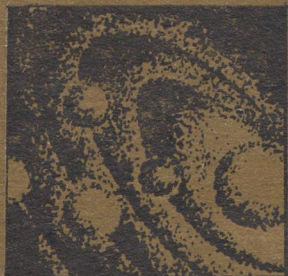


ISSN0201-5099



ВЫПУСК 12

АСТРОНОМИЯ И ГЕОДЕЗИЯ

ТОМОВ 1004

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И
МЕХАНИКИ ПРИ ТОМСКОМ ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА
ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

АСТРОНОМИЯ И ГЕОДЕЗИЯ

Выпуск 12

Издательство Томского университета

Томск - 1984

Астрономия и геодезия/Под ред. Л.Е.Быковой.-Томск:Изд-во
Томск. ун-та, 1984, вып. 12.-8,3 л.-с ил. - 1р. 30к. 500экз. 1902020000

Сборник содержит работы, посвященные разработке аналитических и численных алгоритмов решения задач небесной механики и их программного обеспечения. Все представленные в сборнике работы докладывались на IV Всесоюзном совещании "Алгоритмы небесной механики", проходившем в Томском университете в сентябре 1982 г.

Для специалистов, аспирантов и студентов, работающих в области небесной механики и программного обеспечения задач астрономии.

Рецензент - Р.Г.Лазарев

Редактор - Л.Е.Быкова

А 1902020000 80-84
177(012)-84

© Издательство Томского университета, 1984

ASTRONOMY AND GEODESY

Number 12

Publishing House of Tomsk University

Tomsk-1984

Astronomy and Geodesy/Edited by L.E.Bikova.-Tomsk. Publishing House of Tomsk University, 1984, #12.-8, 3 printer's sheets - price 1 r.30 c. 500 copies. 1902020000.

The present copy of collected articles contains works devoted to working out analytical and numerical algorithms for solving problems of celestial mechanics and their software. All the papers presented in the given copy were read at the 1Vth All-Union Conference "Algorithms of Celestial Mechanics", which was held in September, 1982.

For specialists, post-graduates and students working in the branch of celestial mechanics and astronomical problems software.

Reviewer - R.G.LAZAREV

Editor - L.E.BIKOVA

ИТОГИ ВСЕСОЮЗНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

Т. В. Бордовицына

В настоящем сообщении обсуждаются первые итоги численного эксперимента, которые были подведены на IV Всесоюзном совещании "Алгоритмы небесной механики" (Томск, 1982 г.).

Численный эксперимент проводился по решению III Всесоюзного совещания "Алгоритмы небесной механики" и преследовал цель определить сравнительные характеристики имеющихся в распоряжении предприятий и организаций методов и программ численного интегрирования уравнений движения небесных тел.

ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР и НИИ ПММ при ТГУ были разработаны и предложены участникам эксперимента следующие задачи:

1. Планетная задача десяти тел.
2. Задача одиннадцати тел: движение кометы Галлея под действием притяжения Солнца и девяти больших планет.
3. Задача о движении спутника Земли типа "Навстар".
4. Задача о движении спутника Земли типа "Прогноз".
5. Задача о движении низколетящего ИСЗ.

Начальные координаты и скорости больших планет приведены в табл. I. Здесь же даны согласованные с этой системой параметров обратные значения масс больших планет. Система начальных параметров больших планет получена на основании системы, выведенной К. Естервинтером и Ш. Когеном [1]. В качестве начальной эпохи выбрана эпоха оскуляции кометы Галлея с тем, чтобы дать участникам эксперимента возможность решать задачи 1 и 2 совместно.

Начальные параметры движения для задач 2-5 приведены в табл. 2.

Кроме того, в этой же таблице даны постоянные движения для спутниковых задач.

В задачах 3-5 даны три различных модели спутниковых орбит. Модель типа "Навстар" представляет движение по почти круговой орбите ($e = 0,001$) с периодом 12^h и наклоном $63^\circ 4'$. Для таких орбит основными возмущающими факторами помимо гармоник $1/20$ являются резонансные гармоник тессеральной части геопотенциала, а также Луна и Солнце.

Модель типа "Прогноз" представляет собой движение по орбите с большим эксцентриситетом, с периодом, близким к 4 суткам.

Основные возмущения обусловлены влиянием геопотенциала, а также притяжением Луны и Солнца.

В качестве низколетящего ИСЗ был выбран 1,5-часовой спутник с почти круговой орбитой. Основными возмущениями для него являются действие гармоник геопотенциала, а также сопротивление атмосферы. Интервал интегрирования в первых двух задачах выбран равным 80 годам, т.е. несколько превышает период обращения кометы Галлея. В задачах 3-5 интервалы интегрирования были выбраны достаточно произвольно.

В спутниковых задачах участникам эксперимента было предложено выполнить по три варианта расчетов: с учетом влияния зональной части геопотенциала ($l = 16, m = 0$), с учетом всего геопотенциала до гармоник восьмого порядка ($l, m = 8$), а также с учетом совместного влияния геопотенциала и Луны для спутников типа "Навстар" и "Прогноз" и геопотенциала и сопротивления атмосферы для низколетящих ИСЗ.

В качестве модели геопотенциала была рекомендована Стандартная Земля IV (SE IV) [2], в качестве модели атмосферы - ГОСТ 22721 - 77 [3].

Расчет эталонного движения, а также анализ результатов эксперимента был поручен НИИ ИММ при ТГУ.

Остановимся на оценке точности эталонных орбит, используемых в эксперименте.

Эталонное движение больших планет и кометы Галлея было вычислено с двойной точностью (двадцать четыре десятичных знака) на ЭВМ БЭСМ-6 по программам, разработанным В.А.Шефером. Программы позволяют интегрировать совместно задачу одиннадцати тел методом Эверхарта в прямоугольных координатах. При вычислении орбит использовался метод 15 порядка.

На рис. 1 показано накопление ошибки интегрирования при вычислении орбит Юпитера и Меркурия, а в табл. 3 приведены результаты, показывающие величину этой ошибки в конце интервала прогнозирования для каждой из девяти планет. В качестве $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ во всех оценках эталонных орбит дается модуль разности двух векторов положения тела, полученных прямым и обратным интегрированием уравнений движения.

Как и следовало ожидать, наименее точно интегрируются уравнения движения Меркурия, однако ошибка не превосходит $2 \cdot 10^{-9}$ а.е.

Таблица I

Начальные параметры движения для задачи I.

Эпоха 241800.5. Эклиптика и равноденствие 1950.0

	x	y	z	x	y	z
Меркурий	-0.396336155140-0.093630703152-0.009349724225	0.000383341708-0.023111790228-0.012414328807	0.019736174334 0.003804976274 0.000466329737			
Венера	0.134692633237-0.648717030115-0.300715306849					
Земля+Луна	-0.674937627270-0.688897486835-0.298843854311	0.012514079962-0.010605759535-0.004600603710				
Марс	-0.862114324863 1.257272901510 0.600344637388	-0.011344447464-0.005735115079-0.002326325814				
Минер	-5.309383866750-1.186562691660-0.379168642589	0.001633519687-0.006420344554-0.002794643283				
Сатурн	8.225193467600 4.101844188820 1.340445093480	-0.002886663427 0.004510440862 0.001988938943				
Уран	7.688225019830-16.52707722630-7.350573442500	0.003588425745 0.001256396978 0.000499788827				
Нептун	-9.866963045630 26.08953658170 10.93557181560	-0.002981119093-0.000970196253-0.000322491453				
Плутон	2.490973615110 43.40553517400 12.95333508090	0.002240108042-0.000526626016 0.000512288114				

Обратные значения масс

Меркурий	5983000	Марс	3098700	Уран	22930
Венера	408522	Минер	1047.3908	Нептун	19260
Земля+Луна	328900.1	Сатурн	3499.2	Плутон	1812000
Гауссова постоянная k	$k = 0.01720209895; \text{ а. е.} = 149597900 \text{ км}$				

Начальные параметры движения для задач 2 - 5.

Комета Галлея. Эпоха 2418800.5. Эклиптика и равноденствие 1950.0

$$\begin{aligned} x &= -0.185687856613 \text{ а.е.} & \dot{x} &= -0.027163741970 \text{ а.е./сут} \\ y &= -0.656967049822 \text{ а.е.} & \dot{y} &= -0.002683755798 \text{ а.е./сут} \\ z &= -0.212035102581 \text{ а.е.} & \dot{z} &= -0.008143743456 \text{ а.е./сут} \end{aligned}$$

ИСЗ типа Навстар Эпоха 1981 января 0 моск. вр.

Экватор и равноденствие 1950.0

$$\begin{aligned} x &= -14079.479 \text{ км} & \dot{x} &= -0.335786347 \text{ км/с} \\ y &= -8868.016 \text{ км} & \dot{y} &= -3.483723312 \text{ км/с} \\ z &= 20363.622 \text{ км} & \dot{z} &= -1.749266864 \text{ км/с} \end{aligned}$$

ИСЗ типа Прогноз Эпоха 1981 13 июня 0 моск. вр.

Экватор и равноденствие 1950.0

$$\begin{aligned} x &= -137751.497 \text{ км} & \dot{x} &= -0.206854192 \text{ км/с} \\ y &= -28205.0259 \text{ км} & \dot{y} &= 0.334337135 \text{ км/с} \\ z &= 102255.678 \text{ км} & \dot{z} &= -0.819624609 \text{ км/с} \end{aligned}$$

Низколетящий ИСЗ Эпоха 1979 22 февраля 19 39 31 моск. вр.

Экватор и равноденствие 1950.0

$$\begin{aligned} x &= 6597.277 \text{ км} & \dot{x} &= -0.79305442 \text{ км/с} \\ y &= 1087.286 \text{ км} & \dot{y} &= 4.72461621 \text{ км/с} \\ z &= 0.94428000 \text{ км} & \dot{z} &= 6.05886909 \text{ км/с} \end{aligned}$$

Постоянные движения

$$\begin{aligned} R_{\odot} &= 6378.140 \text{ км} & fm &= 4902.865 \frac{\text{км}^3}{\text{с}^2} \\ fm_{\odot} &= 398600.5 \frac{\text{км}^3}{\text{с}^2} & fm_{\oplus} &= 132718 \cdot 10^6 \frac{\text{км}^3}{\text{с}^2} \end{aligned}$$

Звездное время вычисляется по формуле $S = \theta_0 + \theta_1 d$

$$d = JD - 2433282.5, \quad \theta_0 = 100^{\circ}.075542, \quad \theta_1 = 360^{\circ}.985612288.$$

Оценка точности эталонных орбит больших планет

 Δr (а.е.) в конечной точке

Меркурий	Венера	Земля+Луна	Марс
$2 \cdot 10^{-9}$	$4 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-12}$	$4 \cdot 10^{-12}$
Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
$2 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-13}$	$8 \cdot 10^{-14}$	$8 \cdot 10^{-14}$
			Плутон
			$7 \cdot 10^{-14}$

На всем интервале прогнозирования движения больших планет вычислялись интегралы площадей, момента количества движения и энергии. Максимальное относительное изменение дает интеграл энергии, и оно составляет к концу интервала

$$(H - H_0)/H = 2 \cdot 10^{-12} \dots$$

На рис. 2 показано накопление ошибки при интегрировании движения кометы Галлея. На интервале прогнозирования ошибка не превосходит $1 \cdot 10^{-11}$ а.е.

Расчет эталонных орбит ИСЗ осуществлялся с помощью так называемой численной модели движения ИСЗ, разработанной Т.В.Бордовичной и Н.А.Шарковским [5]. Вычисление выполнялись на ЭВМ с шестнадцатью десятичными знаками. В качестве системы уравнений спутника были выбраны уравнения в регулярных оскулирующих элементах [6], которые могут быть получены методом вариации произвольных постоянных из уравнений в параметрических переменных Ку-стаанхеймо-Штифеля.

Для обоснования такого выбора на рис. 3 вместе с графиком, иллюстрирующим накопление ошибки интегрирования при использовании регулярных элементов α , даны аналогичные графики для уравнений в параметрических переменных U и обычно применяемых прямоугольных координатах x . Как мы видим, ошибка эталонной орбиты ИСЗ типа "Навстар" не превосходит 0.1 см на всем интервале прогнозирования. Аналогичная оценка для ИСЗ типа "Прогноз" составляет 10 см, низколетящего ИСЗ — 5 см. Билинейное соотношение, которое является интегралом движения в параметрическом пространстве, сохраняется достаточно хорошо.

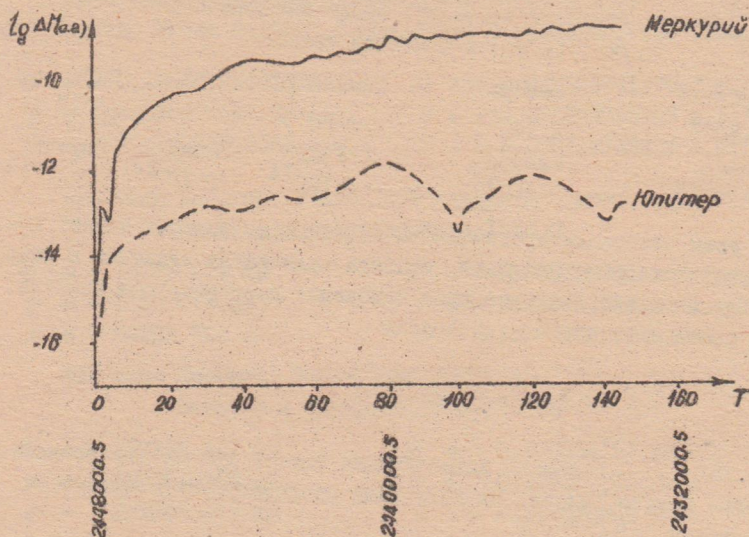


Рис. 1. Оценка точности эталонных орбит Меркурия и Юпитера

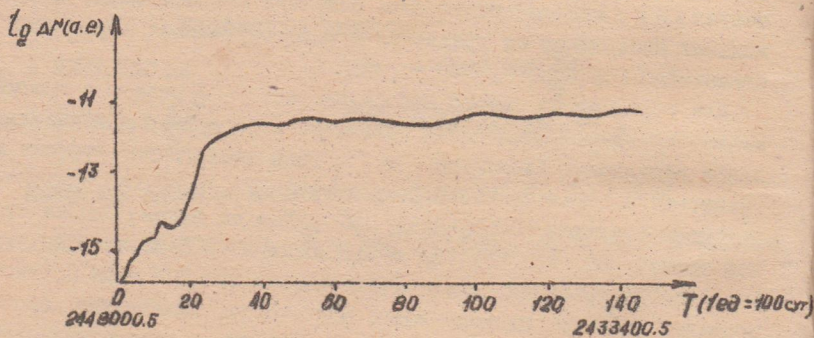


Рис. 2. Оценка точности эталонной орбиты кометы Галлея

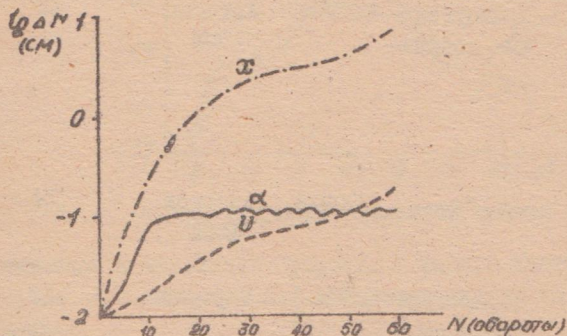


Рис. 3. Оценка точности эталонной орбиты ИСЗ типа "Навстар"

для различных объектов составляют

"Навстар"

$$1 \cdot 10^{-9} \text{ см}^2$$

"Прогноз"

$$4 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$$

Низколетящий ИСЗ

$$1 \cdot 10^{-7} \text{ см}^2$$

На рис. 4 приведены графики, иллюстрирующие выбор оптимального порядка метода Эверхарта на примере вычисления эталонной орбиты низколетящего ИСЗ. Оптимальным для ИСЗ типа "Навстар" оказался II-й порядок, для ИСЗ типа "Прогноз" — IX-й, низколетящего ИСЗ — IX-й. Перейдем к описанию результатов эксперимента. На первом его этапе в эксперименте приняли участие представители пяти организаций. Фамилии авторов, представивших нам свои материалы, приводятся в таблицах в колонке автор. Краткие сведения об использованных алгоритмах и программах приведены в табл. 4.

В табл. 5 даны результаты эксперимента для задачи десяти тел. В этой и последующих таблицах $\Delta N = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ представляет собой модуль разности векторов положений на оце-

Сведения об алгоритмах и программах

Автор	Метод интегрирования	Тип переменных	ЭВМ	Язык программирования	Число десятич. разряд.
В. В. Савченко	Метод Эверхарта в модификации В. В. Савченко и В. А. Степанянца	Прямоугольные координаты	БЭСМ-6	Автокод БЭМШ	12
В. Ф. Коллюка, Т. И. Шульгина	Метод Тейлора-Стефенсона	——"——	БЭСМ-6	Автокод БЭМШ	24
В. А. Шефер	Метод Эверхарта	Параметрические переменные Кустанхеймо-Штифеля	БЭСМ-6	Фортран	12
Н. А. Сорочкин	——"——	Прямоугольные координаты	ЕС-1033	Фортран	16
Ю. В. Сурнин, С. В. Кужелев	——"——	Регулярные переменные типа Лагранжевых	ЕС-1022	Фортран	16

Таблица 5

Оценка точности моделей задачи десяти тел
в конце интервала прогнозирования

Автор	(а. е.)			
	Меркурий	Венера	Земля+Луна	Марс
Савченко	$5.3 \cdot 10^{-7}$	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$2.1 \cdot 10^{-7}$
Коллюка, Шульгина	$3.8 \cdot 10^{-9}$	$3.4 \cdot 10^{-9}$	$1.4 \cdot 10^{-9}$	$5.2 \cdot 10^{-9}$
Интер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
	$7.2 \cdot 10^{-8}$	$6.9 \cdot 10^{-7}$	$3.6 \cdot 10^{-7}$	$6.8 \cdot 10^{-8}$
	$1.9 \cdot 10^{-9}$	$4.8 \cdot 10^{-10}$	$5.7 \cdot 10^{-9}$	$4.6 \cdot 10^{-9}$
				$3.6 \cdot 10^{-9}$
				$2.2 \cdot 10^{-9}$

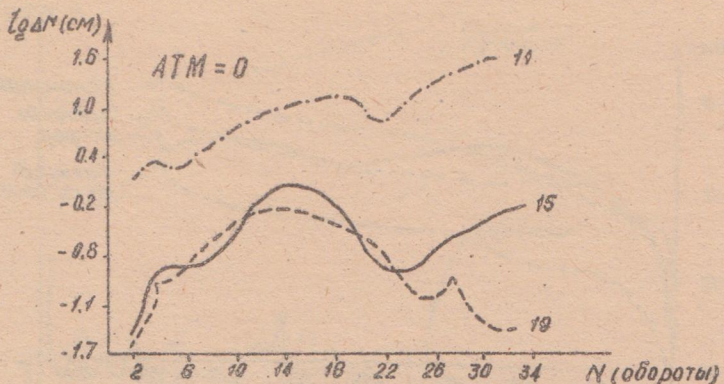


Рис. 4. Оценка точности эталонной орбиты низколетящего ИСЗ

ниваемой и эталонной орбитах. В табл. 5 даются максимальные значения Δr на интервале прогнозирования для каждой из девяти планет.

На рис. 5 и в табл. 6 приведены результаты эксперимента для кометы Галлея. На рис. 5 показано отклонение численных моделей движения кометы Галлея, представленных различными авторами, от эталонной на всем интервале прогнозирования.

Таблица 6

Оценка точности прогнозирования движения
кометы Галлея разными авторами

Дата	Δr (а.е.)			
	Хотимская	Савченко	Шефер	Колжа, Шульгина
Окрестность афелия 2433400.5	$1.6 \cdot 10^{-7}$	$2.8 \cdot 10^{-8}$	$5.5 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-9}$
Окрестность перигелия 2446500.5		$8.8 \cdot 10^{-7}$	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$4.0 \cdot 10^{-8}$
Конец интервала 2448000.5	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$9.8 \cdot 10^{-9}$

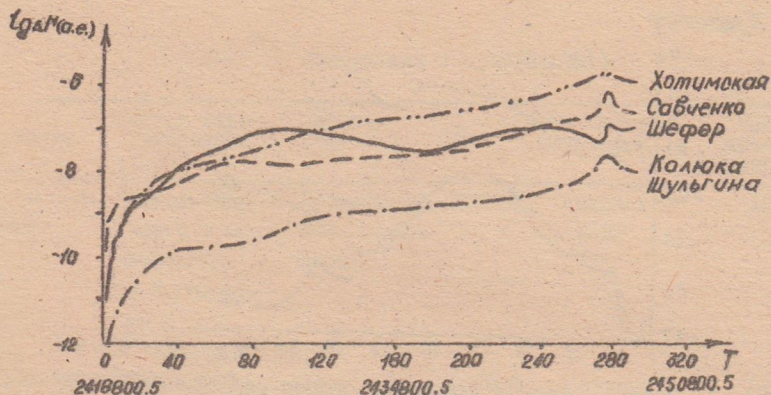


Рис. 5. Отклонение численных моделей движения кометы Галлея от эталонной

В табл. 6 даны отклонения Δg от эталонной орбиты в трех точках в окрестности апоцентра, перигея и в конце интервала прогнозирования.

Данные эксперимента, приведенные в табл. 5, 6 и на рис.

5, показывают, что наиболее точные результаты дает программа, разработанная Ю.Ф.Коллюкой и Т.И.Шульгиной. Следует отметить, что, несмотря на использование удвоенной разрядной сетки, эта программа обладает и большим быстродействием.

Для спутниковых задач участниками эксперимента были выполнены только те варианты расчета, где учитывались возмущения от геопотенциала.

На последующих трех рисунках приведены результаты сравнения с эталонной орбитой численных моделей движения ИСЗ типа "Навстар", "Прогноз" и низколетящего. Численные модели представлены Н.А.Сорокиным, Ю.В.Сурниным и С.В.Кужелевым. Вычисляются возмущения от геопотенциала.

Наилучшее совпадение с эталонными дают численные модели Н.А.Сорокина. Результаты Ю.В.Сурнина и С.В.Кужелева даны на графике в двух вариантах: исправленном ("исп") и неисправленном. Дело в том, что в численных моделях этих авторов присутствует ошибка, связанная с перевычислением начальных данных внутри программы.

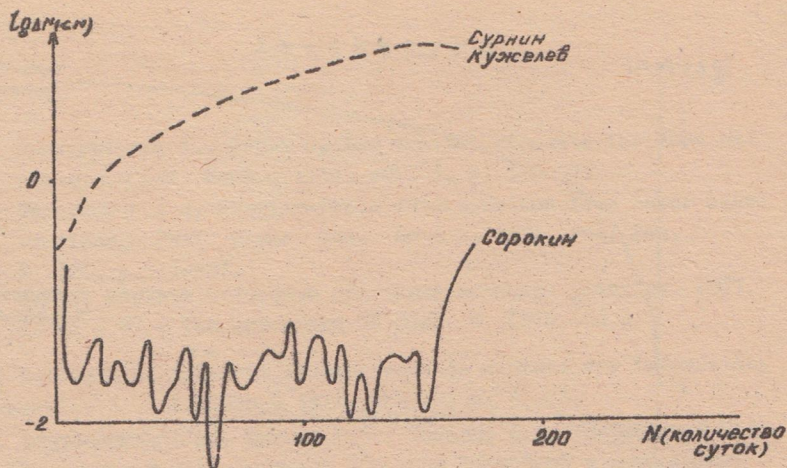


Рис.6. Отклонение численных моделей движения ИСЗ типа "Прогноз" от эталонной

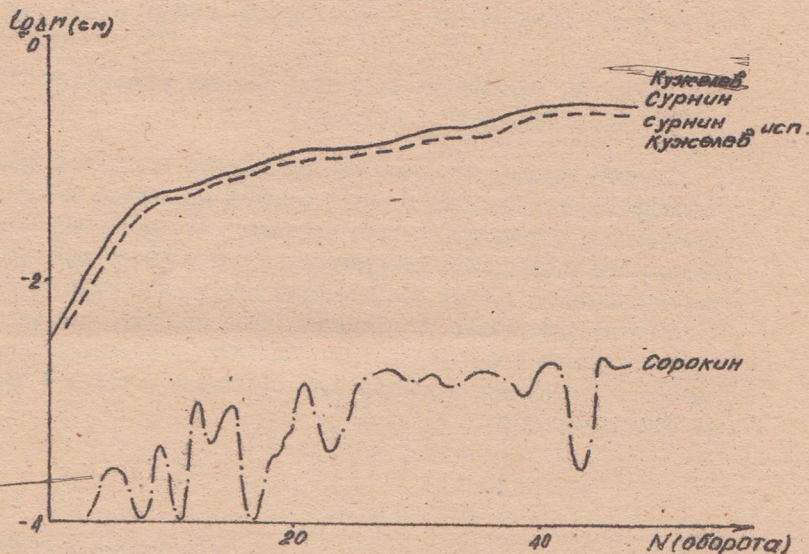


Рис.7. Отклонение численных моделей движения низколетящего ИСЗ от эталонной

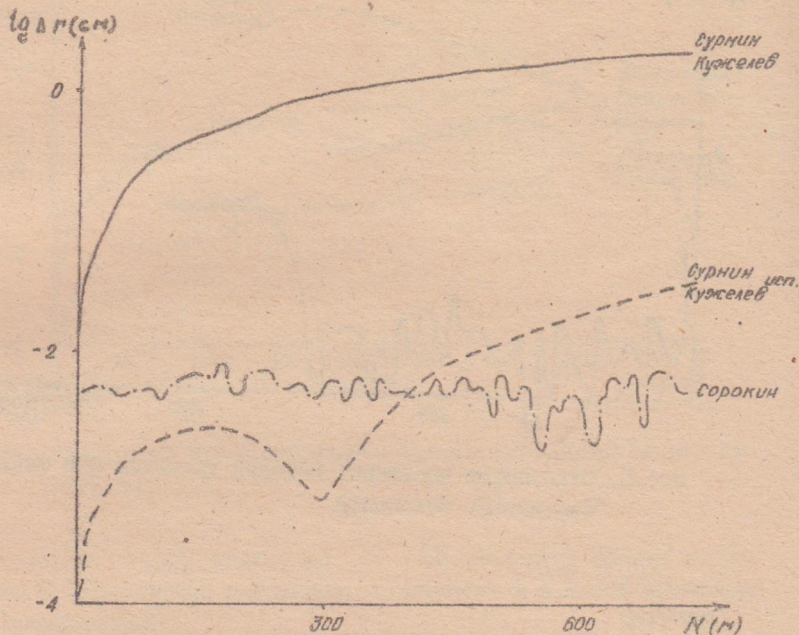


Рис. 8. Отклонение численных моделей движения ИСЗ типа "Навстар" от эталонной

Сделаем выводы. Основным итогом первого этапа всесоюзного численного эксперимента следует считать сравнение методов и программ по точности, которое показало, что все участники эксперимента располагают программами высокоточного численного интегрирования, причем предпочтение отдается методу Эверхарта.

Понятие эффективности программы складывается, как известно, из её точности и быстродействия. Поэтому следующим этапом численного эксперимента должно быть сравнение методов и программ по быстродействию.

Поступила в редакцию
в сентябре 1982 г.

1. Oesterwinter C., Cohen C. New orbital elements for Moon and planets.- *Cel. Mech.*, 1969, vol. 5, p. 317-395.
2. Gaposchkin E.M. Gravity-field determination from laser observations.- *Phil. Trans. Soc. London*, 1977, vol. 284, N 1326, p.515-527.
3. Модель верхней атмосферы для баллистических расчетов. ГОСТ 22721 - 77.- Гос.ком.станд.СМ СССР. М.,1978.-64 с.
4. Everhart E. Implicit single-sequence methods for integrating orbits. - *Cel. Mech.*, 1974, vol.10, p. 35-55.
5. Бордовитина Т.В., Быкова Л.Е., Тамаров В.А., Шарковский Н.А. Численная модель движения ИСЗ типа "Навстар" и возможности её использования.-В кн.: Труды VI объединенных научных чтений по космонавтике. Прикладная небесная механика и управление движением. М., 1981, с. 180-189.
6. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975.- 304 с.

ОЦЕНКА СРАВНИТЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ СПУТНИКОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Ю.В.Сурнин, С.В.Кухалев

Для высокоточного прогнозирования движения искусственных спутников Земли (ИСЗ), применяемых в геодезии, геодинاميке, космической навигации, широко используются численные методы. В настоящее время разработано большое количество машинных алгоритмов построения спутниковых траекторий (ПСТ), основанных на различных численных методах и различных системах обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) движения (последние будем называть моделями движения). Поэтому важным является выбор наиболее эффективного алгоритма в некоторой конкретной области применения. Такой выбор может быть сделан с помощью машинного эксперимента. Для его проведения необходимы три предпосылки:

- 1) множество алгоритмов ПСТ;
- 2) множество тестовых орбит;
- 3) критерий эффективности.

В Новосибирском институте инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии (НИИГАиК) на базе ЭВМ ЕС-1022 (число представляется с 16 десятичными разрядами, быстродействие около 80000 операций в секунду) была создана библиотека алгоритмов ПСТ на языке ФОРТРАН. Каждый включаемый в библиотеку алгоритм предварительно структурно унифицировался в соответствии с блок-схемой, приведенной на рис.1.

Основная программа *PSTINTMOD* является носителем имени конкретного алгоритма ПСТ, включающего интегратор *INT* и модель движения *MOD*. Имена *INT* и *MOD* - обобщенные. Модель движения реализуется тремя подпрограммами с обобщенными именами *MOD11*, *MOD12* и *MOD2*. *RON* - обобщенное имя подпрограммы печати, которая предварительно преобразует переменные модели движения в прямоугольные координаты и скорости. Все упомянутые подпрограммы являются формальными параметрами с конкретным именем *PST*, в которой осуществляется ввод исходной информации о начальных условиях интегрирования и моментах выхода и организуются обращения к подпрограммам третьего уровня (рис.1). Подпрограмма *MOD11* осуществляет ввод и преобразование к удобной для дальнейшего использования форме и размерности (ед. вкв. рад. Земли, часы, радианы) информации о параметрах силового поля, в котором движется ИСЗ. Предусмотрен учет в раз-

личных комбинациях возмущений от несферичности Земли (с учетом прецессии, нутации, движения полюсов), от притяжения Луны, Солнца, земных приливов, прямого и обратного светового давления, сопротивления атмосферы. Модели основных возмущений даны в статье [1], в которой описывается один из первых, разработанных в НИИГАНК, алгоритмов ПСТ (ПСТ-2). Кроме того, конкретные реализации *MOD N* выполняют функцию хранения на внешней памяти различных моделей гравитационного поля (например, подпрограмма *ST5* содержит модель *GEM9*, *ST54 - SE - IV* и т.п.). Подпрограмма *MOD12* осуществляет переход от начальных кеплеровых элементов $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0$, вводимых в подпрограмме *PST* в качестве начальных условий, к системе переменных модели движения данного алгоритма ПСТ. *MOD2* представляет собой подпрограмму расчета правых частей модели движения. Формальные параметры всех подпрограмм унифицированы. Для конкретного алгоритма ПСТ обобщенные имена (формальные параметры подпрограммы *PST*) замещаются конкретными именами (фактическими параметрами) подпрограмм, хранящихся в личных библиотеках объектных и исходных модулей. Современное состояние библиотеки алгоритмов ПСТ НИИГАНК отражено в табл. I, содержащей конкретные имена подпрограмм, реализующих численный метод и модель движения.

Т а б л и ц а I

Алгоритмы ПСТ

АЛГОРИТМЫ	ИНТЕГРАТОРЫ	МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ		ПОДПРОГРАММЫ ПЕЧАТИ
<i>PSTINTMOD</i>	<i>INT</i>	<i>MOD12</i>	<i>MOD2</i>	<i>RON</i>
<i>PSTD2Y</i>	<i>DIF2</i>	<i>STY</i>	<i>FPY</i>	<i>YX</i>
<i>PSTD2E</i>	<i>DIF2</i>	<i>STE</i>	<i>FPE</i>	<i>EX</i>
<i>PSTD2X</i>	<i>DIF2</i>	<i>STX</i>	<i>FPX</i>	<i>XX</i>
<i>PSTD4Y</i>	<i>DIF4</i>	<i>STY</i>	<i>FPY</i>	<i>YX</i>
<i>PSTD5Y</i>	<i>DIF5</i>	<i>STY</i>	<i>FPY</i>	<i>YX</i>
<i>PSTD5E</i>	<i>DIF5</i>	<i>STE</i>	<i>FPE</i>	<i>EX</i>
<i>PSTD5X</i>	<i>DIF5</i>	<i>STX</i>	<i>FPX</i>	<i>XX</i>
<i>PSTRF5Y</i>	<i>RKF45</i>	<i>STY</i>	<i>FPY</i>	<i>YX</i>
<i>PSTRF5E</i>	<i>RKF45</i>	<i>STE</i>	<i>FPE</i>	<i>EX</i>
<i>PSTRF5X</i>	<i>RKF45</i>	<i>STX</i>	<i>FPX</i>	<i>XX</i>
<i>PSTAD6Y</i>	<i>AD6</i>	<i>STY</i>	<i>FPY</i>	<i>YX</i>
<i>PSTAD6E</i>	<i>AD6</i>	<i>STE</i>	<i>FPE</i>	<i>EX</i>

<i>PSTADBX</i>	<i>ADB</i>	<i>STX</i>	<i>FPX</i>	<i>XX</i>
<i>PSTRDY</i>	<i>RD27</i>	<i>STY</i>	<i>FPY</i>	<i>YX</i>
<i>PSTRDE</i>	<i>RD27</i>	<i>STE</i>	<i>FPE</i>	<i>EX</i>
<i>PSTRDX</i>	<i>RD27</i>	<i>STX</i>	<i>FPX</i>	<i>XX</i>
<i>PSTRDXX</i>	<i>RD27</i>	<i>STX</i>	<i>FPXX</i>	<i>XX</i>
<i>PSTRDXE</i>	<i>RDE27</i>	<i>STX</i>	<i>FPXE</i>	<i>XX</i>
<i>PSTRDNY</i>	<i>RDNX</i>	<i>STY</i>	<i>FPY</i>	<i>YXIN</i>
<i>PSTRDNE</i>	<i>RDNE</i>	<i>STE</i>	<i>FPE</i>	<i>EXIN</i>
<i>PSTRDNX</i>	<i>RDNX</i>	<i>STX</i>	<i>FPXX</i>	<i>XXIN</i>
<i>PSTRDEN</i>	<i>RDEIN</i>	<i>STX</i>	<i>FPXE</i>	<i>XXIN</i>

Конкретные имена подпрограмм, соответствующих *MODH* (*ST 5*, *ST 54* и т.п.), в табл. I не фигурируют, так как любая из них может быть применена в любом алгоритме ПСТ. Кратко опишем перечисленные в табл. I подпрограммы.

Интеграторы:

- DIF 2* - экстраполяционный, Буллриша-Штера [2], переменного порядка, с переменным шагом. Интегрирует ОДУ первого порядка.
- DIF 4* - экстраполяционный, переменного порядка, с модифицированной по Штеру [3] коррекцией шага. В качестве независимой переменной предусматривает использование либо времени, либо истинной долготы спутника; интегрирует только преобразованную по методу Энке модель движения в регулярных элементах [1].
- DIF 5* - аналогичен *DIF 2*, но включает модифицированную по Штеру автоматическую коррекцию шага.
- RKF 4(5)* - Рунге-Кутты-Фельберга 5-го порядка, с переменным шагом [4]. Интегрирует ОДУ первого порядка.
- AD 6* - Адамса, типа прогноз-коррекция, 6-го порядка, с переменным шагом [5]. Интегрирует ОДУ первого порядка.
- RD 27* - Эверхарта типа прогноз-коррекция, интерполирующий полиномом фиксированного порядка, с переменным шагом [6]. Интегрирует ОДУ первого либо второго порядка.
- RDE 27* - аналогичен *RD 27*, но интегрирует только преобразованную по Энке систему ОДУ второго порядка в прямоугольных координатах.

RDNY, *RDNE*, *RDNX* и *RDEIN* — модификации *RD27*, предусматривающие интерполяцию в корректоре на промежуточные моменты выхода. Интегрирует соответственно ОДУ в регулярных элементах, в кепплеровых, ОДУ второго порядка в координатах и ОДУ, преобразованные по Энке в координатах.

Подпрограммы моделей движения:

STY, *STE* и *STX* — осуществляют переход от начальных условий в виде классических кепплеровых элементов a_0 , e_0 , i_0 , Ω_0 , ω_0 , M_0 к начальным регулярным элементам P_0 , Q_0 , h_0 , f_0 , q_0 , I_0 [1], кепплеровым элементам a_0 , e_0 , i_0 , Ω_0 , ω_0 , M_0 и прямоугольным координатам и скоростям x , y , z , $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. (в ед. рад. Земли, часах, радианах).

FPY, *FPE*, *FPX*, *FPXX* и *FPXE* — вычисляют правые части ОДУ в регулярных элементах, в кепплеровых элементах [7], в координатах для ОДУ первого и второго порядка и в координатах, преобразованных по Энке [8].

FP4 — вычисляет правые части преобразованной по Энке модели движения в регулярных элементах.

Подпрограммы печати:

YX, *EX* и *XX* — осуществляют переход от текущих фазовых координат в виде регулярных элементов, кепплеровых и прямоугольных координат и скоростей к прямоугольным координатам и скоростям (в метрах, метрах в секунду), которые печатаются вместе с текущим моментом времени (в часах) и числом перавычислений правых частей.

YXIN, *EXIN*, *XXIN* — аналогичны *YX*, *EX*, *XX*, но печатают координаты и скорости сразу на несколько моментов, полученных на текущем шаге.

Орбиты, выбранные для тестирования, охарактеризованы в табл. 2, в первой графе которой в кавычках дано условное обозначение орбиты; далее — большая полуось a_0 , эксцентриситет e_0 , наклонение орбиты i_0 , порядков гармоник геопотенциала, учитываемых при построении данной орбиты, длина L орбитальной дуги и число моментов выхода NT .

Тестовые орбиты

ИСЗ ОРЕИТА	α_0 (км)	e_0	i_0 (град)	n	L (ч)	NT
ИНТЕЛСАТ "И"	42168	0,00031	1	4	480	3
СТАРЛЕТ "С"	7320	0,02	49,8	12	36	3
НАВСТАР "НР"	26562,98	0,01	63,4	8	240	31
"НИЗКИЙ" ИСЗ "НС"	6693,57	0,002	51,65	8	24	49
ПРОГНОЗ "ПР"	106040,22	0,87158	66,48	8	480	21

Последние три орбиты табл. I были предложены участникам Всесоюзного численного эксперимента, проводимого НИИ прикладной математики и механики при Томском университете совместно с Институтом прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР по решению III Всесоюзного совещания "Алгоритмы небесной механики" (Рига, 1-3 октября 1980 г.).

В качестве критерия эффективности K примем число перевычислений правых частей уравнений движения для заданной погрешности построения тестовой орбиты на дуге L .

Погрешность Δ построения каждой тестовой орбиты определялась методом "численного эталона", а именно:

Орбита строилась алгоритмами с различными методами интегрирования и моделями движения с максимально возможной для данной ЭВМ точностью. Среднее арифметическое по всем высокоточным реализациям орбиты принималось за эталонное. Вычислялась среднеквадратическая погрешность построения эталонной орбиты (для всех орбит она составила 0,0005 - 0,001 метра).

Погрешность Δ текущей реализации орбиты (при произвольной точности интегрирования) вычислялась по формуле

$$\Delta = \max_{i \in [1, NT]} \Delta_i$$

где

$$\Delta_i = \sqrt{[\bar{X}_i - \bar{X}_i^a]^T [\bar{X}_i - \bar{X}_i^a]},$$

$\bar{X}_i, \bar{X}_i^a$ — векторы координат ИСЗ в момент t_i на текущей и эталонной орбитах.

В итоге машинного эксперимента получено множество пар (K, Δ) для алгоритмов и орбит из табл. 1 и 2, которые отображены в виде графиков эффективности на рис.2 и 3. Анализ графиков (главным образом, в диапазоне геодезических точностей $1\text{ м} + 1\text{ см}$) позволяет сделать следующие выводы.

1. Для всех рассмотренных типов орбит и одинаковых моделей движения наиболее эффективным численным методом из исследованных оказался метод Эверхарта. Для орбит с малыми эксцентриситетами все алгоритмы, основанные на методе Булирша-Штера, примерно равноценны (рис.2,3, все орбиты, кроме "ПР"). При больших эксцентриситетах (рис.3, орбита "ПР") модификация по Штеру автоматической коррекции шага привела к существенному повышению эффективности алгоритма *PSTD5Y* по сравнению с *PSTD2Y*, а переход к угловой независимой переменной с преобразованием по Энке модели движения обеспечил преимущество алгоритма *PSTD4Y* над *PSTD5Y*. Метод Рунге-Кутты-Фельберга 5-го порядка практически во всех случаях уступает методу Булирша-Штера. По-видимому, порядок первого слишком низкий. Метод Адамса успешно конкурирует с методом Булирша-Штера, а для орбиты "С" (рис.2) превосходит последний. Однако алгоритмом *PSTD6Y* не удалось построить орбиту "ПР". Метод Адамса во всех случаях уступает методу Эверхарта. Таким образом, метод Эверхарта в сочетании с подходящими для того или иного типа орбит моделями движения образует самые эффективные алгоритмы ПСТ среди приведенных в табл. 1.

2. Для всех типов орбит алгоритмы, основанные на модели движения, в координатах 1-го порядка менее эффективны (например, на рис.2 для орбиты "И" значение K для алгоритма *PSTD5X* при $\Delta \approx 1\text{ м}$ в 12 раз больше, чем для алгоритма *PSTD5Y*). Далее будем обсуждать только модель движения в координатах 2-го порядка, которая значительно эффективнее.

3. Для высоких и средневысоких орбит с малыми эксцентриситетами (рис.2,3, орбиты "И", "ПР") модель в регулярных элементах предпочтительнее моделей в кеплеровых элементах и координатах. Самый эффективный алгоритм для данного типа орбит — *PSTRDNY*.

4. Для низких орбит с малыми эксцентриситетами регулярные элементы несколько предпочтительнее кеплеровых и конкурируют с коор-

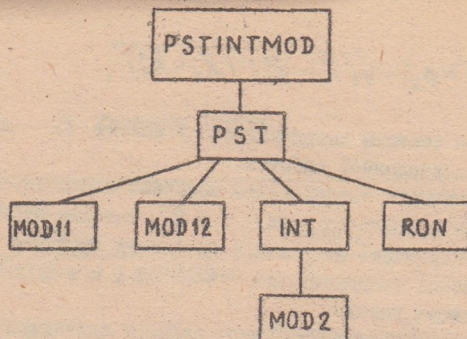


Рис.1. Структурная схема алгоритмов ПСТ

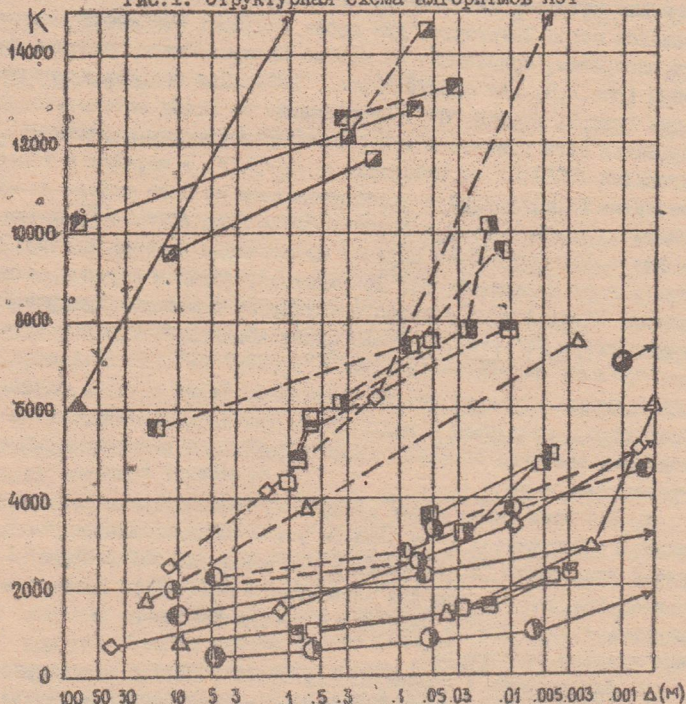


Рис.2. Сравнительная эффективность алгоритмов ПСТ.

Условные обозначения:

орбита "И";

орбита "С"

- - PSTD5E ■ - PSTD5X ▲ - PSTA6X ▲ - PSTA6Y ◇ - PSTRF5Y
 □ - PSTD2Y □ - PSTD2E ■ - PSTD2X ■ - PSTD4Y ■ - PSTD5Y
 ○ - PSTRDY ○ - PSTRDxx ○ - PSTRDx

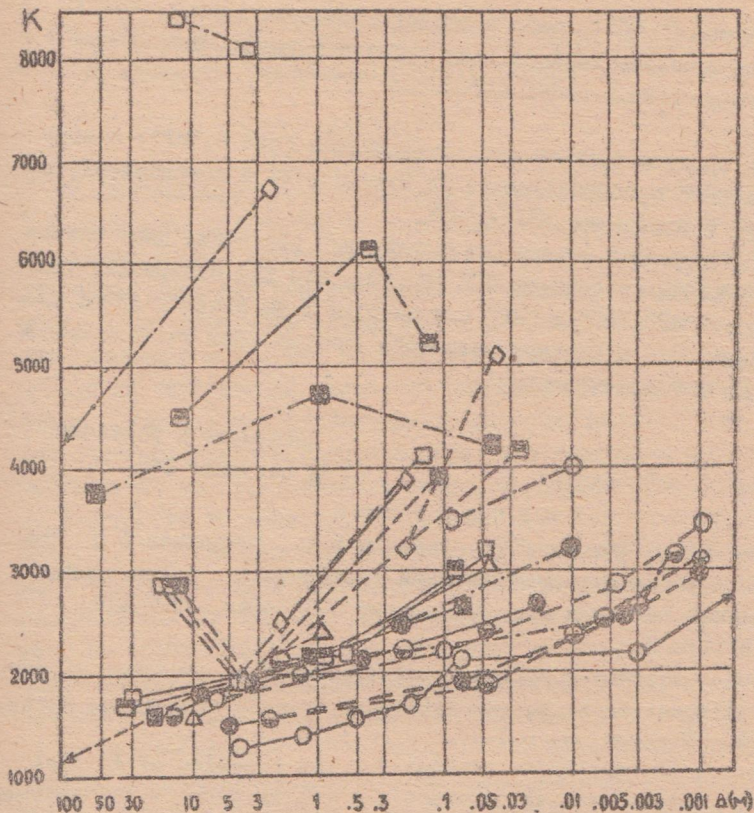


Рис.3. Сравнительная эффективность алгоритмов ПСТ.

Условные обозначения:

—— орбита "HP"; ---- орбита "HC"; -.-.- орбита "TP"

□ - PSTD2Y ▣ - PSTD5Y ■ - PSTDHY ◇ - PSTRF5Y
 ○ - PSTRDNY ● - PSTRDNX ● - PSTRDEN Δ - PSTA6Y

динатами (рис.1, "С"), либо уступают последним (рис.2, "НС"). Для прогнозирования данного типа орбит с примерно одинаковым успехом можно использовать алгоритмы *PSTRDNY*, *PSTRDNX* и *PSTRDEN*.

5. Для орбит с большим эксцентриситетом (рис.2, "ПР") наиболее эффективна преобразованная по Энке модель в координатах, используемая в алгоритме *PSTRDEN*.

В заключение для оценки быстродействия указанных выше наиболее эффективных алгоритмов ПСТ отметим, что для построения тестовых орбит "НР", "НС" и "ПР" с точностью I дм потребовалось соответственно 7,6 и 7 минут машинного времени (без учета времени трансляции и редактирования).

Поступила в редакцию
в сентябре 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Сурнин Ю.В., Кужелев С.В., Афеулов В.А., Дементьев Ю.В. Программа прогнозирования движения геодезических искусственных спутников Земли. - В кн.: Наблюдения ИСЗ, София, 1977, №16, с. 157-174.
2. Bulirsch R., Stoer J. Numerical Treatment of ordinary Differential Equation by Extrapolation Methods. - Numerische Mathematik, 1966, Bd. 8, p.1-13.
3. Stoer J. Extrapolation methods for the solution of initial value problems and their practical realization. - In: Lecture Notes in Math. Springer Verlag, 1974, vol. 362, p. 1-21.
4. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. - М.: Мир, 1980. - 280 с.
5. Основы теории полета космических аппаратов /Под общ. ред. Г.С. Нариманова и М.К. Тихонравова. - М.: Машиностроение, 1972. - 608 с.
6. Everhart E. Implicit single-sequence method for integrating orbits. - Celestial Mechanics, 1974, vol. 10, p. 35-56.
7. Дубошин Г.И. Небесная механика. Основные задачи и методы. - М.: Наука, 1968. - 800 с.
8. Херрих С. Астродинамика. - М.: Мир, 1976, т.3. - 360 с.

О ТОЧНОСТИ И БЫСТРОДЕЙСТВИИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОРБИТ ИСЗ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Н. А. Сорокин

На современном этапе наблюдения ИСЗ достигли точности 1 метр при измерении дальности, а в ближайшем будущем достигнут нескольких дециметров и даже сантиметров. Аналитическое интегрирование уравнений движения искусственных спутников указанной точности не дает. Кроме того, чем точнее аналитические разложения, тем более они громоздки и выигрывают от скорости вычисления пропадает. Поэтому для интегрирования уравнений движения ИСЗ все чаще и чаще стали применять методы численного интегрирования. Всем, кто использует численные методы, известно, что выигрывая в точности вычислений, мы проигрываем в скорости. Обработывая большое число наблюдений геодезических спутников (иногда по несколько тысяч) при определении или уточнении орбиты, необходимо использовать такой численный метод, который бы удовлетворял высоким требованиям как по точности интегрирования, так и по быстродействию. Во время обработки большого ряда наблюдений на ЭВМ малой мощности время счета является немаловажным фактором. Немаловажное значение имеет также учет тех или иных сил, воздействующих на движение спутника: аномалий силы тяжести, притяжения Луны и Солнца, торможение верхней атмосферы, давление солнечной радиации — прямой и отраженной, влияние твердых приливов и т.д. На практике не всегда приходится производить учет всех возмущающих факторов. В зависимости от высоты орбиты ИСЗ, его формы, а также от заданной точности вычислений приходится исключать некоторые возмущения.

В настоящей работе мы попытались в какой-то степени решить задачу поиска наиболее эффективного алгоритма численного прогнозирования движения ИСЗ. Мы сравнивали два численных метода Эверхарта и Булльша-Штёра, а также исследовали влияние таких возмущающих факторов, как притяжение Луны, Солнца, сопротивление атмосферы, частичный или полный учет влияния гармоник гравитационного поля Земли или замена его аппроксимирующей моделью поля точечных масс.

При сравнении двух методов численного интегрирования Булльша — Штёра (BULSTO) [1] и Эверхарта [2], на наш взгляд, наиболее эффективным оказался метод Эверхарта. При интегрировании нами

невозмущенного движения в прямоугольных координатах на 30 суток на ЭВМ БЭСМ-6 с одинарной точностью (12 значащих цифр) двумя методами явное предпочтение можно отдать методу Эверхарта как в смысле точности, так и в смысле количества обращения к правым частям и затрат вычислительного времени [3].

На рис. 1 - 4 для трех невозмущенных орбит спутников: низколетящего, геодезического и стационарного, изображено накопление погрешности в радиусе-векторе при интегрировании уравнений движения на 30 суток. Для первых двух орбит (рис. 1, 2) накопление ошибок интегрирования меньше для метода Эверхарта, а для геостационарного спутника (рис. 3) оба метода дают примерно одинаковую ошибку. На рис. 4 показана зависимость времени счета от большой полуоси орбиты спутника. В скобках стоит количество обращений к правым частям дифференциальных уравнений.

Следует отметить также, что метод Эверхарта по сравнению с методом *BULSTO* имеет то преимущество, что при наличии плотного ряда наблюдений ИСЗ можно не обращаться часто к подпрограмме метода, а использовать при одном обращении внутришаговую интерполяцию, чего нельзя сделать в методе *BULSTO* и других методах.

При вычислении возмущающих ускорений в правых частях дифференциальных уравнений имеющаяся в нашем распоряжении программа вычисления правых частей учитывает влияние гармоник гравитационного поля Земли до 36 порядка и степени, влияние притяжения Луны и Солнца, торможение атмосферы, давление солнечной радиации (прямой и отраженной) и влияние твердых приливов Земли [4]. Остановимся на вопросах реализации алгоритмов вычисления некоторых возмущений с точки зрения эффективности программ по скорости и точности вычислений.

При учете влияния сферических гармоник гравитационного поля Земли можно с успехом пользоваться гармоническими полиномами Канингама [5], которые получаются с помощью рекуррентных соотношений отдельно для мнимой и действительной частей их комплексного представления. Алгоритм построен нами так, что при конкретно заданной модели набора коэффициентов C_{nm}, S_{nm} , которые записаны на внешнем носителе в виде файла, можно вычислять влияние не только от всей совокупности зональных, тессеральных и секториальных гармоник геопотенциала, но и отдельно от зональных гармоник (всех или только части), а также от зональных (или без них), части (или всех) тессеральных и секториальных гармоник с включением резонансных или окolorезонансных гармоник. Подобная реализация

алгоритма объясняется тем, что для многих задач нет необходимости учитывать все члены разложений сферических гармоник до максимального порядка. Часто при решении многих задач достаточно разложений всех или части зональных гармоник и долготных гармоник более низкого порядка (например, до 8) при дополнительном учете членов, порождающих резонанс. При этом мы достигаем уменьшения вычислительного времени до 40% при $n, m = 8$ и до 30% при $n, m = 4$ от полного счета при $n, m = 20$, сохраняя заданную точность (пример высокого спутника).

В программе вычисления правых частей нами предусмотрен вариант, когда вместо гармоник геопотенциала задается гравитационное поле совокупности точечных масс, аппроксимирующее разложение по сферическим функциям. Нами были взяты модели точечных масс М 3 и М 4 [6], построенные Г. Мещеряковым и А. Марченко во Львовском политехническом институте. Известно, что потенциал модели точечных масс имеет более простой вид, чем разложение геопотенциала. Именно этот аргумент послужил основанием в пользу использования моделей точечных масс в целях прогнозирования движения ИСЗ с помощью численного интегрирования. Как показало интегрирование орбиты спутника Лагос (высота 6000 км) на интервале в 2,5 суток на ЭВМ ЕС 1033, применение модели точечных масс дает двухкратный выигрыш машинного времени. Оценку точности интегрирования этой орбиты с точечными массами производили по орбите, полученной с помощью соответствующего разложения геопотенциала по сферическим функциям. Так, модель М 3 была получена из гравитационной модели GR I M-2, в которой были взяты гармоники только до 12 порядка, а модель М 4 из модели GEM - 9, в которой для аппроксимации были взяты зональные гармоники до 29 порядка и долготные гармоники до 20 порядка и степени.

Результаты интегрирования с помощью различных моделей

Модели	GRIM-2	GRIM-3	SAO-I	SAO-VI	GEM-9	GEM-10	GEM-10B	M3	M4
GRIM-2	0								
GRIM-3	17	0							
SAO-I	22	7	0						
SAO-VI	38	22	17	0					
GEM-9	7	13	18	34	0				
GEM-10	5	17	22	38	4	0			
GEM-10B	5	18	23	39	5	1	0		
M 3	7	16	26	38	8	8	10	0	
M 4	6	14	22	36	7	7	6	8	0

В таблице даны результаты сравнения интегрирования как с помощью моделей точечных масс M3, M4, так и с помощью моделей гравитационного поля GRIM-2, GRIM-3, SAO-IV [3], SAO-VI, GEM-9, GEM-10, GEM-10B. Во всех перечисленных моделях при интегрировании использовалось следующее поле: зональные гармоники до 29 порядка, а тессеральные и секториальные гармоники до 20 порядка. По вертикали и горизонтали в таблице дано название моделей, а на пересечении вертикалей и горизонталей — среднеквадратические расхождения в радиусе — векторе спутника в метрах Лагос, полученные на всем интервале интегрирования. Следует отметить хорошее согласие многоточечных моделей M3 и M4 с наиболее современными стандартными моделями гравитационного поля GEM-9, GEM-10, GEM-10B, GRIM-3. Как видно из таблицы, модели точечных масс можно с успехом использовать при прогнозировании орбиты для эфемеридных целей и в методе коротких дуг, когда требуется экстраполяция элементов орбиты на интервалы времени до 30-40 минут. На этих интервалах расхождение Δr при сравнении получается меньше одного метра.

Учет влияния притяжения Луны и Солнца наталкивается на трудности определения их точных координат. Так, например, мы попробовали вычислять положение Луны по теории Хилла-Брауна, ограничившись коэффициентами разложений для долготы и широты до 8, а для параллакса до 0,2 [4]. Это дает вдоль орбиты Луны максимальную ошибку около 0,5. При частом обращении к правым частям уравнений движения вычисление координат Луны и Солнца по таким разложениям занимает много времени. Был предложен вариант вычисления координат Луны и Солнца в определенный момент по всем взятым нами членам разложений Хилла-Брауна, а затем в течение некоторого интервала времени с помощью линейной экстраполяции, затем вновь по теории, и вновь экстраполяция и т.д. Как показано на рис. 5, при экстраполяции на 6-часовом интервале в течение 8 суток ошибки элементов орбиты ИСЗ ω и M дают вдоль орбиты ошибку в 2-3 метра независимо от ошибки, которую дает неучтенная часть в разложениях Хилла-Брауна. Поэтому лучше использовать интерполирование координат Луны и Солнца с помощью заданных таблиц, а еще лучше с помощью коэффициентов чебышевских разложений координат Луны и Солнца таких, например, как во французском ежегоднике *Connaissance de Temps* или вычисленных с помощью соответствующих программ.

Вычисление влияния сопротивления атмосферы является, пожалуй, самой трудоемкой операцией, если используется одна из точных моделей атмосферы. Поэтому, чтобы выбрать наиболее оптимальную мо-

дель атмосферы, мы сравнили результаты численного интегрирования с разными моделями: с простой статической моделью ВСА (временная стандартная атмосфера, 1960), с международной моделью 1972 года (CIRA 1972) и с французской моделью DTM Барлье [7]. На рис. 6

изображены разности радиусов - векторов спутника на интервале до 7 суток при интегрировании с моделями CIRA-72 и DTM. Разности показывают, что обе модели на одинаковых высотах дают примерно одинаковые результаты, хотя и по-разному смоделированы. При больших индексах геомагнитной активности, как, например, при $K_p = 9$, эти разности могут быть значительными. Орбиты интегрировались для спутника с высотой примерно 1400 км при различных индексах солнечной активности $F_{10.7}$.

На концах интервала в 7 суток разности координат ИСЗ, полученных двумя моделями, получаются порядка ошибок фотографических наблюдений, а при отношении $S/m < 0,3$ и того меньше, по скорости же вычислений модель DTM предпочтительнее - с ней программа считает быстрее, чем с моделью CIRA-72, в 6-8 раз. Использование модели ВСА-60 рекомендовано при неточных вычислениях на 2-3 суток. Иногда при использовании наблюдений высоких спутников с высотой перигея 1000 км и выше атмосферные возмущения не принимаются во внимание. При этом неявно подразумевается, что их величина лежит в пределах точности определения орбит. Нами были сделаны оценки возмущений от торможения атмосферы для спутников Геос А и Геос С с высотами перигея соответственно 1129 и 838 км [8] на периоды их наблюдений в июле 1977 года и в октябре 1978 года, когда постепенно возрастал уровень солнечной активности $F_{10.7}$ от 85 до 160 единиц при $K_p = 3$. На интервалы 2,5-3 суток интегрировались орбиты с учетом сопротивления атмосферы (модели CIRA-72 и DTM) и без учета атмосферы. Величины Δr при включении моделей атмосферы для обеих спутников на интервале в 2,5 суток составили величины от 5 до 30 метров (см. рис. 7), причем нет видимой связи между повышением уровня солнечной активности и максимумом Δr . Это можно считать естественным фактом, поскольку различные типы вариации плотности (так или иначе учитываемые моделями) взаимосвязаны и их наложение при определенных геометрических условиях может дать как минимальный, так и максимальный эффект. Разности Δr для двух моделей на интервале в 2,5 суток в данных расчетах не превышают четырех метров, т.е. лежат в пределах необходимой точности как при определении орбит, так и для дальнейшего их использования. При оценке величин полученных

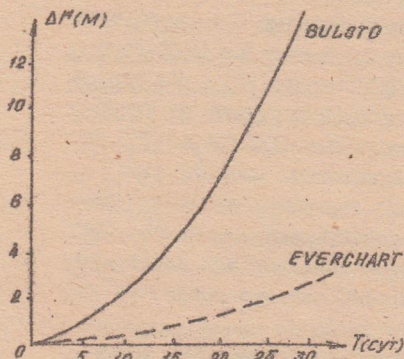


Рис.1. Накопление ошибки интегрирования: $a=6990$ км; $e=0,01$; $P=97$ мин

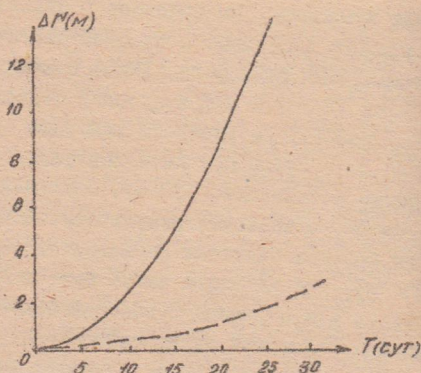


Рис.2. Накопление ошибки интегрирования: $a=85000$ км; $e=0,01$; $P=130$ мин

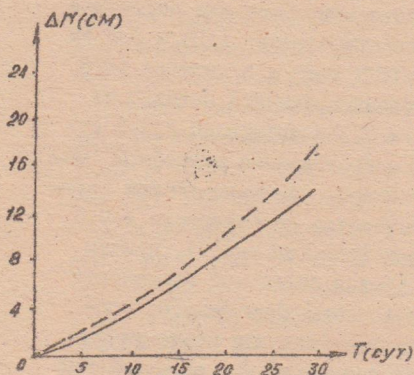


Рис.3. Накопление ошибки интегрирования: $a=42500$ км; $e=0,01$; $P=23^h 56^m$

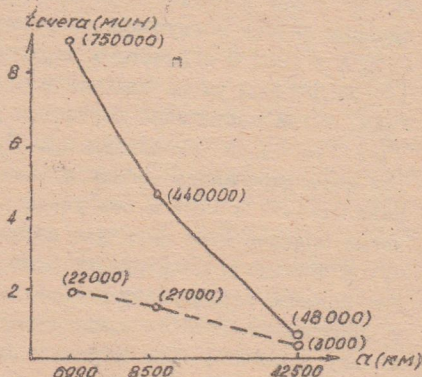


Рис.4. Взаимосвязь времени счета с большой полуосью орбиты спутника (количество обращений к подпрограмме правых частей уравнений движения)

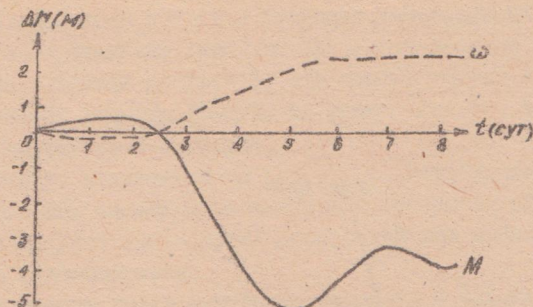


Рис. 5. Ошибки в элементах орбиты спутника ω и M , которые получаются вследствие экстраполяции положения Луны на 6-часовом интервале времени

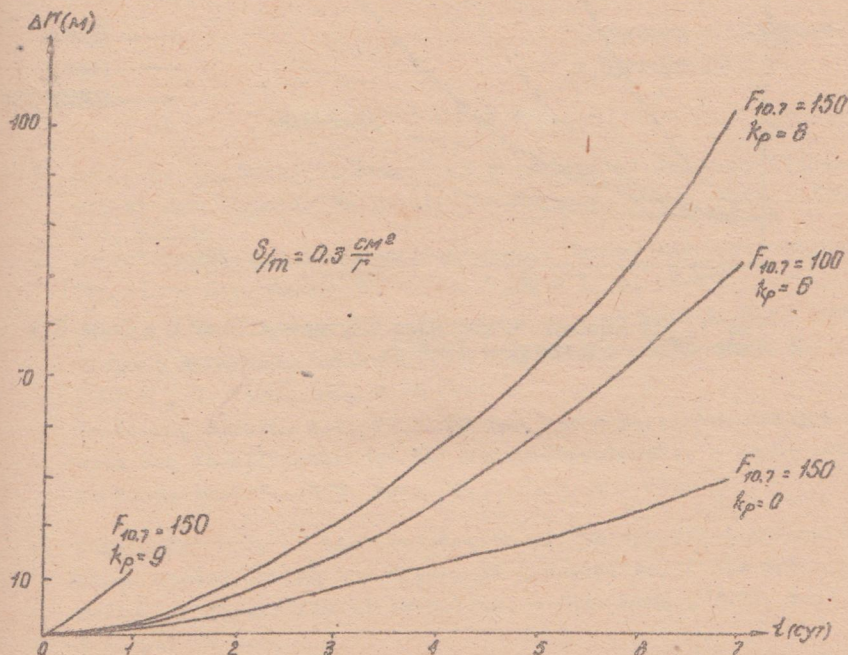


Рис. 6. Разницы в положениях ИСЗ с $h_a = 1400$ км при интегрировании с моделями атмосфер CIRA - 72 и DTM

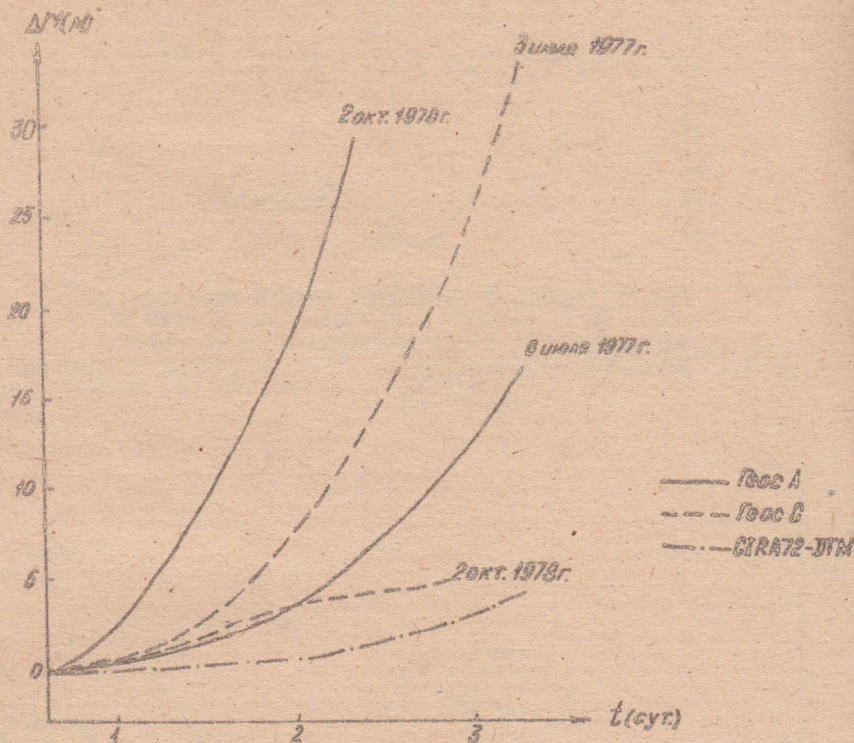


Рис. 7. Атмосферные возмущения спутников Геос А и Геос С в июле 1977 г. и октябре 1978 г.

разностей возникает вопрос о точности используемых моделей. Погрешность в определении значения плотности целиком входит в эффект торможения, и если допустить, что ошибка модели в среднем составляет величину порядка 10-20%, то можно ожидать, что Δr определяется с точностью $\pm 3-5$ метров.

Результаты, полученные на рис. 4, показывают, что даже при неэкстремальных значениях солнечной и геомагнитной активности в ряде случаев учет атмосферных возмущений для орбит геодезических спутников целесообразен.

Эффективность учета светового давления и влияния приливов на ИСЗ нами не исследовалась. Для учета давления света нами внедряется алгоритм Руше и Бальмино [9], в котором вычисляется суммарное давление на ИСЗ отраженного света от освещенной поверхности Земли с использованием модели альбедо, предложенной Лайой [10], в которой применяются разные альбедо для суши и водной поверхности.

Поступила в редакцию
в октябре 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Bulirsch R., Stoer I. Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations by Extrapolation Methods. - Num. Math., 1966, N 8, p.1-13.
2. Everchart E. Implicit Single-sequence Method for Integrating Orbits. - Cel. Mech., 1974, vol. 10, N 1, p. 35-55.
3. Степин Ю.Д., Сорокин Н.А. Сравнение высокоточных методов численного интегрирования. - Научные информации Астросовета АН СССР. М., -1981, №48, с.18-28.
4. Gendt G., Sorokin N.A. Probleme bei der numerischen Integration von Satellitenbahnen mit hoher Genauigkeit. - Vermessungstechnik, Berlin, 1978, vol. 26, N.9, S. 291-295.
5. Cunningham L.E. On the computation of the spherical harmonic terms needed during the numerical integration of the orbital motion of an artificial satellite. - Cel. Mech., I 70, vol. 2, N 2, p. 207-216.
6. Мешеряков Г.А., Марченко А.Н., Сорокин Н.А., Татевян С.К. Использование многоточечных моделей геопотенциала при прогнозировании орбит ИСЗ. - Р.кв.: Наблюдения искусственных спутников Земли. София, 1980, №20, с.172-178.

7. Сорокин Н.А., Хорват А., Шмелев Л.Б. Влияние различных моделей атмосферы на точность определения координат ИСЗ. - В кн.: Наблюдения искусственных небесных тел. М., 1981, №79, с.75-80.
8. Касименко Т.В., Сорокин Н.А. Сравнительный анализ моделей атмосферы, используемых при вычислении орбит ИСЗ. - В кн.: Наблюдения искусственных спутников Земли. София, 1980, №20, с. 467-472.
9. Roucher P., Balmino G. Nouvel algorithme de calcul des perturbations dues à la pression solaire rediffusée. - In: Introduction des s/p correspondants dans la chaîne disimul. GRGS, 1977, p. 6-19.
10. Lála P., Barlier F. Interpretation of the D5B Satellite measurements and the new model of the earth's albedo. - Bull. Astron. Inst. Czechosl., 1978, vol. 29, p. 238-243.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ КОМЕТЫ ГАЛЛЕЯ

В.А. Шефер

В настоящей работе даются сравнительные характеристики ряда вычислительных алгоритмов, которые могут найти применение в задаче прогнозирования движения кометы Галлея. Рассматривается задача о движении кометы Галлея под действием притяжения Солнца и девяти больших планет. Уравнения движения записываются в прямоугольной системе координат и в параметрических переменных Кустаанхеймо - Штифеля [1].

Уравнения движения в прямоугольной системе координат имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{q}}{dt} &= \bar{p}, \\ \frac{d\bar{p}}{dt} &= -k^2 \frac{m_0}{R^3} \bar{q} + \bar{F}, \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

где t - физическое время; $\bar{q}$ и $\bar{p}$ - векторы положения и скорости кометы относительно центрального тела с массой m_0 ; $R=|\bar{q}|$, k^2 - гравитационная постоянная; $\bar{F}$ - вектор возмущающей силы.

Уравнения движения в регуляризирующих переменных Кустаанхеймо-Штифеля ($\mathcal{K}\mathcal{S}$ - переменные) получаются в результате применения к уравнениям (I) временного преобразования $dt = R d\tau$ и преобразования Кустаанхеймо-Штифеля

$$\bar{q} = \frac{1}{2} A^T \bar{Q}, \quad \bar{p} = A^T \bar{P} / 4R.$$

где τ - новая независимая переменная, введенная вместо физического времени t ; $\bar{Q}$ и $\bar{P}$ - новые векторы положения и скорости в четырехмерном параметрическом пространстве; A - матрица, составленная из элементов вектора $\bar{Q}$:

$$A = 2 \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ -Q_2 & Q_1 & Q_4 \\ -Q_3 & -Q_4 & Q_1 \\ Q_4 & -Q_3 & Q_2 \end{bmatrix};$$

знак T означает транспонирование. Регуляризированные уравнения движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{q}}{dt} &= \frac{1}{4}\bar{p}, \\ \frac{d\bar{p}}{dt} &= 2h\bar{Q} + R\bar{A}\bar{F}, \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{1}{4}\bar{p}^T\bar{A}\bar{F}, \\ \frac{dt}{dt} &= R, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где h имеет смысл кеплеровской энергии.

Функции правых частей уравнений (2) в отличие от уравнений (1) не содержат особенностей в начале координат, а решения невозмущенной части уравнений (2) обладают свойством устойчивости в смысле Ляпунова.

В процессе численного эксперимента уравнения (1) и (2) интегрировались неявным одношаговым методом Эверхарта II-го порядка (RADA II), методом Рунге-Кутты-Фельберга 5-го порядков (RKFS5) и экстраполяционным методом Булльшта-Штерса (DIF3Y1). Программные реализации этих методов были осуществлены на языке FORTRAN для ЭВМ БЭСМ-6 в НИИ прикладной математики и механики при Томском университете (В.А. Шефер, Ю.А. Федяев) и в институте теоретической астрономии АН СССР (Е.Н. Макарова).

Начальные координаты и скорости кометы были выбраны следующими [2].

Эпоха 1910, май, 9,0 (J.E.D. 241 8800,5)

Экватор и равноденствие 1950,0

а.е.

а.е./сутки

$x = -0,185\ 687\ 856\ 613$	$\dot{x} = -0,027\ 163\ 741\ 970$
$y = -0,656\ 967\ 049\ 822$	$\dot{y} = -0,002\ 683\ 755\ 798$
$z = -0,212\ 035\ 102\ 581$	$\dot{z} = -0,008\ 143\ 743\ 456$

Интервал интегрирования составлял немногим более одного оборота кометы вокруг Солнца и равнялся 29 200 суток. Интегрирование выполнялось с автоматической коррекцией шага в рамках одинарной точности ЭВМ БЭСМ-6.

Координаты и скорости больших планет, а также постоянные движения взяты из работы Естервинтера и Когена [3]. В процессе ин-

тегрирования уравнений движения кометы Галлея координаты больших планет вычислялись по предварительно полученным и записанным на магнитную ленту таблицам координат. При этом использовались интерполяционные формулы Лагранжа 5, 7 и 9-го порядков.

Для оценки точности результатов интегрирования была предварительно вычислена эталонная орбита методом Эверхарта 15-го порядка с двойным числом разрядов. Точность вычисления эталонной орбиты составила на конце интервала интегрирования 10^{-11} а.е. С целью выяснения характера распространения ошибки интегрирования сравнение с эталонной орбитой проводилось через каждые сто суток. Орбита строилась с различными относительными точностями ε , определяющими выбор величины шага интегрирования. Минимальные ошибки интегрирования были получены при $\varepsilon = 10^{-7}$, 10^{-8} и 10^{-12} для программ *RADA II*, *DIFSY I* и *RKF78* соответственно. После окончания работы программы на печать выводились координаты и скорости кометы, число обращений к подпрограмме вычисления правых частей уравнений движения и время счета в секундах.

Результаты численного эксперимента представлены в табл. I и 2, а также на рис. 1 и 2. В табл. I и 2 приведены сравнительные характеристики эффективности интегрирования тремя методами уравнений (1) и (2) на интервале 29 200 суток. N_f означает число обращений к подпрограмме вычисления правых частей уравнений движения. Величины $\Delta q = \sqrt{\Delta q_1^2 + \Delta q_2^2 + \Delta q_3^2}$ и $\Delta p = \sqrt{\Delta p_1^2 + \Delta p_2^2 + \Delta p_3^2}$ характеризуют отклонения векторов положения и скорости кометы от соответствующих эталонных значений, t — время счета в секундах. На рис. 1 и 2 представлены кривые поведения ошибки интегрирования Δq на рассматриваемом интервале. Для всех кривых характерно скачкообразное изменение ошибки интегрирования в окрестности перигелия (J.E.D. 244 647I, I6I3), что связано с большим возмущающим влиянием со стороны группы внутренних планет. Полученные результаты исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. Интегрирование регуляризованных уравнений (2) для всех трех методов существенно лучше, чем интегрирование ньютоновских уравнений (1). Например, при интегрировании с помощью программы *RADA II* введение регуляризации уравнений движения позволяет повысить точность приблизительно в 20 раз.

2. Лучшие результаты как по точности, так и по быстродействию дает программе *RADA II* независимо от вида уравнений дви-

Таблица 1

Сравнительные характеристики работы программ при
интегрировании уравнений движения в прямоугольных
координатах

Характеристики	Программа		
	<i>RADA 11</i>	<i>DIFSY 1</i>	<i>RKF 78</i>
N_F	15 558	31 914	7 125
Δq (а.е.)	$2,1 \cdot 10^{-6}$	$5,2 \cdot 10^{-6}$	$5,4 \cdot 10^{-3}$
Δp (а.е./сутки)	$6,6 \cdot 10^{-10}$	$1,7 \cdot 10^{-9}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$
t (с)	405	542	222

Таблица 2

Сравнительные характеристики работы программы при интег-
рировании уравнений движения в KS - переменных

Характеристики	Программа		
	<i>RADA 11</i>	<i>DIFSY 1</i>	<i>RKF 78</i>
N_F	13 347	34 052	74626
Δq (а.е.)	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$9,8 \cdot 10^{-7}$
Δp (а.е./сутки)	$2,7 \cdot 10^{-11}$	$4,2 \cdot 10^{-10}$	$3,2 \cdot 10^{-10}$
t (с)	384	615	1 478

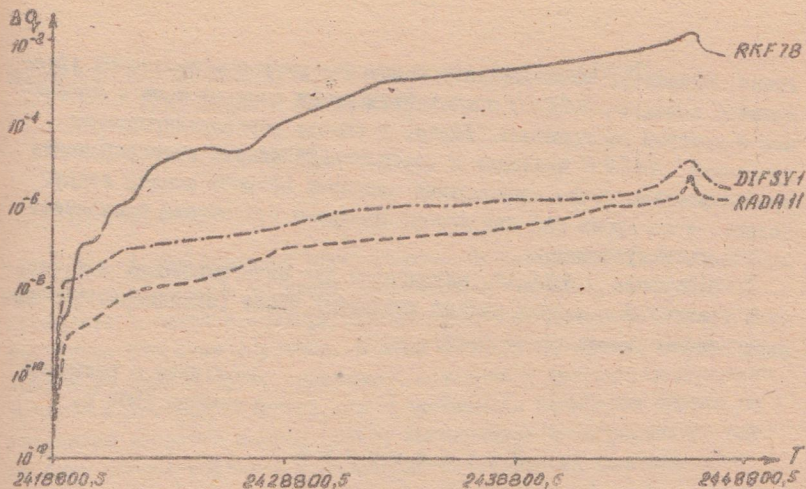


Рис. 1. Оценка точности интегрирования уравнений движения в прямоугольных координатах

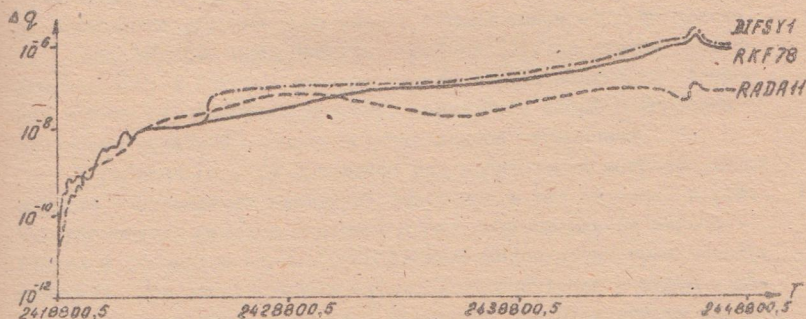


Рис. 2. Оценка точности интегрирования уравнений движения в КС - переменных

дения. Например, точность интегрирования регуляризованных уравнений с помощью *RADA II* приблизительно на порядок выше в сравнении с другими программами. Далее, в случае регуляризованных уравнений *RADA II* приводит к стабилизации ошибки интегрирования приблизительно после прохождения четверти оборота кометы вокруг Солнца, в то время как для других программ эта ошибка продолжает монотонно возрастать.

3. Программа *RKF 78* непригодна для интегрирования ньютоновских уравнений в случае сильно вытянутых орбит (эксцентриситет орбиты кометы Галлея равен 0,97).

Поступила в редакцию
в ноябре 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. — 304 с.
2. Yeomans D.K. Comet Halley - the orbital motion. — *Astron. J.*, 1977, vol. 82, 6, p. 435-440.
3. Oesterwinter C., Cohen C. New orbital elements for Moon and planets. — *Celest. Mech.*, 1972, vol. 5, 3, p. 317-395.

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ МНОГООБОРОТНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ. РЕАЛИЗАЦИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ

Ю.А.Федяев

I. Введение

Точное долгосрочное прогнозирование движения ИСЗ может быть выполнено с помощью линейных многшаговых методов, позволяющих проводить численное интегрирование уравнений движения с шагом в несколько оборотов спутника. В этих методах изменения элементов орбиты за один оборот, вызываемые вековыми и долгопериодическими возмущениями, используются для предсказания элементов орбиты на несколько оборотов вперед. Затем выполняется интегрирование еще на один оборот спутника и производится коррекция вычисленных элементов. После этого весь процесс повторяется.

Таким образом, только два оборота из числа пропускаемых фактически интегрируются. Поскольку число операций в экстраполяционных формулах невелико, такие методы дают существенный выигрыш во времени вычислений по сравнению с одношаговыми методами, не уступая при этом им в точности.

Двухшаговый алгоритм внешней экстраполяции и внутреннего интегрирования, применяемый в задачах прогнозирования движения небесных тел, в литературе называют методом многооборотного интегрирования.

Впервые многооборотные методы были предложены Г.П.Таратыновой [1], а затем развиты в работах Графа и Бэттиса [2,3]. Однако применение многооборотных методов в задачах небесной механики до настоящего времени было весьма ограниченным по ряду причин.

Так, методы, предложенные в работе [1], применимы лишь к тем задачам, в которых функция, описывающая изменение элементов орбиты от оборота к обороту, может быть аппроксимирована полиномом конечной степени по независимой переменной.

В работах [2, 3] предложен ряд модификаций многооборотных методов, позволяющих применять последние в тех задачах, в которых упомянутая функция содержит кроме полиномиальных периодические и смешанные члены (произведения линейных и периодических функций). При этом предполагается, что физические частоты задачи, входящие в периодические и смешанные члены, известны *а priori*.

Но применение и этих модифицированных методов ограничивалось использованием лишь одной частоты, поскольку определение самих частот вызывает некоторые трудности.

В настоящей работе предлагается способ определения частот и показывается эффективность применения методов многооборотного интегрирования в задачах долгосрочного прогнозирования движения ИСЗ при использовании двух и более частот.

2. Методы многооборотного интегрирования

Пусть уравнения движения ИСЗ приведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, для которой корректно поставлена задача Коши. Рассмотрим одно из уравнений данной системы.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = g(x, Y), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (I)$$

Здесь Y — вектор орбитальных элементов объекта.

Выберем опорную точку на орбите, например такую, как апогей, перигей или узел и будем считать, что значение y_0 соответствует именно этой точке орбиты. Выберем шаг по независимой переменной x , равный одному обороту спутника, и определим две равномерные сетки по этой переменной:

а) малую сетку, узлы которой отстоят друг от друга на один шаг;

б) большую сетку с узлами, отстоящими на целое число шагов — M ($M \geq 3$). В узлах малой сетки определим функцию f следующим образом:

$$f_p = f(p, Y_p) = Y_{p+1} - Y_p = \int_{x_p}^{x_{p+1}} g(x, Y(x)) dx, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где p — номер узла, $Y_p = Y(x_p)$.

Таким образом, исходное дифференциальное уравнение (I) заменено разностным уравнением

$$Y_{p+1} - Y_p = f_p, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Для сокращения записи примем следующие соглашения: если индексы содержат греческие буквы или произведения с M , подразумеваются узлы малой сетки; индексы, выраженные латинскими буквами, дают номер узла большой сетки, то есть

$$y_n = y_{nM}, f_n = f(nM, y_{nM}).$$

Для решения разностного уравнения (3) применим линейную двухшаговую схему типа предиктор-корректор:

$$y_n - y_{n-1} = \quad (4)$$

$$M [\alpha_0^k f_{n-k} + \alpha_1^k \nabla^1 f_{n-k} + \dots + \alpha_N^k \nabla^N f_{n-k}].$$

Здесь α_i^k , $i = 0, 1, 2, \dots, N$, — некоторые коэффициенты, $k = 0, 1$; $n = 1, 2, \dots$. Обратные разности определяются на большой сетке

$$\nabla^0 f_n = f_n, \quad \nabla^{j+1} f_n = \nabla^j f_n - \nabla^j f_{(n+1)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots.$$

При $k=1$ из (4) получаем формулу предсказания, а при $k=0$ — формулу коррекции.

Коэффициенты α_i^k , $k=0, 1$; $i = 0, 1, 2, \dots, N$, приведены в [2] и являются полиномами по $1/M$. С такими коэффициентами α , называемыми стандартными, схема (4) позволяет определять решение разностного уравнения (3) без методических ошибок (не считая ошибок округления), если правая часть f_p есть полином степени не выше N :

$$f_p = \sum_{i=0}^N A_i p^i, \quad A_i = \text{const}, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad p = 0, 1, \dots \quad (5)$$

В работе [3] предложена модификация схемы (4). Суть модификации заключается в том, что коэффициенты α из (4) подбираются так, чтобы разностное уравнение (3) с правой частью

$$f_p = \sum_{i=0}^{N-2} A_i p^i + \sum_{i=1}^2 (B_i \cos(\gamma_i p) + C_i \sin(\gamma_i p)) + p \sum_{i=1}^r (D_i \cos(\gamma_i + q)p + E_i \sin(\gamma_i + q)p)) \quad (6)$$

интегрировалось точно. Здесь q, r — целые, $L=2(q+r)$, A_i, B_i, C_i, D_i, E_i — некоторые постоянные, $N \geq L$. При этом коэффициенты

$\alpha_i^k, i = 0, 1, \dots, (N-1)$ имеют стандартные значения,
 $\alpha_i^k, i = (N-l+1), (N-l+2), \dots, N$, определяются из системы
 линейных алгебраических уравнений, правая часть и матрица коэф-
 фициентов которой зависят от q, r и физических частот γ_i ,
 $i = 1, 2, \dots, (q+r)$ [3].

Применение модифицированных методов до настоящего времени
 ограничивалось в основном двумя случаями: 1) $q=1, r=0$,
 2) $q=1, r=1$, то есть использовалась одна частота γ в
 (6), поскольку определение этих частот вызывает некоторые труд-
 ности и является самостоятельной задачей. Ниже приводится описа-
 ние способа определения частот.

3. Определение частот

Методы многооборотного интегрирования наиболее целесооб-
 разно применять в тех задачах небесной механики, в которых в качест-
 ве независимой переменной в уравнениях движения может быть выб-
 ран какой-либо угловой параметр орбиты, например, аргумент широ-
 ты, истинная или эксцентрическая аномалии. Это объясняется, во-
 первых, тем, что определение положения опорных точек на орбите
 при численном интегрировании не вызывает трудностей и, во-вторых,
 "расстояния" между опорными точками орбиты, то есть между узлами
 сеток, одинаковы независимо от набора возмущающих факторов, что,
 в свою очередь, позволяет определить влияние того или иного фак-
 тора на эволюцию исследуемого объекта.

Итак, пусть имеется некоторая математическая модель движения
 небесного тела, и дифференциальное уравнение, описывающее пове-
 дение какого-либо элемента орбиты e , имеет вид

$$\frac{de}{dx} = g_1(x, Y) + g_2(x, Y),$$

где g_1 описывает возмущающие факторы с известной разностной
 функцией f_p из (2); g_2 - фактор, влияние которого на эволюцию
 орбиты необходимо определить.

С помощью подходящего метода численного интегрирования опре-
 деляем значения элемента e в опорных точках орбиты на некото-
 ром интервале времени: один раз с учетом возмущения g_2 , другой
 раз - не учитывая его. Затем строим разностные функции f^1, f^2 из
 (2) для каждого случая. Используя теперь тот факт, что функции
 f^1, f^2 известны в одних и тех же точках и вычисляя разности между
 их значениями, получаем некоторую функцию $h_p = f_p^1 - f_p^2, p = 0, 1, \dots$,

заданную таблично, которая и характеризует влияние возмущения δa на исследуемый объект. Применяя теперь традиционные методы, отделяем линейную (полиномиальную) часть функции $\dot{h}$, если таковая присутствует, а затем проводим гармонический анализ и определяем частоты ω_i , входящие в (6).

Доказательство корректности данного способа определения частот в настоящей работе не приводится. Отметим лишь, что способ основан на следующем предположении: поскольку в большинстве задач небесной механики суммарная возмущающая сила, действующая на объект, является аддитивной функцией относительно своих составляющих (с точностью до эффектов взаимного влияния возмущающих факторов), то и соответствующую разностную функцию $\dot{f}_r$ в первом приближении можно считать аддитивной.

Спыт применения модифицированных многооборотных методов в задачах прогнозирования движения ИСЗ показывает, что погрешности, возникающие при определении частот описанным выше способом, пренебрежимо малы. Более того, модифицированные методы устойчивы даже к сравнительно большим относительным ошибкам в частотах [3].

Единственным недостатком данного способа определения частот является его трудоемкость, однако все затраты оправдываются при многооборотном интегрировании.

4. Численные примеры

Исследование эффективности, оценка точности и анализ устойчивости методов многооборотного интегрирования были проведены Грэфом и Баттисом [2, 3], а также нами [4]. Однако, как уже отмечалось выше, применение модифицированных методов ограничивалось использованием лишь одной частоты в аппроксимации разностной функции (6). Ниже приводятся результаты применения модифицированных многооборотных методов в задачах долгосрочного прогнозирования двух моделей орбит ИСЗ типа "Навстар".

Для численного интегрирования использовались уравнения движения ИСЗ, записанные в форме Эйлера относительно следующих комбинаций элементов орбиты: $\rho = a(1 - e^2)$, $S = e \sin \omega$, $C = e \cos \omega$, I , Ω , t , где a — большая полуось, e — эксцентриситет, ω — долгота перигея, I — наклон, Ω — долгота восходящего узла орбиты и t — время. В качестве независимой переменной использовался аргумент широты. Учитывались возмущения от гармоник геопотенциала

второго порядка, а также возмущения от Луны и Солнца. Возмущения от геопотенциала вычислялись по алгоритму Ханнингема [5] с использованием модели стандартной Земли GEM - 9 [6]. Координаты Луны и Солнца определялись на основе теорий Хилла-Брауна и Ньюкома [7]. Начальные значения элементов орбит были следующие:

модель 1: $a = 36590$ км, $e = 0,01$; $I = 63^{\circ},4$;

$\Omega = 110^{\circ}$, $\omega = 45^{\circ}$;

модель 2: $a = 26560$ км, $e = 0,01$; $I = 63^{\circ},4$;

$\Omega = 100^{\circ}$, $\omega = 120^{\circ}$.

Анализ структуры разностной функции для указанных моделей орбит показывает, что при учете возмущений от геопотенциала максимальную амплитуду имеет гармонический член в (6), соответствующий второй секториальной гармонике (C_{22}). Периоды колебаний гармонических членов, соответствующих секториальной (C_{22}) гармонике, более года, а тессеральной (C_{21}) - кратны периоду обращения ИСЗ. На рис. 1,2,3 приведены графики функций $f_p(C_{20})$, $h_p(C_{21})$, $h_p(C_{22})$, характеризующие влияние гармоник геопотенциала.

Гармонические члены в (6), соответствующие солнечным возмущениям, имеют периоды, кратные одному году. На рис. 4 приведен график функции $h_p(S)$ для солнечных возмущений.

Наиболее сложную структуру имеют возмущения от Луны: максимальную амплитуду в периодической части (6) имеет гармоника с периодом колебаний около 13,6 суток, затем гармоники с периодами 9,06; 27,2; 6,8 и т.д. суток, то есть с периодами, кратными периоду обращения Луны. На рис. 5 приведен график функции $h_p(M)$, характеризующий возмущения от Луны.

Приведенные численные эксперименты для указанных орбит показывают, что при учете возмущений от геопотенциала или геопотенциала и Солнца классические многооборотные методы дают точность результатов, сравнимую с результатами применения модифицированных методов. При учете возмущений от Луны только модифицированные методы многооборотного интегрирования с использованием двух и более частот дают удовлетворительную точность.

В табл. 1,2 приведены результаты сопоставления методов многооборотного интегрирования с методом Рунге-Кутты-Фельберга 7(8) порядка [8] (RKF) на интервалах прогнозирования в 50, 100, 150 и 200 суток при учете различных наборов возмущающих факторов. Точность самого метода RKF определялась путем сравнения результатов прямого и обратного интегрирования на интервале в 200 суток. При интегрировании многооборотными методами для учета возмущений

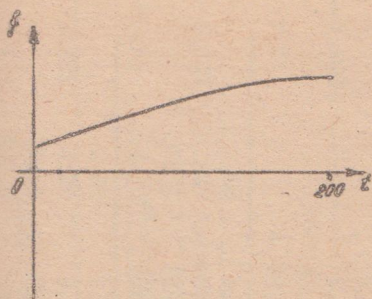


Рис. 1. Функция $f_g(C_{10})$.
Интервал 200 суток

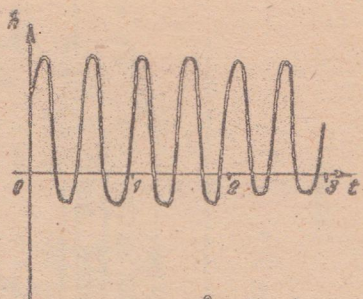


Рис. 2. Функция $h_g(C_{24})$.
Интервал 3 суток

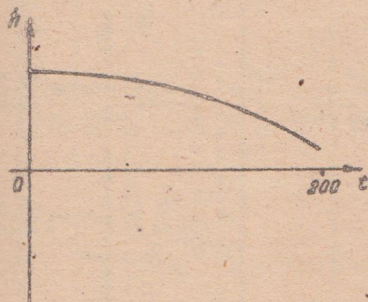


Рис. 3. Функция $h_g(C_{12})$.
Интервал 200 суток

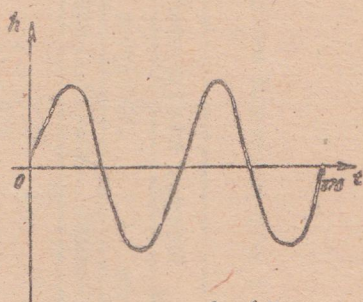


Рис. 4. Функция $h_g(S)$.
Интервал 370 суток

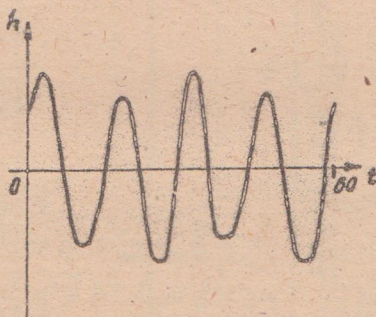


Рис. 5. Функция $h_g(M)$.
Интервал 60 суток

Сопоставление метода *RKF* с многооборотными методами (модель I)

Возмущения	Интервал интегрирования								Метод
	50 суток		100 суток		150 суток		200 суток		
	классич.	модиф.	классич.	модиф.	классич.	модиф.	классич.	модиф.	
T 7,05			8,8		9,7		10,6		RKF 43,4
Геопотен- циал	Δt 0,0		0,4		1,5		3,0		
	Δr 0,021		0,065		0,066		0,069		
	δ 0,039		0,078		0,098		0,118		
T 17,7			22,0		25,3		28,6		107,7
Геопотен- циал, Солнце	Δt 0,1		1,0		1,9		2,8		
	Δr 0,0		0,0		0,0		0,006		
	δ 0,039		0,078		0,118		0,159		
T 22,8			26,6		28,5		30,4		151,8
Геопотен- циал, Луна	Δt 0,1		18,6		70,0		143,0		
	Δr 0,171		5,363		7,500		5,698		
	δ 0,040		0,081		0,121		0,162		
T 42,2			50,3		54,8		59,2		290,3
Геопотен- циал, Луна, Солнце	Δt 0,16		19,2		71,8		137,3		
	Δr 0,068		5,550		7,503		5,588		
	δ 0,040		0,081		0,121		0,162		

Сопоставление метода R/KF с многооборотными методами (модель 2)

Возмущения	Интервал интегрирования						Метод	
	50 суток		100 суток		150 суток			200 суток
	классич.	модиф.	классич.	модиф.	классич.	модиф.		
Геопотен- циал	T 6,8		8,5	9,4	10,2			
	Δt 0,0		0,0	1,0	2,3			
	ΔM 0,0		0,005	0,009	0,009			
Геопотен- циал, Солнце	T 17,2		21,5	23,7	25,8			
	Δt 0,0		0,4	1,3	4,0			
	ΔM 0,0		0,005	0,004	0,015			
Геопотен- циал, Лу- на	T 24,2	24,2	30,3	30,3	33,3	36,3		
	Δt 0,5	0,1	47,1	0,5	101,8	33,8	175,0	
	ΔM 0,087	0,024	5,411	0,146	7,847	1,373	5,300	
Геопотен- циал, Луна, Солнце	T 33,7	33,7	42,0	42,0	46,2	50,3		
	Δt 0,8	0,5	46,8	0,4	103,9	47,3	177,8	
	ΔM 0,090	0,027	5,413	0,150	7,858	3,106	5,300	

RKF	41,4	105,9	148,9	207,7
-----	------	-------	-------	-------

RKF

41,4

105,9

148,9

207,7

4,360

от геопотенциала и Луны использовались три частоты для лунных возмущений. При учете возмущений от геопотенциала, Луны и Солнца использовались три частоты для лунных возмущений и одна — для солнечных. Построение начальной таблицы и внутреннее интегрирование в многооборотных методах выполнялось методом *RKF* 7(8). В таблицах приведены следующие величины: время счета — T (в минутах) для ЭВМ ЕС — 1022 при вычислениях с шестнадцатью десятичными разрядами, погрешность определения времени Δt (в секундах) и величина $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, характеризующие ошибку определения прямоугольных координат спутника (в километрах).

Столбцы с пометками "классический" и "модифицированный" содержат результаты сопоставления метода *RKF* соответственно с классическими и модифицированными многооборотными методами. В столбце "Метод *RKF*" указано время счета в минутах на интервале в 200 суток методом *RKF*. В табл. I, кроме того, приведены величины δ^v , характеризующие ошибку интегрирования методом *RKF*.

Результаты, приведенные в табл. I, 2 для модифицированных методов, не следует считать окончательными. Точность этих результатов может быть существенно улучшена за счет использования большего количества частот при аппроксимации периодической и вековой частей разностной функции.

Заключение

Проведение исследования применения многооборотных методов в задачах прогнозирования движения ИСЗ позволяет сделать следующие выводы:

- 1) способ определения частот в периодической части функции изменения орбитальных элементов, предложенный в настоящей работе, дает удовлетворительную точность;
- 2) использование двух и более частот при аппроксимации разностной функции позволяет существенно повысить точность многооборотного интегрирования модифицированными методами;
- 3) при интегрировании спутниковых орбит с многочастотной структурой возмущений только модифицированные многооборотные алгоритмы дают удовлетворительные результаты.

Поступила в редакцию
в сентябре 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Таратынова Г.П. Методы численного решения уравнений в конечных разностях и их применение к расчетам орбит искусственных спутников Земли. - В кн.: Искусственные спутники Земли. - М.: Наука, 1960, вып. 4, с. 56-81.
2. Graf O.F. Multirevolution Methods for Orbit Integration. Lect. Not. in Math., 1974, N 362, pp. 471-490.
3. Graf O.F., Bettis D.G. Modified multirevolution methods for satellite orbit computation. - Celest. Mech., 1975, vol. 11, pp. 433-448.
4. Бордовицкая Т.В., Шарковский Н.А., Федяев Ю.А. Современные численные методы в задачах прогнозирования движения ИСЗ. - В кн.: Определение и моделирование движения ИСЗ и гравитационного поля. Новосибирск: НИИГАиК, 1980, с. 24-44.
5. Cunningham L.E. On the computation of the special harmonic terms needed during the numerical integration of an artificial satellite. - Celest. Mech., 1970, vol. 2, N 2, pp. 208-216.
6. Lerch F.J., Klosko S.M., Laubscher R.E., Wagner G.A. Gravity model improvement using GEOS 3 (GEN 9 and 10). - J. Geophys. Res., 1979, vol. 84, N 8, pp. 3897-3916.
7. Справочное руководство по небесной механике/Под ред. Г.Н. Дубошнina. - М.: Наука, 1976. - 862 с.
8. Fehlberg E. Klassische Runge-Kutta Formeln fünfter und seibenter Ordnung mit Schrittweiten Kontroll. - Computing, 1969, vol. 4, N 2, pp. 93-106.

Е.З.Хотимская

В последние годы аппроксимация функций все чаще используется при решении ряда небесно-механических задач. Под аппроксимацией обычно понимают замену рассматриваемой функции $f(x)$ другой, легко вычисляемой функцией $\varphi(x)$, в некотором смысле близкой к $f(x)$.

Пусть $f(x)$ задана в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ некоторого промежутка $[a, b]$. Тогда, если за меру близости функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ принять величину

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=0}^n [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2},$$

говорят о среднеквадратической аппроксимации. Исходя из среднеквадратической аппроксимации, в работах [1 и 2] астрономические эфемериды были представлены в виде обобщенного полинома

$\sum_{i=0}^n a_i T_i(x)$, где $T_i(x)$ — полином Чебышева степени i . Эффективность применения подобной аппроксимации к вычислению орбит малых планет на небольших интервалах времени показана в работе [3]. Однако многие задачи требуют построения такой аппроксимации, которая во всех точках была бы близка к исходной функции. В таких случаях за меру близости функций принимают величину

$$\sigma = \max_{k=0,1,\dots,n} |f(x_k) - \varphi(x_k)|,$$

а приближение называют равномерным. Равномерная аппроксимация была использована для сжатия эфемерид геостационарного спутника в работе [4].

До сих пор мы говорили только о выборе меры близости функций f и φ . Остановимся теперь на выборе класса аппроксимирующих функций. Чаще всего $\varphi(x)$ ищется в виде полинома по некоторой системе линейно независимых функций. В большинстве случаев использование полиномиальной аппроксимации весьма эффективно. Вместе с тем в небесной механике существуют функции, для которых полиномиальная аппроксимация не дает удовлетворительных результатов. С подобными функциями приходится встречаться, например, при

расчете пересекающихся орбит или орбит кометного типа, имеющих большие эксцентриситеты и претерпевающих быстрое изменение при сближении с возмущающими телами. В качестве аппроксимирующей функции в этих случаях, по-видимому, целесообразно использовать рациональную. В работе [5] проведено сравнение среднеквадратических полиномиальной и рациональной аппроксимаций функции взаимного расстояния Нептун-Плутон и показано неоспоримое преимущество для этого случая рационального приближения.

В данной работе рассматриваются два вопроса: сравнение равномерной полиномиальной и рациональной аппроксимаций относительных координат в задаче двух тел и использование равномерной полиномиальной аппроксимации прямоугольных координат больших планет для численного интегрирования уравнений движения кометы Галлея. Задача двух тел может служить простейшим примером, позволяющим продемонстрировать свойства рационального приближения в типовых задачах небесной механики. Для определенности рассмотрим случай невырожденного эллиптического движения. Относительные координаты тела являются аналитическими функциями времени или, что то же самое, средней аномалии. Функции X и Y , представляющие собой координаты эллиптического движения в плоскости орбиты, затабулированы по аргументам M и e в промежутках $0 \leq e \leq 1$, $0^\circ \leq M \leq 180^\circ$:

$$X = \cos E - e, \quad Y = \sqrt{1-e^2} \sin E,$$

где эксцентрисическая аномалия E связана со средней аномалией M уравнением Кеплера.

$$E - e \sin E = M.$$

Для этих таблиц были получены рациональная и полиномиальная чебышевские аппроксимации и проведено сравнение полученных аппроксимаций для орбит с различными эксцентриситетами. На приведенных рис.

7-6 представлены графики зависимости ошибки приближения от числа коэффициентов аппроксимирующей функции. По оси абсцисс отложено количество коэффициентов, одно и то же для полиномиальной и рациональной аппроксимаций (при условии, что рациональное приближение имеет вид $n/n+1$ или n/n). Ошибка полиномиальной аппроксимации на графиках обозначена сплошной линией, а рациональной — пунктиром.

Анализ полученных результатов позволяет утверждать, что для малых

значений эксцентриситета использование полиномиального приближения предпочтительнее, поскольку при одном и том же числе коэффициентов ошибка полинома меньше, чем ошибка, даваемая рациональной функцией. Положение меняется уже для значений эксцентриситета 0,4 - 0,5: если для координаты Y обе аппроксимации дают отклонение приблизительно одного порядка, хотя рациональная все же лучше, то координату X с небольшой точностью лучше представляет полином, если же нужна большая точность, то предпочтительнее использование рациональной аппроксимации.

В случае представления координат для орбит со значениями эксцентриситета 0,6 - 0,9 преимущество рациональной аппроксимации очевидно.

С другой стороны, нужно отметить тот факт, что получение рациональной аппроксимации занимает существенно больше машинного времени. Если для данной задачи полиномиальная аппроксимация требует и для $n = 6$ и для $n = 13$ (n - число коэффициентов аппроксимирующей функции) около 20 секунд ЭВМ БЭСМ-6, то для рациональной это время меняется от 30 секунд до 3 минут.

Построение эфемерид больших планет в компактной форме представляет несомненный интерес для изучения движения малых тел Солнечной системы. Действительно, вводить координаты в машину в виде таблиц невыгодно, так как, во-первых, размещение таблицы требует много места в памяти и, во-вторых, на поиск нужного значения тратится много времени. К тому же зачастую для получения требуемой координаты необходима интерполяция.

Для интегрирования уравнений движения кометы Галлея на интервале времени восемьдесят лет (2418800,5 - 2448000,5 J.D.) были построены равномерные аппроксимации в виде полиномов прямоугольных гелиоцентрических координат девяти больших планет Солнечной системы. В качестве табличных значений координат использовалась опорная орбита кометы Галлея, рассчитанная сотрудниками НИИ прикладной математики и механики при Томском университете. Для каждой из девяти планет на промежутке в зорек дней строился полином десятой степени, максимальное отклонение которого не превышало 10^{-11} - 10^{-12} а.е. Затем полученные аппроксимации использовались для интегрирования уравнений движения кометы Галлея методом Эверхарта, адаптированным для БЭСМ-6 С.В.Тварсевичем по программе из фонда алгоритмов и программы ИТА АН СССР. Время интегрирования - порядка 45 минут. Совместное интегрирование движения кометы Галлея и девяти больших планет этим методом требует более пяти часов времени. Результаты

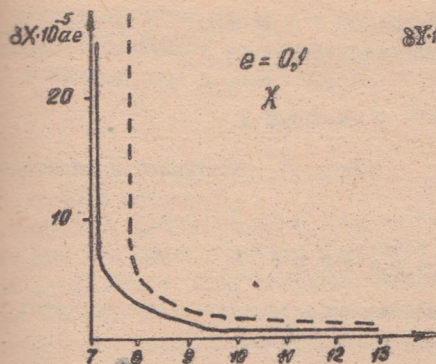


Рис. 1

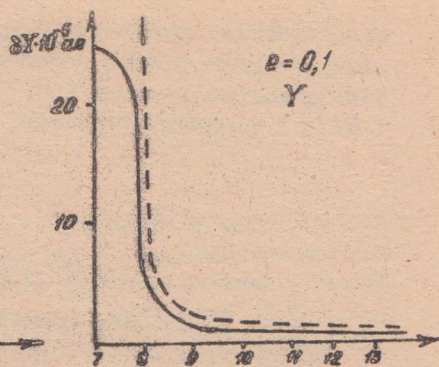


Рис. 2

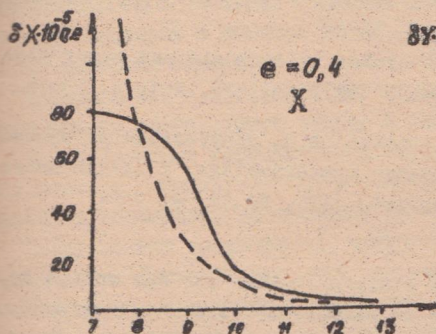


Рис. 3

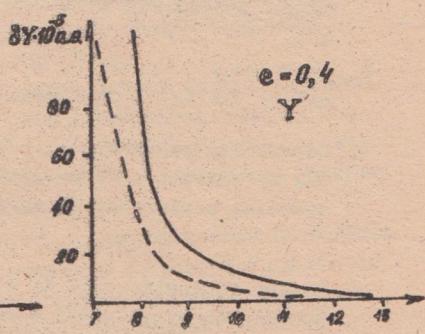


Рис. 4

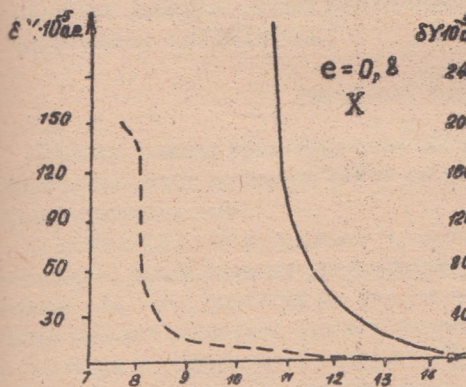


Рис. 5

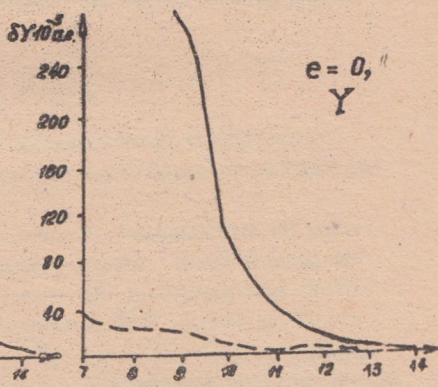


Рис. 6

интегрирования как совместного, так и с использованием аппроксимаций координат больших планет отличаются от эталонного результата на величину порядка $1 \cdot 10^{-6}$ - $1 \cdot 10^{-7}$ а.е. в координатах и $1 \cdot 10^{-10}$ а.е./сутки в скоростях.

Поступила в редакцию
в сентябре 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Chapront J. Direct computation of a planetary ephemerides. - Astron. Astrophys., 1977, 61, p. 7-10.
2. Быкова Л.Е. и Тамаров В.А. О представлении эфемерид спутников планет полиномами Чебышева. - Письма в АИ, 1978, т.4, №8, с.378-380.
3. Chapront J., Rocher P. Chebyshev polynomials and minor planetary orbits. - Cel. Mech., 1980, vol. 22, N 1, p. 73-79.
4. Daprit A., Poplachek W., Pickard H.M. Compression of ephemerides by the discrete Chebyshev approximation. AIAA/AAS Astrodynamics conference (preprint) 1978, No.78, p. 1-9.
5. Rocher P. Application de l'approximation par des series de polynomes de Tchebysheff a la mecanique celeste determination des trajectoires de petites planetes du systeme solaire. These de 3-e cycle. - Paris: Univ. Pierre et Marie Curie, 1978. - 130 p.

РЕКУРРЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК ПРИ КООРДИНАТНЫХ ВРАЩЕНИЯХ

Н. А. Шарковский

Введение

Проблема преобразования сферических гармоник из одной (рабочей) системы координат в другую возникает при исследовании гравитационных полей Земли, Луны и других планет Солнечной системы. Основная цель состоит в том, чтобы преобразовать гармонические коэффициенты, сохранив при этом форму представления гравитационного поля в общепринятом виде.

Наиболее часто встречается задача преобразования гармонических коэффициентов в системах координат, относительное положение осей которых задается с помощью углов Эйлера, а начало координат в обеих системах совмещено.

Предлагаемый в настоящей работе рекуррентный алгоритм полностью решает поставленную задачу и удобен для реализации на ЭВМ.

Преобразование гармонических коэффициентов, рассматриваемых как векторы, осуществляется с помощью матриц, элементами которых являются обобщенные сферические функции.

Рекуррентные соотношения, полученные для вычисления обобщенных сферических функций, являются оптимальными с точки зрения затрат машинного времени и корректными при критических значениях углов Эйлера, выступающих в роли аргументов этих функций.

Значения обобщенных сферических функций нормированы, поэтому в качестве исходных данных используются полностью нормированные гармонические коэффициенты.

1. Постановка задачи

В основе задачи преобразования гармонических коэффициентов при координатных вращениях лежит та или иная форма представления гравитационного поля.

В работе [1] автор подходит к проблеме, основываясь на малоизвестном представлении гравитационного поля. Такой подход заманчив тем, что, вычисляя по гармоническим коэффициентам ориентацию диполей в рабочей системе координат $\{x'\}$, можно найти его ориентацию в общепринятой системе $\{x\}$, используя обычную форму преобразования координат при вращении в трехмерном действительном

$$x' = Ax.$$

(I.1)

Однако при задании гармонических коэффициентов отыскание ориентации диполя становится довольно трудной задачей.

Алгоритм преобразования гармонических коэффициентов как векторов приведен в работе [2]. Автор этой работы пользуется явными выражениями для вычисления обобщенных сферических функций в виде рядов, количество членов в которых возрастает с увеличением значений степени и порядка гармоник.

Таким образом, имеющиеся алгоритмы преобразования гармонических коэффициентов сложны для практического использования, так как требуют громоздких дополнительных вычислений.

В качестве основы будем в дальнейшем использовать разложение гравитационного поля по шаровым функциям [3]:

$$V = Re \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \mu \alpha^l (C_{l,m} - i S_{l,m}) V_{l,m}, \quad (I.2)$$

где μ — гравитационная постоянная; α — средний радиус тела; $C_{l,m}$; $S_{l,m}$ — полностью нормированные гармонические коэффициенты; шаровые функции $V_{l,m}$ имеют вид

$$V_{l,m} = \frac{Z_{l,m}(r, z')(x' + iy')^m}{r^{2l+1}}. \quad (I.3)$$

Как известно [4], шаровые функции можно рассматривать как вектор-функции, которые при $l \geq 1$ образуют ортонормированную систему (базис) бесконечномерного полного унитарного пространства L_2 , натянутого на эти векторы. При фиксированных значениях $l \geq 1$ функции $V_{l,m}$ ($-l \leq m \leq l$) составляют базисы подпространств R_l , попарно ортогональных в L_2 . Пространство L_2 является прямой суммой подпространств R_l , то есть $L_2 = R_1 + R_2 + \dots$

В этом случае гравитационный потенциал (I.2) можно записать в виде суммы скалярных произведений векторов $V_{l,m}$ ($-l \leq m \leq l$) и $\gamma_{l,m} = \mu \alpha^l (C_{l,m} - i S_{l,m})/2$:

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} (\gamma_l, V_l(x', y', z')), \quad (I.4)$$

где при $-m < 0$ $\gamma_{l,-m} = (-1)^m$, $V_{l,-m} = (-1)^m V_{l,m}^*$; $(*)$ — знак для комплексно-сопряженных величин.

Для преобразования шаровых функций необходимо найти оператор

$$T = \begin{bmatrix} T^1 & & & \\ & T^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T^l \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

в котором матрицы T^l являются представлениями вращения (1.1) в пространствах R_l размерности $2l+1$ с функциями (1.3) в качестве ортонормированного базиса.

2. Группа вращений трехмерного пространства и обобщенные сферические функции

Преобразование системы координат $x = \{x, y, z\}$ в систему $x' = \{x', y', z'\}$ осуществляется с помощью выражения (1.1). Матрицы, зависящие от трех независимых параметров — углов Эйлера $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, образуют некоммутативную группу вращений трехмерного вещественного пространства. Обычно используют следующие формы матриц A , которые определяются произведениями:

$$A = A_3(\alpha) A_2(\beta) A_1(\gamma) \quad (2.1)$$

и

$$A = A_3(\alpha') A_1(\beta') A_2(\gamma'), \quad (2.2)$$

где система углов Эйлера $\{\alpha', \beta', \gamma'\}$ связана с системой $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ соотношениями:

$$\alpha' = \alpha + \pi/2; \quad \beta' = \beta; \quad \gamma' = \gamma - \pi/2. \quad (2.3)$$

Матрицы $A_k(\psi)$ ($k=1,2,3$) образуют коммутативные подгруппы группы $SO(3)$, описывают правые вращения вокруг положительных координатных осей x, y и z соответственно и имеют следующую структуру:

$$A_1(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}; \quad A_2(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}; \quad A_3(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Совокупность матриц A есть представление группы $SO(3)$ в трехмерном действительном векторном пространстве. Шаровые функции, как мы уже отмечали, есть векторы в комплексных евклидовых пространствах R_l . Найдем вначале представление группы $SO(3)$ в пространстве R_1 , то есть матрицу T' . Для этого рассмотрим группу $SU(2)$, которая описывает вращение двумерной комплексной плоскости. Эта группа состоит из комплексных унитарных матриц второго порядка

$$U = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ -\bar{b} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}; \quad U^* = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & -b \\ \bar{b} & \alpha \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

определитель которых $\det U = \alpha\bar{\alpha} + b\bar{b} = 1$, а комплексные числа (α, b) и сопряженные $(\bar{\alpha}, \bar{b})$ есть параметры Кэли-Клейна. Они связаны с углами Эйлера $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ следующими зависимостями:

$$\alpha = e^{i\frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\gamma}{2}}; \quad (2.6)$$

$$b = e^{-i\frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\gamma}{2}}.$$

Действительные и мнимые части $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_3$ и $b = \alpha_2 + i\alpha_4$ суть четыре симметричных параметра Эйлера:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha+\gamma}{2}; & \alpha_2 &= \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\gamma}{2}; \\ \alpha_3 &= \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha+\gamma}{2}; & \alpha_4 &= \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для каждого вращения (1.1) вектор вращения x' представляется матрицами (2.5):

$$\begin{bmatrix} x' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{bmatrix} = U^* \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix} U. \quad (2.8)$$

Действительно, выполнив перемножение в правой части (2.8) и сравнивая полученные элементы с соответствующими элементами матрицы в левой части, получим

$$\begin{bmatrix} x' - iy' \\ z \\ x' + iy' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}^2 & 2\bar{\alpha}b & -b^2 \\ -\bar{\alpha}\bar{b} & \alpha\bar{\alpha} - b\bar{b} & -\alpha b \\ -\bar{b}^2 & 2\alpha\bar{b} & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - iy \\ z \\ x + iy \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

или

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha^2 - b^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{b}^2)/2 & i(\alpha^2 - b^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{b}^2)/2 & \alpha\bar{b} + \bar{\alpha}b \\ i(\bar{\alpha}^2 - \bar{b}^2 - \alpha^2 - b^2)/2 & (\alpha^2 + b^2 + \bar{\alpha}^2 + \bar{b}^2)/2 & i(\bar{\alpha}b - \alpha\bar{b}) \\ -(\alpha\bar{b} + \bar{\alpha}b) & i(\bar{\alpha}b - \alpha\bar{b}) & \alpha\bar{\alpha} - b\bar{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Если подставить в (2.10) вместо $\alpha, b, \bar{\alpha}, \bar{b}$ их значения, то после элементарных преобразований будем в точности иметь выражение для вращения (1.1) с матрицей A вида (2.1).

Для нас представляет интерес выражение (2.9). Если в нем поделить координаты в левой и правой частях на r^3 , где $r^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ является инвариантом при вращении (1.1), то получим форму преобразования шаровых функций степени $l=1$ в комплексном пространстве R_3 с матрицей $T'(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$\begin{bmatrix} \frac{x' - iy'}{r^3} \\ \frac{z'}{r^3} \\ \frac{x' + iy'}{r^3} \end{bmatrix} = T'(\alpha, \beta, \gamma) \begin{bmatrix} \frac{x - iy}{r^3} \\ \frac{z}{r^3} \\ \frac{x + iy}{r^3} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

или короче

$$V_l(x', y', z') = T'(\alpha, \beta, \gamma) V_l(x, y, z). \quad (2.12)$$

Для шаровых вектор-функций при $l \geq 2$:

$$V_l(x', y', z') = T'(\alpha, \beta, \gamma) V_l(x, y, z). \quad (2.13)$$

Из ортогональности шаровых функций следует ортогональность унитарных матриц $T'(\alpha, \beta, \gamma)$ и

$$[T'(\alpha, \beta, \gamma)]^{-1} = T'(\bar{\gamma}, -\beta, -\alpha). \quad (2.14)$$

Задача отыскания всех представлений группы $SO(3)$ сводится к нахождению элементов $T'_{m,n}(\alpha, \beta, \gamma)$ $-l \leq m, n \leq l$ матриц $T'(\alpha, \beta, \gamma)$ и их рекурсивной связи между собой и элементами смежных матриц. Функции $T'_{m,n}(\alpha, \beta, \gamma)$ есть так называемые обобщенные сферические функции. Они могут быть получены из решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial U_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial U_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial U_3^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial U_4^2} = 0 \quad (2.15)$$

в четырехмерном евклидовом пространстве векторов с прямоугольными координатами U_1, U_2, U_3, U_4 , если для этих координат ввести параметризацию с помощью радиуса $\rho = \sqrt{r^2}$ и углов Эйлера $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ по схеме

$$U_1 = \rho \alpha_1; \quad U_2 = \rho \alpha_2; \quad (2.16)$$

$$U_3 = \rho \alpha_3; \quad U_4 = \rho \alpha_4.$$

Решение уравнения Лапласа (2.15) ищется в виде

$$\phi = \rho^{2l} t(\alpha, \beta, \gamma), \quad (2.17)$$

после подстановки которого в (2.15) получается дифференциальное уравнение в частных производных относительно углов Эйлера

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \beta^2} + \cot \beta \frac{\partial t}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \left[\frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \gamma} + \frac{\partial^2 t}{\partial \gamma^2} \right] + l(l+1)t = 0.$$

Решение этого уравнения суть обобщенные сферические функции, определенные на трехмерной сфере единичного радиуса, погруженной в четырехмерное пространство. Они имеют следующий вид:

$$t_{m,n}^l(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-im\alpha} P_{m,n}^l(\beta) e^{-in\gamma}, \quad (2.18)$$

где

$$P_{m,n}^l(\beta) = \sum_k \frac{(-1)^k \sqrt{(l+m)!(l-m)!(l+n)!(l-n)!}}{(l-m-k)!(l+n-k)!(k-n+m)! k!} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2l-m-n-2k} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{m-n+2k}.$$

3. Алгоритм преобразования гармонических коэффициентов

Соотношения (1.4) и (2.13) позволяют представить гравитационный потенциал тела в системе координат $x = \{x, y, z\}$ в следующем виде:

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} (\gamma_l, T^l(\alpha, \beta, \gamma) V_l(x, y, z)), \quad (3.1)$$

где $T^0(\alpha, \beta, \gamma) \equiv 1$.

Используя соотношение ортогональности (2.14), получим

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} (T^l(-\gamma, -\beta, -\alpha) \gamma_l, V_l(x, y, z)). \quad (3.2)$$

Если ввести обозначение $\Gamma_{l,m} = \mu \alpha^l \tilde{C}_{l,m} - i \tilde{S}_{l,m}$, в котором $\tilde{C}_{l,m}, \tilde{S}_{l,m}$ — преобразованные в систему $\{\alpha\}$ гармонические коэффициенты, то можно записать

$$\Gamma_l = T^l(\gamma, -\beta, -\alpha) \gamma_l. \quad (3.3)$$

Обратное преобразование

$$\gamma_l = T^l(\alpha, \beta, \gamma) \Gamma_l \quad (3.4)$$

имеет точно такую же форму, как в (3.3), но с заменой знаков у аргументов матриц T^l . Алгоритм вычисления прямых и обратных преобразований будет одним и тем же, но с различными исходными данными.

Запишем теперь явные выражения для преобразования гармонических коэффициентов по схеме, задаваемой формулами (3.3):

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{l,m} = & \sum_{n=0}^l N_{m,n} \{ P_{m,n}^l [C_{l,n} \cos(m\gamma + n\alpha) + S_{l,n} \sin(m\gamma + n\alpha)] + \\ & + (-1)^n P_{m,-n}^l [C_{l,n} \cos(m\gamma - n\alpha) - S_{l,n} \sin(m\gamma - n\alpha)] \}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{l,m} = & \sum_{n=0}^l N_{m,n} \{ P_{m,n}^l [S_{l,n} \cos(m\gamma + n\alpha) - C_{l,n} \sin(m\gamma + n\alpha)] + \\ & + (-1)^n P_{m,-n}^l [S_{l,n} \cos(m\gamma - n\alpha) - C_{l,n} \sin(m\gamma - n\alpha)] \}, \end{aligned}$$

где $N_{0,0} = 1/2$; $N_{0,n} = N_{m,0} = \sqrt{2}/2$ и $N_{m,n} = 1$ при $m, n > 0$ введены для того, чтобы полностью нормированные коэффициенты

$C_{\beta, m}, S_{\beta, m}$ преобразовывались также в полностью нормированные $\tilde{C}_{\beta, m}, \tilde{S}_{\beta, m}$.

Эйлеровы углы (α, β, γ) берутся без изменения, так как знаки уже вошли в формулы (3.5).

Основную трудность при реализации алгоритма (3.5) на ЭВМ составляет получение обобщенных сферических полиномов $P_{m, n}^l(\beta)$. Поэтому мы остановимся подробнее на схеме вычисления рекуррентных соотношений для $P_{m, n}^l$:

1) назначая начальное значение $P_{0,0}^0 = 1$, вычисляем диагональные элементы всех матриц

$$P_{l, l}^l = \cos^2 \frac{\beta}{2} P_{l-1, l-1}^{l-1}, \quad P_{l, -l}^l = \sin^2 \frac{\beta}{2} P_{l-1, -(l-1)}^{l-1};$$

2) заполняем крайние верхние строки всех матриц

$$P_{l, n}^l = -\sqrt{\frac{2l(2l-1)}{l^2-n^2}} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} P_{l-1, n}^{l-1};$$

3) конкретно для каждой матрицы (при фиксированном значении l) вычисляем элементы нижележащих строк, начиная с левого диагонального элемента и кончая правым, с использованием следующего рекуррентного соотношения:

$$\begin{aligned} \sqrt{(l+m)(l-m-1)} P_{m-1, n}^l &= \sqrt{(l-n)(l-n+1)} \cos^2 \frac{\beta}{2} P_{m, n+1}^l + \\ &+ 2n \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} P_{m, n}^l - \\ &- \sqrt{(l+n)(l-n+1)} \sin^2 \frac{\beta}{2} P_{m, n-1}^l; \end{aligned}$$

4) наконец, полностью достраиваем матрицу в пункте 3) с помощью соотношений симметрии:

$$P_{n, m}^l = (-1)^{m-n} P_{m, n}^l; \quad P_{m, -n}^l = P_{m, n}^l.$$

Перевычисляя коэффициенты по формулам (3.5), вновь начинаем процедуру построения следующей матрицы с третьего пункта, затирая в памяти ЭВМ предыдущую матрицу.

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет сравнительно просто производить перевычисление гармонических коэффициентов гравитационного поля для двух систем углов Эйлера (2.1) и (2.2). Контролем может служить выражение

$$(\Gamma_1, V_1(x, y, z)) = (\Gamma_2, V_2(x', y', z')).$$

Трудности в программировании могут возникнуть, если язык программирования не допускает отрицательных значений индексов.

Поступила в редакцию
в сентябре 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. James R.W. Transformation of Spherical Harmonics Under Change of Reference Frame. - Geophys. J. R. astr. Soc., 1969, vol.17, p. 305-316.
2. Levie S.L. Transformation of a Potential Function Under Coordinate Rotations. - The Journal of the Astronautical Sciences, 1971, vol. XVIII, No.4, p. 217-235.
3. Cunningham L.E. On the Computation of the Spherical Harmonic Terms Needed During the Numerical Integration of the Orbital Motion of an Artificial Satellite. - Celest. Mech., 1970, vol. 2, N 2, p. 207-216.
4. Нейман Ю.М. Вариационные принципы физической геодезии. - М.: Недра, 1979, - 200 с.

ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА ДВИЖЕНИЯ ИСЗ ТИПА "НАВСТАР" В ЭЙЛЕРОВЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Т.С.Бороненко, Л.А.Московкина, В.А.Тамаров, Ю.Б.Шмидт

Настоящая работа представляет собой первый шаг на пути к реализации поставленной ранее авторами задачи построения аналитической теории движения искусственного спутника в эйлеровых элементах с применением рядов Ли [1]. В качестве объекта приложения теории рассматриваются ИСЗ типа "Навстар". Орбиты спутников такого типа характеризуются следующими значениями периода обращения, эксцентриситета и наклона к плоскости экватора Земли:

$$T = 43085 \text{ с}, \quad e = 0,01, \quad i = 63^{\circ},4.$$

Выполненные при помощи численного интегрирования оценки вклада различных возмущающих факторов в движение данных спутников показали, что наибольшие возмущения вызываются второй зональной гармоникой геопотенциала V_{20} и лунно-солнечным притяжением.

Промежуточная орбита задачи двух неподвижных центров полностью учитывает гармоники V_{20} , V_{30} и частично — V_{40} . Возмущения от гармоники V_{30} незначительны в движении рассматриваемых спутников и ими можно пренебречь. Поэтому будем использовать для построения расчетного алгоритма симметричный вариант эйлеровой промежуточной орбиты, учитывающей только вторую зональную гармонику геопотенциала V_{20} .

Наличие критического наклона в орбитах спутников рассматриваемого класса приводит к появлению малых знаменателей в процессе построения аналитических теорий движения таких объектов. Для того чтобы обойти эту трудность, можно исключить из возмущающей функции только члены короткого периода, как это делается в работе [1]. Полученную усредненную систему можно интегрировать численно с шагом, равным или кратным обороту спутника вокруг Земли. Формулы, связывающие старые и новые переменные задачи, дают возможность аналитически учесть недостающие возмущения короткого периода.

1. Дифференциальные уравнения для возмущений промежуточной орбиты

Эйлерова промежуточная орбита [2] задается шестью переменными:

$$a, e, i, \omega, \Omega, M,$$

близкими к соответствующим кеплеровым элементам и отличающимися от последних на величины порядка сжатия Земли. Формулы промежуточного движения содержат средние движения угловых элементов ω , Ω , M , обусловленные влиянием второй зональной гармоники геопотенциала и представляющие собой ряды по некоторому малому параметру e^2 , пропорциональному сжатию Земли.

В качестве дифференциальных уравнений для возмущений промежуточной орбиты используются уравнения в форме Лагранжа, полученные Е.И.Тимошковой [3]. Коэффициенты при частных производных от возмущающей функции в этих уравнениях содержат в знаменателях эксцентриситет. Так как орбиты рассматриваемого типа спутников почти круговые, то, чтобы устранить в дифференциальных уравнениях особенность, связанную с малыми эксцентриситетами, в качестве угловых переменных выбраны величины:

$$M, F = \omega + M, \lambda = F + \Omega.$$

Для того чтобы представить правые части системы уравнений в виде рядов Пауссона, введена переменная $\alpha^* = \sqrt{a}$. Для устранения из знаменателей синуса наклона вместо i используется переменная $\alpha = \cos i$.

В этих элементах исходные уравнения имеют вид

$$\frac{d\alpha^*}{dt} = \frac{1}{b^*} \left\{ \frac{\partial R}{\partial M} + \frac{\partial R}{\partial F} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right\};$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{\alpha^* b^*} \left\{ \frac{1-e^2}{e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{e}{2} \frac{\partial R}{\partial F} - \frac{e}{2} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right\};$$

$$\frac{dM}{dt} = n_1 + \frac{1}{\alpha^* b^*} \left\{ \alpha^* \frac{\partial R}{\partial \alpha^*} + \frac{1-e^2}{e} \frac{\partial R}{\partial e} \right\}; \quad (I)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1 + \frac{1}{2}e^2}{\alpha^* b^*} \left\{ (1-\alpha) \frac{\partial R}{\partial \lambda} - \alpha \frac{\partial R}{\partial F} \right\};$$

$$\frac{dF}{dt} = n_2 + \frac{1}{\alpha^* b^*} \left\{ \frac{1}{2}e \frac{\partial R}{\partial F} + (1 + \frac{1}{2}e^2)\alpha \frac{\partial R}{\partial \alpha} - \alpha^* \frac{\partial R}{\partial \alpha^*} \right\};$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = n_3 + \frac{1}{\alpha^* b^*} \left\{ \frac{1}{2}e \frac{\partial R}{\partial e} - (1 + \frac{1}{2}e^2)(1-\alpha) \frac{\partial R}{\partial \alpha} - \alpha^* \frac{\partial R}{\partial \alpha^*} \right\}.$$

где R — возмущающая функция; $b^* = \sqrt{f m}$. Величины n_1, n_2, n_3 представляют собой средние движения угловых элементов M, F, λ , обусловленные второй зональной гармоникой геопотенциала [2].

В коэффициентах при частных производных в правых частях уравнений (I) отброшены члены, пропорциональные ε^2 .

2. Возмущающая функция

Лунно-солнечная часть возмущающей функции выбиралась в виде, полученном Н.В. Емельяновым [4]:

$$R_{LS} = \frac{f m'}{a'^2} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^k \sum_{q=-\infty}^{\infty} (2 - \delta_{j,0}) \left(\frac{a'^2}{a^2} \right)^{k+l} \times \quad (2)$$

$$\times F_{kjl}(i) \chi_{k-2l+q}^{k, k-2l}(e) (S_{kj} \sin D + C_{kj} \cos D).$$

Здесь $f m'$ и a' — гравитационная постоянная и полуось орбиты Луны (или Солнца); $F_{kjl}(i)$ и $\chi_{k-2l+q}^{k, k-2l}(e)$ — известные функции наклона Каула и коэффициенты Ганзена; величины S_{kj} и C_{kj} зависят только от координат возмущающего тела и являются тригонометрическими рядами от пяти фундаментальных аргументов движения Луны и Солнца; $\delta_{j,0}$ — символ Кронекера, аргумент D есть функция

$$D = (k - 2l + j)F + qM + j\lambda. \quad (3)$$

Положение Луны и Солнца в этой формуле определяется непосредственно из рядов Хилла-Брауна для Луны и аналогичных разложений для Солнца. Этим сводится к минимуму ошибка в вычисляемом положении ИСЗ из-за погрешности моделей орбит возмущающих тел.

Для учета влияния гармоник геопотенциала использовалось разложение вида [5]:

$$R = \frac{f m'}{a'^2} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^k \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\frac{a'^2}{a^2} \right)^k F_{kjl}(i) \chi_{k-2l+q}^{k-1, k-2l}(e) S_{kjlq};$$

$$S_{kjlq} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{kj} \\ -\bar{S}_{kj} \end{pmatrix}_{k-j \text{ чет.}}^{k-j \text{ чет.}} \cos \psi + \begin{pmatrix} \bar{S}_{kj} \\ \bar{C}_{kj} \end{pmatrix}_{k-j \text{ нечет.}}^{k-j \text{ чет.}} \sin \psi;$$

$$\psi = (k - 2l + j)F + qM + j(\lambda - \theta),$$

где θ — звездное гринвичское время, $\bar{S}_{kj}$ и $\bar{C}_{kj}$ — числовые коэффициенты, характеризующие фигуру Земли; f_0 и R_0 — гравитационная постоянная и экваториальный радиус Земли.

3. Реализация полуаналитической методики

Для вывода рабочих формул полуаналитической методики использовались система БОРА [6] программирования аналитических выкладок на ЭВМ, разработанная в НИИ ПММ при Томском университете, и система УПШ [7], разработанная в ИТА АН СССР.

С помощью алгоритма усредняющих преобразований Ли [1] получены формулы учета возмущений промежуточной орбиты от хилловского и I-го параллактического членов лунного притяжения, хилловского члена солнечного притяжения. Для отладки процедур, реализующих учет этих сил, выполнены при помощи точных методов численного интегрирования эталонные расчеты отдельно для каждого из перечисленных возмущающих факторов. С этой целью была использована программа численного интегрирования, реализующая метод Адамса-Мултона (А-М) 8-го порядка в сочетании с КЗ — регуляризацией уравнений движения спутника. Для интегрирования усредненной системы использовался стандартный метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Шаг интегрирования выбирался разным 10 оборотам спутника.

Предварительные оценки точности полученных рабочих формул алгоритма были выполнены для модели орбиты полусуточного спутника с набором угловых элементов, при которых лунно-солнечные возмущения в его движении на интервале 30 суток максимальны и достигают величины порядка 132 км.

В приведенной ниже таблице представлены результаты сравнения полуаналитической методики (ПМ), которая учитывает гармонику V_{20} , хилловский член Луны, хилловский член Солнца и I-й параллактический член Луны в разложении возмущающей функции, с точным численным интегрированием, учитывающим полностью лунно-солнечные возмущения и гармонику V_{20} . Для значений прямоугольных координат и скоростей, полученных при помощи полуаналитической методики, выписаны те цифры, которые отличаются от соответствующих им эталонных значений. Результаты сравнения представлены на моменты

$t_1 = 861700$, $t_2 = 1723400$, $t_3 = 2585100$, отсчитываемые от $t_0 = 0$.

t	Метод	$X, \text{км}$	$Y, \text{км}$	$Z, \text{км}$	$\dot{X}, \text{км/с}$	$\dot{Y}, \text{км/с}$	$\dot{Z}, \text{км/с}$
t_1	A-M ПМР	-12194.795 907	21779.195 7	8278.547 758	-1.08075 3	-1.84926 7	3.27422 19
t_2	A-M ПМР	-12152.231 303	21714.035 44	8509.117 343	-1.07250 49	-1.87721 2	3.26099 7
t_3	A-M ПМР	-12110.249 319	21643.438	8744.787 5.030	-1.06339 7	-1.90573 4	3.24746 3

Полученные результаты показывают, что рассматриваемая полуаналитическая методика может быть успешно применена для приближенного прогноза движения спутника типа "Навстар". В дальнейшем предполагается повысить точность прогноза при помощи данной методики за счет включения в алгоритм формул, учитывающих наиболее значительные в движении рассматриваемых спутников гармоники гс.опотенциала (в первую очередь резонансные гармоники V_{22} и V_{32}).

Поступила в редакцию
в ноябре 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Бороненко Т.С., Тамаров В.А., Шмидт Ю.Б. Алгоритм построения аналитической теории движения ИСЗ в эйлеровых элементах с применением рядов Ли.-В кн.:Астрономия и геодезия.Томск:Изд-во ТГУ, 1982, вып.10, в печати.
2. Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли.- М.:Наука,1977,-360 с.
3. Тимошкова Е.И. Уравнения возмущенного движения спутника.- Астрон.ж.,1971,48, №5, с.1061-1066.
4. Емельянов Н.В. Метод вычисления лунно-солнечных возмущений элементов орбит ИСЗ.-Тр.Гос.астрон.ин-та им.Штернберга, 1980, 49, с. 122-129.
5. Брумберг В.А. Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах.-Бюлл.ИТА АН СССР,1967, т.11, №2, с.73-83.
6. Шмидт Ю.Б. Система БОРА проведения буквенных операций над рядами Пуассона.-В кн.:Астрономия и геодезия.Томск:Изд-во ТГУ, 1981, вып. 9, с. 27-30.
7. Тарасевич С.В. УПШ-универсальный пуассоновский процессор.- В кн.: Алгоритмы небесной механики. Л.:ИТА АН СССР, 1979, № 27, с.3-30.

Н.А.Бовинин

Уточнение параметров движения спутника в начальный момент времени по измерениям на некоторой дуге при использовании способа наименьших квадратов требует вычисления частных производных от текущих параметров движения спутника (на моменты измерений) по начальным параметрам движения (так называемых изохронных производных). В настоящей работе приводится методика получения матрицы изохронных производных в кеплеровых элементах орбиты, которая с точностью до членов порядка e, C_{20}, C_{20}^2 пригодна для обработки орбитальных дуг практически любой протяженности.

Аналитический вывод этих результатов достаточно простодушен. Вкратце он выглядит следующим образом.

Запишем аналитическую зависимость текущих элементов орбиты, $\vartheta = (a, e, i, \Omega, \omega, M)$, спутника в момент t от начальных значений $\vartheta_0 = (a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)$ в момент t_0 и промежутка времени $\Delta t = t - t_0$ в общем виде

$$\vartheta = \vartheta(\vartheta_0, \Delta t). \quad (I)$$

Разложим (I) в ряд Тейлора по времени

$$\vartheta = \vartheta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d^k \vartheta}{dt^k} \right)_0 \cdot \frac{\Delta t^k}{k!}. \quad (2)$$

Первые производные задаются строго уравнениями Лагранжа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial M}; \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{en a^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{en a^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega}; \\ \frac{di}{dt} &= \frac{ctg i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega}; \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{en\alpha^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{2}{n\alpha} \cdot \frac{\partial R}{\partial \alpha};$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1-\theta^2}{en\alpha^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{2}{n\alpha} \cdot \frac{\partial R}{\partial \alpha}.$$

Дифференцируем (3) по времени

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{2}{n^2\alpha^3} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial M}\right)^2 + \frac{2}{n\alpha} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial R}{\partial M}\right) \cdot \frac{d\theta}{dt}.$$

Подставляя в это выражение значения производных $\frac{d\theta}{dt}$ из (3), легко убеждаемся, что поскольку возмущающей потенциал имеет порядок $C_{20} = 10^{-3}$ то все слагаемые в этом выражении имеют порядок $C_{20}^2 = 10^{-6}$, кроме одного, имеющего порядок C_{20} и образованного средним движением n , входящим в качестве слагаемого в $\frac{dM}{dt}$. Отбрасываем члены, имеющие порядок 10^{-6} , и получаем $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial M^2}$.

Продолжая дифференцирование, методом математической индукции можно показать, что если пренебрегать членами порядка C_{20}^m , где $m > 1$, то k -я производная будет иметь вид

$$\frac{d^k\alpha}{dt^k} = \frac{2n^{k-2}}{\alpha} \cdot \frac{\partial^k R}{\partial M^k} \quad (4)$$

Подставляя (4) и аналогичные выражения для $\theta, i, \Omega, \omega, M$ в разложения (2), получим

$$\alpha = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2n^{k-2}}{\alpha} \cdot \frac{\partial^k R}{\partial M^k} \right\}_0 \cdot \frac{\Delta t^k}{k!};$$

$$\theta = \theta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{e} \cdot \frac{n^{k-2}}{\alpha^2} \cdot \frac{\partial^{k-1}}{\partial M^{k-1}} \left(\sqrt{1-\theta^2} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\partial R}{\partial \omega} \right) \right\}_0 \cdot \frac{\Delta t^k}{k!};$$

$$i = i_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{1-\theta^2}} \cdot \frac{n^{k-2}}{\alpha^2} \cdot \frac{\partial^{k-1}}{\partial M^{k-1}} (\cos i \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial \Omega}) \right\}_0 \cdot \frac{\Delta t^k}{k!};$$

$$\Omega = \Omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{1-\theta^2}} \cdot \frac{n^{k-2}}{\alpha^2} \cdot \frac{\partial^{k-1}}{\partial M^{k-1}} \frac{\partial R}{\partial i} \right\}_0 \cdot \frac{\Delta t^k}{k!};$$

$$\omega = \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} \cdot \frac{n^{k-2}}{\alpha^2} \cdot \frac{\partial^{k-1}}{\partial M^{k-1}} \left(\frac{1-\theta^2}{\theta} \cdot \frac{\partial R}{\partial \theta} - \cos i \frac{\partial R}{\partial i} \right) \right\}_0 \cdot \frac{\Delta t^k}{k!};$$

$$M = M_0 + \left(\frac{dM}{dt}\right)_0 \cdot \Delta t - \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{\pi^{k-2}}{\sigma^2} \cdot \frac{\partial^{k-1}}{\partial M^{k-1}} \left(3R + \frac{1-\theta^2}{\theta} \frac{\partial R}{\partial \theta} + 2\alpha \frac{\partial R}{\partial \alpha} \right) \right]_0 \cdot \frac{\Delta t^k}{k!}.$$

Теперь преобразуем функцию R . При учете возмущений ограничимся влиянием экваториального сжатия

$$R = \frac{\mu C_{20} \alpha_0^2}{2\pi^3} (3 \sin^2 \varphi - 1), \quad (6)$$

где μ — гравитационный параметр Земли;
 $C_{20} = -0.001\,083$;
 α_0 — экваториальный радиус Земли;
 M — геоцентрическое расстояние до ИСЗ;
 φ — широта подспутниковой точки.

Разложим R в ряд по степеням эксцентриситета e :

$$R = \frac{C_{20}}{2} \alpha_0^2 n^2 (\tilde{R}_0 + e \tilde{R}_1 + \frac{e^2}{2} \tilde{R}_2 + \frac{e^3}{8} \tilde{R}_3 + \dots), \quad (7)$$

где

$$\tilde{R}_0 = -\frac{1}{2}(2 - 3 \sin^2 i) - \frac{3}{2} \sin^2 i \cos 2(M + \omega);$$

$$\tilde{R}_1 = -\frac{3}{2}(2 - 3 \sin^2 i) \cos M + \frac{3}{4} \sin^2 i \cos(M + 2\omega) - 21/4 \sin^2 i \cos(3M + 2\omega);$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_2 = & -\frac{3}{2}(2 - 3 \sin^2 i)(1 + 3 \cos 2M) + \frac{15}{2} \sin^2 i \cos 2(M + \omega) - \\ & - \frac{51}{2} \sin^2 i \cos 2(2M + \omega); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_3 = & -\frac{3}{8}(2 - 3 \sin^2 i)(27 \cos M + 53 \cos 3M) - \frac{9}{16} \sin^2 i \cos(M + 2\omega) - \\ & - \frac{3}{16} \sin^2 i \cos(M - 2\omega) + \frac{1107}{16} \sin^2 i \cos(3M + 2\omega) - \\ & - \frac{2535}{16} \sin^2 i \cos(5M + 2\omega). \end{aligned}$$

Подставляя (7) в разложения (5), проводим дифференцирование с учетом того, что

$$\frac{\partial^k}{\partial M^k} \{ \sin(mM + \alpha) \} = m^k \sin(mM + \alpha + k \frac{\pi}{2});$$

$$\frac{\partial^k}{\partial M^k} \{ \cos(mM + \alpha) \} = m^k \cos(mM + \alpha + k \frac{\pi}{2}).$$

Далее проводим упрощения и отбрасываем члены, в которые множителем входит эксцентриситет e_0 в степени, большей I. Получаем

$$\begin{aligned} \alpha = & \alpha_0 - \frac{3}{2} C_{20} \frac{\alpha_0^2}{a_0} \{ \sin^2 i_0 \sum_{k=1}^{\infty} \cos[2(M_0 + \omega_0) + k \frac{\pi}{2}] \frac{(2n_0 \Delta t)^k}{k!} + \\ & + e_0 (2 - 3 \sin^2 i_0) \sum_{k=1}^{\infty} \cos(M_0 + k \frac{\pi}{2}) \frac{(n_0 \Delta t)^k}{k!} - \frac{e_0}{2} \sin^2 i_0 \cdot \\ & \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \cos(M_0 + 2\omega_0 + k \frac{\pi}{2}) \frac{(n_0 \Delta t)^k}{k!} + \frac{7}{2} e_0 \sin^2 i_0 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(3M_0 + \\ & + 2\omega_0 + k \frac{\pi}{2}) \frac{(3n_0 \Delta t)^k}{k!} \end{aligned} \quad (8)$$

и аналогичные выражения для $\theta, i, \Omega, \omega, M$.

В этих выражениях ряды вида $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(\alpha + k \frac{\pi}{2}) \frac{x^k}{k!}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(\alpha + k \frac{\pi}{2}) \frac{x^k}{k!}$ являются рядами Маклорена соответственно для функций $\cos(\alpha + x) - \cos(\alpha)$ и $\sin(\alpha + x) - \sin \alpha$.

С учетом этого (8) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \alpha = & \alpha_0 - \frac{3}{2} C_{20} \frac{\alpha_0^2}{a_0} \{ \sin^2 i_0 [\cos 2(\omega_0 + \tilde{M}) - \cos 2(\omega_0 + M_0)] + e_0 (2 - \\ & - 3 \sin^2 i_0) (\cos \tilde{M} - \cos M_0) - \frac{e_0}{2} \sin^2 i_0 [\cos(2\omega_0 + \tilde{M}) - \\ & - \cos(2\omega_0 + M_0)] + \frac{7}{2} e_0 \sin^2 i_0 [\cos(2\omega_0 + 3\tilde{M}) - \cos(2\omega_0 + 3M_0)] \}; \\ e = & e_0 - \frac{C_{20}}{8} \frac{\alpha_0^2}{a_0} \{ 6(2 - 3 \sin^2 i_0) (\cos \tilde{M} - \cos M_0) + 3 \sin^2 i_0 \cdot \\ & \cdot [\cos(2\omega_0 + \tilde{M}) - \cos(2\omega_0 + M_0)] + 7 \sin^2 i_0 [\cos(2\omega_0 + 3\tilde{M}) - \\ & - \cos(2\omega_0 + 3M_0)] + 9 e_0 (2 + 3 \sin^2 i_0) (\cos 2\tilde{M} - \cos 2M_0) - \\ & - 3 e_0 \sin^2 i_0 [\cos 2(\omega_0 + \tilde{M}) - \cos 2(\omega_0 + M_0)] + \frac{5}{2} e_0 \sin^2 i_0 [\cos 2(\omega_0 + \\ & + 2\tilde{M}) - \cos 2(\omega_0 + 2M_0)] \}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$i = i_0 - \frac{C_{20}}{4} \frac{\alpha_0^2}{\alpha_0^2} \sin i_0 \cos i_0 \{ 3 [\cos 2(\omega_0 + \tilde{M}) - \cos 2(\omega_0 + M_0)] - \\ - 3\theta_0 [\cos(2\omega_0 + \tilde{M}) - \cos(2\omega_0 + M_0)] + 7\theta_0 [\cos(2\omega_0 + 3\tilde{M}) - \\ - \cos(2\omega_0 + 3M_0)] \};$$

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{C_{20}}{4} \frac{\alpha_0^2}{\alpha_0^2} \cos i_0 \{ 6n_0 \Delta t - 3 [\sin 2(\omega_0 + \tilde{M}) - \sin 2(\omega_0 + \\ + M_0)] + 18\theta_0 (\sin \tilde{M} - \sin M_0) + 3\theta_0 [\sin(2\omega_0 + \tilde{M}) - \sin(2\omega_0 + \\ + M_0)] - 7\theta_0 [\sin(2\omega_0 + 3\tilde{M}) - \sin(2\omega_0 + 3M_0)] \};$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{C_{20}}{4} \frac{\alpha_0^2}{\alpha_0^2} \{ 3(4 - 5\sin^2 i_0) n_0 \Delta t + \frac{3}{8} (2 - 3\sin^2 i_0) (\sin \tilde{M} - \\ - \sin M_0) - \frac{3}{2\theta_0} \sin^2 i_0 [\sin(2\omega_0 + \tilde{M}) - \sin(2\omega_0 + M_0)] + \\ + \frac{7}{2\theta_0} \sin^2 i_0 [\sin(2\omega_0 + 3\tilde{M}) - \sin(2\omega_0 + 3M_0)] + \frac{9}{2} (2 - 3\sin^2 i_0) \cdot \\ \cdot (\sin 2\tilde{M} - \sin 2M_0) - \frac{3}{2} (4 + \sin^2 i_0) [\sin 2(\omega_0 + \tilde{M}) - \sin 2(\omega_0 + \\ + M_0)] + \frac{51}{4} \sin^2 i_0 [\sin 2(\omega_0 + 2\tilde{M}) - \sin 2(\omega_0 + 2M_0)] + \\ + \frac{3}{8} \theta_0 (94 - 117\sin^2 i_0) (\sin \tilde{M} - \sin M_0) + \frac{53}{8} \theta_0 (2 - 3\sin^2 i_0) \cdot \\ \cdot (\sin 3\tilde{M} - \sin 3M_0) + \frac{3}{16} \theta_0 (16 - 9\sin^2 i_0) [\sin(2\omega_0 + \tilde{M}) - \\ - \sin(2\omega_0 + M_0)] - \frac{3}{16} \theta_0 \sin^2 i_0 [\sin(2\omega_0 - \tilde{M}) - \sin(2\omega_0 - M_0)] - \\ - \frac{\theta_0}{16} (112 + 265\sin^2 i_0) [\sin(2\omega_0 + 3\tilde{M}) - \sin(2\omega_0 + 3M_0)] + \\ + \frac{507}{16} \theta_0 \sin^2 i_0 [\sin(2\omega_0 + 5\tilde{M}) - \sin(2\omega_0 + 5M_0)] \};$$

$$\begin{aligned}
M = & \tilde{M} - \frac{2}{3} C_{20} \frac{\alpha_0^2}{\alpha_0^2} \left\{ \frac{2}{3} - \sin^2 i_0 + \sin^2 i_0 \cos 2(\omega_0 + M_0) + \theta_0 \left[(2 - \right. \right. \\
& - 3 \sin^2 i_0) \cos M_0 - \frac{1}{2} \sin^2 i_0 \cos (2\omega_0 + M_0) + \frac{7}{2} \sin^2 i_0 \cos (2\omega_0 + \\
& + 3M_0) \left. \right\} \pi_0 \Delta t + \frac{C_{20}}{2} \frac{\alpha_0^2}{\alpha_0^2} \left\{ \frac{3}{2} e_0 (2 - 3 \sin^2 i_0) (\sin \tilde{M} - \sin M_0) - \right. \\
& - \frac{3}{4} e_0 \sin^2 i_0 [\sin (2\omega_0 + \tilde{M}) - \sin (2\omega_0 + M_0)] + \frac{7}{4} e_0 \sin^2 i_0 [\sin (2\omega_0 + \\
& + 3\tilde{M}) - \sin (2\omega_0 + 3M_0)] + \frac{9}{2} (2 - 3 \sin^2 i_0) (\sin 2\tilde{M} - \sin 2M_0) - \\
& - 6 \sin^2 i_0 [\sin 2(\omega_0 + \tilde{M}) - \sin 2(\omega_0 + M_0)] + \frac{51}{8} \sin^2 i_0 [\sin 2(\omega_0 + \\
& + 2\tilde{M}) - \sin 2(\omega_0 + 2M_0)] - \frac{15}{16} e_0 (2 - 3 \sin^2 i_0) (\sin \tilde{M} - \sin M_0) + \\
& + \frac{53}{16} e_0 (2 - 3 \sin^2 i_0) (\sin 3\tilde{M} - \sin 3M_0) + \frac{57}{16} e_0 \sin^2 i_0 [\sin (2\omega_0 + \\
& + \tilde{M}) - \sin (2\omega_0 + M_0)] - \frac{3}{16} e_0 \sin^2 i_0 [\sin (2\omega_0 + \tilde{M}) - \sin (2\omega_0 + \\
& - M_0)] - \frac{481}{16} e_0 \sin^2 i_0 [\sin (2\omega_0 + 3\tilde{M}) - \sin (2\omega_0 + 3M_0)] + \\
& + \frac{507}{16} e_0 \sin^2 i_0 [\sin (2\omega_0 + 5\tilde{M}) - \sin (2\omega_0 + 5M_0)] \left. \right\},
\end{aligned}$$

где $\tilde{M} = M_0 + \pi_0 \Delta t$.

Итак, мы получили зависимость (I) в аналитическом виде. Дифференцированием выражений (9) по $\mathcal{J}_0$ и получаются изохронные производные. Матрица изохронных производных приводится в работе [I].

Точность матрицы $\frac{d^2}{d\mathcal{J}_0^2}$ определяется величиной отброшенных в процессе вывода членов, наибольшие из которых имеют порядок C_{20}^2 , $e_0 C_{20}$. Отметим, что с этой точностью выражения справедливы практически для любых промежутков времени Δt .

Неопределенность, возникающая при $e_0 \rightarrow 0$, можно устранить переходом при малых e_0 к круговым элементам орбиты $\alpha, i, \Omega, \lambda = \omega + M$. Выражения, аналогичные (9), в этом случае имеют вид

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{3}{2} C_{20} \frac{a_0^2}{a_0^3} \sin^2 i_0 [\cos 2(\lambda_0 + n_0 \Delta t) - \cos 2\lambda_0] ;$$

$$i = i_0 - \frac{3}{8} C_{20} \frac{a_0^2}{a_0^3} \sin^2 i_0 [\cos 2(\lambda_0 + n_0 \Delta t) - \cos 2\lambda_0] ;$$

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{3}{2} C_{20} \frac{a_0^2}{a_0^3} \cos i_0 \left[n_0 \Delta t - \frac{1}{2} [\sin 2(\lambda_0 + n_0 \Delta t) - \sin 2\lambda_0] \right] ;$$

$$\lambda = \lambda_0 + \left[1 - \frac{3}{2} C_{20} \frac{a_0^2}{a_0^3} (6 - 8 \sin^2 i_0 + 3 \sin^2 i_0 \cos 2\lambda_0) \right] n_0 \Delta t + \\ + \frac{3}{8} C_{20} \frac{a_0^2}{a_0^3} (2 - 5 \sin^2 i_0) [\sin 2(\lambda_0 + n_0 \Delta t) - \sin 2\lambda_0] .$$

Матрица изохронных производных в круговых элементах орбиты также приводится в работе [I] .

Поступила в редакцию
в сентябре 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Бовшин Н.А. Аналитический способ вычисления изохронных производных в орбитальном методе спутниковой геодезии. - М., 1981. - 12 с. - Рукопись представлена ЦНИИГАиК. Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 15 февр. 1982, № 70-82.

ЭВОЛЮЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ ВНЕШНИХ ПЛАНЕТ НА ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ 800 ТЫСЯЧ ЛЕТ

А.А. Сухотин

В предлагаемой работе применяется метод Альфана-Горячева к исследованию эволюции элементов орбит больших планет Солнечной системы под влиянием взаимных возмущений.

Метод Альфана-Горячева вычисления вековых возмущений первого порядка основан на двукратном усреднении возмущающей функции по двум быстрым переменным: средним аномалиям возмущающего и возмущаемого тел. Усреднение по быстрым переменным позволяет при интегрировании уравнений движения брать шаг по времени, значительно превышающий период обращения планеты. Поэтому данный метод удобно применять в эволюционных задачах, когда требуется изучать изменение элементов орбит системы небесных тел или одного тела на больших интервалах времени.

В 1972 году была опубликована работа Когена, Хаббарда, Естервинтера [1], в которой приводятся результаты численного интегрирования уравнений движения пяти внешних планет на интервале времени в один миллион лет (от эпохи 1950,0 вперед и назад на 500 тыс. лет).

Представляет интерес сравнить результаты, приведенные в работе [1], с данными, полученными в результате интегрирования системы дифференциальных уравнений, усредненных по методу Альфана-Горячева.

Известно, что большая полуось орбиты не испытывает вековых возмущений первого порядка. Это обстоятельство используется для контроля вычислений. Кроме того, для контроля применяются интегралы площадей. Если пренебречь членами второго порядка относительно масс, то их можно вычислять по формулам, данным в работе Шарлье [2]:

$$\sum_{k=1}^n m_k \sqrt{a_k (1 - e_k^2)} \sin i_k \sin \varpi_k = C_1 ;$$

(I)

$$\sum_{k=1}^n m_k \sqrt{a_k (1 - e_k^2)} \sin i_k \cos \varpi_k = C_2 ;$$

$$\sum_{k=1}^n m_k \sqrt{a_k (1 - e_k^2)} \cos i_k = C_3 ,$$

где $\alpha, e, i, \lambda, \Omega$ — кеплеровские элементы;

m — масса, $k = 1, 2, \dots, n$.

В процессе вычислений большая полуось сохраняется с точностью 10^{-9} а.е. в юлианский год, интегралы площадей с точностью 10^{-7} .

Средние элементы внешних планет на эпоху 1900.0 берутся из работы Эскобала [3]. Для угловых элементов i, Ω делается переход к неизменяемой плоскости Лапласа по формулам [2]:

$$\sin i_0 \cdot \sin(\Omega_0 - \Pi) = \sin i \cdot \sin(\Omega - \Pi); \quad (2)$$

$$\sin i_0 \cos(\Omega_0 - \Pi) = -\cos i \sin \gamma \cdot \sin i \cos \gamma \cos(\Omega - \Pi),$$

где i_0, Ω_0 — угол наклона и долгота узла относительно неизменяемой плоскости; γ, Π — постоянные, определяющие положение неизменяемой плоскости по отношению к основной координатной плоскости. По формулам, данным в [2], находим γ, Π :

$$\operatorname{tg} \Pi = -\frac{C_1}{C_2};$$

$$\operatorname{tg} \gamma \cdot \sin \Pi = \frac{C_1}{C_3}; \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \gamma \cdot \cos \Pi = -\frac{C_2}{C_3}.$$

Заметим, что в формуле (1) для вычисления постоянных γ и Π следует подставлять вместо i и Ω их значения относительно плоскости эклиптики. При определении интегралов площадей для контроля вычислений необходимо подставлять вместо i и Ω их значения относительно плоскости Лапласа. Интегрирование усредненных уравнений движения системы 5 тел проводится методом Рунге-Кутты четвертого порядка с постоянным шагом в 2000 лет. Весь интервал интегрирования равняется 800 тыс. лет (вперед и назад от эпохи 1900,0 на 400 тыс. лет). Общее машинное время, затрачиваемое на интегрирование на ЭВМ БСМ-6, равно $10^4 20''$.

Орбиты большинства планет Солнечной системы почти круговые и имеют малые углы наклона к плоскости Лапласа. В классическом методе Альфана-Горячева используются уравнения движения в форме Эйлера, имеющие особенности при малых эксцентриситетах и углах наклона. Чтобы избежать трудностей при решении сингулярной системы дифференциальных уравнений, вводятся переменные Лагранжа. Они имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= e \cos \pi ; & x_2 &= \sin \pi \cdot e ; \\ x_3 &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} \cos \Omega ; & x_4 &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} \sin \Omega . \end{aligned} \quad (4)$$

Весь алгоритм метода Альфана-Горячева пересматривается с учетом введения этих переменных. Настоящее исследование проводится при помощи такого модифицированного алгоритма, изложенного в работе автора [4] .

На рис. I-16 приводятся результаты изменения средних элементов орбит внешних планет, полученных по нашему алгоритму (графики В). Здесь же для сравнения приводятся данные работы [I] (графики А). На оси абсцисс откладывается время в тысячах лет.

Как видим, при сравнении результатов работы [I] с настоящим исследованием заметно несоответствие в периодах колебания значений эксцентриситета у Юпитера и Сатурна (рис. I и 2). Период колебания значений эксцентриситета Юпитера и Сатурна по результатам численного интегрирования [I] равен 54 тыс. лет. В нашем интегрировании эта величина равна примерно 68 тыс. лет.

На возможность этого несовпадения указывается в самой работе [I] . Дело в том, как отмечалось еще Хиллом (1897 г.), что включение членов с малыми делителями, возникающих при соизмеримостях средних движений планет, может привести к изменению некоторых вековых периодов. Так, игнорирование периода долгопериодического неравенства, как это делается в теории вековых возмущений, может привести к изменению вековых периодов от значения 55 тыс. лет до значения 68 тыс. лет. Это и получается в настоящей работе.

Амплитуда периода колебания у эксцентриситета Юпитера и Сатурна очень мала и совпадает с результатами работы [I] . Наблюдается отличие колебаний эксцентриситетов Юпитера и Сатурна по фазе на 180° , как и в работе Когена, Хаббарда, Естервинтера.

Некоторое различие наших результатов с результатами авторов работы [I] для эксцентриситетов Урана и Нептуна, а также для доли оты перигелия всех планет, можно объяснить интегрированием периода долгопериодического неравенства, возникающего при соизмеримостях средних движений больших планет. На рис. I2 на верхнем графике виден разрыв. В работе [I] указывается, что физического разрыва нет, он получается из-за того, что эксцентриситет Нептуна в соответствующий момент времени очень близок к нулю и

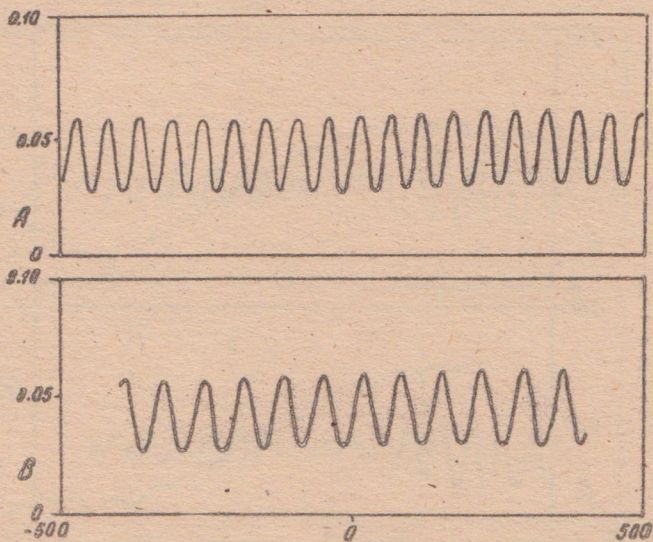


Рис. 1. Эксцентриситет Упитера

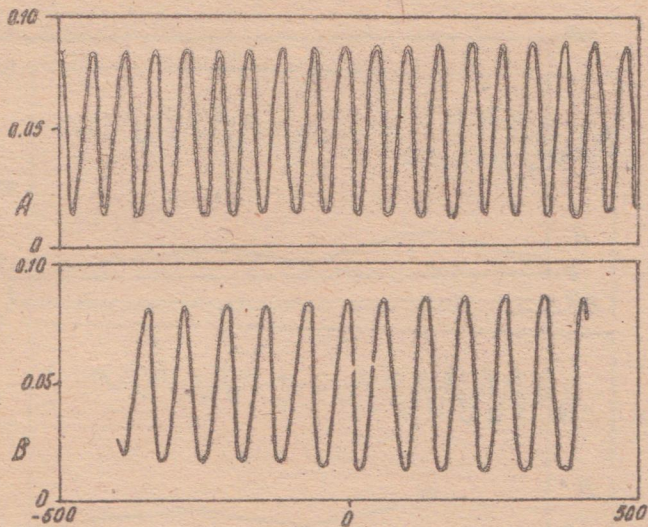


Рис. 2. Экспентриситет Сатурна

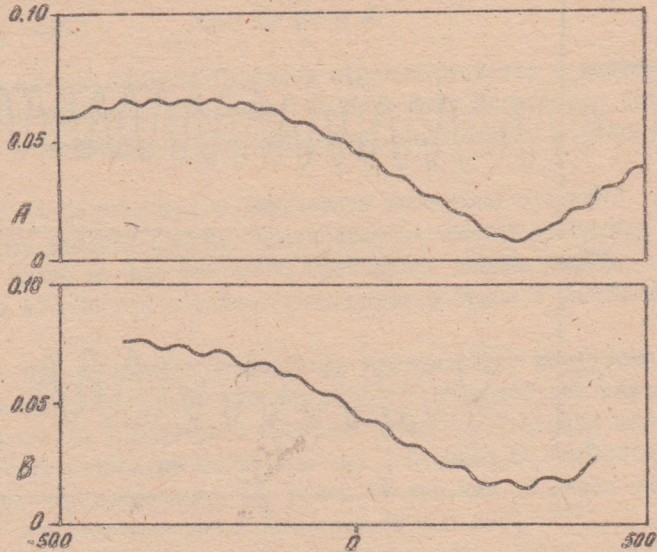


Рис. 3. Эксцентриситет Урана

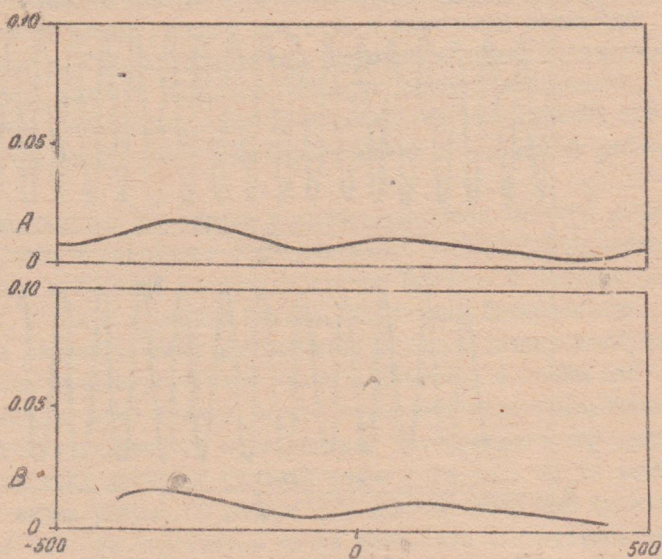


Рис. 4. Эксцентриситет Нептуна

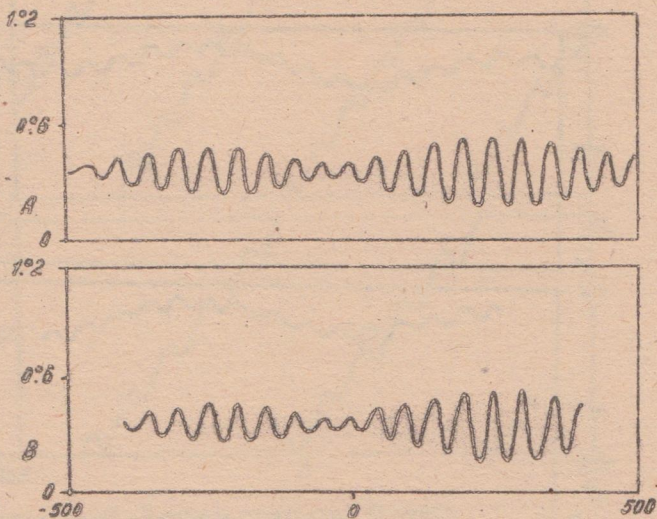


Рис. 5. Наклонение Юпитера

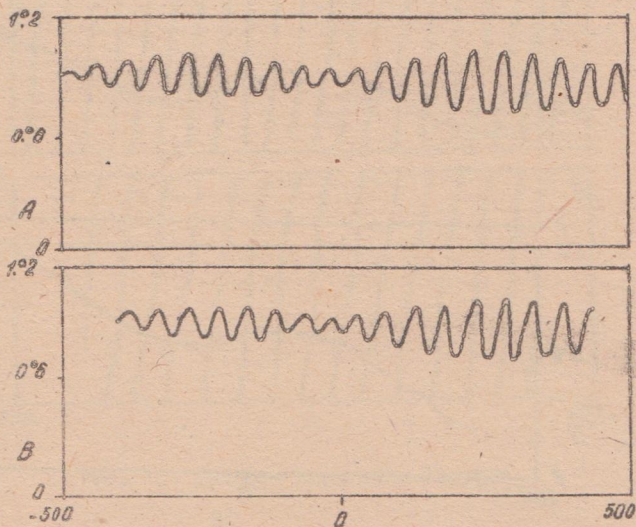


Рис. 6. Наклонение Сатурна

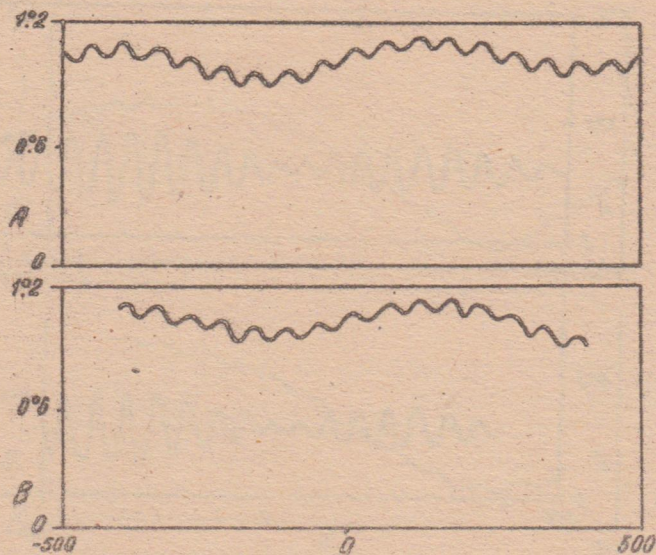


Рис. 7. Наклонение Урана

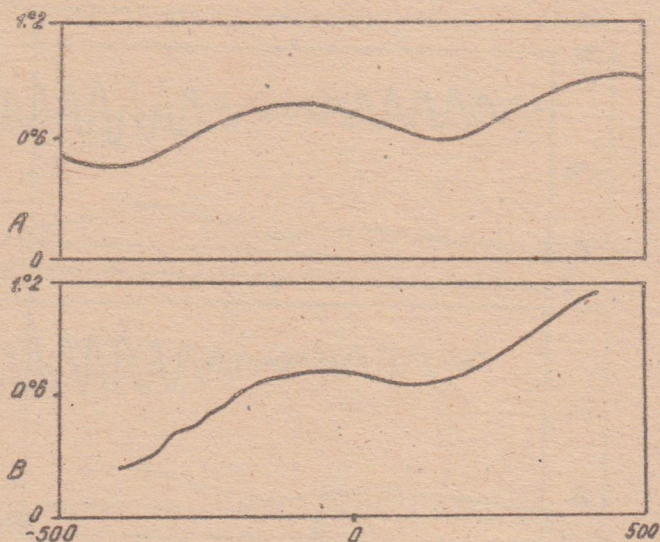


Рис. 8. Наклонение Нептуна

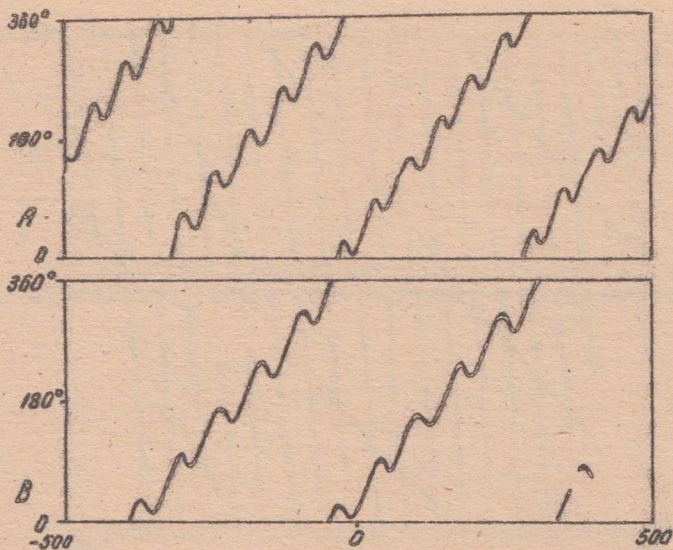


Рис. 9. Долгота перигелия Юпитера

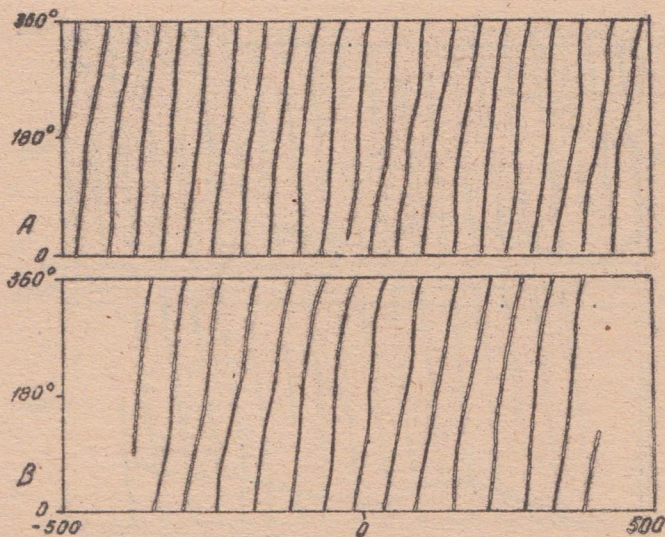


Рис. 10. Долгота перигелия Сатурна

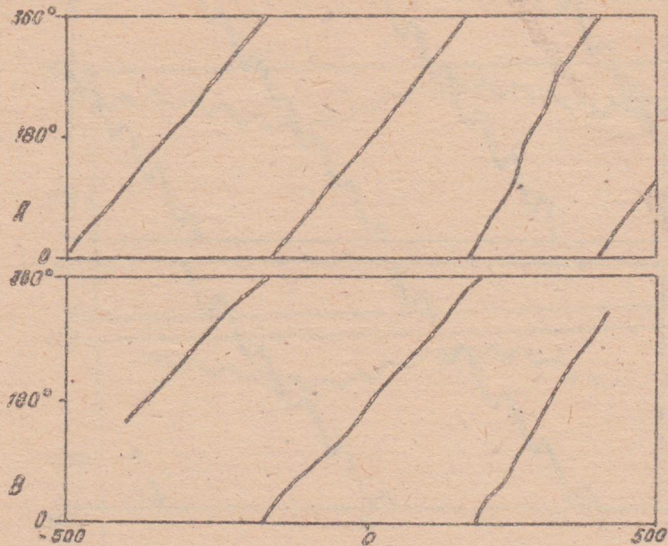


Рис. 11. Долгота перигелия Урана

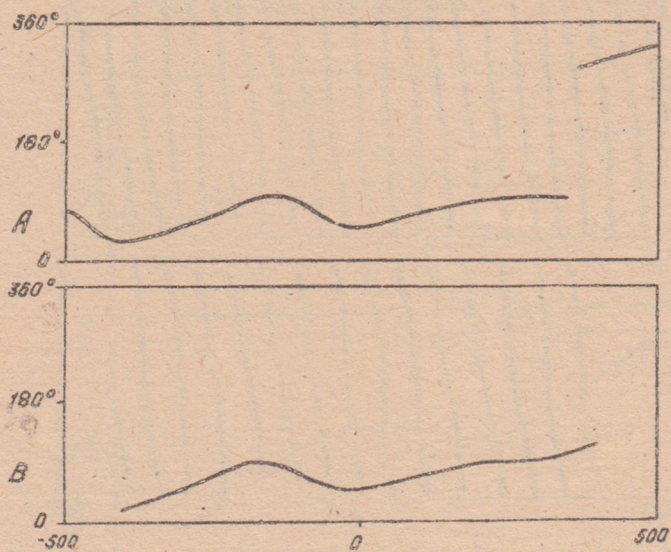


Рис. 12. Долгота перигелия Нептуна

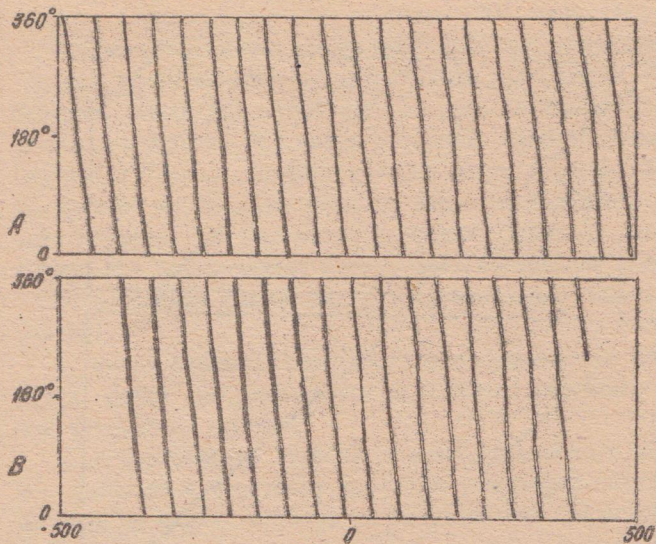


Рис. 13. Долгота узла Юпитера

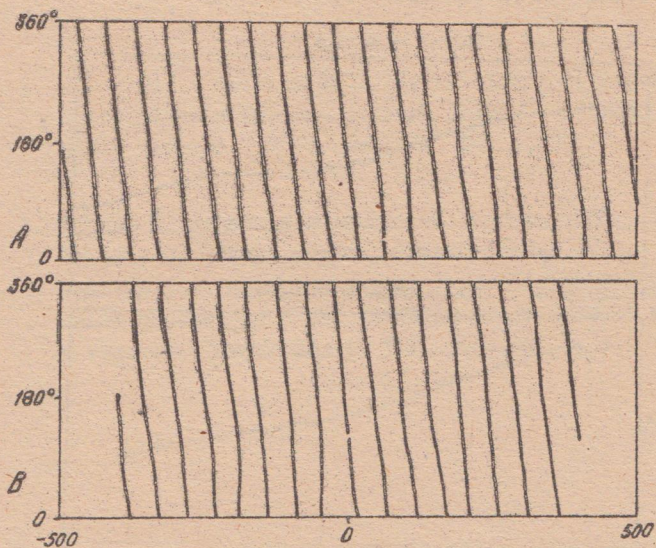


Рис. 14. Долгота узла Сатурна

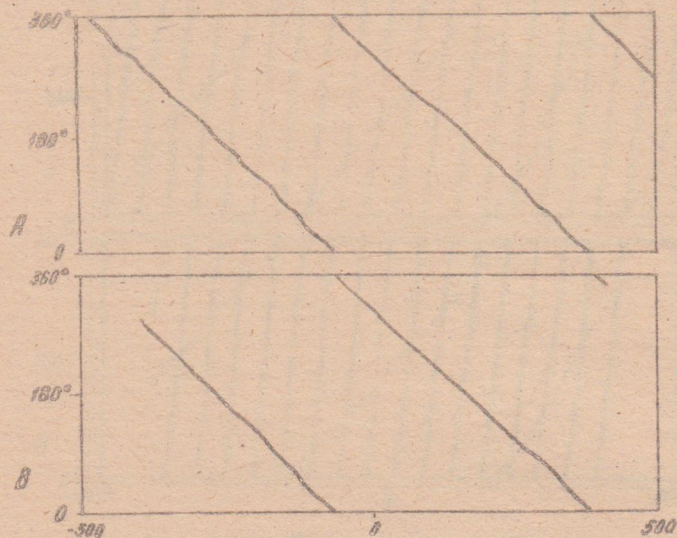


Рис. 15. Долгота узла Урана

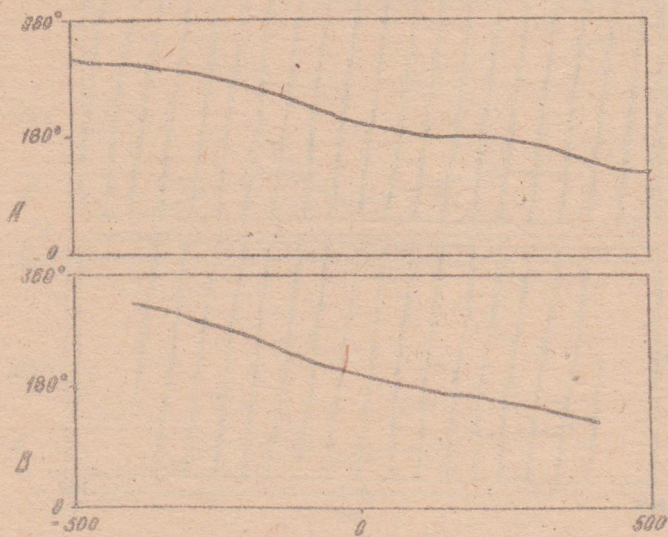


Рис. 16. Долгота узла Нептуна

долгота перигелия изменяется около 180° очень быстро.

Хорошее совпадение между сравниваемыми результатами наблюдается для углов наклона и долгот узлов всех планет за исключением Нептуна, амплитуда колебания которого на нашем графике (рис. 8) несколько больше. Это можно объяснить особенностями в движении Нептуна и Плутона, орбиты которых могут пересекаться. По этой же причине мы не показываем на рисунках поведение элементов орбиты Плутона, так как метод Альфана-Горячева в данном случае, а именно при пересечениях орбит, дает ненадежные результаты.

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Метод Альфана-Горячева удобно применять в эволюционных задачах, когда требуется изучать эволюцию элементов орбит на больших интервалах времени.

2. Игнорирование периода долгопериодического неравенства может привести к заметному изменению некоторых вековых периодов, но вряд ли окажет влияние на устойчивость движения модельной системы.

Поступила в редакцию
в ноябре 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Cohen S.J., Hubbard E.C., Oesterwinter C. Elements of the outer planets for one million years. - Astron. Pap. Am. Ephem. Naut. Almanac., 1972, vol. 22, Pt. 1, 9.
2. Шарлье К. Небесная механика. - М.: Наука, 1966. - 627 с.
3. Эскобаль П. Методы астродинамики. - М.: Мир, 1971. - 341 с.
4. Сухотин А.А. Алгоритм метода Гаусса-Альфана-Горячева в лагранжевых переменных и его машинная реализация. - В кн.: Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1981, вып. 9, с. 67-73.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ НЕКОТОРЫХ
РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ
СРЕДИТ С БОЛЬШИМИ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТАМИ

В.А.Шефер, А.В.Кардаш

В связи со значительным прогрессом, достигнутым в последнее время в области создания методов регуляризации уравнений движения небесных тел, представляет большой интерес практическое исследование эффективности численных алгоритмов, использующих регуляризованные уравнения. В предлагаемой работе обсуждаются результаты численного интегрирования регуляризованных уравнений возмущенного эллиптического движения неявным одношаговым методом Эверхарта одиннадцатого порядка с автоматическим регулированием шага. В процессе численного эксперимента использовались три системы регуляризованных уравнений движения: уравнения в переменных Кустаанхеймо-Штифеля [1], уравнения Шперлинга-Бурде [2] и уравнения в форме, предложенной Мячиным [3]. Правые части этих уравнений в отличие от классических не содержат особенностей в начале координат, а любое решение невозмущенного движения устойчиво в смысле Ляпунова. Во всех трех методах регуляризация уравнений движения достигается с помощью преобразования Сундмана, а стабилизация обусловлена тем, что кеплеровская энергия входит явно в правые части этих уравнений. С помощью преобразования Кустаанхеймо-Штифеля уравнения движения в прямоугольных координатах приводят к виду возмущенного гармонического осциллятора переходом в четырехмерное параметрическое пространство. Порядок системы в этом случае увеличивается от шести до десяти. В отличие от метода Кустаанхеймо-Штифеля методы, предложенные Шперлингом, Бурде и Мячиным, не требуют какого-либо преобразования координат, зато вводят в уравнения движения вспомогательный трехмерный вектор, который в методе Шперлинга-Бурде имеет смысл эксцентрического вектора или вектора Ланса. Порядок системы при этом возрастает до одиннадцати.

В связи с тем, что преимущества регуляризации особенно значительны при вычислении сильно вытянутых орбит, был рассмотрен следующий численный пример [4].

Определяется орбита частицы, движущейся в поле притяжения центральной массы m_0 с учетом возмущения от третьего тела с

массой m_1 . Масса частицы полагается равной нулю. Гравитационные параметры $k^2 m_0 = 2\,980\,008,3$; $k^2 m_1 = 3\,6656,343$. Начальные условия задачи: начальное положение частицы $-x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 10$, начальная скорость $-V_1(0) = 0$, $V_2(0) = 750$, $V_3(0) = 0$. Невозмущенная кеплеровская орбита имеет эксцентриситет $e \approx 0,89$. Возмущающее тело движется в плоскости x_1, x_2 по круговой орбите радиуса $384,4$; начальное положение на положительной части оси x_1 . Интервал интегрирования выбирается равным приблизительно двум оборотам частицы и составляет $6,368\,291$ единиц времени. Причем один оборот интегрируется в прямом направлении, другой — в обратном.

Результаты численного исследования приведены в таблице.

Характеристики эффективности работы программ

Программа	N_f	Δx	ΔV	T
NEWTON	5876	$6,3 \cdot 10^{-6}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	56
REGMY	3770	$4,8 \cdot 10^{-8}$	$3,5 \cdot 10^{-6}$	52
REGSB	2108	$9,0 \cdot 10^{-9}$	$7,1 \cdot 10^{-7}$	32
REGKS	992	$2,2 \cdot 10^{-9}$	$9,8 \cdot 10^{-8}$	14

Здесь *REGMY*, *REGSB*, *REGKS* — наименования программ, использующих регуляризованные уравнения движения в формах Мячина, Шперлинга-Бурде и Кустаанхеймо-Штифеля соответственно. N_f — число обращений к подпрограмме вычисления правых частей уравнений движения. Величины $\Delta x = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2}$ и $\Delta V = \sqrt{\Delta V_1^2 + \Delta V_2^2 + \Delta V_3^2}$ характеризуют точность результатов интегрирования и представляют собой модули изменений векторов положения и скорости частицы в результате прямого и обратного интегрирования уравнений движения. T — время счета в секундах. Для сравнения приведены характеристики эффективности работы программы численного интегрирования уравнений движения в прямоугольных координатах (*NEWTON*). Сравнение полученных результатов исследования позволяет сделать следующие выводы.

Во-первых, использование РСХ указанных систем регуляризован-

ных уравнений является высокоэффективным способом увеличения точности и быстродействия расчетов на ЭВМ.

Во-вторых, наиболее эффективной как по точности, так и по быстродействию является программа, использующая уравнения движения в регуляризуемых переменных Кустанхеймо-Штифеля.

В третьих, программа, использующая уравнения в форме, предложенной Мичиным, уступает по эффективности двум остальным, что связано, по-видимому, с недостаточной стабилизацией уравнений движения.

Поступила в редакцию
в ноябре 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. — М.: Наука, 1975. — 304 с.
2. Silver M. A short derivation of the Sperling-Burdet equations. — Celest. Mech., 1975, 11, pp. 39-41.
3. Мичин В.Ф. Регуляризация двойных соударений в задаче N тел и ее применение к численному интегрированию уравнений небесной механики. — Бюлл. ИТА АН СССР, 1974. т. 13, № 8, с. 482-500.
4. Stiefel E., Rössler M., Waldvogel J., Burdet G.A. Methods of regularization for computing orbits in celestial mechanics. — Washington: 1967. — 124 p.

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ПРИ УЛУЧШЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ОРБИТ

А.М.Черныцов, С.С.Краев

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с использованием новых итерационных схем при решении задач улучшения начальных параметров орбит небесных тел. Получены исходные системы дифференциальных и нелинейных уравнений, позволяющие построить алгоритмы, не уступающие по своим характеристикам методу Гаусса и его демпфированному варианту.

Предполагается, что задача улучшения параметров орбит может рассматриваться как задача минимизации некоторой целевой функции вида

$$\Phi(x) = [r(x) - r^*]^T K^{-1} [r(x) - r^*] = \min, \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ — m -мерный вектор улучшаемых параметров; $r(x)$ — известная N -мерная вектор-функция; $r^* = N$ -мерный вектор наблюдений ($N > m$); K^{-1} — известная эвессовая матрица.

В такой постановке решение искомой задачи может быть сведено к решению системы нелинейных уравнений вида

$$\Phi'(x) = R^T(x) K^{-1} [r(x) - r^*] = 0, \quad (2)$$

где $R(x)$ — матрица размером $N \times m$, элементы которой $\partial r_i(x) / \partial x_j$ суть частные производные от измеряемых параметров по определяемым; $k = 1, 2, \dots, N$; $l = 1, 2, \dots, m$.

Тогда обычно применяемый на практике при улучшении параметров орбит метод Гаусса

$$x_{n+1} = x_n - [R^T(x_n) K^{-1} R(x_n)]^{-1} R^T(x_n) K^{-1} [r(x_n) - r^*] \quad (3)$$

можно рассматривать как классическую модификацию метода Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - [\Phi''(x_n)]^{-1} \Phi'(x_n) K^{-1} [r(x_n) - r^*] \quad (4)$$

для решения системы (2), где $\Phi''(x) = R^T(x) K^{-1} R(x) + G(x, r^*)$; $G(x, r^*)$ — матрица размером $m \times m$, элементы которой суть комбинации

нации вторых частных производных $\partial^2 F / \partial x_i \partial x_j$ элементов вектора невязок $M(x) - r^*$ и весовой матрицы K^{-1} .

Такая трактовка метода Гаусса позволяет оценить размеры его области сходимости и скорость сходимости.

Из имеющихся оценок [1 - 4] следует, что итерационный процесс метода Гаусса имеет линейную скорость сходимости в отличие от соответствующего итерационного процесса метода Ньютона, имеющего квадратичную скорость сходимости. Несмотря на наличие такого рода оценок, использование метода Ньютона для решения задач улучшения параметров орбит, как показывает анализ соответствующих расчетов, вряд ли целесообразно. Это обусловлено как определенной сложностью вычисления с достаточной точностью значений вторых частных производных, так и тем, что реальная область сходимости метода Ньютона может иметь значительно меньшие размеры, чем соответствующая область для метода Гаусса. Последнее обстоятельство объясняется характером изменений свойств соответствующих матриц $[F'(x)]^{-1}$ и $[R'(x)K^{-1}R(x)]^{-1}$ в окрестности искомого решения. Так, в области реальной сходимости метода Гаусса (которая, как правило, больше теоретической) матрица $[F'(x)]^{-1}$ из-за наличия в ней элементов вектора невязок $[r(x) - r^*]$ может деформироваться значительно сильнее, чем матрица $[R'(x)K^{-1}R(x)]^{-1}$ и не быть положительно определенной на множестве точек этой области. Некоторое представление о степени деформации обеих матриц в области сходимости метода Гаусса дает результаты, приведенные в табл. 1 и 2 для X спутника Юпитера и модельной задачи движения материальной точки в поле сжатого сфероида вращения. В последней задаче полностью моделировался процесс улучшения начальных параметров траектории как с помощью метода Гаусса, так и метода Ньютона. Как видно из этих таблиц, деформация матрицы $R^T R$ относительно невелика, в частности, мало меняются её собственные значения и она является положительно определенной в области сходимости метода Гаусса. Данные табл. 2

показывают, что матрица $F'(x)$ деформируется значительно сильнее и, в частности, для более далеких точек x_n относительно искомого решения x^* у этой матрицы появляются отрицательные собственные значения (она перестает быть положительно определенной в отличие от матрицы $R^T R$). В связи с этим можно еще отметить, что при значениях одного из параметров $\alpha = 15002$ км (последняя строка в табл. 2) итерации в методе Ньютона ста-

новятся расходящимися в отличие от метода Гаусса, для которого итерации сходятся и при более грубых значениях начальных параметров (до $\alpha = 15012$ км).

Подводя итог сказанному, можно сделать вывод, что реальная (не теоретическая) область сходимости итераций метода Гаусса может значительно перекрывать реальную область сходимости итераций метода Ньютона и в сочетании с большой практической эффективностью метода Гаусса все это делает очевидным его преимущество перед методом Ньютона при улучшении параметров орбит.

В данной работе предлагается несколько новых итерационных методов ньютоновского типа, сходящихся с квадратичной скоростью к некоторым точкам, принадлежащим области вероятных решений. В отличие от итераций (4) данные методы не требуют расчета вторых частных производных $\partial^2 r_i / \partial x_i \partial x_j$ и имеют намного большую область сходимости. Возможность построения таких схем обусловлена тем, что система уравнений (2) может быть заменена более простыми, близкими к (2) системами нелинейных уравнений, решения которых мало отличаются от решения исходной системы (2) и легко определяются с помощью метода Ньютона при условии, что начальное приближение принадлежит области сходимости метода Гаусса. Такими системами, по отношению к системе (2), являются следующие:

$$R_0^T K^{-1} [r(x) - r^*] = 0 ; \quad (5)$$

$$\tilde{R}_0^T K^{-1} [r(x) - r^*] = 0 ; \quad (6)$$

$$(R_0 + \tilde{R}_0)^T K^{-1} [r(x) - r^*] = 0 . \quad (7)$$

Здесь $R_0 \equiv R(x_0)$; $\tilde{R}_0 \equiv \tilde{R}(x_0)$; x_0 — вектор известных приближенных значений начальных параметров орбиты, подлежащих улучшению; $\tilde{R}(x_0)$ — матрица размером $N \times m$, элементы которой суть некоторые приближенные аппроксимации частных производных $\partial r_i(x)/\partial x_j$ (в данном случае частные производные могут, например, определяться только в рамках задачи двух тел).

Системы нелинейных уравнений (5), (6) и (7) удовлетворяют следующим требованиям:

1) при начальном приближении x_0 , принадлежащем области, пе-

рекрывающей область сходимости итераций метода Гаусса, решения систем уравнений (2), (5), (6) и (7) практически не отличаются между собой;

2) по своим аналитическим свойствам системы нелинейных уравнений (5), (6) и (7) проще системы (2), что следует из отсутствия в матрицах Якоби для этих систем вторых частных производных от измеряемых параметров по определяемым и составляющим векторы невязок.

Все это позволяет получить с помощью метода Ньютона простые и быстроходящиеся итерационные алгоритмы. Соответствующие итерационные схемы решения систем уравнений (5), (6) и (7) имеют вид

$$x_{n+1} = x_n - [R_0^T K^{-1} R(x_n)]^{-1} R_0^T K^{-1} [N(x_n) - N^*]; \quad (8)$$

$$\tilde{x}_{n+1} = x_n - [\tilde{R}_0^T K^{-1} R(x_n)]^{-1} \tilde{R}_0^T K^{-1} [N(x_n) - N^*]; \quad (9)$$

$$x_{n+1} = x_n - [(R_0 + \tilde{R}_0)^T K^{-1} R(x_n)]^{-1} (R_0 + \tilde{R}_0)^T K^{-1} [N(x_n) - N^*]. \quad (10)$$

Итерации (8) - (10) в отличие от итераций (3) сходятся с квадратичной скоростью в некоторой окрестности решений соответствующих систем (5) - (7).

Конструктивное отличие алгоритма Гаусса (3) от данных алгоритмов состоит в том, что в последних элементы транспонированных матриц, состоящие из частных производных $\partial R_i(x)/\partial x_i$ и их приближенных аппроксимаций, вычисляются только в начальной точке x_0 , а дальше в процессе итераций остаются постоянными. Можно еще отметить, что результаты первой итерации ньютоновского алгоритма (8) и гауссовского (3) полностью совпадают.

К недостаткам метода Гаусса и ньютоновских алгоритмов (8) - (10) можно отнести ограниченность размеров области сходимости соответствующих итераций. Для "попадания" в реальную область сходимости (она практически одинакова для данных алгоритмов) иногда необходимо использовать другие, менее эффективные методы (например, методы прямого поиска), что в общем затрудняет процесс улучшения параметров орбит. Такие случаи, например, возможны при улучшении параметров орбит комет и спутников планет, когда имеются большие временные разрывы в наблюдениях. В данной работе, используя в качестве исходных вместо минимизируемого функ-

ционала (1) и системы (2) более простые системы уравнений (5) - (7), удается получить новые, достаточно эффективные способы решения и такого рода задач.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений (5). Применим для её решения метод продолжения по параметру [5]. В данном случае этот метод позволяет рассматривать вместо системы (5) систему нелинейных уравнений:

$$R_0^T K^T [F(x) - F^*] - R_0^T K^T [F(x) - F^*] \cdot e^{-\lambda} = 0 \quad (11)$$

или систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_\lambda = -[R_0^T K^T R(x)]^{-1} R_0^T K^T [F(x) - F^*], \quad (12)$$

$$x(0) = x_0 \quad (\lambda \in [0, \infty))$$

Здесь $R_0 \equiv R(x_0)$, λ - новая вспомогательная переменная. Для систем (11) и (12) при $\lambda \rightarrow \infty$ $x(\lambda)$ стремится к решению системы (5).

Приведем наиболее простые методы решения для этих систем. Для системы уравнений (11) возможны следующие способы её решения: строится последовательность точек $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$, и для каждого значения λ_n из этого ряда ищется решение соответствующей системы:

$$R_0^T K^T [F(x) - F^*] - R_0^T K^T [F_0 - F^*] \cdot e^{-\lambda_n} = 0 \quad (13)$$

либо с помощью итераций метода Ньютона

$$y_{p+1} = y_p - [R_0^T K^T R(y_p)]^{-1} (R_0^T K^T [F(y_p) - F^*] - R_0^T K^T [F_0 - F^*] \cdot e^{-\lambda_n}), \quad (14)$$

либо применяя для этой цели метод продолжения, тем самым увеличивая шаг разбиения $h_{n-1} = \lambda_n - \lambda_{n-1}$. В качестве начального приближения в обоих случаях может быть взято решение (возможно приближенное) соответствующей системы для предыдущей точки λ_{n-1} . Если в качестве начального приближения принимать результат первой итерации (14) для предыдущей точки, то будем иметь следующий простой алгоритм решения задачи:

$$x_{n+1} = x_n - [R_0^T K^T R(x_n)]^{-1} (R_0^T K^T [F(x_n) - F^*] - R_0^T K^T [F_0 - F^*] \cdot e^{-\lambda_{n+1}}). \quad (15)$$

Наконец, для решения системы дифференциальных уравнений (12) могут быть использованы простые схемы метода Эйлера

$$x_{n+1} = x_n - h_n [R_0^T K^T R(x_n)]^{-1} R_0^T K^T [F(x_n) - F^*] \quad (16)$$

и

$$x_{n+1} = x_n - h_n [R_0^T K^T R(x_{n+1})]^{-1} R_0^T K^T [F(x_{n+1}) - F^*], \quad (17)$$

где $h_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n$. В последнем случае решение на каждом шаге нелинейной относительно x_{n+1} системы уравнений (17) может быть осуществлено с помощью метода последовательных приближений:

$$y_{\rho+1} = x_n - [R_0^T K^T R(y_{\rho})]^{-1} R_0^T K^T [F(y_{\rho}) - F^*], \quad (18)$$

где $\rho = 0, 1, \dots$; $y_0 = x_n$.

Подобные алгоритмы получены и для решения систем нелинейных уравнений (6) и (7). Сравнение результатов решения модельных задач показало, что по своей эффективности они равноценны соответствующим алгоритмам, приведенным выше.

Легко показать, что кроме перечисленных выше способов решения задача улучшения параметров орбит может быть сведена также к задаче интегрирования системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_\lambda = -[R^T(x) K^T R(x)]^{-1} R^T(x) K^T [F(x) - F^*], \quad (19)$$

$$x(0) = x_0 \quad (\lambda \in [0, \infty)).$$

Решение этой системы также может быть осуществлено с помощью явной и неявной схем метода Эйлера. В частном случае при $h_n = 1$ явные схемы метода Эйлера для систем (12) и (19) полностью совпадают с ньютоновским алгоритмом (8) и гауссовским (3).

Некоторое представление об эффективности применения всех приведенных выше способов при решении задач улучшения параметров орбит дают табл. 3, 4 и рис. 1, где приведены результаты расчетов для модельной задачи. В табл. 3 используются следующие сокращенные обозначения методов: "МГ" — метод Гаусса; "МН" — метод Ньютона для решения системы (5); "Мпр" — метод продолжения, определяемый формулой (15) при $\lambda_n = \pi$ ($\pi = 0, 1, 2, \dots$). Для этих методов в таблице приведены значения улучшаемых параметров, полученных на каждой итерации (для наглядности приводятся только значения двух параметров σ и ε). Данные показывают, что итере-

ции метода Ньютона (8) сходятся значительно быстрее, чем в методе Гаусса, а итерационный метод (15) при $\lambda_n = \pi$ уступает им по скорости сходимости.

На рис. I изображены проекции областей сходимости этих методов на плоскость α, ρ . Области (A) соответствует область сходимости метода продолжения, определяемого формулой (15) при $\lambda_n = \pi$; области (B) - области сходимости методов Гаусса (3) и Ньютона (8), совпадающие между собой. Таким образом, область сходимости метода (15) при $\lambda_n = \pi$ перекрывает область сходимости гауссовского (3) и ньютоновского (8) алгоритмов.

В табл. 4 сравниваются способ решения последовательности систем (13) с помощью итерационного метода (14) (обозначен через Мпр - 2) и способы решения систем дифференциальных уравнений (12) и (19) с помощью неявных схем метода Эйлера (обозначены соответственно через МЭ - I и МЭ - 2) для случая, когда начальное приближение находится вне области сходимости метода Гаусса. Прочерк в таблице показывает, что решение задачи не может быть достигнуто при заданном шаге $h = \lambda_{n+1} - \lambda_n$. Количество итераций при переходе от текущей точки λ_n к новой λ_{n+1} оказывалось одинаковым для всех методов. Из табл. 4 видно, что способ решения последовательности систем уравнений (13) с помощью итераций (14) в несколько раз эффективнее сравниваемых с ним алгоритмов, построенных на использовании неявного метода Эйлера.

Таблица I

Значения диагональных элементов матрицы $R^T R$
для различных начальных параметров орбиты
спутника Юпитера

(моменты наблюдений с 1968 по 1968 гг.)

x_n	$\{R^T(x_n) R(x_n)\}^{1/2}$					
x_1 1,804	5,432	6,910	0,00355	0,00071	0,00061	
x_2 1,798	5,436	6,851	0,00355	0,00070	0,00061	
x_3 1,878	5,954	7,81	0,00376	0,00080	0,00059	
$\sqrt{\frac{\Phi(x_1)}{N-m}}$	$= 688,59$		$\sqrt{\frac{\Phi(x_2)}{N-m}}$	$= 36,01$	$\sqrt{\frac{\Phi(x_3)}{N-m}}$	$= 0,76$

Таблица 2

Значения диагональных элементов $(R^T R)_{22}$, $(\Phi'')_{22}$
и собственных значений $\lambda_2(R)$, $\lambda_2(\Phi'')$ для различных
начальных параметров модельной задачи

x_n	$(R^T R)_{22}$	$\lambda_2(R)$	$(\Phi'')_{22}$	$\lambda_2(\Phi'')$
$\hat{a} = 15000,00001111 \text{ км}$ $\hat{e} = 0,500000420$	0,788	0,214	0,788	0,214
$a_1 = 15001$ $e_1 = 0,5$	3,211	0,214	7,053	-13,066
$a_2 = 15002$ $e_2 = 0,5$	15,569	0,213	32,380	-43,745

Таблица 3

Сходимость итераций метода Гаусса (3), метода Ньютона (8)
и метода продолжения по параметру (15) при $\lambda_n = n$ для
модельной задачи

x_n	МГ формула (3)	МН формула (8)	Мпр формула (15) при $\lambda_n = n$
x_0	15006 км	15006 км	15006 км
e_0	0,5	0,5	0,5
a_1	14999,3459608	14999,3459608	15001,7778411
e_1	0,428593971	0,428593971	0,4535560001
a_2	14999,8731458	14999,8731817	15000,6074454
e_2	0,499827818	0,499830929	0,488157204
a_3	14999,9902577	14999,9902753	15000,2276317
e_3	0,499198373	0,499199719	0,496205119
a_4	14999,9999993	14999,9999993	15000,0654400
e_4	0,500000956	0,500000951	0,498681931
a_5	15000,0000111	15000,0000110	15000,0317105
e_5	0,5000004202	0,5000004150	0,499525403

Сравнение алгоритма решения систем (I3) с помощью итераций (I4) и алгоритмов решения систем (I2) и (I9) с помощью неявных схем метода Эйлера для случая, когда начальное приближение находится вне области сходимости метода Гаусса

h	Значения λ , при которых получено решение		
	Мпр-2	МЭ - I	МЭ - 2
0,5	I4	24	24,5
0,8	I4	-	-
0,9	I5	-	-
1,0	-	-	-

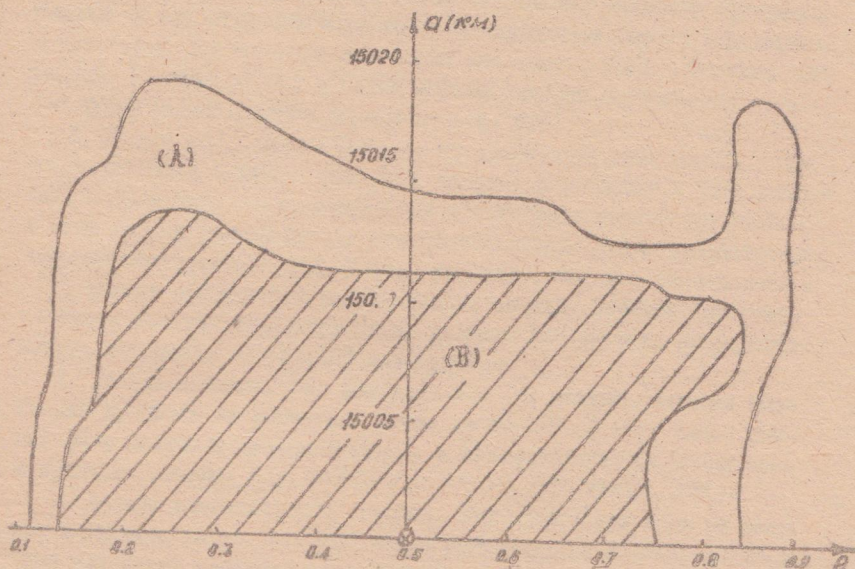


Рис. 1. Проекция областей сходимости: (А) - проекция области сходимости метода (I5) при $\lambda_h = h$ ($h = 0, 1, \dots$); (В) - проекция области сходимости метода Гаусса и Ньютона

Поступила в редакцию
в ноябре 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. -М.: Наука, 1977. -744 с.
2. Ортага Дж., Рейнгольдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими переменными. -М.: Мир, 1975. -560 с.
3. Холшевников К.В. К учету возмущений в процессе улучшения орбит. -Вестник ТГУ, 1973, № 13, с. 153-159.
4. Черницын А.М. Анализ некоторых упрощенных схем определения параметров движения небесных тел. -В кн.: Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1975, вып. 5, с. 6-19.
5. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений. - ДАН СССР, 1953, т. 88, № 4, с. 601-602.

БАНК АСТРОНОМИЧЕСКИХ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ
СЕДАН ДЛЯ ЕС - ЭВМ

К.А.Кандаурова, Д.Д.Положенцев (ст.),
Е.А.Степанова

Основные принципы построения банка астрономических данных (БАД) освещены в [1]. Ниже даны некоторые детали этой работы.

1. СЕДАН как основа построения БАД. Система управления базами данных (сокращенно СУБД) является одним из важных элементов БАД. Из нескольких СУБД, получивших распространение в СССР, был выбран СУБД СЕДАН, который комплектно поставляется НПО "ЦЕНТР - ПРОГРАММА-СИСТЕМ" в г. Калинин. СЕДАН содержит языковые и программные средства для описания структур баз данных, подсчет, а также для манипулирования данными, реорганизацией и восстановлением баз данных.

Одним из преимуществ СУБД СЕДАН по сравнению с другими СУБД является простота подхода к базам данных, простота самой системы, что позволяет быстро освоить СЕДАН астроному, умеющему программировать. В качестве базового языка используются широко популярные в астрономии алгоритмические языки Ассемблер, ПЛ/1 и Фортран. Обращение к базам данных в СЕДАН осуществляется оптимальным способом путем использования обращения вида *CALL*.

2. Состав баз данных БАД. Выбор правильной базы данных имеет первостепенное значение для БАД. Данные, включаемые в БАД, должны быть актуальными, пользование ими должно быть достаточно частым и сами данные должны быть достаточно полными, чтобы удовлетворить запросы пользователя БАД. Исходя из этого, как уже указывалось в [1], данные БАД делятся на три класса по типу доступа (мы будем иметь только астрометрические данные, как имеющих непосредственное отношение к небесной механике).

1. Данные немедленного доступа, т.е. те данные, которые постоянно хранятся на магнитном диске на ЕС-ЭВМ. В этот класс данных были включены фундаментальные и сводные каталоги небольшого и среднего объема: *FK4*, *ПФКСЗ-2*, *N30*, *GC*, *K73*, *ABK3R*, *SRS*.

2. Данные повседневного доступа. Эти данные хранятся на сменном магнитном диске, который можно поставить на ЕС-ЭВМ, когда в этом возникает необходимость. Второй вариант этого класса доступа - это хранение данных на магнитной ленте на ЕС-ЭВМ. При обращении к данным они сначала переписываются с магнитной ленты на магнитный рабочий диск, а затем уже считываются. В этот класс данных включаются фотографические каталоги, широко используемые при об-

работке дифференциальных наблюдений больших и малых планет и для других целей. Это каталоги *SAO, Yale, AGK3*.

3. Данные архивного доступа. Эти данные хранятся на МЛ вне ЕС-ЭВМ. В необходимый момент они могут быть поставлены на ЕС-ЭВМ и считаны так же, как данные класса повседневного доступа (см. п. 2). В этот класс данных входят оригинальные каталоги, массивы наблюдений Солнца, Луны, планет. Эти данные могут находиться и накапливаться в Центрах астрометрических данных [2].

База данных БАД организована т.о., что она может непрерывно пополняться новыми данными, а также может осуществляться процесс перехода данных из одного класса в другой.

Поступила в редакцию
в августе 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Губанова М.Г., Кандаурова К.А., Положенцев Д.Д. О Банке астрометрических данных (БАД) ГАО АН СССР в системе ЕС-ЭВМ. — В кн.: Алгоритмы небесной механики: Тез. Докл. III Всесоюз. совещ. Рига, 1980, с. 18-19.

2. Положенцев Д.Д. О Советских центрах астрометрических данных. — В кн.: Алгоритмы небесной механики: Тез. Докл. III Всесоюз. совещ. Рига, 1980, с. 17.

О ВЫЧИСЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ДАННЫХ АСТРОНОМИЧЕСКОГО ЕЖЕГОДНИКА НА ЕС - ЭВМ

И.С. Гусева, О.В. Княева, Д.Д. Положенцев (ст.),
Е.А. Степанова, Л.И. Ягудин

Опыт использования алгоритмов и программ по вычислению ряда основных данных астрономического ежегодника на ЭВМ Минск-22 показал их высокую эффективность [1]. Аналогичная работа проводится в Пулкове по созданию пакета программ для ЕС-ЭВМ. При этом используется иная концепция чем та, которая применяется в астрономических ежегодниках для ЭВМ в западных странах. Именно вместо табулирования данных астрономического ежегодника и последующей выборки из таблиц с использованием полиномов Чебышева в нашем случае все данные вычисляются по основным разложениям или формулам. Это делает возможным использовать предложенные алгоритмы и программы практически для любого года, т.е. астрономический ежегодник для ЕС-ЭВМ становится не зависимым от года наблюдений на все время действия данных разложений, что очень удобно для пользователя.

Пакет программ создается в виде стандартных подпрограмм на алгоритмических языках Ассемблер или Фортран-IV. С помощью оператора *CALL* эти подпрограммы могут быть включены в любую программу пользователя. Составлены, опробованы и сданы в Государственный фонд алгоритмов и программ АН СССР следующие пакеты программ:

1. Переводы времен, юлианский период. К этому разделу относятся следующие подпрограммы:

DATJUL - перевод даты в юлианские дни t ;

JULDAT - перевод юлианских дней в дату D ;

MEANS - вычисление S_0 среднего, т.е. звездного времени в 0^h Всемирного времени;

STRUE - вычисление $S_{\text{ист.}}$ ($S_0 + \text{нутаия}$);

SMT - перевод $S_{\text{мест.}}$ в среднее время M .

Характерная особенность этих программ - вычисление параметров с повышенной точностью. Как правило, все вычисления идут с удвоенной точностью. Подпрограммы этого раздела носят служебный характер, но они могут выполняться самостоятельно.

2. Видимые места звезд. К этому разделу относится довольно большое семейство подпрограмм, большая часть которых также носит служебный (но отнюдь не вспомогательный) характер и астрономы чаще всего используют их в не явном виде через другие подпрограммы

пакета, из которых идет обращение к ним. Это подпрограммы вычисления нутации в долготе (*ANULT*), нутации в широте (*ANUTB*), наклонности экватора к эклиптике — истинной (*EASLN*), т.е. $\epsilon_0 +$ нутация, вычисления средних мест звезд α_{cp} , δ_{cp} (*MEANPL*), редукционных величин $A+A'$, $B+B'$, C, D, E (*ABCDE*), вычисления бесселевых величин C и D (*CDABP*) и, наконец, вычисления видимых мест звезд (*APPL*). Причем аргументами этих подпрограмм являются дата, момент наблюдения (или долгота места наблюдения, если наблюдения проводились в меридиане) и координаты звезд.

Вычисление бесселевых величин C и D было сделано по разложениям В.С. Губанова [2], который преобразовал соответствующие выражения для C и D к выражениям тригонометрических рядов от 5 фундаментальных аргументов (Ω — средняя долгота восходящего узла лунной орбиты, l — средняя аномалия Луны, l' — средняя аномалия Солнца, F — средний аргумент широты Луны, D — разности средних долгот Луны и Солнца). Две программы вычисления видимых мест: *AAPPLRM* — дающая видимое место светила по аргументу момента наблюдений и *APPL* — для обработки наблюдений в меридиане, а также в произвольных часовых углах.

3. Рефракция и перевод координат из одной системы в другую. Для вычисления рефракции формулы и таблицы рефракции Пулковской обсерватории были преобразованы к виду, удобному для реализации на ЭВМ [3]. Программа вычисления рефракции (*REFRAC*) обеспечивает точность вычислений $\pm 0,005 \text{ tg } Z$, что вполне достаточно для многих целей астрометрии и астрофизики.

Переводы от горизонтальной к экваториальной системе координат (*NOREQ*) и от эклиптической к экваториальной (*CLEQ*) — наиболее часто встречающиеся в практике астрономических исследований.

Работа над подпрограммами для вычисления данных астрономического ежегодника продолжается с использованием опыта других астрономических учреждений (ИТА АН СССР, АО Латв. ИУ и др.).

Пос. ушла в редакцию
в августе 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Варин М.П., Положенцев Д.Д. Специализированная система математического обеспечения астрономических работ для ЭВМ Минск-22. — В кн.: Автоматизация научных исследований на основе применения ЭВМ. М-тер. конф. Новосибирск, 1974, с. 41-42.

2. Губанов В.С. Разложение годичной аберрации в ряд по фунда-

ментальным аргументам.—Астр.ж., 1972, т. 49, вып. 5, с. III2-II22.

3. Положенцев Д.Д. О вычислении рефракции по пулковским таблицам с помощью машин.— Изв. ГАО, 1965, № 176, с. 89-99.

ПАКЕТ ПРОГРАММ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВНЕШНИХ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ

Л.Б.Быкова, В.В.Шихалев, В.А.Юрга

Исследования движения внешних спутников планет ведутся в лаборатории небесной механики НИИ прикладной математики и механики при Томском университете с 1970г. Для проведения этих исследований в начале 70-х годов был создан комплекс программ на языке ЭВМ М-220 [1], с помощью которого были успешно выполнены исследования движения внешних спутников Юпитера (VI-XI). В частности, были получены новые высокоточные элементы орбит VI и VII спутников и вычислены их эфемериды до 2000 года [2], выполнена оценка массы Юпитера на основании обработки наблюдений шести спутников (VI-XI) [3-5].

Дальнейшие исследования естественных спутников планет привели к написанию аналогичного комплекса программ для ЭВМ БЭСМ-6. Новый комплекс (пакет) программ, будучи ориентирован на решение той же проблемы, существенно отличается от первоначального варианта. Набор используемых алгоритмов значительно расширен, некоторые алгоритмы модифицированы или заменены более современными. Подпрограммы пакета написаны в основном на алгоритмическом языке ФОРТРАН, отдельные подпрограммы - на языке АЛГОЛ-ГДР. Пакет оформлен в мониторной системе "ДУБНА".

Описание пакета

Пакет состоит из набора каталогов данных и программных модулей, обеспечивающих решение следующих задач:

- численное интегрирование уравнений движения спутника с учетом всех необходимых возмущений;
- сравнение теории с наблюдениями;
- улучшение начальных параметров движения;
- построение рабочих эфемерид для проведения астрометрических наблюдений спутников.

Схематично состав пакета представлен на рис.1.

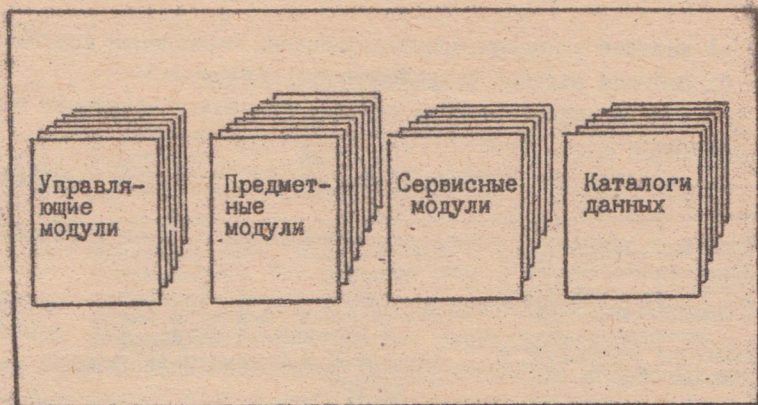


Рис. I

Основное содержание пакета составляют предметные подпрограммы. Приведем перечень этих подпрограмм:

- 1) программа численного интегрирования дифференциальных уравнений движения методом Эверхарта [6] ;
- 2) программы вычисления правых частей уравнений движения спутника (в прямоугольных координатах, в эйлеровых элементах);
- 3) программа сравнения теории с наблюдениями (О-С);
- 4) программы преобразования координат;
- 5) программа вычисления изохронных производных методом Мультонна;
- 6) программы оценивания орбитальных параметров (методом наименьших квадратов, симплексным методом);
- 7) программы расчета астрометрических эфемерид спутников.

Программы раздела 2) приведенного перечня позволяют учитывать при построении модели движения спутника возмущения от Солнца, внешних планет, других спутников и экваториального сжатия центральной планеты.

Предметные модули разделов 2), 3), 5) непосредственно связаны с каталогами данных. В состав пакета включены следующие каталоги:

- а) каталог исходных астрометрических наблюдений спутников;
- б) рабочий каталог редуцированных наблюдений;
- г) каталог прямоугольных гелиоцентрических координат больших планет;
- д) каталоги вычисленных астрометрических эфемерид спутников.

Доступ к каталогам данных осуществляется с помощью сервисных модулей.

Совокупность перечисленных предметных и сервисных модулей и каталогов данных составляет так называемый базис [7] данного пакета. Любая из сформулированных выше задач исследования движения внешних спутников планет может быть решена последовательностью вызовов модулей из базиса.

Кроме того, по мере проведения исследований создаются и включаются в пакет управляющие подпрограммы. Эти подпрограммы выполняют функции формирования программ решения рассматриваемых астрономических задач из отдельных модулей базиса. В таблице приводится список таких управляющих подпрограмм и их краткое описание.

В настоящее время основная часть описанного пакета за исключением некоторых модулей разработана и находится в эксплуатации. Каталоги данных и большинство подпрограмм пакета составлены авторами. Отдельные подпрограммы написаны сотрудниками Томского университета В.А.Шефером и С.С.Краевым. Отладка программных модулей выполнялась на примере решенных ранее задач для VI и X спутников Юпитера. Наполнение каталогов данных осуществляется по мере проведения исследований конкретных спутниковых систем.

Пакет был успешно использован нами для построения численной теории движения IX спутника Сатурна Фебы [8,9]. На основании обработки наблюдений с момента открытия спутника по настоящее время (1898-1981г г.) удалось значительно улучшить орбитальные параметры его движения. Полученная в результате численная теория движения Фебы представляет наблюдения всего периода с точностью $1''.5$, современные наблюдения - с точностью $0,9$ в геоцентрической системе координат (точность существовавших до сих пор теорий составляет $\sim 1'$).

В настоящее время с помощью данного пакета программ авторами продолжают исследования движения группы внешних спутников Сатурна.

СПИСОК ПРОГРАММ

Имя программы	Содержание задачи	Входные данные	Выходные параметры
1	2	3	4
INTGRТ	Численное интегрирование уравнений движения спутника в прямоугольных координатах	1. Номер центральной планеты 2. Номер спутника 3. Начальные параметры орбиты 4. Параметры интегрирования и печати результатов	1. Прямоугольные планетоцентрические координаты и скорости спутника на заданный момент времени 2. Эфемерида спутника с заданным шагом
EULER	Численное интегрирование уравнений движения в эйлеровых элементах (параметрах задачи двух неподвижных центров)	Те же, что в программе INTGRТ	1-2. Те же, что в программе INTGRТ 3. Эйлеровы элементы орбиты на заданный момент времени
OMINC	Сравнение теории с наблюдениями	1-4. Те же, что в INTGRТ 5. Информация о наблюдениях	Представление наблюдений (O-C): $\Delta\alpha_i \cdot \cos\delta_i$, $\Delta\delta_i$
BETTER	Улучшение орбиты симплексным методом	1-5. Те же, что в OMINC 6. Требуемая точность (либо мах допустимое число итераций) 7. Исходный симплекс	1. Уточненные значения начальных параметров движения 2. Представление наблюдений (O-C) новыми параметрами
DIFCOF	Вычисление изохронных производных, составление системы условных уравнений	1-5. Те же, что в OMINC	Система условных уравнений (записывается на внешний носитель)
NEWORB	Улучшение орбиты методом наименьших квадратов	1. Информация о наблюдениях 2. Критерий отбраковки наблюдений	1-2. То же, что в BETTER

Л и т е р а т у р а

1. Быкова Л.Е. Теория движения VI спутника Юпитера и определение поправки к массе Юпитера: -Дис.... канд. физ.-мат.наук. -Томск, 1973. - 158 с.
2. Бордовицкая Т.В., Быкова Л.Е. Теории движения и эфемериды VI и VII спутников Юпитера на 1979-2000 годы. -Томск:Изд-во ТГУ, 1978. - 120 с.
3. Андреева Л.Д., Быкова Л.Е. Определение массы Юпитера из анализа наблюдений его IX и X спутников. -В кн.: Астрономия и геодезия, Томск:Изд-во ТГУ, 1973, вып. 4., с. 84-92.
4. Быкова Л.Е., Юрга В.А. Об определении массы Юпитера из наблюдений его VII и VIII спутников. -В кн.: Астрономия и геодезия, Томск:Изд-во ТГУ, 1976, вып. 6, с. 42-46.
5. Быкова Л.Е. Об определении массы Юпитера по движению его внешних спутников. -Бюлл. ИТА АН СССР, 1979, т. 4, №7, с. 402-406.
6. Тарасевич С.В. Алгоритм *RADAU* эффективного численного интегрирования с высокой точностью систем обыкновенных дифференциальных уравнений I и II порядков (метод проф. Эверхарта). - Л., 1975. - 6с. (Препринт/ИТА АН СССР).
7. Лавров С.С., Скрипниченко В.И. СПОРА - специализированное программное обеспечение для решения астрономических задач. - В кн.: Астрономия и геодезия. Томск:Изд-во ТГУ, 1980, вып. 8, с. 3-15.
8. Быкова Л.Е., Шихалев В.В. Новые элементы орбиты Фебы, девятого спутника Сатурна. -Астрон.цирк., 1982, №1237, с. 6-7.
9. Быкова Л.Е., Шихалев В.В. Численная теория движения Фебы, девятого спутника Сатурна. -Астрон.вестник, 1983, т. 17, №4, с. 225-231.

ПАКЕТ ПРОГРАММ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ОБЪЕКТОВ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАНЕТ ПО СНИМКАМ С КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

С. Г. Валеев, М. Г. Шамарин

Введение

Данные последних лет свидетельствуют о необходимости более полного расширения с достаточной точностью селенодезической опорной сети видимого полушария Луны на ее невидимую часть, охваченную съемками с АМС серии "Зонд-6,8". Из имеющихся в настоящее время списков селенодезических координат на обратную сторону Луны следует отметить каталог [1], который содержит достаточное число объектов, но получен из обработки только двух снимков, и каталог [2], который построен на основе вдвое большего числа снимков, однако содержит относительно небольшое число точек.

Итоги исследований по данной проблеме, выполненных в Кемеровском университете (КТУ), можно сформулировать следующим образом: получена астрономическая методика построения селенодезической опорной сети [3, 4], разработан вычислительный алгоритм на языке Альфа [5], определена селенографическая сеть 699 объектов обратной стороны Луны [6] и расширенная селенодезическая опорная сеть 277 объектов видимого с Земли полушария Луны, построенная на основе обработки 10 снимков: 5 снимков с АМС "Зонд-6" и 5 снимков с АМС "Зонд-8". Селенодезическая координатная система из 277 объектов построена силами сотрудничества специалистов КТУ, МИТАИК и ГАИШ МГУ.

На наш взгляд, для дальнейшего повышения точности селенодезических координат объектов (в систематическом и случайном отношении) в применяемом нами алгоритме [4] необходимо учесть нарушения условия ортогональности перехода из одной системы координат в другую. Учитывая это, а также то обстоятельство, что с 1981 года парк ЭВМ ВЦ КТУ полностью обновился за счет установки ЭВМ серии ЕС, было сочтено необходимым разработать взамен [5] новый пакет программ на языке Фортран для определения координат объектов на поверхности Луны по снимкам с космических аппаратов. Программы пригодны для определения координат объектов на поверхности любых планет при наличии измерений на лимбовых фотографиях опорных и "искомых" объектов, измерительных марок, а также не -
скольких десятков краевых точек.

В работе рассматриваются изменения, внесенные в вычислительный алгоритм [4], и дается описание программ.

Вычислительный алгоритм

Опишем кратко алгоритм, изложенный в [3, 4], он состоит из двух частей:

- а) определение селенографических координат объектов (в предположении, что все объекты находятся на сфере) по одиночным лимбовым фотографиям Луны;
- б) определение селенодезических координат объектов (с учетом "стереоэффекта") при совместном использовании всех фотографий.

Назначение первой части алгоритма — получение селенографических прямоугольных (ξ, ρ, ζ) и сферических (λ, β) координат лунных объектов. Для решения этой задачи устанавливается связь между каталожными и мгновенными координатами опорных объектов в виде

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \rho \\ \zeta \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}, \quad (I)$$

где M — матрица ориентации; U, V, W — каталожные координаты центра системы XYZ . Решение системы (I) производится с учетом поправок за нарушение условий ортогональности (из-за ошибок элементов ξ, ρ, ζ и X, Y, Z):

$$M^T M = I, \quad \det M = +1. \quad (2)$$

Практически задача сводится к решению системы (I) совместно с условиями (2). При этом (2) должны выполняться точно, а уравнения (I) — оптимально.

В основе второй части алгоритма лежит алгоритм метода наименьших квадратов (МНК) для избыточной системы нелинейных алгебраических уравнений. Система нелинейных уравнений решается методом Ньютона, что обеспечивает быструю сходимость итерационного процесса при хорошем начальном приближении. В качестве начального приближения используются результаты обработки одиночных снимков.

Описание программ

В соответствии с выше-сказанным, вычислительный алгоритм также делится на две части: СК I и СК 2. Алгоритм и программа СК I (селенографические координаты) предназначены для обра-

ботки одиночных фотографий, алгоритм и программа СК 2 (селенод-
зические координаты) применяются для совместной вычислительной
обработки фотографий с учетом стереоэффекта. Принципиальным от-
личием описываемого алгоритма СК I от ранее использованного ал-
горитма [5] является наличие в первом блоке ортогонализации,
в котором реализуется совместное решение систем (1) и (2). Кроме
того, для решения избыточных систем линейных алгебраических
уравнений в программе СК I предусмотрено обращение к одной из
процедур регрессивного анализа, записанной на диске. Такое об-
ращение позволяет экономить память ЭВМ, так как организация про-
цедуры МНК в программе СК I становится излишней.

При наличии серии снимков по СК I производится обработка от-
дельно каждого снимка с последовательным накоплением результа-
тов на магнитном диске; данные с диска (после обработки всех
снимков по СК I) затем используются в качестве исходных данных
при работе СК 2. Основными результатами СК 2 являются прямоуголь-
ные и сферические координаты объектов (с оценкой точности) в
двух вариантах: с обычным усреднением координат одноименных обь-
ектов на разных снимках и вариант с учетом "стереоэффекта".

Программы СК I и СК 2 написаны на языке Фортран IV и работа-
ют в ОС ЕС (версия MVT 6.1) на ЕС ЭВМ 1022 с объемом памяти
512 килобайт. Все вычисления идут с удвоенной точностью. Комплект
внешних устройств-стандартный.

Программа СК I включает набор стандартных подпрограмм:
DCORRE, *DARRAY*, *DORDER*, *DMINV*, *DMULTR*, *DMXOUT*,
а также специальные подпрограммы *ORT* и *ELBAK*, которые, в
свою очередь, обращаются к подпрограммам IIII *DMPRD*, *DMSUB*,
DMATA, *ONSTR*, *DEIGEN*, *LOC*.

Подпрограмма *DCORRE* вычисляет средние, стандартные отклоне-
ния, суммы взаимных произведений отклонений от среднего и коэф-
фициенты корреляции по входным данным.

Подпрограмма *DARRAY* преобразует размерность матрицы.

Подпрограмма *DMINV* обращает матрицу коэффициентов корреля-
ции, вычисленных в *CORRE* стандартным методом Гаусса-Жордана.

Подпрограмма *DORDER* используется для выбора зависимых пере-
менных и подмножества независимых из всего множества переменных.

Подпрограмма *DMULTR* выполняет регрессивный анализ для зави-
симой переменной и множестве независимых переменных.

Подпрограмма *DMXOUT* осуществляет вывод матриц на АППУ.

Подпрограмма *DMPRD* используется для вычисления произведе-
ния матриц.

Подпрограмма *DMSUB* производит вычитание матриц.

Подпрограмма *DMATA* находит произведение прямой матрицы и матрицы, транспонированной к ней. Результат — симметричная матрица.

Подпрограмма *DMSTR* преобразует вид памяти при внутреннем (машинном) представлении матриц.

Подпрограмма *DEIGEN* определяет собственные числа и собственные векторы матриц.

Подпрограмма *LOC* находит индекс элемента матрицы при специальном внутреннем представлении матриц.

Подпрограммы *ORT* и *ELBAK* вычисляют ортогональную матрицу коэффициентов перехода, свободные члены и их стандартные ошибки.

Описание вводимых параметров программы СК I:

$X0, Y0$ — измеренные координаты главного креста;

F — фокусное расстояние объектива фотоаппарата, установленного на КА (в мм); R — радиус Луны (в км);

$N1$ — количество крестов на пластине ($N1_{max} = 17$);

$N2$ — количество опорных точек ($N2_{max} = 116$);

$N3$ — количество искоемых точек ($N3_{max} = 774$);

$X[1:N1], Y[1:N1]$ — измеренные прямоугольные координаты крестов;

$XC[1:N1], YC[1:N1]$ — стандартные координаты крестов на прижимном стекле фотоаппарата;

$X2[1:N2], Y2[1:N2]$ — измеренные прямоугольные координаты опорных точек;

$KSI[1:N2], ETA[1:N2], DZETA[1:N2]$ — стандартные (каталожные) координаты опорных объектов;

$KK[1:60], YK[1:60]$ — измеренные прямоугольные координаты крайних точек.

Из выводимых параметров описания требуют:

$B1[1:2]$ — вектор коэффициентов регрессии;

$ANS[1:10]$ — вектор, содержащий следующую информацию:

$ANS[1]$ — свободный член,

$ANS[2]$ — коэффициент множественной корреляции R ,

$ANS[3]$ — стандартная ошибка оценки R ,

$ANS[4]$ — регрессионная сумма квадратов $SSAR$,

$ANS[5]$ — число степеней свободы (K),

$ANS[6]$ — среднее квадратическое $SSAR$,

$ANS[7]$ — сумма квадратов отклонений от регрессии ($SSDR$),

$ANS[8]$ — число степеней свободы ($n - K - 1$),

$ANS[9]$ — среднее квадратическое $SSDR$,

$ANS[10]$ — значение F ;

$SB[1:2]$ — вектор стандартных отклонений коэффициентов регрессии;

RE - радиус изображения Луны, в км;

GR1 - угол направления наклона главного луча фотоаппарата, в радианах;

GR3 - угол наклона, в радианах;

KSI3, *ETA3*, *DZETA3* - прямоугольные координаты объектов в системе опорного каталога;

H - радиус-вектор точки;

H1 - высота объекта над сферой среднего радиуса, в км;

LAM1, *BETA* - сферические координаты объекта.

На магнитном диске организуется файл прямого доступа, в который записываются следующие результаты счета:

N2, *N3* - границы массивов, описанные выше;

3 - угол смещения;

X3, *Y3* - прямоугольные координаты на плоскости;

KSI3, *ETA3*, *DZETA3* - стандартные прямоугольные координаты;

ANK(1), *ANE(1)*, *ANS(1)* - поправки за смещение центров;

A(1:3, 1:3) - матрица перехода.

Программа СК 1 состоит из 515 операторов. Время обработки одной фотопластинки не более двух минут. Объем памяти, требуемый для выполнения одного шага программы, равен 220 К.

Программа СК 2 включает набор стандартных подпрограмм: *DMINV*, *DARRAY*, *DMPRD*. Назначение подпрограмм приводилось выше.

При работе программы СК 2 основная исходная информация воспринимается с магнитного диска.

Описание вводимых параметров:

R - радиус Луны, в км;

IR2 - (*N* + 9), где *N* - количество фотопластинок, записанных на диске;

IR3 - количество обрабатываемых объектов;

G - допустимая величина отклонения при отождествлении координат объекта на снимках;

X0(1:3) - первое приближение координат искомого объекта.

Описание выводимых параметров при простом усреднении результатов СК 1 по разным снимкам:

G1(1:3) - средние арифметические селенодезических координат объекта;

G2(1:3) - оценка точности координат;

G3(1:3) - сферические координаты α , λ , β , где *M* - количество снимков, на которых обнаружен объект;

64 [1:3] - средние арифметические сферических координат;

65 [1:3] - оценка точности сферических координат;

66 - селенографическая долгота, равная ($\lambda + 360^\circ$).

Описание выводимых параметров при учете "стереоэффекта":

YQ [1:3, 1:M] - координаты отождествленного объекта на разных снимках;

X, Y, Z - прямоугольные координаты объекта;

CX2 [1:3] - оценка точности координат;

CX1 [1:3, 1:3] - ковариационная матрица;

SS, LAMBO = (SS + 350), BETA - сферические координаты объекта;

N - радиус-вектор;

H1 - высота над сферой среднего радиуса;

SIGH - оценка точности определения высоты;

SIGL, SIGB - оценка точности сферических координат.

Программа СК 2 состоит из 334 операторов. Объем памяти, требуемый на шаге выполнения, равен 110 К. Время обработки одного объекта около 3,75 мин. Программа СК 2 рассчитана на работу с количеством снимков не более 20, в противном случае необходимо делать изменения в операторе.

Контрольные результаты

Проверка эффективности нового алгоритма (с блоком ортогонализации) выполнена на материалах измерений одиночных снимков с АМС серии "Зонд". Если применение алгоритма [5] (без учета ортогональности) приводит к разбросу высот объектов в интервале ± 9 км, то описанный в данной работе алгоритм СК I обеспечивает разброс ± 1 км, что соответствует действительному разбросу высот объектов, принимаемых при вычислении мгновенных координат X, Y, Z, лежащих на сфере.

Наиболее важным результатом по эффективности блока ортогонализации следует считать систематическое уменьшение высот объектов на обратной стороне Луны, определяемых по программе СК 2. Ранее объекты в зоне, близкой к краю изображения Луны, имели высоты порядка 9-11 км. В таблице для иллюстрации приведены координаты трех объектов с оценкой точности без и с учетом нарушения условий ортогональности. В первом столбце даются порядковые номера точек; во втором, третьем и четвертом - прямоугольные координаты ξ , ρ , z со средними квадратическими ошибками; в пятом, шестом и седьмом соответственно приводятся долгота λ , широта β

и высота h над сферой среднего радиуса 1738,1 км с оценками точности. Прямоугольные координаты даются в долях среднего лунного радиуса, равного 1738,1 км; долгота и широта — в градусах и долях градуса; высота — в километрах.

Координаты трех объектов
с оценкой точности

№ п/п	Прямоугольные координаты с оценкой точности			Сферические координаты с оценкой точности		
	ξ	η	ζ	λ	β	h
I. —,81002 200	—,26138 46	—,53447 67	—123 ⁰ ,41 9	—15 ⁰ ,07 3	+ 8,8 2,6	
I. —,80380 158	—,26250 35	—,53450 45	—123,63 6	—15,22 3	+ 0,6 2,1	
2. —,82684 198	—,13598 44	—,55738 68	—123,98 9	—7,77 2	+ 11,1 2,5	
2. —,82140 176	—,13770 38	—,55700 49	—124,14 7	—7,90 2	+ 3,4 2,4	
3. —,74186 191	—,40038 47	—,54586 60	—126,34 9	—23,49 3	+ 7,5 2,4	
3. —,73330 212	—,40220 47	—,54580 54	—126,66 9	—23,75 6	— 2,2 2,7	

Поступила в редакцию
в октябре 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Большаков В.Д., Краснопевцев Б.В., Краснопевцева Б.В., Константинова Н.И., Лаврова Н.П., Федорук Г.Ф. Фотографические эксперименты на автоматических межпланетных станциях "Зонд-6, 7, 8". — В кн.: —Атлас обратной стороны Луны, часть III, —М.:Наука, 1975, с. 20 — 51.
2. Эммен Я.Л., Красиков В.И., Родионов Б.Н. Селеноцентрическая система координат на восточный сектор обратной стороны Луны. — В кн.: —Атлас обратной стороны Луны, часть III, —М.:Наука, 1975, с. 52 — 58.
3. Валуев С.Г. Методика гипсометрической обработки фотографий Луны, доставленных КА "Зонд-8". — Известия Астрономической Энгельс-

- гардтовской обсерватории, 1978, № 44, с. 166-170.
4. Валеев С.Г. Селенография и селенодезия по снимкам с космических аппаратов серии "Зонд". - В кн.: Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1979, вып. 7, с.36-40.
 5. Валеев С.Г., Шандаков Ю.Д., Шамарин М.Г. Определение селенографических и селенодезических координат лунных объектов по снимкам Луны с космических аппаратов.- Инф. бюлл. ВНИЦЕНТРА "Алгоритмы и программы", М.,1980, №6(38), с.22.
 6. Валеев С.Г. Селенографические координаты объектов на обратной стороне Луны.- Кемерово, 1980.-35 с. - Рукопись представлена Кемеровским ун-том. Деп. в ВИНТИ 29 апреля 1980, №1750-80.

О ПРЕДВЫЧИСЛЕНИИ ОБСТОЯТЕЛЬСТВ
ВИДИМОСТИ СОЛНЕЧНЫХ ЗАТМЕНИЙ С
ПОМОЩЬЮ ЭВМ

Д.Д.Положенцев

В настоящее время общепринятым в практике предвычисления обстоятельств видимости солнечных затмений является использование метода последовательных приближений для решения основного уравнения теории Бесселя. Этот метод был разработан академиком А.А. Михайловым [1] и в значительной степени облегчил трудоемкую работу по проведению предвычислений. С появлением ЭВМ появилась возможность полностью отказаться от ручных вычислений, предоставив проведение всей работы вычислительной технике.

В качестве основы алгоритма как у нас в стране [2, 3], так и за рубежом [4, 5] метод последовательных приближений был принят без каких-либо изменений или дополнений. Этот классический подход к решению проблемы с помощью ЭВМ можно представить в виде схемы, изображенной на рис. I.

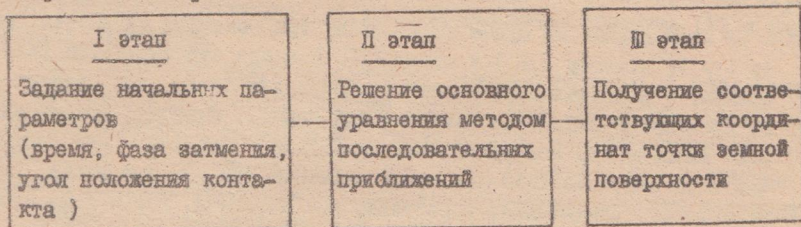


Рис. I

При этом, как правило, основным аргументом является время (T), а в результате вычислений мы получаем координаты точки земной поверхности, где затмение будет наблюдаться при соответствующем условии (например, граница частного затмения в горизонте, центральная линия полной фазы затмения, изохроны начала затмения и т.д.).

С точки зрения ручных вычислений (для которых и был разработан метод последовательных приближений), такой подход полностью себя оправдывает, учитывая, что для облегчения выполнения II и III этапов (рис. I) составлены многочленные вспомогательные таблицы [1].

Что касается постановки задачи на ЭВМ, то в данном случае лишь III этап можно считать универсальным (за исключением вычисления обстоятельств видимости затмения в горизонте, когда необходим учет рефракции). Он используется без изменений при вычислении любых

обстоятельств видимости затмения. Вычисление же II этапа сопряжено с использованием каждый раз нового набора формул для каждого нового условия, задаваемого на I этапе. Это создает не только значительные трудности при программировании, но и препятствует внесению дальнейших изменений и улучшений в уже имеющиеся программы.

Существенно облегчить решение данного вопроса при постановке задачи на ЭВМ можно, воспользовавшись следующим подходом: использовать в качестве основы алгоритма способ вычисления обстоятельств видимости затмения для заданного места. Тогда в целом предлагаемый подход можно представить схемой, изображенной на рис. 2.

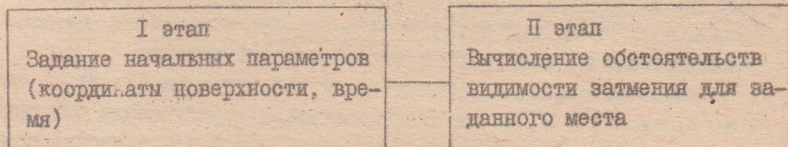


Рис. 2

В этом случае мы будем иметь сразу три основных аргумента: широту (φ), долготу (λ) и время (T). Изменяя эти параметры (для координат — в пределах видимости затмения для Земли, для времени — на промежутке видимости затмения для Земли), возможно проведение всех вычислений, используя лишь один "набор формул" — для предвычисления обстоятельств видимости затмения для данного места. Благодаря этому, значительно упростятся как алгоритм, так и сама программа.

Реализация предлагаемого подхода на практике может быть осуществлена следующим путем. Прежде всего вычисляются бесселевы элементы затмения ($x, y, z, d, u_s, u_l, \mu$). При этом отпадает необходимость вычисления вспомогательных величин, используемых методом последовательных приближений (s, S, e, E). Полученные данные будут составлять исходную информацию для дальнейших вычислений и могут быть вычислены заранее.

Далее, за первый основной параметр принимается одна из координат точек земной поверхности. Учитывая, что конус тени или полутени во время затмения пересекает Землю с запада на восток, удобнее всего в качестве первого параметра использовать долготу (λ_i). Это будет внешний цикл в программе. Вторым параметром, определяющим первый внутренний цикл программы, будет широта (φ_i), а третьим — время T.

В результате мы получим информацию о затмении, сгруппированную

Предложенный подход обладает следующими положительными особенностями:

1. Все вычисления производятся на основании одного и того же алгоритма (предвычисление обстоятельств видимости затмения для заданного места).

2. Получение информации в виде функции от географических координат места облегчает построение карт затмений.

3. Этот же алгоритм применим для получения данных в случае обработки результатов наблюдений, когда обычно проводят переэчисление обстоятельств видимости затмения для точно определенных координат места наблюдения.

4. Сохраняется требуемая точность вычислений. Так, например, в таблице приводится сравнение данных для центральной линии полосы полной фазы солнечного затмения 31 июля 1981 года, полученных на основе предлагаемого подхода (рис. 1) численным способом (рис. 2), где T — продолжительность полной фазы затмения в точке, определяемой моментом времени (T), P — угол положения контакта от полюса, A и B — дифференциальные коэффициенты для перехода к соседнему пункту наблюдения.

Сравнение данных для центральной линии полосы полной фазы солнечного затмения

T	π		P		A		B	
	1	2	1	2	1	2	1	2
2 30 ^m	78,6	78,6	94,39	94,46	1,44	1,48	0,37	0,36
2 31	80,2	80,4	94,50	94,50	1,44	1,48	0,40	0,40
2 32	81,8	81,6	94,63	94,62	1,44	1,48	0,40	0,40
2 33	83,4	83,4	94,75	94,74	1,44	1,48	0,47	0,46
2 34	84,8	84,6	94,88	94,86	1,44	1,48	0,50	0,50
2 35	86,3	86,4	95,00	94,98	1,43	1,47	0,53	0,53
2 40	92,9	93,0	95,62	95,59	1,43	1,47	0,68	0,67
2 45	98,8	99,0	96,12	96,08	1,33	1,36	0,78	0,78
2 50	103,0	103,2	96,75	96,73	1,32	1,35	0,90	0,90
2 55	108,6	108,6	97,51	97,51	1,07	1,09	1,02	1,02

Поступила в редакцию
в сентябре 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Михайлов А.А. Теория затмений.-М.:Гостехиздат,1954.- 272 с.
2. Румянцева Л.И. Предвычисление солнечных затмений на электрической машине БЭСМ-2.-Бюл. ИТА,АН СССР,1967, т.11,№2,с.136-144.
3. Румянцева Л.И. Предвычисление солнечных затмений на ЭВМ БЭСМ-4.- В кн.:Алгоритмы небесной механики. Материалы математического обеспечения на ЭВМ. Л. : ИТА,АН СССР, 1975,вып.3.- 26 с.
4. Neuge J., Grosjean C. and Vandeleem W. Canon of Solar Eclipses. - Oxford: Pergamon Press, 1966. - 749 p.
5. Explanatory Supplement to the astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac. - London, 1961, p. 211-257.

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА
РАЗЛОЖЕНИЯ РЕЛЬЕФА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАНЕТЫ В РЯДЫ
ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

С. Г. Валеев, М. Г. Шамарин, В. А. Еськова

Введение

Знание разложения уравнения поверхности небесного тела в ряд по сферическим функциям может привести к интересным выводам о форме его поверхности, поле тяготения, физических условиях на поверхности планеты и т.п. Построение такого разложения возможно в том случае, если из наблюдений известны с достаточной точностью абсолютные высоты и угловые координаты большого числа точек на его поверхности. Такие исследования интенсивно проводятся для Земли.

Из других планет наиболее изучаемым объектом в настоящее время является Луна. До недавнего времени только 59% её поверхности было покрыто базисными (опорными) точками, заданными по наземным наблюдениям. Поэтому для представления фигуры Луны сферическими функциями приходилось делать допущения в отношении её обратной стороны. В противном случае возникла неустойчивость коэффициентов, соответствующих гармоникам различных порядков [1].

Предполагая симметрию рельефа на видимой и обратной сторонах, Гудас получил разложение, которое, может быть, и удовлетворительно описывало рельеф видимой стороны Луны, но не имело ничего общего с рельефом её обратной стороны. Со времени первого разложения рельефа сведения о нём уточнились: были созданы сводные каталоги, высоты были приведены к центру масс Луны и т.д. Что же касается основного недостатка — ограниченности знания абсолютных высот для обратной стороны, то он стал постепенно устраняться с применением космических методов.

Накопившиеся сведения о высотах Луны позволили получить более надежные разложения рельефа в ряд по сферическим функциям. В работе Б. Билса и А. Феррари [2] было использовано 5800 лазерных альтиметрических измерений, 1400 фотографий по программе "Апполон" и 3300 измерений высот по фотографиям, полученным с Земли.

Разложение рельефа Луны на основе современных данных было проведено также Н. А. Чуйковой [3]. Особенно интересным было привлечение данных, полученных на материалах с АМС "Зонд-6" и "Зонд-8" [4], которые не учитывались в предыдущем разложении [1].

В настоящее время в Кемеровском университете завершается создание селенодезитического каталога на западное полушарие обратной стороны Луны [5], в котором используется большее число снимков и содержится большее число объектов, чем в [4]. Поэтому намечено провести новое разложение рельефа лунной поверхности, при котором будет использована почти глобальная гипсометрическая информация по Луне.

Для решения поставленной задачи авторами настоящей статьи разработан алгоритм разложения рельефа поверхности планеты в ряды по сферическим функциям и составлена программа на языке ФОРТРАН. Особенностью алгоритма является привлечение множественного регрессивного анализа для оценки степени вклада каждой сферической гармоники разложения n -го порядка и оценки степени адекватности разложения наблюдениям по статистическим критериям для принятых условий значимости.

В работе дается описание вычислительного алгоритма и программы разложения рельефа по сферическим функциям. Указанная программа может быть использована для построения разложения рельефа поверхности любой планеты.

Вычислительный алгоритм

Для разложения используется известный алгоритм, применяемый Гудасом [1]. Пусть λ, β, r — полярные координаты точки на поверхности Луны, где λ и β — селеноцентрические долгота и широта, r — радиус-вектор. Для последнего параметра можно записать

$$r = r_0 + h, \quad (1)$$

где r_0 — средний радиус Луны. Представим h с помощью полинома в и присоединенных функций Лежандра по аргументам λ и β в виде

$$h(\lambda, \beta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (T_{ij} \cos j\lambda + T'_{ij} \sin j\lambda) T_{ij}, \quad (2)$$

где T_{ij} — обобщенная форма полиномов и присоединенных функций Лежандра, причем каждое T_{ij} может быть получено из рекуррентного соотношения

$$(i+1) T_{i+1,j} = (2i+1)(\mu T_{ij} + \nu T_{i,j-1}) - i T_{i-1,j}, \quad (3)$$

где $\mu = \sin \beta$; $\nu = \cos \beta$.

Для определения коэффициентов сферических гармоник J_{ij} и J'_{ij} при знании координат ряда точек, распределенных по всей поверхности по возможности равномерно, необходимо решить избыточную систему линейных уравнений (2) одним из методов оценивания, например, методом наименьших квадратов.

Нам [6,7] было предложено сводить решение задачи аппроксимации наблюдений сферическими функциями к решению задачи множественной регрессии. В этом случае коэффициенты регрессии (коэффициенты аппроксимирующего полинома) подбираются на ЭВМ одним из методов выбора "наилучшей регрессии". Подобранная "оптимальная" модель (разложение), включая в себя только существенные по вкладу сферические гармоники при заданном уровне значимости, обеспечивает минимальную ошибку "прогноза". Идея применения регрессионного анализа при разложении по сферическим функциям реализована в ниже описываемой программе.

Алгоритм построения разложения по сферическим функциям методом регрессионного анализа

Примем для определенности обычно используемый порядок разложения $n=8$. Тогда система уравнений (2) путем простого преобразования может быть приведена к матричному виду

$$AJ = Y, \quad (4)$$

где J - вектор оцениваемых параметров, включающий J_{ij} , J'_{ij} и имеющий размерность (81×1) ; A - матрица коэффициентов при неизвестных размерности $(K \times 81)$, K - число уравнений; Y - вектор высот $h_k(\lambda, \beta)$, $k=1, K$. Описываемая программа обеспечивает вычисление элементов матрицы A и оценивание элементов вектора J по алгоритму регрессионного анализа.

Программа, реализующая этот алгоритм, написана на языке Фортран IV и работает в ОС ЕС (версия MVT 6.1) на ЕС ЭВМ IO22 с объемом памяти 512 K. Комплект внешних устройств - стандартный.

Программа состоит из основной программы, пяти подпрограмм (NAN , DI , $HINNA$, $DATA$, $STOUT$) и включает набор стандартных подпрограмм: ($ORRE$, $MINV$, $MSTR$, $STPRB$) [8].

В основной программе подсчитываются коэффициенты регрессионной матрицы A .

Подпрограмма NAN вычисляет значения коэффициентов T_{ij} по заданному рекуррентному соотношению.

В подпрограмме *D1* происходит расширение матрицы *A* размерности ($K \times 81$) до матрицы *W* размерности ($K \times 82$) за счет присоединения вектор - столбца *Y* - зависимых переменных; матрица *W* затем записывается на файл.

Подпрограмма *HINNA* реализует один из регрессионных методов выбора наилучшей регрессии - метод включения. Из этой подпрограммы делается обращение к двум другим: *DATA* и *STOUT*. *DATA* производит считывание с файла, *STOUT* - вывод на печать полученных результатов.

Подпрограмма *CORRE* вычисляет средние стандартные отклонения, суммы взаимных произведений отклонений от среднего и коэффициенты корреляции по входным данным.

Подпрограмма *MINV* обращает матрицу коэффициентов корреляции, вычисленных в *CORRE*, стандартным методом Гаусса-Жордана.

Подпрограмма *MSTR* производит перераспределение памяти при внутреннем (машинном) представлении матриц.

Подпрограмма *STPRB* [8] обеспечивает основные результаты регрессионного анализа.

Описание основных вводимых параметров программы:

BL - параметр λ в (2);

B - параметр β в (2);

Y - высота h в (2);

E² - число наблюдений;

NK - число переменных вместе с зависимой;

PCT - константа ограничения ввода переменных в регрессию;

Из выводимых параметров описания требуют:

ANS[1] - сумма квадратов;

ANS[5] - сумма квадратов для зависимой переменной;

ANS[6] - коэффициент множественной корреляции;

ANS[8] - стандартные ошибки оценки;

ANS[9] - свободный член уравнения (J_{00});

ANS[10] - уточненный коэффициент корреляции;

ANS[11] - уточненная стандартная ошибка оценки;

B[1:80] - частные коэффициенты регрессии;

L - номера независимых переменных в уравнении;

S[1:80] - стандартные ошибки частного коэффициента корреляции;

T - T - значения [7].

Программа состоит из 81 оператора. Объем памяти, требуемый для выполнения шага программы, равен $250 K$. Программа рассчитана на число регрессоров (независимых переменных), не превышающее

81 переменную, поэтому в случае превышения этого количества нужно сделать в операторе *DIMENSION* соответствующие изменения. Проверке подлежат также и управляющие перфокарты.

Время трансляции и счета для контрольной задачи составляет 5 минут.

Описание результатов

Для отладки программы использованы λ , β и h для 220 точек, снятых с гипсометрической карты всей поверхности Луны [3]. В таблице приведены коэффициенты зональных гармоник с их ср. кв. ошибками, полученные по указанным данным, в сравнении с аналогичными результатами Гудаса [1] по 364 точкам каталога Шрутки-Рехтенштамма [9].

Коэффициенты зональных гармоник

Гипсометрическая карта Н.А. Чуйковой	Каталог Шрутки-Рехтенштамма
$J_{00} = -0,40 \pm 0,49$	$J_{00} = -0,55 \pm 0,87$
$J_{40} = -1,02 \pm 0,06$	$J_{40} = -0,45 \pm 0,13$
$J_{20} = -0,84 \pm 0,10$	$J_{20} = -0,10 \pm 0,59$
$J_{30} = -0,48 \pm 0,10$	$J_{30} = -0,36 \pm 0,04$
$J_{40} = 0,34 \pm 0,12$	$J_{40} = 1,37 \pm 0,29$
$J_{50} = 0,36 \pm 0,14$	$J_{50} = -0,15 \pm 0,01$
$J_{60} = -0,08 \pm 0,14$	$J_{60} = -0,02 \pm 0,21$
$J_{70} = 0,39 \pm 0,16$	$J_{70} = -0,88 \pm 0,04$
$J_{80} = 0,08 \pm 0,17$	$J_{80} = -0,99 \pm 0,21$

В целом результаты по всем сферическим гармоникам (зональным, секториальным и тессеральным) сравнимы друг с другом. Точность разложения по данным, снятым с гипсометрической карты, в общем выше, чем в разложении Гудаса, несмотря на меньшее число использованных объектов. Видимо, это объясняется меньшим разбросом высот, снятых с гипсометрической карты.

Поступила в редакцию
в октябре 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Гудас К. Разложение рельефа Луны по сферическим функциям. - В кн.: Фигура Луны и проблемы лунной топографии. - М.: Наука, 1968, с.184-211.

2. Bills B., Ferrari A. A harmonic analysis of lunar topography. - Icarus, 1977, vol. 31, N 2, p. 244-259.

3. Чуйкова Н.А. Геометрическая фигура Луны, представленная в виде разложения по сферическим и выборочным функциям. - Астрон. журн., 1975, т. 52, № 6, с. 1279-1292.

4. Зиман Я.Л., Красиков В.А., Родионов Б.Н. Селеноцентрическая система координат за восточный сектор обратной стороны Луны. - В кн.: Атлас обратной стороны Луны, ч. III. - М.: Наука, 1973, с. 52-58.

5. Валеев С.Г. Селенография и селенодезия по снимкам с космических аппаратов серии "Зонд" - В кн.: Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1979, вып. 7, с. 36-40.

6. Валеев С.Г. О применении метода множественной регрессии в астрометрии. - В кн.: Задачи современной астрометрии в создании инерциальной системы координат. - Ташкент: ФАН, 1981, с. 125-129.

7. Дрейнер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. - М.: Статистика, 1973. - 430 с.

8. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. - Минск: ИМ АН БССР, 1973, вып. 2. - 272 с.

9. Schrutka-Rechtenstamm G. Sitzber. Oesterr. Akad. Wiss., Math. - Naturw. Kl., Abt. II, 1958, B. 71, N 1-4. - 167 S.

УДК 521.182

Итоги всесоюзного эксперимента по исследованию эффективности алгоритмов и программ численного интегрирования уравнений движения небесных тел. Б о р д о в и ц ы н а Т. В.-Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып.12, с. 1-17.

Обсуждаются первые итоги всесоюзного эксперимента по исследованию эффективности алгоритмов и программ численного интегрирования уравнений движения небесных тел. Излагаются задачи эксперимента, дается оценка точности эталонного движения и рассматриваются полученные в процессе эксперимента результаты.

Библ. 6, табл. 6, ил. 8.

УДК 629.783: 523.31 : 521.182

Оценка сравнительной эффективности численных алгоритмов построения спутниковых траекторий. С у р и н Ю.В., К у ж е л е в С.В.-Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып.12, с.18-26.

Оценивается вычислительная эффективность алгоритмов численного прогнозирования возмущенных спутниковых орбит. Критерием эффективности служит число вычислений правых частей дифференциальных уравнений движения на заданной орбитальной дуге при обеспечении заданной точности численного интегрирования. Рассматриваются различные комбинации дифференциальных уравнений (в прямоугольных координатах, кеплеровых и регулярных элементах) и численных методов их решения (Булирша-Штера, Эверхарта, Рунге-Кутты-Фельберга, Адамса). По данным машинных экспериментов и в соответствии с выбранным критерием определены наиболее эффективные алгоритмы.

Библ. 8, табл. 2, ил. 3.

УДК 629.783 : 523.31 : 521.182

О точности и быстродействии вычисления орбит ИСЗ с помощью численного интегрирования. С о р о к и н Н.А.-Астрономия и гео-

дезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып.12, с.27-36.

Автором дается обзор исследований, проводимых им, по выявлению наиболее эффективного метода численного интегрирования и алгоритма вычисления правых частей дифференциальных уравнений движения искусственных спутников Земли. Приводятся результаты исследований на примере учета влияния геопотенциала и л заменяющей его модели точечных масс, Лунч, Солнца и торможения атмосферы.

Библ. Ю, табл. I, ил. 7.

УДК 521.1 : 523.6

Численные методы и регуляризирующие преобразования в задаче прогнозирования движения кометы Галлея. Ш е ф е р В.А.-Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып. 12, с.37-42.

Даны сравнительные характеристики ряда вычислительных алгоритмов на примере прогнозирования движения кометы Галлея с учетом возмущений от девяти планет.

Библ. 3, табл. 2, ил. 2.

УДК 629.783 : 523.31 : 521.182

Модифицированные методы многооборотного интегрирования. Реализация и применение. Ф е д я е в Ю. А.-Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып.12, с.43-53.

Обсуждаются результаты применения модифицированных методов многооборотного интегрирования в задачах прогнозирования движения ИСЗ типа "Навстар". Предлагается способ определения частот в периодической части функции изменения орбитальных элементов от оборота к обороту.

Библ. 8, табл. 2, ил. 5.

УДК 521.1 : 523.6

Равномерная аппроксимация в задачах небесной механики и чис-

ленное интегрирование уравнений движения кометы Галлея. Х о т и - м с к а я Е. З.-Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып.12, с.54-58.

Проводится сравнение эффективности равномерной полиномиальной и равномерной рациональной аппроксимаций относительных координат в задаче двух тел для орбит с различными значениями эксцентриситетов. Построенные равномерные полиномиальные аппроксимации прямоугольных координат больших планет используются для численного интегрирования уравнений движения кометы Галлея.

Библ. 5, ил. ..

УДК 629.783 : 523 : 31 : 521.4

Рекуррентный алгоритм преобразования сферических гармоник при координатных вращениях. Ч а р к о в с к и й Н. А.-Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып 12, с.59-67.

С помощью аппарата обобщенных сферических функций осуществляется преобразование полностью нормированных гармонических коэффициентов гравитационного поля при координатных вращениях. Для вычисления обобщенных сферических функций построен рекуррентный алгоритм. В результате преобразования получаются также полностью нормированные гармонические коэффициенты в новой системе координат.

Библ. 4.


УДК 629.783 : 523.31

Полуаналитическая методика расчета движения ИСЗ типа "Навстар" в эйлеровых элементах. Б о р о н е н к о Т. С., М о с к о в к и - н а Л. А., Т а м а р о в В. А., Ш м и д т Ю. Б.-Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып.12, с.68-72.

Метод преобразования Ли применяется для построения приближенной полуаналитической методики расчета движения ИСЗ типа "Навстар", основанной на симметричной промежуточной орбите обобщенной задачи двух неподвижных центров. Получены рабочие формулы алгоритма, учитывающего лунно-солнечные возмущения данной промежуточной орбиты, и выполнены предварительные оценки его точности и быстродействия.

Библ. 7.

Аналитический способ вычисления приближенных интегралов орбиты ИСЗ и изохронных производных. Б о в ш и н Н. А. - Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып.12, с.73-79.

Получены аналитические выражения для изохронных производных в кеплеровых элементах орбиты. Выражения учитывают как вековые, так и периодические возмущения от экваториального сжатия. Наибольшие отброшенные члены имеют порядок eC_{20} , C_{20}^2 . С указанной точностью полученные выражения справедливы практически для любых интервалов времени.

Библ. 1.

УДК 521.1 / 3

Эволюция элементов орбит внешних планет на интервале времени 800 тысяч лет. С у х о т и н А. А. - Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып.12, с.80-91.

Исследование эволюции элементов орбит внешних планет выполнено методом Альфана-Горячева, модифицированным с учетом введения переменных Лагранжа. Приводится сравнение полученных результатов с результатами численного интегрирования уравнений движения этих планет на один миллион лет, выполненного Коэном, Хаббардом и Бостервинтером.

Библ. 4, ил. 16.

УДК 521.182

Численное исследование эффективности некоторых регуляризирующих преобразований при вычислении орбит с большими эксцентриситетами. Ш е ф е р В. А., К а р д а ш А. В. - Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып.12, с.92-94.

На примере вычисления высокоэллиптической орбиты методом Эверхарта одиннадцатого порядка проведено сравнение трех алгоритмов, использующих регуляризированные уравнения движения в формах Кус-

таанхеймо-Штифеля, Шперлинга-Бурде и Мячина.

Библ. 4, табл. I.

УДК 521.3 : 629.78

Об эффективности применения итерационных методов при улучшении параметров орбит. Черницов А. М., Краев С. С. - Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып. 12, с.95-104.

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с использованием новых итерационных схем при решении задач улучшения начальных параметров орбит небесных тел. Получены исходные системы дифференциальных и нелинейных уравнений, позволяющие построить алгоритмы, не уступающие по своим характеристикам методу Гаусса и его демпфированному варианту. Сравнение свойств методов производится на основе решения ряда модельных задач.

Библ. 5, табл. 4, ил. I.

УДК 521.9

Банк астрономических данных на основе СЕДАН для ЕС-ЭВМ.

Кандаурова К. А., Положенцев Д. Д. (ст.), Степанова Е. А. - Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып. 12, с.105-106.

Дано описание развития принципов построения банка астрономических данных (БАД) с использованием систем управления данными СЕДАН. Уточнен состав трех классов астрономических данных, входящих в БАД.

Библ. 2.

УДК 521.98

О вычислении некоторых данных астрономического ежегодника на ЕС-ЭВМ. Гусева И. С., Кияева О. В., Положенцев Д. Д. (ст.), Степанова Е. А., Ягудин Л. И. - Астро-

номия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып. 12, с. 107-109.

Составлен пакет подпрограмм для ЕС-ЭВМ по вычислению видимых мест звезд, Миланского периода, рефракции, нутации и др. данных астрономического ежегодника.

Библ. 3.

УДК 523.46 - 87 - 325 : 519.681. 3.06

Пакет программ для исследования движения внешних спутников планет. Бикова Л. Е., Шихалев В. В., Юрта В. А. - Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып. 12, с. 110-114.

Составлен пакет программ, предназначенный для исследования движения внешних спутников планет численными методами. Пакет состоит из набора каталогов данных и программных модулей, позволяющих решать задачи численного интегрирования уравнений движения, сравнения теории с наблюдениями и уточнения начальных параметров движения спутников. Программы написаны для ЭВМ БЭСМ-6 на языке Фортран в системе "ДУБНА".

Библ. 9, табл. I, ил. I.

УДК 523.4 : 519.681. 3.06

Пакет программ для определения координат объектов на поверхности планет по снимкам с космических аппаратов. Валеев С. Г., Шамарин М. Г. - Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып. 12, с. 115-122.

Описываются программы определения селенографических и селенодезических координат лунных объектов по измерениям снимков, полученных с борта АМС. Программы написаны на языке Фортран и могут быть использованы для решения планетодезических задач при наличии на лимбовых фотографиях планеты опорных объектов и измерительных марок.

Библ. 6,

О предвычислении обстоятельств видимости солнечных затмений с помощью ЭВМ. Положенцев Д. Д. — Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып. 12, с. 123-127.

Рассматривается новый подход к предвычислению обстоятельств видимости солнечных затмений с помощью ЕС ЭВМ. Приводится сравнение с классическим методом на примере данных для полного солнечного затмения 31 июля 1981 года.

Библ. 5, табл. 1, ил. 3.

УДК 523.4 : 519.681. 3.06

Программная реализация метода разложения рельефа поверхности планеты в ряды по сферическим функциям. Валеев С. Г., Шамарин М. Г., Еськова В. А. — Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, вып. 12, с. 128-133.

Рассматривается программная реализация метода разложения рельефа Луны в ряд по сферическим функциям с применением регрессионного анализа. Программа написана на языке Фортран и может быть использована для разложения рельефа любой планеты.

Библ. 9.

The results of the All-Union experiment on the investigation of efficiency of algorithms and programs of numerical integration of equations of celestial body motion. B o r d o v i t s y - n a T.V. Astronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12, p.5-17.

The first results of the All-Union experiment on investigation of efficiency of algorithms and programs of numerical integration of equations of the motion of celestial bodies are discussed. The tasks of the experiment are stated and the estimate of the precision of standard motion is given and the results obtained in the process of the experiment are considered.

Bibl. 6. Tab. 8, ill. 3.

Comparable Efficiency Estimation of Numerical Algorithms of Satellites Trajectories Prediction. S u r n i n Y.V., K u - z h e l e v S.V. Astronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12, p.18-26

The computational efficiency of numerical prediction algorithms of the perturbed satellite orbits is estimated. The number of computations of the right-hand members of differential equations of motion over the assigned orbital arc with ensuring the assigned accuracy of numerical integration is taken as the efficiency criterion. Various combinations of differential equations (in rectangular coordinates, in Kepler's and regular elements) and numerical methods of their solutions (Bulirsch-Stoer, Everhart, Runge-Kutta-Fehlberg and Adams) are considered. On the basis of the computer-generated data and in accordance with the taken criterion the most efficient algorithms have been chosen.

Bibl. 8, ill. 3, tab. 2.

On the accuracy and computer speed of the artificial satellite orbit calculation by means of the numerical integration. S o r o k i n N.A. Astronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12, p.27-36.

The author gives the review of investigations carried out by him with the aim of finding the most efficient method of numeri-

cal integration and the Algorithm of Computing the right-hand members of differential equations of the artificial satellite motion. The results of investigations, obtained for the case, when the influences of the geopotential (or the equivalent point mass model) of the Moon, the Sun and the atmosphere drag are taken into account, are given.

Bibl. 12, tab. 1, ill. 4.

Numerical methods and regularizing transformations in the problem of predicting the Halley's comet motion. S h e f e r V.A. Astronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12. p.37-42.

The comparative characteristics of a series of computational algorithms on the example of predicting the Halley's comet motion are given with perturbations due to nine planets being taken into account.

Bibl. 3, tab. 2, ill. 2.

Modified methods of multirevolutionary integration. Realization and application. F e d y a e v Yu.A. Astronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12, p.43-53.

The results of application of modified methods of multirevolutionary integration to the problems of orbit prediction of the motion of artificial Earth satellites of the NAVSTAR type are discussed. The method of calculation of frequencies in periodic terms of the function, which shows the dependence of orbital elements on revolution number is provided.

Bibl. 8, tab. 2, ill. 5.

Uniform approximation in problems of celestial mechanics and numerical integration of equations of motion of Halley's comet. K h o t i m s k a y a E.Z. Astronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12, p.54-58.

Comparison of effectiveness of uniform polynomial and uniform rational approximations of rectangular coordinates in the two body problem for orbits with variations values of eccentricities is carried out. The constructed uniform polinomial approximations of rectangular coordinates of major planets are used for

numerical integration of equations of motion of Halley's comet.
Bibl. 5, ill. 6.

Recursive algorithm of transformation of spherical harmonics in coordinate rotations. S h a r k o v s k y N.A. Astronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12, p.59-67.

A transformation of completely normalized harmonic coefficients of the gravitational field in coordinate rotations is carried out with the help of the method of generalized spherical functions. A recursive algorithm has been worked out for computation of generalized spherical functions. As a result of the transformation completely normalized harmonic coefficients are obtained in a new system of coordinates.

Bibl. 4.

Semianalytic method of computing the motion of artificial satellites of NAVSTAR type in Euler's elements. B o r o n e n k o T.S., M o s k o v k i n a L.A., T a m a r o v V.A., S h m i d t Yu.B. Astronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12. p.68-72.

The Lie transformation method based on a symmetric intermediate orbit of the generalized problem of two fixed centres is applied to the construction of the approximate semianalytic method of computing the motion of artificial satellites of NAVSTAR type. The formulas of the algorithm taking into account the Sun's and Moon's perturbations of the given intermediate orbit are obtained and preliminary evaluations of its accuracy and high speed are made.

Bibl. 7.

Analytical method of computing approximate integrals of the orbit of artificial satellites and isochronous derivatives. B o v s h i n N.A. Astronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12, p.73-79.

Analytical expressions for isochronous derivatives in the Keplerian elements of the orbit have been obtained. The expressions take into account both secular and periodic perturbations

due to the equatorial oblateness. The greatest discarded members are of the order ϵC_{20} , O_{20}^2 . The said accuracy of the formulas obtained holds practically for any time intervals.

Bibl. 1.

Evolution of orbit elements of the outer planets in the time interval of 800 000 years. S u k h o t i n A.A. Astronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12, p.80-91.

The investigation of the evolution of orbital elements of the outer planets has been carried out by the Halphen-Goriachev method modified with taking into account the introduction of Lagrange variables. The comparison of the results obtained with those of the numerical integration performed by Cohen, Hubbard and Oesterwinter for the period of one million years is made.

Bibl. 4, ill. 16.

Numerical investigation of the efficiency of some regularizing transformations in computing orbits with great eccentricity. S h e f e r V.A., K a r d a s h A.V. Astronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12, p.92-94.

The comparison of three algorithms using the regularized equations of motion in the forms of Kustaanheimo-Stiefel, Sperling-Burdet and Myachin is made on the basis of computing a high-elliptic orbit by the Everhart method of the eleventh order.

Bibl. 4, tab. 1.

On the efficiency of iteration methods in the orbit parameter estimation. C h e r n i t s o v A.M., K r a e v S.S. Astronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12. p.85-104.

The problems discussed in this paper are related to the use of the new iteration schemes in solving the problems of improving initial parameters of the orbits of celestial bodies. Initial systems of differential and nonlinear equations are obtained. They enable to construct algorithms which are not inferior in their characteristics to the Gaussian method and its

damped variant. Comparison of the properties of the methods is made on the basis of solving model problems.

Bibl. 5, tab. 4, ill. I.

Astronomical data bank based on CEDAN for EC computer. K a n - d a u r o v a K.A., P o l o z h e n t s e v D.D., S t e p a n o - v a E.A. Astronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12, p.105-106.

The description of developing the principles of the construction of astronomical data bank (BAD) with the use of the data based control system CEDAN is given. The composition of three classes of astrometric data involved in BAD was specified more precisely.

Bibl. 2.

On computation of some data of the Astronomical Annual by EC computer. G u s e v a I.S., K i y a e v a O.V., P o l o z h e n - t s e v D.D., S t e p a n o v a E.A., J a g u d i n L.I. As- tronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12, p.107-109.

The package of subroutines for EC computer on calculation of visible locations of stars of Julian period, refraction, nutation and other data of the Astronomical Annual has been developed.

Bibl. 3.

Application Package for Investigation of Motion of Outer Pla- netary Satellites. B y k o v a L.E., S h i k h a l e v V.V., Y u r g a V.A. Astronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12, p.110-114.

Application package designed for investigation of motion of outer planetary satellites by numerical methods has been deve- loped. The package consists of data sets and of programming mo- dules that make it possible to solve the problems of numerical integration of the equations of motion, of comparison of a theory with observations and of giving more precise initial parameters of the motion of satellites. The programs have been coded in the FORTRAN language of the DUBNA monitor system on a BESM-6 compu-

ter.

Bibl. 9, tab. 1, ill. I.

The package of programs for determining the coordinates of objects on the surface of planets on the basis of the photos from the space apparatuses. V a l e y e v S.G., S h a m a r i n M.G. Astronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12. p.115-122.

The programs of determining selenographical and selenodesic coordinates of the Moon objects on the basis of measuring the pictures obtained on the board of automatical interplanet stations AMG are described. The programs are written in the FORTRAN language and may be used for solving planetodesic problems if basic objects and measuring marks are available on the limb pictures of the planet.

Bibl. 6.

On prediction of visibility conditions of solar eclipses by means of EC computer. P o l o z h e n t s e v D.D. Astronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12, p.123-127.

A new approach to the prediction of visibility conditions of solar eclipses by means of EC computer is considered. Comparison with the classical method on the basis of the example of the data for the total solar eclipse on July 31, 1981 is made.

Bibl. 5, tab. 1, ill. 3.

Programmed realization of the method of developing into series the planet surface relief in spherical functions. V a l e e v S.G. S h a m a r i n M.G., E s k o v a V.A. Astronomy and Geodesy. Tomsk: State University, 1984, N 12, p.128-133

The programmed realization of the method of expansion in series of the Moon surface in spherical functions with the application of regression analysis is considered. The program is written in the FORTRAN language and may be used for representing the relief of any planet.

Bibl. 9.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Т.В. Б о р д о в и ц н а . Итоги всесоюзного эксперимента по исследованию эффективности алгоритмов и программы численного интегрирования уравнений движения небесных тел.....	5
Ю.В. С у р н и н , С.В. К у ж е л е в . Оценка сравнительной эффективности численных алгоритмов построения спутниковых траекторий.....	18
Н.А. С о р о к и н . О точности и быстродействии вычисления орбит ИСЗ с помощью численного интегрирования.....	27
В.А. Ш е ф е р . Численные методы и регуляризирующие преобразования в задаче прогнозирования движения кометы Галлея.....	37
Ю.А. Ф е д я е в . Модифицированные методы многооборотного интегрирования. Реализация и применение.....	43
Е.З. Х о т и м с к а я . Равномерная аппроксимация в задачах небесной механики и численное интегрирование уравнений движения кометы Галлея.....	54
Н.А. Ш а р к о в с к и й . Рекуррентный алгоритм преобразования сферических гармоник при координатных вращениях....	59
Т.С. Б о р о н е н к о , Л.А. М о с к о в к и н а , В.А. Т а м а р о в , Ю.Б. Ш м и д т . Полуаналитическая методика расчета движения ИСЗ типа "Навстар" в эйлеровых элементах.....	68
Н.А. Б о в ш и н . Аналитический способ вычисления приближенных интегралов орбиты ИСЗ и изохронных производных.....	73
А.А. С у х о т и н . Эволюция элементов орбит внешних планет на интервале времени 800 тысяч лет.....	80
В.А. Ш е ф е р , А.В. К а р д а ш . Численное исследование эффективности некоторых регуляризирующих преобразований при вычислении орбит с большими эксцентриситетами..	92
А.М. Ч е р н и ц о в , С.С. К р а е в . Об эффективности применения итерационных методов при улучшении параметров орбит.....	95
К.А. К а н д а у р о в а , Д.Д. П о л о ж е н ц е в (ст.), Е.А. С т е п а н о в а . Банк астрономических данных на основе СЕЛАН для ЕС-ЭВМ.....	105
И.С. Г у с е в а , О.В. К и я е в а , Д.Д. П о л о ж е н ц е в	

(ст.), Е.А. Степанова, Л.И. Ягудин. О вычислении некоторых данных астрономического ежегодника на ЕС-ЭВМ.....	107
Л.Е. Бнкова, В.В. Шихалев, В.А. Юрга. Пакет программ для исследования движения внешних спутников планет.....	110
С.Г. Валеев, М.Г. Шамарин. Пакет программ для определения координат объектов на поверхности планет по снимкам с космических аппаратов.....	115
Д.Д. Положенцев. О предвычислении обстоятельств видимости солнечных затмений с помощью ЭВМ	123
С.Г. Валеев, М.Г. Шамарин, В.А. Еськова. Программная реализация метода разложения рельефа поверхности планеты в ряды по сферическим функциям.....	128
Рефераты на опубликованные статьи.....	134

CONTENTS

T.V. B o r d o v i t s y n a. The results of the All-Union experiment on the investigation of efficiency of algorithms and programs of numerical integration of equations of celestial body motion.....	5
Y.V. S u r n i n, S.V. K u z h e l e v. Comparable Efficiency Estimation of Numerical Algorithms of Satellites Trajectories Prediction.....	18
N.A. S o r o k i n. On the accuracy and computer speed of the artificial satellite orbit calculation by means of the numerical integration.....	27
V.A. S h e f e r. Numerical methods and regularizing transformations in the problem of predicting the Halley's comet motion.....	37
Y.A. F e d y a e v. Modified methods of multirevolutionary integration. Realization and application.....	43
E.Z. K h o t i m s k a y a. Uniform approximation in celestial mechanics and numerical integration of equations of motion of Halley's comet.....	54
N.A. S h a r k o v s k y. Recursive algorithm of transformation of spherical harmonics in coordinate rotations.....	59
T.S. B o r o n e n k o, L.A. M o s k o v k i n a, V.A. T a m a r o v, Y.B. S h m i d t. Semianalytic method of computing the motion of artificial satellites of NAVSTAR type in Euler's elements.....	68
N.A. B o v s h i n. Analytical method of computing approximate integrals of the orbit of artificial satellites and isochronous derivatives.....	73
A.A. S u k h o t i n. Evolution of orbit elements of the outer planets in the time interval of 800 000 years.....	80
V.A. S h e f e r, A.V. K a r d a s h. Numerical investigation of the efficiency of some regularizing transformations in computing orbits with great eccentricity.....	92
A.M. C h e r n - t s o v, S.S. K r a e v. On the efficiency of iteration methods in the orbit parameter estimation.....	95
K.A. K a n d a u r o v a, D.L. P o l o z h e n t s e v, E.A. S + e p a n o v a. Astronomical data bank based on CEDAN for EC computer.....	105

I.S. Guseva, O.V. Kiyayeva, D.D. Polozhentsev, E.A. Stepanova, L.I. Jagudin. On computation of some data of the Astronomical Annual by EC computer.....	107
L.E. Bykova, V.V. Shikhalev, V.A. Yurga. Application Package for Investigation of Motion of Outer Planetary Satellites.....	110
S.G. Valeev, M.G. Shamarin. The package of programs for determining the coordinates of objects on the surface of planets on the basis of the photos from the space apparatuses.....	115
D.D. Polozhentsev. On prediction of visibility conditions of solar eclipses by means of EC computer.....	123
S.G. Valeev, M.G. Shamarin, V.A. Eskova. Programmed realization of the method of developing into series the planet surface relief in spherical functions..	128
Abstracts of the published articles.....	134

АСТРОНОМИЯ И ГЕОДЕЗИЯ

Выпуск 12

Редактор Л. И. Дюканова

ИБ 1311. Подписано к печати 26.04.84. КЗ 05117. Формат 60x84 1/16.
Бумага типографская №3. Оперативный способ печати. Усл. печ. л. 8,8.
Уч. изд. л. 9,5. Тираж 500 экз. Заказ 147. Цена 1р. 30к.

Издательство ТГУ. 34029. Томск, ул. Никитина, 4.
Региональная Межвузовская типография ОмПИ, Омск, пр. Мира, 11.