На правах рукописи

Капарулин Дмитрий Сергеевич

ЛАГРАНЖЕВЫ СТРУКТУРЫ, СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

01.04.02 – Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Томск – 2012

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» на кафедре квантовой теории поля

Научные руководители: доктор физико-математических наук, профессор Ляхович Семен Леонидович; доктор физико-математических наук, профессор Шарапов Алексей Анатольевич

Официальные оппоненты: Ольшанецкий Михаил Аронович, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное учреждение «Государственный Научный Центр Российской Федерации Институт теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Алиханова», лаборатория теории сильных взаимодействий, ведущий научный сотрудник

Галажинский Антон Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», лаборатория математической физики, заведующий лабораторией

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Физический институт Российской академии наук им. П.Н. Лебедева», г. Москва

Защита диссертации состоится 15 ноября 2012 г. в 17.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.267.07 созданного на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» по адресу: 634050 г.Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан «__» октября 2012 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Ивонин Иван Варфоломеевич

Общая характеристика работы

Квантовая теория поля является одним из фундаментальных разделов современной теоретической физики. Помимо описания собственно теории физических полей, она составляет теоретическую основу физики элементарных частиц, физики атомного ядра, астрофизики и космологии, и имеет важное значение для многих других областей современной физики: от физики конденсированного состояния до физики плазмы. Формализм современной квантовой теории поля опирается на ряд принципов, среди которых особенно важными считаются вариационный принцип, принцип калибровочной симметрии и принцип локальности.

Вариационный принцип предполагает, что полевые уравнения являются экстремалями некоторого функционала действия. Одним из первых в историческом порядке, и ,возможно, важнейшим следствием этого условия является взаимосвязь между симметриями действия и законами сохранения. Комплекс аспектов, связанных с соответствием между симметриями и законами сохранения в настоящее время является разделом теории поля, объединенным под общим названием теоремы Нетер. Широкое применение этой теоремы привело к распространенному мнению о том, что каждый закон сохранения происходит из некоторой симметрии. За рамками вариационной динамики, между этими объектами нет никакого естественного соответствия, хотя понятия симметрии и закона сохранения сохраняют принципиальную важность вне зависимости от того, являются полевые уравнения вариационными или нет.

На современном этапе развития теории поля исследуется ряд моделей, уравнения движения которых не следуют из вариационного принципа. Широко известными примерами таких моделей являются самодуальные уравнения Янга-Миллса, киральные бозоны, уравнения Дональдсона-Уленбека-Яу, различные многомерные конформные теории поля с расширенной суперсимметрией, уравнения Зайберга-Виттена. Все эти теории являются явно ковариантными и их уравнения движения инварианты относительно изометрий пространства-времени. Естественно задаться вопросом о том каким законам сохранения могут соответствовать пространственно-временные симметрии. В отсутствие вариационного принципа теорема Нетер не дает ответа на этот вопрос. Как было отмечено С. Анко и Ю. Похъянпелто, одними из авторов классификации симметрий и законов сохранения уравнений Баргманна-Вигнера, «в этой ситуации нет немедленного нетеровского соответствия между симметриями и законами сохранения, так как уравнения безмассовых полей спина s в терминах спинорного поля не допускают локальной функции Лагранжа» (Anco S., Pohjanpelto J. Conserved currents of massless fields of spin $s > 0$ // R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 2003. V.459. P.1215–1239.). В диссертации рассматривается проблема соответствия между пространственно-временными симметриями в теории антисимметричного тензорного поля, киральных бозонов в различных пространственно-временных размерностях и свободных безмассовых полей высших спинов, описываемых уравнением Баргманна-Вигнера.

Указанное выше соответствие является частью более общей конструкции, которая связывает глобальные симметрии и законы сохранения. Для того, чтобы изложить суть этой конструкции, предварительно поясним понятие *характеристики*. В теории поля каждый закон сохранения задается вектором (сохраняющимся током), дивергенция которого дается линейной комбинацией левых частей полевых уравнений. Коэффициенты этой линейной комбинации являются в общем случае дифференциальными операторами и называются характеристиками. Обратное соотношение между характеристиками и сохраняющимися токами задается интегральной формулой, которая решает уравнение дивергенции при помощи гомотопии для комплекса Эйлера-Лагранжа на пространстве струй. Тем самым, устанавливается взаимно-однозначное (по модулю естественных эквивалентностей) соответствие, позволяющее свести все операции над сохраняющимися токами к действиям над характеристиками. В этих терминах утверждение теоремы Нетер состоит в том, что каждый генератор симметрии функционала действия определяет характеристику и наоборот. Для невариационных уравнений движения отождествление этих понятий оказывается невозможным потому, что симметрии и характеристики являются элементами разных пространств. Взаимосвязь между этими пространствами задается специальным дифференциальным оператором, который был уже введен ранее П.О. Казинским, С.Л. Ляховичем и А.А. Шараповым (Kazinski P.O., Lyakhovich S.L., Sharapov A.A. Lagrange structure and quantization // JHEP. 2005. V.05, No.07. P.076-1–41.) в контексте проблемы квантования невариационных калибровочных теорий и назван лагранжевым якорем. В настоящей диссертации доказано, что каждый лагранжев якорь задает отображение из пространства характеристик в пространство глобальных симметрий. Важно отметить, что условие существования лагранжева якоря является менее жестким, чем наличие вариационной формулировки для полевых уравнений. Последнее утверждение, подтверждается и многочисленными примерами полевых уравнений, имеющих нетривиальный лагранжев якорь, но не следующих из вариационного принципа.

Теорема Нетер фактически использует существование тождественного (канонического) лагранжева якоря для вариационных уравнений движения. Канонический якорь задает тождественное отображение из пространства характеристик в пространство симметрий функционала действия. В случае невариационных уравнений движения, выбор лагранжевого якоря уже не столь однозначен и очевиден. В конкретных моделях, однако, произвол в выборе якоря может быть значительно уменьшен путем наложения тех или иных физических ограничений (например, требований ковариантности и локальности).

В присутствии калибровочных симметрий или тождеств Нетер глобальные симметрии и характеристики определены весьма неоднозначно, и их инвариантное математическое определение достигается путем перехода к соответствующим фактор-пространствам. Кроме того, в пространстве самих лагранжевых якорей можно выделить подпространство тривиальных якорей (не представляющих интереса ни с точки зрения квантования, ни с точки зрения установления взаимосвязи между симметриями и законами сохранения), что также мотивирует введение соответствующего фактор-пространства. Именно учет этих эквивалентностей делает соответствующие определения несколько громоздкими при наличии калибровочных симметрий или тождеств Нетер.

Наиболее последовательный учет калибровочной структуры динамики достигается в рамках БРСТ-формализма. В конце 90-х – начале 2000-х годов было установлено, что многие важные объекты и конструкции калибровочной динамики могут быть естественным образом отождествлены с элементами групп локальных БРСТ-когомологий. К числу таких объектов, относятся не только симметрии и законы сохранения, но также, например, квантовые аномалии, совместные взаимодействия, допустимые контр-члены в перенормированном действии. Сама же теорема Нетер о связи симметрий и законов сохранения допускает компактную когомологическую формулировку. Заметим, что все эти достижения относятся к вариационной теории поля.

Общая алгебраическая схема построения БРСТ-комплекса для невариационных калибровочных теорий была сформулирована в работах научных руководителей диссертации. Используя этот комплекс можно попытаться распространить упомянутые выше результаты БРСТ-теории с вариационных на невариационные калибровочные теории. Эта задача, однако, требует систематического учета локальной структуры общего БРСТ-комплекса в невариационной теории поля, которая не была должным образом изучена ранее. Совмещение алгебраической схемы построения невариационного БРСТ-комплекса с пространственно-временной локальностью является одной из задач диссертации. С учетом локальности все рассмотренные выше классы объектов, а именно, глобальные симметрии, характеристики, лагранжевы якоря и законы сохранения могут быть отождествлены с соответствующими группами локальных БРСТ-когомологий невариационного комплекса. Пуассонова структура на расширенном пространстве полей задает большое количество разнообразных алгебраических структур на группе локальных БРСТ-когомологий. Их частные случаи могут рассматриваться как алгебра Ли глобальных симметрий и невариационное обобщение скобки Дикого сохраняющихся токов. Еще одна из таких структур, изученная в диссертации (пояснения даются ниже) позволяет связывать симметрии и законы сохранения. Эта связь может пониматься как когомологическое обобщение теоремы Нетер для невариационных полевых уравнений.

С точки зрения задачи квантования невариационных уравнений движения, лагранжев якорь является необходимым ингредиентом для построения лагранжевой структуры, которая является неотъемлемой частью квантового БРСТ-заряда. При этом лагранжев якорь должен удовлетворять так называемому условию интегрируемости, чтобы квантовая теория существовала как локальная теория поля. Указанное обстоятельство позволяет рассматривать вычисление допустимых интегрируемых лагранжевых якорей как актуальную и самостоятельную задачу теории поля. Среди нелагранжевых моделей современной теории поля одной из важнейших в последние годы считаются уравнения взаимодействующих безмассовых полей высших спинов в форме развернутого представления Васильева (Vasiliev M.A. Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in $(3+1)$-dimensions // Phys.Lett.B. 1990. V.243. P. 378–382.). Задача квантования этой теории до сих пор не решена. Уравнения Васильева, по построению, являются невариационными, и их вариационная формулировка до сих пор неизвестна. С учетом вышесказанного, нахождение лагранжева якоря для этих уравнений могло бы рассматриваться в качестве первого шага для построения самосогласованной квантовой теории полей высших спинов. Особенность развернутого представления состоит в том, что уравнения движения содержат бесконечное число полей и имеют вид внешней дифференциальной алгебры. Последнее обстоятельство делает поиск допустимых лагранжевых якорей весьма нетривиальной задачей даже на уровне свободных уравнений движения. В данной диссертации структура лагранжевого якоря в развернутом представлении исследуется на примере развернутого представления безмассового скалярного поля.

Методы и подходы. Основным методом, используемым в диссертации является БРСТ-формализм. Для вычисления групп когомологий БРСТ-дифференциала использовались различные методы гомологической алгебры, в частности, метод спектральных последовательностей, который является наиболее эффективным средством для вычисления когомологий фильтрованных комплексов. Систематический учет локальной структуры полей достигается за счет использования формализма теории струй.

Цели работы. Исходя из имеющегося круга нерешенных проблем в данной области квантовой теории поля, в диссертации были поставлены следующие цели.

1. Обобщить теорему Нетер на случай необязательно вариационных полевых уравнений.

2. Разработать теорию локальных БРСТ-когомологий для необязательно вариационных полевых уравнений.

3. Выяснить взаимосвязь между группами когомологий, соответствующими симметриям и законам сохранения в необязательно лагранжевых теориях поля.

4. Установить необходимые и достаточные условия существования локального БРСТ-заряда.

5. Определить допустимый вид лагранжевой структуры в различных формулировках уравнений безмассовых полей высших спинов, а также для уравнений теории поля в форме развернутого представления.

Научная новизна и практическая ценность. Все основные результаты диссертации являются новыми и получены впервые. Результаты диссертации представляют интерес для специалистов в области квантовой теории поля и математической физики.

Среди новых результатов диссертации, имеющих значение при исследовании широкого круга проблем современной квантовой теории поля и математической физики, в первую очередь можно указать на предложенный в диссертации систематический метод установления взаимосвязи симметрий и законов сохранения в невариационных калибровочных теориях. До сих пор такая взаимосвязь могла систематически устанавливаться лишь в теориях поля, допускающих вариационный принцип. Также можно отметить построенное в диссертации обобщение скобок Дикого сохраняющихся токов для нелагранжевых полевых уравнений. Этот результат позволяет использовать метод скобок Дикого для исследования алгебраической структуры законов сохранения и построения новых законов сохранения по уже известным. Ранее это было возможно лишь в лагранжевых теориях.

В диссертации впервые разработана локальная БРСТ-теория для необязательно лагранжевых теоретико-полевых моделей. При этом, по сравнению с лагранжевой теорией, БРСТ-комплекс может иметь ряд принципиальных особенностей. В частности, как доказано в диссертации, в отличие от вариационного случая, локальность полного БРСТ-заряда вообще говоря не следует из локальности уравнений движения и лагранжева якоря. Если некоторая теория не допускает никаких интегрируемых лагранжевых якорей, то это может рассматриваться как препятствие к существованию локальной квантовой теории. Важным результатом является процедура построения лагранжевого якоря для моделей в развернутом представлении Васильева в том случае, когда теория допускала эквивалентную вариационную формулировку. Предполагается, что в перспективе эта процедура может быть использована для построения самосогласованной квантовой теории полей высших спинов.

Апробация работы и публикации. Результаты, полученные в диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. X Всероссийская конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука и образование» (Томск, 2008).

2. V конференция молодых ученых «Физика и химия высокоэнергетических систем» (Томск, 2009).

3. Международная летняя школа-семинар по проблемам современной теоретической и математической физики «Волга-21'2009» (Казань, 2009).

4. ESI Program on Higher Structures in Mathematics and Physics (Вена, 2010).

5. XXX Workshop on Geometric Methods in Physics (Беловежа, 2011).

6. XXXI Workshop on Geometric Methods in Physics (Беловежа, 2012).

По результатам работы опубликовано 8 печатных работ, в том числе 4 статьи в журналах из списка рекомендованных ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав основной части, заключения и списка литературы, содержащего 98 библиографических ссылок. Общий объем диссертации – 118 страниц. Работа содержит один рисунок.

Краткое содержание диссертации

Во введении приводится обзор полученных ранее результатов по теме работы. Дается краткое содержание диссертации, формулируются цели и задачи.

Глава 1 включает обзор полученных ранее результатов касающихся основного объекта диссертации – лагранжева якоря с точки зрения квантования невариационных калибровочных теорий. Рассматриваются калибровочные уравнения движения общего вида

$$T_a(\phi^i) = 0\,, \tag{1}$$

которые являются сечениями некоторого динамического расслоения $\mathcal{E} \to M$ над конфигурационным пространством полей M. При этом, не предполагается, что число уравнений равно числу полей. Здесь используются конденсированные обозначения Девитта. При этом, индекс i также включает локальные координаты $\{x^\mu\}$ на Δ-мерном пространственно-временном многообразии X так, что $\phi^i \equiv \phi^i(x)$. Суммирование по конденсированному индексу i включает интегрирование по X, а частная производная ∂_i понимается как вариационная. Использование таких конечномерных аналогий удобно для упрощенного понимания геометрии пространства траекторий и поэтому широко применяется при изучении многих общих вопросов калибровочной динамики.

Уравнения (1) могут допускать калибровочные симметрии и тождества Нетер:

$$R^i_{i_1}\partial_i T_a = U^b_{i_1 a}T_b, \qquad Z^a_{a_2}T_a \equiv 0\,,$$

где $R : \mathcal{F} \to TM$ и $Z : \mathcal{G} \to \mathcal{E}^*$ – генераторы калибровочных симметрий и тождеств Нетер; звездочка $\mathcal{E}^*$ обозначает дуальное расслоение к динамическому расслоению. Расслоения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ называются расслоениями калибровочных алгебр и тождеств Нетер.

Излагаемый в главе метод квантования уравнений движеная основан на концепции обобщенного уравнения Швингера-Дайсона. Постулируется что среднее значение любой физической величины дается континуальным интегралом

$$\langle \mathcal{O}\rangle = \int [d\phi]\mathcal{O}[\phi]\Phi[\phi]\,,$$

где функционал $\Phi[\phi]$, имеющий смысл амплитуды вероятности, является единственным (с точностью до нормировочного множителя) решением обобщенного уравнения Швингера-Дайсона:

$$\widetilde{T}_a(\phi,\bar{\phi})\Phi[\phi] = 0\,, \qquad \widetilde{R}_{i_1}(\phi,\bar{\phi})\Phi[\phi] = 0\,, \qquad \bar{\phi}_i = -i\hbar\frac{\delta}{\delta\phi^i}\,. \tag{2}$$

При этом связи Швингера-Дайсона $\widetilde{T}_a, \widetilde{R}_{i_1}$ рассматриваются как формальные ряды по степеням источников, канонически сопряженных к полям. Ведущие слагаемые связей совпадают с $\phi\bar{\phi}-$ символами уравнений движения и генераторов калибровочной симметрии

$$\widetilde{T}_a = T_a - V^i_a(\phi)\bar{\phi}_i + O(\bar{\phi}^2)\,, \qquad \widetilde{R}_{i_1} = R^i_{i_1}\bar{\phi}_i + O(\bar{\phi}^2)\,, \tag{3}$$

а все более высокие порядки по степеням источников определяются из условия, что (3) остаются связями первого рода на пространстве полей и источников. В частности, проверка условия инволюции в нулевом порядке по источникам приводит к уравнению

$$V^i_a\partial_i T_b - V^i_b\partial_i T_a = C^d_{ab}T_d\,, \tag{4}$$

где $C^d_{ab}(\phi)$ – некоторые структурные функции. Дифференциальный оператор $V : \mathcal{E}^* \to TM$, определяющий ведущий порядок деформации уравнений движения, называется лагранжевым якорем. Формулы (2) и (3) объясняют первостепенную роль лагранжева якоря с точки зрения квантования невариационных уравнений движения. Лагранжевой структурой называется совокупность лагранжева якоря, структурных функций C^d_{ab}, входящих в условие его совместности (4), полевых уравнений (1), их калибровочных симметрий и тождеств Нетер.

Вариационные уравнения движения $T_i = \partial_i S$ всегда допускают канонический лагранжев якорь $V^i_j = \delta^i_j$, который приводит к фейнмановской амплитуде вероятности $\Phi[\phi] = e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi]}$, что позволяет понимать изложенную выше процедуру квантования как невариационное обобщение метода квантования основанного на концепции континуального интеграла Фейнмана. В общем случае, лагранжев якорь может зависеть от полей и не быть обратимым. Если лагранжев якорь обратим, то оператор V^{-1} имеет смысл интегрирующего множителя в обратной задаче вариационного исчисления. Другой крайний случай $V = 0$ всегда допустим, и он соответствует классической амплитуде вероятности $\Phi[\phi] \sim \delta[T_a(\phi)]$, носителем которой являются решения классических уравнений движения.

В **главе 2** рассматривается связь симметрий и законов сохранения без обращения к БРСТ-теории. **Раздел 2.1** содержит терминологию пространства струй, локальной функции, локального функционала, которые необходимы для дальнейшего использования. **Раздел 2.2** содержит определения симметрии, присоединенной симметрии, характеристики. Для калибровочной теории все эти объекты определяются в терминах последовательности гомоморфизмов

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{R} TM \xrightarrow{J} \mathcal{E} \xrightarrow{Z^*} \mathcal{G}^* \longrightarrow 0$$

и их сопряженных

$$0 \longleftarrow \mathcal{F}^* \xleftarrow{R^*} T^*M \xleftarrow{J^*} \mathcal{E}^* \xleftarrow{Z} \mathcal{G} \longleftarrow 0\,.$$

Здесь $J = (J_{ia}), J_{ia} = \partial_i T_a$ – оператор универсальной линеаризации, звездочка J^*, Z^*, R^* обозначает сопряженный гомоморфизм. При ограничении на подпространство решений (массовую оболочку) Σ эти последовательности образуют коцепные комплексы. Пространства глобальных симметрий и присоединенных симметрий отождествляются с группами когомологий

$$\mathrm{RSym}(T) \simeq \frac{\mathrm{Ker}J|_\Sigma}{\mathrm{Im}R|_\Sigma}\,, \qquad \mathrm{ASym}(T) \simeq \frac{\mathrm{Ker}J^*|_\Sigma}{\mathrm{Im}Z|_\Sigma}\,.$$

Сечение $\Psi \in \mathcal{E}^*$ называется характеристикой, если

$$\Psi^a T_a = \int_X \partial_\mu j^\mu \tag{5}$$

для некоторого сохраняющегося тока j^μ. Характеристики образуют подпространство $\mathrm{Char}(T) \subset \mathrm{ASym}(T)$ в пространстве присоединенных симметрий. Это может быть легко видно, если подействовать вариационной производной на левую и правую часть (5). По модулю естественных эквивалентностей, между пространствами характеристик и сохраняющихся токов имеется взаимно-однозначное соответствие, что позволяет свести все операции над сохраняющимися токами к действиям над характеристиками. В **разделе 2.3** показано, что лагранжев якорь определяет преобразование коцепей

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "R"] & TM \arrow[r, "J"] & \mathcal{E} \arrow[r, "Z^*"] & \mathcal{G} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}^* \arrow[r, "Z"] \arrow[u, "W"] & \mathcal{E}^* \arrow[r, "J^*"] \arrow[u, "V"] & T^*M \arrow[r, "R^*"] \arrow[u, "V^*"] & \mathcal{F}^* \arrow[r] \arrow[u, "W^*"] & 0
\end{tikzcd}$$

при некотором $W : \mathcal{G}^* \to \mathcal{F}$. Преобразование коцепей индуцирует гомоморфизм в когомологиях

$$H(V) : \mathrm{ASym}(T) \to \mathrm{RSym}(T)\,,$$

который при ограничении на пространство характеристик дает отображение

$$\widetilde{H}(V) = H(V)\Big|_{\mathrm{Char}(T_s)} : \mathrm{Char}(T) \to \mathrm{RSym}(T)\,. \tag{6}$$

Последнее отображение может пониматься как обобщение теоремы Нетер на случай необязательно вариационных теорий поля. Симметрии принадлежащие образу (6) называются характеристическими симметриями. Для вариационных уравнений, снабженных каноническим лагранжевым якорем, воспроизводится стандартное нетеровское соответствие между симметриями и законами сохранения. В **разделе 2.4** исследуются свойства отображения (6). В частности, доказывается, что гомоморфизм (6) сюрьективен, если выполнено условие транзитивности, которое имеет смысл рангового условия для лагранжевого якоря.

В **главе 3** развивается теория локальных БРСТ-когомологий невариационного БРСТ-комлекса. В **разделе 3.1** вводится БРСТ-заряд для невариационной калибровочной теории типа (m,n):

$$\Omega = \bar{\varphi}^a T_a + c^{i_1} R^i_{i_1} \bar{\phi}_i + c^{i_1} U^b_{i_1 a} \bar{\varphi}^a \varphi_b + \bar{\varphi}^{a_2} Z^a_{a_2} \varphi_a + \dots \tag{7}$$

Здесь

$$\varphi^{i_k}\,, \varphi_{a_l}\,, \bar{\varphi}_{i_k}\,, \bar{\varphi}^{a_l}\,, \qquad k=0,\dots,m\,, \qquad l=1,\dots,n+1\,,$$

– координаты на расширенном фазовом пространстве $T^*\mathcal{M}$; Для полей и сопряженных к ним импульсам справедливо отождествление $\phi^i \equiv \varphi^{i_0}$, $\varphi_a \equiv \varphi_{a_1}$. К координатам приписываются градуировки, перечисленные в таблице 1.

Таблица 1 – Градуировки локальных координат на пространстве полей

духовое число	m-градуировка	резольвентная степень	чистое духовое число
$\mathrm{gh}\,\varphi^{i_k} = k$	$\mathrm{Deg}\,\varphi^{i_k} = 0$	$\deg\varphi^{i_k} = 0$	$\mathrm{pgh}\,\varphi^{i_k} = k$
$\mathrm{gh}\,\bar{\varphi}_{i_k} = -k$	$\mathrm{Deg}\,\bar{\varphi}_{i_k} = 1$	$\deg\bar{\varphi}_{i_k} = k+1$	$\mathrm{pgh}\,\bar{\varphi}_{i_k} = 0$
$\mathrm{gh}\,\varphi_{a_l} = -l$	$\mathrm{Deg}\,\varphi_{a_l} = 0$	$\deg\varphi_{a_l} = l$	$\mathrm{pgh}\,\varphi_{a_l} = 0$
$\mathrm{gh}\,\bar{\varphi}^{a_l} = l$	$\mathrm{Deg}\,\bar{\varphi}^{a_l} = 1$	$\deg\bar{\varphi}^{a_l} = 0$	$\mathrm{pgh}\,\bar{\varphi}^{a_l} = l-1$

Каноническая скобка на $T^*\mathcal{M}$ имеет вид

$$\{\varphi^{i_p}, \bar{\varphi}_{j_q}\} = \delta^{i_p}_{j_q}\,, \qquad \{\varphi^{a_p}, \bar{\varphi}_{b_q}\} = \delta^{a_p}_{b_q}\,.$$

Точками в (7) обозначены слагаемые с m–градуировкой и резольвентной степенью >1. БРСТ-заряд называется классическим, если $\Omega = \Omega_1$, где $\mathrm{Deg}\,\Omega_1 = 1$. Полный БРСТ-заряд $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \dots$ может пониматься как деформация классического слагаемыми более высокой степени по m–градуировке. **Раздел 3.2** содержит краткий обзор методов гомологической алгебры, используемых в БРСТ-теории. В **разделе 3.3** рассматриваются когомологии $H^g_m(s_0)^p, H^g_m(s_0|d)^p$ классического БРСТ-дифференциала

$$s_0 = \{\Omega_1, \cdot\}, \qquad s_0 = \delta + \gamma + ... \qquad \deg\delta = -1, \qquad \deg\gamma = 0, \qquad \deg ... > 0$$

в пространстве локальных форм $\mathcal{A}^{g,p}_m$ степени p, с духовым числом g и m–градуировкой m. Относительные когомологии $H^g_m(s_0|d)^p$ определяются как когомологии фактор-комплекса $\mathcal{A}^{g,p}_m / d\mathcal{A}^{g,p-1}_m$. Доказано, что все когомологии классического БРСТ-дифференциала сводятся к когомологиям продольного дифференциала γ и дифференциала Кошуля-Тэйта δ. В **разделе 3.4** исследуется интерпретация группы

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{g=-1}^{\infty} \mathcal{L}_g\,, \qquad \mathcal{L}_g = H^g_{g+1}(s_0|d)^{\Delta-1}\,.$$

При $g = -1, 0, 1$ эти группы изоморфны пространствам характеристик, глобальных симметрий и лагранжевых якорей, соответственно

$$\mathcal{L}_{-1} \simeq \mathrm{Char}(T)\,, \qquad \mathcal{L}_0 \simeq \mathrm{RSym}(T)\,, \qquad \mathcal{L}_1 \simeq \mathrm{An}(T)\,.$$

В **разделе 3.5** доказано, что группа $\mathcal{L}$ замкнута относительно скобки Пуассона $\{\mathcal{L}_g, \mathcal{L}_{g'}\} \subset \mathcal{L}_{g+g'}$. При $g = -1, g' = 1$ частным случаем этого отображения является (6). Другой важной мультипликативной операцией является бинарная антисимметричная скобка на пространстве характеристик

$$[\Psi_1, \Psi_2]_V = \{\Psi_1, \{\Psi_2, V\}\}\,, \qquad \Psi_1\,, \Psi_2 \in \mathrm{Char}(T), \qquad V \in \mathrm{An}(T)\,,$$

которая может рассматриваться как обобщение скобки Дикого сохраняющихся токов. Скобка на пространстве характеристик удовлетворяет тождеству Якоби, если лагранжев якорь интегрируем $[\{V, V\}] = 0 \in \mathcal{L}_2$. В **разделе 3.6** исследуется проблема существования и единственности локального БРСТ-заряда. Доказано, что локальный классический БРСТ-заряд всегда существует и (с точностью до канонического преобразования) полностью определяется своим дифференциалом Кошуля-Тэйта. Лагранжев якорь задает второй порядок по $m-$градуировке полного БРСТ-заряда $\Omega = \Omega_1 + V + \ldots$, но эта деформация не всегда может быть продолжена во все более высокие порядки по $m-$градуировке. Все когомологические препятствия к существованию полного БРСТ-заряда интерпретируются в терминах степеней Масси лагранжева якоря. Первым из таких препятствий является условие интегрируемости лагранжева якоря.

В **главе 4** рассматриваются примеры лагранжевых якорей в различных невариационных полевых моделях. В **разделах 4.1** и **4.2** устанавливается соответствие между пространственно-временными симметриями и сохраняющимися токами в модели антисимметричного тензорного поля на римановом многообразии произвольной размерности и теории киральных бозонов в пространственно-временной размерности $4k-2, k \in \mathbb{N}$. **Раздел 4.3** посвящен свободным безмассовым полям спина s, описываемых уравнением Баргманна-Вигнера

$$T^{\dot\alpha}_{\alpha_1\cdots\alpha_{2s-1}} := \partial^{\alpha\dot\alpha}\varphi_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{2s-1}} = 0\,,$$

где $\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_{2s}}(x)$ – симметричный спин-тензор на четырехмерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{3,1}$. Показано, что уравнения Баргманна-Вигнера допускают сильно интегрируемый и явно Пуанкаре-инвариантный лагранжев якорь. Его действие на произвольное сечение Ψ пространства дуального динамическому расслоению имеет вид:

$$X_{\alpha_1\cdots\alpha_{2s}} = V_s(\Psi)_{\alpha_1\cdots\alpha_{2s}} = i^{2s}\partial_{(\alpha_2\dot\alpha_2}\cdots\partial_{\alpha_{2s-1}\dot\alpha_{2s-1}}\overline{\Psi}^{\dot\alpha_2\cdots\dot\alpha_{2s}}_{\alpha_1)}\,. \tag{8}$$

Лагранжев якорь (8) позволяет связать все вещественные сохраняющиеся токи с глобальными симметриями. В соответствии с общим формализмом, характеристические симметрии образуют бесконечномерную алгебру Ли, которая ранее не была известна. В **разделе 4.4** рассматривается теория безмассового скалярного поля в форме развернутого представления. Рассмотрены допустимые ковариантные лагранжевы структуры в формулировках на массовой оболочке (on-shell) и вне массовой оболочки (off-shell). Особенностью лагранжева якоря в развернутом представлении является то, что связи Швингера-Дайсона (3) содержат пространственно-временные производные источников сколь угодно высокого порядка, хотя сами уравнения содержат только первые производные полей. Доказано, что эта особенность является неустранимой при $\Delta > 3$ и бесконечно высокий порядок производных в связях Швингера-Дайсона не имеет альтернативы.

В **заключении** излагаются основные результаты автора, включенные в диссертацию.

Положения, выносимые на защиту

1. Теория локальных БРСТ-когомологий разработана для необязательно вариационных теорий поля. В том числе, сформулированы необходимые и достаточные условия существования полного локального БРСТ-заряда. Все возможные препятствия к существованию локального БРСТ-заряда имеют

когомологический характер и описываются в терминах локальных БРСТ-когомологий.

2. Симметрии, законы сохранения (характеристики) и лагранжевы структуры отождествлены с группами локальных БРСТ-когомологий и установлены когомологические взаимосвязи между ними.

3. С использованием концепции лагранжевой структуры теорема Нетер о связи симметрий с законами сохранения и скобка Дикого на пространстве сохраняющихся токов обобщены на случай невариационных уравнений движения.

4. Предложена процедура построения лагранжевой структуры для уравнений в форме развернутого представления, если теория допускала вариационную формулировку до развертывания. Возникающая лагранжева структура является дифференциальным оператором неограниченно высокого порядка и не имеет эквивалентного представителя с конечным числом производных.

5. В ряде невариационных моделей теории поля: теории антисимметричных тензорных полей в формализме напряженностей, киральных бозонов в различных пространственно-временных размерностях, а также для уравнений Баргманна-Вигнера, описывающих динамику безмассовых полей высших спинов, найдены явно ковариантные лагранжевы структуры и установлена взаимосвязь между симметриями и законами сохранения.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных журналов и изданий:

1. Kaparulin D.S. Rigid symmetries and conservation laws in non-Lagrangian field theory / D.S. Kaparulin, S.L. Lyakhovich, A.A. Sharapov // Journal of Mathematical Physics. – 2010. – Vol.51. – P. 082902-1–22.

2. Kaparulin D.S. On Lagrange structure of unfolded field theory / D.S. Kaparulin, S.L. Lyakhovich and A.A. Sharapov // International Journal of Modern Physics A. – 2011. – Vol.26. – P. 1347–1362.

3. Kaparulin D.S Local BRST cohomology in (non-)Lagrangian field theory / D.S. Kaparulin, S.L. Lyakhovich A.A. Sharapov // Journal of High Energy Physics. – 2011. – Vol.11, No.09. – P. 006-1–34.

4. Kaparulin D.S. Lagrange Anchor and Characteristic Symmetries of Free Massless Fields / D.S. Kaparulin, S.L. Lyakhovich, A.A. Sharapov // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA). – 2012. – Vol.8, No.021. – P. 1–18.

Публикации в других изданиях:

1. Капарулин Д.С. Квантование скалярного поля в развернутом представлении / Капарулин Д.С. // Физика и химия высокоэнергетических систем: Сборник материалов конференции молодых ученых (22-25 апреля 2009, Томск) – Томск: ТМЛ-Пресс, 2009. – С. 313-316.

2. Капарулин Д.С. Квантование скалярного поля в развернутом представлении / Капарулин Д.С. // «Волга-21'2009»(XXI Петровские чтения): материалы XXI Международной летней школы-семинара по современным проблемам теоретической и математической физики / под ред. А.В. Аминовой. – Казань: Веда, 2009. – С. 22.

3. Kaparulin D. Lagrange anchor, Symmetries and Conservation Laws of Free Massless Fields / D.Kaparulin, S.Lyakhovich, A.Sharapov // Proceedings of Ginzburg Conference on Physics. (Lebedev Institute/Moscow, May 28 – June 2, 2012) – Moscow, 2012 – P. 95.

4. Kaparulin D.S. BRST analysis of general mechanical systems [Electron. resource] / D.S. Kaparulin, S.L. Lyakhovich, A.A. Sharapov // E-print arXiv. – Electron. data – Cornell, [2012]. – URL: http://arxiv.org/abs/1207.0594 (access date 12.09.2012) – 38 p.

Подписано в печать 11.10.2012 г.
Формат А4/2. Ризография
Печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ №08/10-12
Отпечатано в ООО «Позитив-НБ»
634050 г. Томск, пр. Ленина 34а