосредственно из исходного уравнения, то мы связываем ее со скрытой полиномиальной псевдо-суперсимметрией.

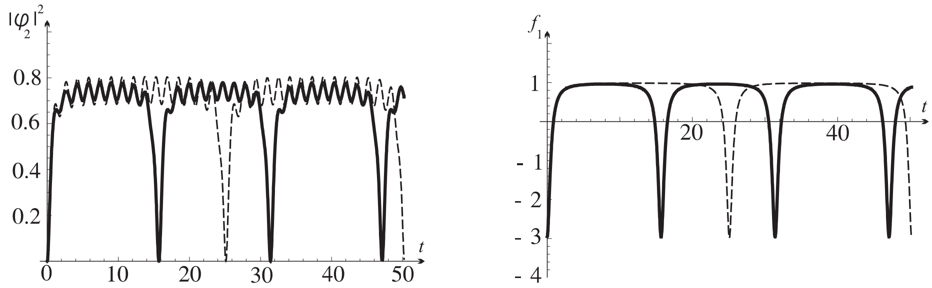

Рис. 1. Вероятность перехода и внешнее возмущение (17) при $E = \sqrt{3}$, $f_0 = 1$, $a = 0,005$, $\varpi = 1/5$ (жирная линия) и $\varpi = 1/8$ (пунктирная линия)

5. Точно решаемые возмущения

Рассмотрим точно решаемый потенциал системы Дирака, полученный в результате применения однократного преобразования Дарбу [13]–[15], [23]

$$f_1\,(t) = f_0 + \frac{2\varpi^2}{R\cos(2\varpi t + 2a) - f_0}, \quad \varpi^2 = f_0^2 - R^2 > 0. \tag{17}$$

Здесь f_0 — постоянный потенциал исходного уравнения (4) с гамильтонианом h_0, R — вещественная часть чисто мнимой постоянной факторизации $\lambda = iR$, a является произвольной вещественной постоянной. Потенциал представляет собой периодическую функцию, амплитуда которой связана с частотой. Явное выражение для вероятности обнаружения частицы в правой яме имеет громоздкий вид, и мы его не приводим, ограничившись лишь графическими иллюстрациями. Пусть в начальный момент времени частица находилась в левой яме. График вероятности обнаружить частицу в правой яме (см. рис. 1) представляет собой суперпозицию двух колебаний, осцилляции с большой частотой происходят на фоне колебаний с малой частотой. На рисунках проиллюстрирована зависимость от частоты ϖ. Важно отметить, что несмотря на то, что поведение вероятности носит периодический характер, ее минимальное значение превышает $1/2$ в течение длительного промежутка времени. Это позволяет говорить о возможности локализации частицы в правой яме.

Если модуль постоянной факторизации больше исходного потенциала $R > f_0$, происходит замена тригонометрического косинуса на гиперболический в выражении для преобразованного потенциала:

$$f_1\,(t) = f_0 + \frac{2\mu^2}{-R\,\mathrm{ch}(2\mu t + 2a) + f_0}, \quad \mu^2 = R^2 - f_0^2. \tag{18}$$

Поведение вероятности перехода частицы из левой ямы в правую изображено на рисунке 2 для различных значений параметра μ. График вероятности отличается от приведенного на рисунке 1 отсутствием колебаний с малой частотой ϖ (μ). Вследствие этого период, в течение которого вероятность превышает значение $1/2$, фактически стал неограничен.

В пределе $f_0 \to R$ потенциал (17) принимает простой вид

$$f_1(t) = f_0 - \frac{4f_0}{1 + 4f_0^2 t^2}. \tag{19}$$

В общем случае вероятность локализации частицы в правой яме при наличии возмущения (19) с течением времени совершает колебания. Однако существуют такие значения параметров системы ($E^2 = 3f_0^2$), при которых вероятность перестает осциллировать и становиться функцией, монотонно растущей от нуля вплоть до предельного значения $3/4$ [13]:

$$|\varphi_2\,(t)\,|^2 = \frac{E^2 t^2}{1 + \frac{4}{3}E^2 t^2}. \tag{20}$$

При слабых отклонениях параметров системы от этих критических значений возникают колебания вероятности, но ее минимальное значение по-прежнему превышает $1/2$ (см. рис. 3).

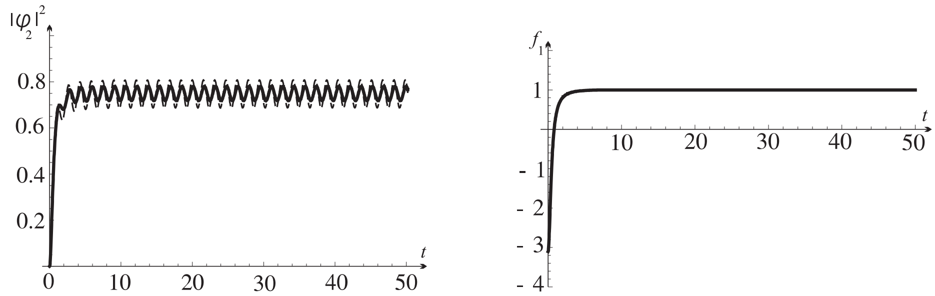

Рис. 2. Вероятность перехода и внешнее возмущение (18) при $E = \sqrt{3}$, $f_0 = 1$, $a = 0,005$ и $\mu = 1/3$ (жирная линия), $\mu = 1/8$ (пунктирная линия)

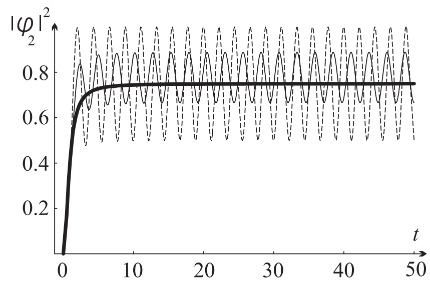

Рис. 3. Вероятность перехода для возмущения (19) при $E = 0,1$, $f_0 = 0,058$ (жирная линия), $f_0 = 0,067$ (тонкая линия) и $f_0 = 0,09$ (пунктирная линия)

Функция $f = f_2(t)$ представляет собой точно решаемый потенциал, полученный при двукратном применении развитой техники [14]:

$$f_2(t) = f_0 - \frac{12f_0\left(-3 + 24f_0^2t^2 + 16f_0^4t^4\right)}{9 + 108f_0^2t^2 + 48f_0^4t^4 + 64f_0^6t^6}. \tag{21}$$

Вероятность перехода частицы в другую яму под действием этого потенциала носит периодический характер. Тем не менее, существуют значения параметров, при которых она становится монотонной функцией, причем при двукратном преобразовании можно указать два набора таких значений: $E^2 = f_0^2/(1 \pm 2/\sqrt{5})$. На рисунке 4 изображено поведение вероятности при этих критических значениях параметров и при слабых отклонениях от них.

Важно отметить, что потенциал f_1 (19), приводящий к монотонному поведению вероятности перехода частицы в соседнюю яму, был получен при использовании суперсимметричных методов, а гамильтониан с этим потенциалом участвует в замыкании $N = 2$ псевдо-супералгебры. Гамильтониан, связанный с потенциалом f_2 (21), получен при двукратном использовании техники сплетающих операторов и отвечает $N = 3$ псевдо-супералгебре.

Анализ поведения вероятности нахождения частицы в одной из потенциальных ям показывает, что изменение параметров представленных в работе внешних воздействий позволяет управлять значением вероятности нахождения частицы в заданной яме и длительностью ее пребывания в ней. Например, в случае воздействия потенциалом (17) изменение его частоты приводит к увеличению или уменьшению временного интервала, в течение которого частица находится в правой яме с вероятностью 3/4 при условии, что в начальный момент времени она была локализована в левой яме (см. рис. 5).

6. Заключение

Использование техники сплетающих операторов при изучении движения частицы в двухямном потенциале позволило нам установить тот факт, что с физическими системами, сводимыми к

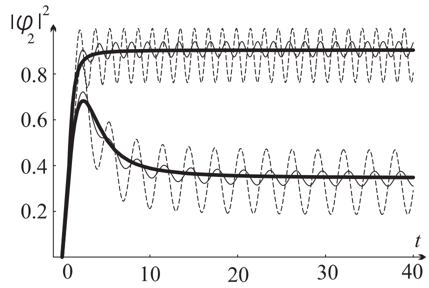

Рис. 4. Вероятность перехода для возмущения (21) при $E = 1$, $f_0 = 1 + 2/\sqrt{5}$ (жирная линия), $f_0 = 1.33$ (тонкая линия) и $f_0 = 1.23$ (пунктирная линия) сверху и $f_0 = 1 - 2/\sqrt{5}$ (жирная линия), $f_0 = 0.34$ (тонкая линия) и $f_0 = 0.38$ (пунктирная линия) снизу.

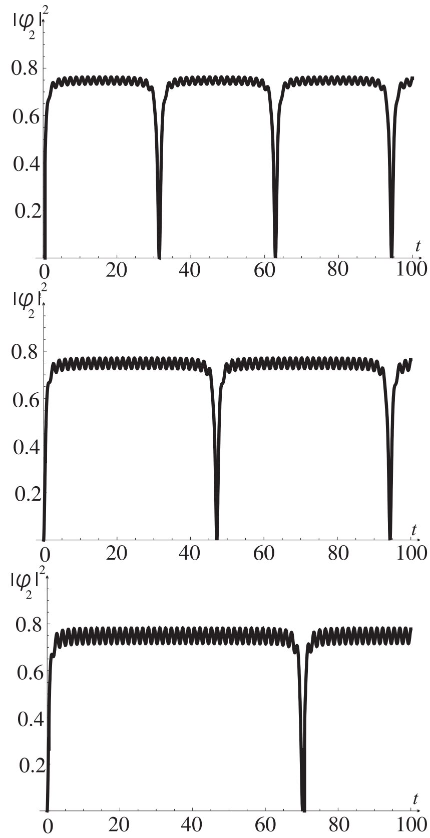

Рис. 5. Вероятность перехода при внешнем возмущении (17) при $E = \sqrt{3}$, $f_0 = 1$, $a = 0,005$, $\varpi = 0,099$, $\varpi = 0,066$ и $\varpi = 0,045$ (сверху вниз)

двухуровневым моделям, может быть связана полиномиальная псевдо-суперсимметрия, а также показать, что явление, противоположное когерентному разрушению туннелирования в двухямном потенциале, может быть вызвано непериодическим внешним воздействием. Поскольку аналитический вид этого воздействия был получен с помощью суперсимметричного метода, возникновение данного явления мы объясняем присутствием псевдо-суперсимметрии в системе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. Grossmann, T. Dittrich, and P. Hanggi Phys. Rev. Lett. **67**, 516 (1991).
2. F. Grossmann, T. Dittrich, and P. Hanggi Physica B **175**, 293 (1991).
3. F. Grossmann, P. Jung, T. Dittrich, and P. Hanggi Z. Phys. B **85**, 315 (1991).
4. F. Grossmann and P. Hanggi Europhys. Lett. **18**, 571 (1992).
5. J.-M. Lopez-Castillo, A. Filali-Mouhim, and J.-P. Jay-Gerin, J. Chem. Phys. **97**, 1905 (1992).
6. R.I. Cukier, M. Morillo, and J.M. Casado Phys. Rev. B **45**, 1213 (1992).
7. J.M. Gomez Llorente and J. Plata Phys. Rev. A **45**, R6958 (1992).
8. S. Raghavan, V.M. Kenkre, D.H. Dunlap, A.R. Bishop, and M.I. Salkola Phys. Rev. A **54**, R1781 (1996).
9. D.H. Dunlap and V.M. Kenkre, Phys. Rev. B **34**, 3625 (1986).
10. G.S. Agarwal and W. Harshawardhan Phys. Rev. A **50**, R4465 (1994).
11. B. M. Garraway and N. V. Vitanov Phys. Rev. A **55**, 4418 (1997).
12. P.K. Aravind and J.O. Hirschfelder J. Phys. Chem. **88**, 4788 (1984).
13. B.F. Samsonov and V.V. Shamshutdinova J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 4715 (2005).
14. V.V. Shamshutdinova, B.F. Samsonov, and D.M. Gitman Ann. Phys. (NY) **322**, 1043 (2007).
15. B.F. Samsonov and V.V. Shamshutdinova J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 244023 (2008).
16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика.* Т. 3. М.: Наука. 1989. 768 с.
17. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике.* Т. 8. М.: Мир. 1966. 267 с.
18. R. Bavli and H. Metiu Phys Rev. **47**, 3299 (1993).
19. M. Grifoni and P. Hänggi Phys. Rep. **304**, 229 (1998).
20. L.M. Nieto, A.A Pecheritsin, and B.F. Samsonov Ann. Phys. (NY) **305**, 151 (2003).
21. Багров В.Г., Самсонов Б.Ф. // ЭЧАЯ. 1997. Т. 28, вып. 4. С. 951.
22. A. Mostafazadeh J. Math. Phys. **43**, 205 (2002); Nucl. Phys. B. **640**, 419 (2002).
23. V.G. Bagrov, M.C. Baldiotti, D.M. Gitman, and V.V. Shamshutdinova Ann. Phys. **14**, 390 (2005).

Владислав Гавриилович Багров,
Томский государственный университет,
ул. Проспект Ленина, 36,
634050, г. Томск, Россия
E-mail: `bagrov@phys.tsu.ru`

Борис Федорович Самсонов,
Томский государственный университет,
ул. Проспект Ленина, 36,
634050, г. Томск, Россия
E-mail: `samsonov@phys.tsu.ru`

Варвара Владимировна Шамшутдинова,
Томский политехнический университет,
ул. Проспект Ленина, 30,
634050, г. Томск, Россия
E-mail: `shvv@phys.tsu.ru`