На правах рукописи

Шипуля Михаил Алексеевич

Асимптотики однопетлевого эффективного действия квантовых полей с эллипсоидальным законом дисперсии

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск 2011

Работа выполнена на кафедре квантовой теории поля Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования “Национальный исследовательский Томский государственный университет”

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор Семён Леонидович Ляхович кандидат физико-математических наук, доцент Пётр Олегович Казинский
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Владимир Александрович Бордовицын; кандидат физико-математических наук, доцент Александр Леонидович Лисок.
Ведущая организация:	ФГАОУ ВПО “Казанский (Приволжский) федеральный университет”

Защита состоится 23 декабря 2011 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.267.07 в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования “Национальный исследовательский Томский государственный университет” по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан 22 ноября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета — И.В. Ивонин
доктор физ.-мат. наук, профессор

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

На сегодняшний день существует лишь ограниченный круг задач квантовой теории поля, для которых известен точный ответ в явном виде. Основная масса вычислений, связанных с исследованием квантовых систем, проводится, так, или иначе, с применением разнообразных асимптотических методов. Все эти методы связаны с различного рода приближениями, которые возможно применить при определенных предположениях относительно исследуемой системы. При этом, как правило, оказывается, что ответ, полученный при одних значениях параметров, перестает удовлетворительно аппроксимировать решение в другой области. В результате этого применение какого-то одного из конкретных методов вычислений не позволяет исследовать систему в другом режиме и требует развития существующих асимптотических методов.

Именно такая ситуация и наблюдается сейчас в литературе относительно квантовой теории поля при конечной температуре: большинство вычислений проводятся в рамках теории возмущений, связанной с квазиклассическим приближением. Этот метод, по сути, является ВКБ-асимптотикой. Он оказывается очень эффективным при исследовании систем с самодействием и нелинейным взаимодействием. С помощью этого метода в том случае, когда точное решение задачи найти не представляется возможным, удается выделить основной вклад, и, в дальнейшем, проводить вычисления по теории возмущений, основываясь на малом отклонении от главных "квазиклассических" значений физических величин. При исследовании систем с конечным числом степеней свободы в качестве малого параметра для теории возмущений можно выбрать отклонение траектории частиц от их классических значений. Как известно, квазиклассические волновые функции сосредоточены вблизи классической траектории частиц и, кроме того, минимизируют принцип неопределенности Гейзенберга. Благодаря этим свойствам квазиклассических асимптотик в диссертационной работе удалось с любой требуемой точностью аппроксимировать решение системы зацепляющихся нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Гросса-Питаевского (ГП). Данное уравнение описывает динамику полей системы двухкомпонентного бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК), состоящего из атомов одного сорта, находящихся в различных квантовых состояниях во внешнем удерживающем поле. Его решение в рамках квазиклассического приближения сводится к решению квазиклассически-ассоциированного линейного уравнения Шрёдингера, что существенно упрощает построение дальнейшей теории возмущения.

Однако, при всех своих преимуществах, ВКБ-асимптотика, к сожалению, также имеет и ряд слабых сторон. Метод "теплового ядра" развит, в основном, для систем с релятивистским законом дисперсии и предполагает степенное поведение асимптотического ряда для вычисляемых физических величин, а, следовательно, не может учитывать возможные экспоненциально подавленные вклады. В физике конденсированного состояния вещества классический пример таких вкладов – осцилляции физических величин, таких как, например, химический потенциал или магнитная восприимчивость электронов проводимости в металлах. В данном случае ВКБ-метод не может учитывать экспоненциально подавленные вклады по следующей причине: как известно, спектр дискретно изменяется при изменении квантовых чисел, характеризующих состояние квантовых систем. Квазиклассическая асимптотика предполагает, что данное изменение настолько незначительно, что при вычислении средних значений, по найденным квантовым состояниям, дискретное суммирование по всем существующим конфигурациям возможно заменить на непрерывное интегрирование. В результате этого данный метод, применительно к квантовой теории поля при конечной температуре, не способен учитывать *существенно квантовые* эффекты, *экспоненциально подавленные* уже в низкотемпературном больцмановском пределе. Исходя из этого представляется важным развитие методов исследования асимптотик физических величин за пределами квазиклассического приближения.

При непертурбативном исследовании динамики квантовых систем также может быть использован метод, так называемых, эффективных уравнений движения – уравнений, полученных в результате самосогласованной процедуры решения системы уравнений для различных полей системы. В качестве примера, в диссертационной работе, при исследовании динамики заряженных частиц, рассмотрено эффективное уравнение Лоренца-Дирака (ЛД), которое позволяет учитывать радиационные эффекты, возникающие в результате взаимодействия частицы с полем, создаваемым ей при движении. Поскольку ЛД уравнение нелинейно, представляет большую сложность найти его решения даже при простейших конфигурациях внешних полей. В данной работе была решена проблема нахождения физических решений уравнения ЛД в постоянном однородном электромагнитном поле. В полях такой конфигурации удается свести уравнение ЛД к одному дифференциальному уравнению второго порядка, что позволило получить асимптотики физических решений. Данные асимптотики позволяют получить непертурбативное выражение для амплитуды перехода электронов в рассматриваемой конфигурации полей.

Цели диссертационной работы

Исходя из вышесказанного, для данной работы были сформулированы следующие цели:

1. Развитие асимптотических методов вычисления эффективного действия квантовых полей с учетом однопетлевых поправок при конечной температуре.

2. Развитие методов исследования эффективной динамики квантовых систем с самодействием и нелинейным взаимодействием, подчиненных нетривиальным граничным условиям.

Для достижения этих целей в работе рассматриваются следующие задачи:

1. Вычисление ведущих квазиклассических вкладов, а также существенно квантовых, экспоненциально подавленных поправок в эффективное действие квантовых полей с эллипсоидальным законом дисперсии. Нахождение их асимптотик при высоких и низких температурах.

2. Нахождение асимптотического решения нелинейных уравнений, возникающих в квантовой теории поля, а именно: эффективного уравнения движения заряженных Ферми-частиц во внешнем поле, а также квантовомеханического уравнения, описывающего конденсацию Бозе-частиц, находящихся во внешнем удерживающем поле.

Научная новизна работы

Все основные результаты диссертации (см. заключение автореферата) являются оригинальными и получены впервые.

Научная и практическая значимость работы

Проведенные исследования, во-первых, обобщают ранее известные результаты, полученные для систем с релятивистским законом дисперсии, на системы частиц, обладающих законом дисперсии с поверхностью постоянной энергии эллипсоидального вида. Это позволило найти асимптотическое поведение физических величин в высоко- и низкотемпературном пределах для таких систем.

Во-вторых, представленный в работе общий метод позволяет достаточно легко находить *существенно квантовые*, в том числе и экспоненциально подавленные, вклады в эффективное действие квантовых полей с эллипсоидальным законом дисперсии при конечной температуре, значения которых не могут быть вычислены в рамках метода теплового ядра.

Кроме того, в работе представлены результаты, которые могут послужить в качестве экспериментальной проверки классической теории излучения заряженных частиц, основанной на эффективном уравнении ЛД, а также позволяющие анализировать динамику переходов между квантовыми состояниями атомов в БЭК, находящемся во внешнем удерживающем поле.

Достоверность результатов

Достоверность результатов контролируется их внутренней согласованностью и совпадением в ряде частных случаев с известными опубликованными работами.

Защищаемые положения

На защиту выносятся:

1. Метод получения быстросходящихся асимптотик однопетлевого Ω-потенциала квантовых полей с эллипсоидальным законом дисперсии. Полученный с помощью данного метода явный вид выражения асимптотик термодинамических величин в однопетлевом приближении для электронов в металле и графене при конечной температуре и ненулевом химическом потенциале.

2. Явный вид выражения асимптотик физических решений уравнения Лоренца-Дирака в постоянном однородном электромагнитном поле. Соотношения для компонент импульса, стремящиеся к постоянному значению при большом собственном времени за счет реакции излучения.

3. Явный вид выражения квазиклассических спектральных серий двухкомпонентного нелокального уравнения Гросса-Питаевского во внешнем удерживающем поле.

Апробация работы и публикации

Основные результаты диссертационной работы докладывались на следующих международных конференциях: III-V Международных конференциях "Перспективы развития фундаментальных наук" (Томск, ТПУ 2007-2009 гг.); Российской летней школе-семинаре "Нелинейные поля и релятивистская статистика в теории гравитации и космологии" (Казань, 2010); Международной научной конференции "Progress In Electromagnetics Research Symposium" (Сучжоу, Китай, 2011); а также на научных семинарах кафедр теоретической физики и квантовой теории поля Томского государственного университета, кафедры высшей математики и математической физики Томского политехнического университета.

Результаты диссертации частично опубликованы в 5 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения, трех дополнений и списка цитируемой литературы. Материал изложен на 123 страницах, включает 15 рисунков и список литературы из 145 наименований. Текст диссертации набран в издательской системе LaTeX.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первый раздел содержит в себе изложение общего метода получения быстросходящегося асимптотического разложения Ω-потенциала квантовых полей с эллипсоидальным законом дисперсии.

Первый подраздел данного раздела состоит из введению в данную тему, а также обзора литературы по исследуемому вопросу.

Во втором подразделе вводится закон дисперсии квантовых полей специального вида, посредством которого в работе будут учитываться взаимодействие полей со внешней средой, самодействие, а также нетривиальные граничные условия:

$$\beta E(\mathbf{p}) = \omega(g^{ij}(p_i + a_i)(p_j + a_j) + m^2), \quad \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d, \tag{1}$$

где β – обратная температура, a_i и m^2 – некоторые положительные постоянные, матрица g_{ij} симметрична и положительно определена, d – параметр, характеризующий физическую размерность системы, а $\omega(x)$ – произвольная функция, возрастающая со своим аргументом. В данном подразделе приведена связь между эффективным действием квантовых полей при конечной температуре и Ω-потенциалом системы. Кроме того, здесь показано, что выражение для Ω-потенциала в случае Бозе-частиц может быть получено из выражения для Ферми-частиц путем смены общего знака выражения, а также переопределением безразмерного химического потенциала системы: $\mu_{Bose} = \mu_{Fermi} + i\pi$, поэтому в работе в дальнейшем проводятся вычисления общих выражений только для фермионного случая. Вычисление Ω-потенциала полей с законом дисперсии формы (1) проводится с помощью формулы Пуассона. Такое представление позволяет выделить квазиклассическую, Ω_0, и существенно квантовую часть, Ω_q, логарифма статистической суммы. Оба этих вклада, при значении физической размерности системы равной d, состоят из выражений, определяющих их в случае систем с меньшей физической размерностью $d-n$, где $n=\overline{0,d}$. В связи с этим, дальнейшие вычисления проводятся при произвольном параметре d, а матрица g_{ij} везде означает соответствующий блок исходной метрики.

В третьем подразделе показано, что существенно квантовая часть логарифма статистической суммы может быть представлена в виде: $\Omega_q = \Omega_{os} + \Omega_c$.

Осциллирующая экспоненциально подавленная часть существенно квантовых поправок в логарифм статистической суммы Ω_{os} дается выражением:

$$\beta\Omega_{os}^d = \pi\sqrt{g}\,\mathrm{Im}\sum_{\mathbf{q}} e^{2\pi i a_i q^i}\sum_k h^{(1)}_{d/2}(q,p_k), \tag{2}$$

где $g := \det g_{ij}$, $q := \sqrt{g_{ij}q^iq^j}$, а p_k являются корнями уравнения $\omega(p_k^2+m^2)=\mu+i\omega_k$, $k\in\mathbb{Z}$. Мацубаровские частоты обозначены через ω_k. Также, здесь введены обозначения для функции Бесселя: $z_\nu(q,p) := (p/q)^\nu\, Z_\nu(2\pi qp)$. Вклад Ω_c возникает от разреза закона дисперсии и имеет следующий вид:

$$\beta\Omega_c^d = \sqrt{g}\,\mathrm{Im}\sum_{\mathbf{q}} e^{2\pi i a_i q^i}\int\limits_{|s_c|}^{\infty} ds\left[\omega^+(s)k_{\frac{d}{2}-1}(q,\sqrt{s}) + \pi^{-1}\omega'^+(s)\tanh\varphi(s)k_{\frac{d}{2}}(q,\sqrt{s})\right]. \tag{3}$$

Здесь функция $\varphi(s) = (\omega^+(s)-\mu)/2$, $\omega^+(s) := \omega(m^2+i\epsilon-s)$, ϵ –бесконечно малая величина. Интегрирование в выражении (3) проводится вдоль контура, охватывающего точку ветвления закона дисперсии s_c.

В четвертом подразделе найдены значения параметров спектра, при которых вклады Ω_{os} являются экспоненциально подавленными. Показано, что если рассматриваемая модель включает также и античастицы, то вклад от разреза в Ω-потенциал будет представлен только казимировским членом (первый член в формуле (3)). Установлено, что при высоких температурах казимировский вклад точно сокращается аналогичным вкладом от вакуумных колебаний, изначально неучитываемых при вычислении Ω-потенциала.

В пятом подразделе подробно рассмотрен квазиклассический вклад Ω_0 в полный Ω-потенциал. Получено его представление в виде, аналогичном (3):

$$\beta\Omega_0^d = -\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(-\frac{d}{2}\right)\sqrt{g}\left[e^{-i\pi\frac{d}{2}}\sum_k p_k^d - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|s_c|}^{\infty} ds s^{\frac{d}{2}-1}\,\mathrm{Im}\left[d\omega^+(s)+s\omega'^+(s)\tanh\varphi(s)\right]\right], \tag{4}$$

где подразумевается аналитическое продолжение по параметру d.

В шестом подразделе анализируется эффективность полученного асимптотического разложения Ω-потенциала и находятся ограничения на параметры спектра, при которых разложение сходится быстро. Эти ограничения позволяют находить ту область в пространстве параметров системы, где осцилляции становятся существенными. Здесь также дана наглядная физическая интерпретация членам суммы осциллирующей части Ω_{os}.

В седьмом подразделе для того, чтобы расширить диапазон применимости полученного разложения, изучаются различные способы его пересуммирования. Данный подраздел разделен на три части, каждая из которых соответствует определенному случаю.

В первой части седьмого подраздела рассматривается случай, при котором полюса, соответствующие мацубаровским частотам ω_k, начиная с некоторого номера N сливаются, образуя разрез. В данной ситуации для улучшения свойств асимптотического разложения суммирование по полюсам p_k, $k > N$, проводится с использованием известной формулы Эйлера-Маклорена:

$$\beta\Omega^d_{os} \approx -\sqrt{g}\,\mathrm{Re}\sum_{\mathbf{q}} e^{2\pi i a_i q^i}\int_{p_N^2}^{\infty}\frac{ds}{\pi}\omega'(s+m^2)\partial_s h^{(1)}_{d/2+1}(q,\sqrt{s})+\cdots \tag{5}$$

Такой способ суммирования оказывается особенно эффективным в нерелятивистском случае, когда производная закона дисперсии постоянна $\omega'(s) = 1$.

Во второй части седьмого подраздела рассматривается ситуация, когда исходная многомерная задача эффективно сводится к одномерной. В этом случае становится возможным найти сумму по q в Ω_{os} в явном виде:

$$\beta\Omega^d_{os} \approx \sqrt{g}\frac{(-1)^{\frac{d+1}{4}}}{\pi}\sum_{k,n}\left(\frac{i}{4\pi}\right)^n\frac{p_k^{\frac{d-1}{2}-n}}{q_m^{\frac{d+1}{2}+n}}\frac{\Gamma((d+1)/2+n)}{n!\Gamma((d-1)/2-n)}\left[\mathrm{Li}_{\frac{d+1}{2}+n}(z_k^+)+\mathrm{Li}_{\frac{d+1}{2}+n}(z_k^-)\right], \tag{6}$$

где $z_k^{\pm} = e^{2\pi i(q_m p_k \pm a_m)}$, а $q_m = \min\{g_{ij}\}$ и a_m соответствует выделенному направлению метрики.

В третьей части седьмого подраздела рассмотрена ситуация, когда один, или несколько, полюсов расположены близко к вещественной оси. В данном подразделе разработана процедура пересуммирования Ω_{os} в случае, когда собственные значения диагональной метрики g_{ij} подчинены иерархии $\bar\lambda_1 \lll \bar\lambda_2 \lll \cdots \lll \bar\lambda_n$.

В восьмом подразделе исследуется квазиклассический вклад. Данный подраздел состоит из двух частей, в которых получены различные температурные асимптотики Ω_0.

В первой части восьмого подраздела получено асимптотическое представление:

$$\beta\Omega^d_0 = -\pi^{\frac{d}{2}}\sqrt{g}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^{\frac{d}{2}}\,\mathrm{Li}_{\frac{d}{2}+1+k}\left(-e^{-\bar\omega_0}\right),\ \ \lambda_k^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)}\lim_{s\to 0}\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{y'(s)}\frac{d}{ds}\right]^k\left[\frac{s}{y(s)}\right]^{\alpha}, \tag{7}$$

где $y(s) = \omega(s+m^2) - \bar\omega_0$, $\bar\omega_0 := \omega(m^2) - \mu$. Данное разложение хорошо работает в случае низких температур (нерелятивистский предел) при $\beta \to \infty$.

Во второй части восьмого подраздела получено высокотемпературное разложение Ω_0. Оно может быть представлено в явном виде только для строго заданного закона дисперсии. В данном подразделе рассмотрен закон дисперсии в виде однородной функции: $\omega = s^{1/\gamma}$. В этом случае высоктемпературное разложение для фермионов имеет вид:

$$\beta\Omega^d_0 = \pi^{d/2}\sqrt{g}\sum_{l=0}^{\infty}\Bigg[\sum_{k=0}^{\infty}(1-2^{l-\gamma(d/2-k)})\frac{(-m^2)^k\tilde\mu^l\beta^{\gamma(k-d/2)+l}}{k!l!\Gamma(d/2+1-k)}\Gamma(\gamma(d/2-k)+1)\zeta(\gamma(d/2-k)-l+1)+$$
$$+\gamma^{-1}m^d(1-2^{1+l})\zeta(-l)(\beta m^{2/\gamma})^{l+1}\sum_{k=0}^{l}\frac{\Gamma(-d/2-(k+1)/\gamma)}{\Gamma(1-(k+1)/\gamma)}\frac{(-1)^k z^{l-k}}{k!(l-k)!}\Bigg], \tag{8}$$

где $z = \tilde\mu m^{-2/\gamma}$ и $\tilde\mu$ – химический потенциал системы. В бозонном случае высокотемпературное разложение имеет вид:

$$\beta\Omega_0^d = \pi^{d/2}\sqrt{g}\sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-m^2)^k\tilde{\mu}^l\beta^{\gamma(k-d/2)+l}}{k!l!\Gamma(d/2+1-k)}\Gamma(\gamma(d/2-k)+1)\zeta(\gamma(d/2-k)-l+1)+\right.$$
$$\left.+\gamma^{-1}m^d(\beta m^{2/\gamma})^{l+1}\zeta(-l)\sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k z^{l-k}}{k!(l-k)!}\frac{\Gamma(-d/2-(k+1)/\gamma)}{\Gamma(1-(k+1)/\gamma)}\right]+\pi^{d/2}\sqrt{g}m^d\sigma_d^{-1}(z). \quad (9)$$

Здесь $\sigma_d^{-1}(z)$ сокращает полюса гамма-функций во вкладах в квадратных скобках. В данном подразделе проанализированы возможные случаи значений параметров γ и d, приводящих к возникновению логарифмических расходимостей $\sim \ln(\beta m^{2/\gamma})$ в высокотемпературном разложении.

Второй раздел посвящен исследованию асимптотик решений эффективного уравнения движения заряженных частиц во внешнем поле. В частности, здесь рассмотрены асимптотики физических решений уравнения Лоренца-Дирака во внешнем однородном электромагнитном поле.

Первый подраздел второго раздела посвящен введению в данную тему, а также обзору литературы по данному вопросу.

Во втором подразделе представлен вывод уравнения ЛД. Используя следующие обозначения: $x^\mu \to m^{-1}x^\mu$ – мировая линия заряженной частицы, $\tau \to m^{-1}\tau$ – собственное время, $F_{\mu\nu} \to m^2 e^{-1}F_{\mu\nu}$ – напряженность внешнего электромагнитного поля, а m – физическая масса частицы; уравнение ЛД записано как:

$$\dot{\upsilon}_\mu = f_\mu + \lambda(\ddot{\upsilon}_\mu + \dot{\upsilon}^2\upsilon_\mu), \qquad f_\mu := F_{\mu\nu}\upsilon^\nu, \quad (10)$$

где $\lambda = 2e^2/3$, e – заряд и $m\upsilon^\mu = m\dot{x}^\mu$ – 4-импульс частицы.

В третьем подразделе дано определение физических решений уравнения ЛД. Выписаны условия, выполнение которых гарантирует существование физических решений уравнения ЛД.

Четвертый подраздел разделен на две части и содержит краткое описание линейного движения и условия при котором движение заряженной частицы остается плоским.

В первой части четвертого подраздела показано, что для линейного движения уравнение ЛД (10) эквивалентно

$$\frac{\dot{\upsilon}}{\sqrt{1+\upsilon^2}} = \lambda\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{\upsilon}}{\sqrt{1+\upsilon^2}} + E \;\Rightarrow\; \upsilon(\tau) = \sinh(c_2 + E\tau + c_1 e^{\lambda^{-1}\tau}). \quad (11)$$

где $\upsilon(\tau) = \dot{x}(\tau)$, а E – напряженность внешнего электрического поля. Данное решение становится физическим при выборе $c_1 = 0$.

Во второй части рассматривается планарное движение. Приведены канонические формы тензора напряженностей электромагнитного поля, соответствующих ненулевому и нулевому значению Пуанкаре-инвариантов $I_1 = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ и $I_2 = 2(\mathbf{EH})$:

$$F^{\mu\nu} = \omega_1 e_0^{[\mu}e_1^{\nu]} + \omega_2 e_2^{[\mu}e_3^{\nu]}, \quad (e_\alpha e_\beta) = \eta_{\alpha\beta}, \quad \text{или,} \quad F^{\mu\nu} = \omega e_-^{[\mu}e_1^{\nu]}, \quad (e_a e_b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где $\omega_1^2 = (\sqrt{I_1^2 + I_2^2} + I_1)/2$, $\omega_2^2 = (\sqrt{I_1^2 + I_2^2} - I_1)/2$, ω –характеризует внешнее поле в вырожденном случае, а e_α^μ – тетрады собственных векторов тензора $(F^2)^\mu_\nu$. Показано, что если $I_2 = 0$ и тензор электромагнитного поля имеет вид (12) с постоянными собственными векторами e^μ_α, то заряженная частица, подчиняющаяся уравнению Лоренца-Дирака, должна двигаться в плоскости. В постоянном однородном электромагнитном поле данное утверждение имеет и обратную силу: если заряженная частица, подчиняющаяся уравнению Лоренца-Дирака движется в плоскости, то инвариант $I_2 = 0$.

В пятом подразделе найдены инварианты группы симметрии уравнения ЛД:

$$a = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\xi_\alpha \dot{\upsilon}_\beta \upsilon_\gamma, \quad u = p^2 - \xi^2. \tag{13}$$

где $p = \xi_\alpha \upsilon^\alpha$, $\xi^2 = \{\pm 1, 0\}$ – характеризует внешнее поле $f_{\alpha\beta} = \omega\varepsilon_{\alpha\gamma\beta}\xi^\gamma$ и $\upsilon^2 = 1$. С помощью данных инвариантов уравнения ЛД сводится к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$a'' = -\frac{[2au + \xi^2(a + \omega u)]a'}{2u(a - \omega u)(\xi^2 + u)} - \frac{2\lambda^2 a^2(\xi^2 + u)a'^3}{u(a - \omega u)^2}, \tag{14}$$

описывающее плоские решения уравнения ЛД.

Шестой подраздел посвящен исследованию асимптотик физических решений уравнения ЛД при больших собственных временах. Рассмотрены три основных конфигурации внешнего поля. В случае $\xi^2 = 1$ движение происходит в плоскости под действием внешнего однородного магнитного поля. Линеаризованное в окрестности физической стационарной точки решение уравнения на инварианты уравнения ЛД имеет вид $\bar{a} = \bar{a}_0 + \delta\bar{a}$, $u = u_0 + \delta u$:

$$\begin{aligned} &\delta u = u(0)e^{\frac{1-g}{\lambda}\tau}, \qquad A := \omega(g-1)/(g(5g-4)), \qquad B := 3(g-1)^2/(2\lambda(5g-4)), \\ &\delta\bar{a} = -u(0)Ae^{\frac{1-g}{\lambda}\tau} + e^{\frac{g}{\lambda}\tau}\left[(c_1 + u(0)A)\cos\left(2(\omega/g)\tau\right) + (c_2 + u(0)B)\sin\left(2(\omega/g)\tau\right)\right], \end{aligned} \tag{15}$$

где $\bar{a}_0 = \omega/g$, $u_0 = 0$, $a := u\bar{a}$, а $g := 2^{-1/2}\left(1 + \sqrt{1 + 16\lambda^2\omega^2}\right)^{1/2}$. Члены в скобках описывают расходящиеся решения. Случай $\xi^2 = -1$ соответствует движению в постоянном однородном электрическом поле. Решение линеаризованных уравнений имеет вид:

$$\delta\bar{a} = -\omega u(0)(1 - g^{-1})e^{\frac{1-g}{\lambda}\tau} + e^{\frac{\tau}{\lambda}}\left[c_1 + \omega u(0)(1 - g^{-1})\right], \quad \delta u = u(0)e^{\frac{1-g}{\lambda}\tau}, \tag{16}$$

где $\bar{a}_0 = \omega$, $u_0 = 1$, $B := (g-1)^2(2g+1)/(2\lambda g(2g-1))$, $g := \sqrt{1 + 4\lambda^2\omega^2}$. Нефизические решения описывают члены в квадратных скобках. В случае $\xi^2 = 0$, главная асимптотика физических решений в близи физической стационарной точки $\bar{a}_0 = 1$, $u_0 = 0$ имеет вид:

$$\bar{a} = 1 - \frac{1}{\tau}\left(\frac{2u(1)\tau^3}{e^5}\right)^{1/\tau}, \quad u = \frac{1}{2\tau}\left(2u(1)\tau^3\right)^{1/\tau}. \tag{17}$$

Здесь были введены новые обозначения $\bar{a} \to \omega\bar{a}$, $u \to (\lambda\omega)^{-2}u$, $\tau \to \lambda\tau$, а решение найдено в асимптотическом виде с точностью до $O(\tau^{-2})$. Также найдены асимптотики для компонент импульса частицы во внешнем поле с $\xi^2 = 0$:

$$\frac{\upsilon_0}{\upsilon_1^3} \approx -\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1^3} \approx \lambda\omega\left(\frac{\omega\upsilon_1^3(\lambda)\tau^2}{\lambda\upsilon_0(\lambda)}\right)^{-\lambda/\tau}, \qquad 2\lambda\omega p\upsilon_1 \approx \left(2p(\lambda)\upsilon_1(\lambda)\frac{\omega\tau^2}{\lambda}\right)^{\lambda/\tau}. \tag{18}$$

Данные соотношения при больших собственных временах становятся постоянными и перестают зависеть от начальных данных.

В седьмом подразделе рассмотрена аналогичная задача в контексте уравнения Ландау-Лифшица ЛЛ. Решения этого уравнения известны, например, для постоянного однородного магнитного поля, или для скрещивающихся полей, с нулевыми инвариантами. На их основе в данном подразделе анализируется траектория электронов, находящихся во внешнем поле с $\xi^2 = 0$. В данном подразделе показано, что соотношения (18) имеют указанные свойства только вследствие наличия радиационного члена в уравнении ЛД.

В восьмом подразделе исследуется стабильность найденных асимптотик решения уравнения ЛД в скрещенных полях с нулевыми инвариантами относительно флуктуаций внешнего поля. Найдены условия устойчивости этих асимптотик.

Третий раздел посвящен исследованию системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Гросса-Питаевского (ГП). Найдено асимптотическое решение двухкомпонентной системы уравнений с помощью квазиклассического ВКБ-метода.

Первый подраздел третьего раздела содержит обзор литературы и введение в данную проблематику.

Во втором подразделе приведена сокращенная запись уравнений ГП

$$\{-i\hbar\partial_t + \mathcal{H}_\varkappa(\Psi, t) + \mu\hbar\,(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H})\}\,\Psi(\mathbf{x}, t) = 0, \tag{19}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – матрицы Паули, вектор $\mu\mathbf{H}$ характеризует разность энергетических уровней, а также интенсивность переходов между компонентами системы, нелокальный оператор имеет вид

$$\mathcal{H}_\varkappa(\Psi, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3} k_n x_n^2 + \varkappa \int\limits_{R^3} \Psi^\dagger(\mathbf{y}, t) V e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{2\gamma^2}} \Psi(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \tag{20}$$

где $\Psi(\mathbf{x}, t) = (\Psi^1(\mathbf{x}, t), \Psi^2(\mathbf{x}, t))$ – двухкомпонентная волновая функция, $V = v_0\mathbb{E} + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\sigma})$, а m, γ_i, v_μ, k_i – постоянные. Показано, что решение уравнений ГП может быть найдено в виде: $\Psi(\mathbf{x}, t) = U(t)\Phi(\mathbf{x}, t)$, где спинор $U(t) = (u_1(t), u_2(t))^T$ подчиняется поляризационному уравнению Паули, а функция $\Phi(\mathbf{x}, t)$ – уравнению типа Хартри с гамильтонианом $\mathcal{H}_\varkappa(U(t)\Phi(\mathbf{x}, t))$. В данном подразделе для (19) поставлены следующие задачи: i) Спектральная задача в случае $\mu\hbar\mathbf{H} = (0, 0, \varepsilon) = const$; ii) Задача Коши с начальными условиями, выбранными в виде функции, характеризующей основное состояние системы в случае i). Задача Коши поставлена в случае нестационарных внешних полей вида a) $\mu\mathbf{H}(t) = (\mu B\cos\omega t, 0, 0)$ и b) $\mu\mathbf{H}(t) = (\omega\cos 2\omega t, 0, \omega)$. Также указаны начальные условия для $U(t)$ и $\Phi(\mathbf{x}, t)$, соответствующие поставленным задачам.

Третий подраздел содержит в себе решение поставленных задач для поляризационного уравнения Паули. Для соответствующих значений поля $\mathbf{H}$ они даются выражениями

$$i) U_\xi(t) = \frac{1}{2}\left(1-\xi, 1+\xi\right)^T e^{-\frac{i}{\hbar}\xi\varepsilon t}, \qquad ii) U_+(t, \lambda) = \left(\cos\left(\lambda\sin\left(\omega t\right)\right), -i\sin\left(\lambda\sin\left(\omega t\right)\right)\right)^T, \tag{21}$$

где $\xi = \pm 1$, $\lambda = \mu B/\omega$. В случае нестационарного поля b) решение удалось найти в численном виде. Показано, что решение уравнений ГП в предложенном виде сводится к решению уравнения типа Хартри с переопределенной константой взаимодействия $\varkappa_\xi(t) = \varkappa(v_0 + \xi(\boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{v}))$, где $\boldsymbol{\eta}(t) = U_\xi^\dagger(t)\boldsymbol{\sigma}U_\xi(t)$.

В четвертом подразделе приведен метод решения уравнения типа Хартри с переопределенной константой взаимодействия. Показано, что решение из класса траекторно сосредоточенных функций $\mathcal{P}_\hbar^t$ будет удовлетворять исходному уравнению с любой заданной степенью точности. Разложением в ряд по операторам $\Delta\mathbf{Z} = (\mathbf{z} - \mathbf{Z}(t, \Phi, \hbar))$, определяющим разность между значением оператора $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{p})$ и его средним значением $\mathbf{Z}(t, \Phi, \hbar)$, вычисленным по функциям из выбранного класса $\Phi(\mathbf{x}, t, \hbar)$, получено ассоциированное линейное уравнение Шрёдигера, соответствующее с точностью до $O(\hbar^{\frac{3}{2}})$ исходной нелинейной задаче

$$\left\{-i\hbar\partial_t + \mathcal{H}(t, \mathbf{C}) + \langle \mathcal{H}_z(t, \mathbf{C}), \Delta\mathbf{Z}(t, \mathbf{C})\rangle + \frac{1}{2}\langle \Delta\mathbf{Z}, (t, \mathbf{C}), \mathcal{H}_{zz}(t, \mathbf{C})\Delta\mathbf{Z}(t, \mathbf{C})\rangle \right\}\Phi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (22)$$

Здесь $\mathcal{H}(t, \mathbf{C})$, $\mathcal{H}_z(t, \mathbf{C})$, $\mathcal{H}_{zz}(t, \mathbf{C})$ – первые члены асимптотического разложения исходного нелинейного гамильтониана (20), а $\mathbf{Z}(t, \mathbf{C})$ – решение системы уравнений Гамильтона-Эренфеста

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{z} \rangle = \langle \partial_t \mathbf{z} \rangle + \frac{i}{\hbar}\left\langle \left[\mathcal{H}_{\varkappa_\xi}(\Phi, t), \mathbf{z}\right]_- \right\rangle, \quad (23)$$

определяющей динамику квантовых средних по начальным данным $\mathbf{C}$. Показано, что решение уравнения (22) связано, помимо (23), также и с решением ещё одной системы дифференциальных уравнений первого порядка. Обе эти системы в случае нестационарного внешнего поля a) и b) сводятся к уравнению Хилла.

Пятый подраздел содержит в себе метод нахождения асимптотического решения уравнения Хилла в случае потенциала специального вида

$$\ddot{\chi}(t) + V(t)\chi(t) = 0, \quad V(t) = \Omega^2(t, \lambda), \quad \lim_{\lambda \to 0} \Omega^2(t, \lambda) = \Omega_0^2 > 0 = const \quad (24)$$

Получено решение этого уравнения в рамках метода теории возмущений по параметру λ. Далее пятый подраздел разделен на две части. *В первой части* построены операторы симметрии ассоциированного уравнения Шредингера (22), необходимые для построения его полного набора решений по вакуумному решению. *Во второй части* данного подраздела приведены решения системы уравнений Гамильтона-Эренфеста, необходимые для построения вакуумного решения (22).

В шестом подразделе приводится явный вид решений задач, поставленных для уравнений ГП (19) во втором подразделе. Для случая стационарного поля i) получено:

$$\Psi_n(\mathbf{x}, t) = U_\xi(0)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\prod_{k=1}^{3}\mathcal{U}_{\nu_k}(\overline{x}_k), \; E_n = E_\xi + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left(\hbar\Omega_{\xi;k} - \varkappa_\xi\left(\gamma^{-2}\sigma^{\xi;0}_{x_k x_k}\right)\right)(2\nu_k + 1), \quad (25)$$

где $n = (\xi, \nu)$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, спинор $U_\xi(0)$ определяется выражением (21), "вырожденная" часть спектра $E_\xi = \xi\varepsilon + \varkappa_\xi$, $\overline{x}_k = x_k(2\sigma^{\xi;0}_{x_k x_k})^{-1/2}$ – безразмерные координаты, $\sigma^{\xi;\nu}_{x_k x_k} = \hbar/(2\Omega_{\xi;k}m)(2\nu+1)$ – дисперсия распределения, соответствующая состоянию (ξ, ν_k), $\Omega^2_{\xi;n} = (k_n - \varkappa_\xi\gamma^{-2})/m > 0$, а $\mathcal{U}_n(x/x_0) = H_n(x/x_0)e^{-\frac{1}{2}(x/x_0)^2}/\sqrt{2^n n!\sqrt{2\pi x_0}}$, – нормированная функция Эрмита. Решение задачи Коши для случая нестационарного поля a) имеет вид:

$$\Psi_\xi(\mathbf{x}, t, \lambda) = U_\xi(t, \lambda)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}S(\mathbf{x}, t, \lambda)\right]\prod_{k=1}^{3}A_{\xi;k}(\overline{x}_k, t, \lambda)\mathcal{U}_0(\overline{x}_k). \quad (26)$$

Явное выражение для параметров, характеризующих данное решение приведено в диссертации. В случае нестационарного поля вида b) решение найдено в численном виде. В данном подразделе приведены значения параметров $\varkappa_\xi$, γ, k_i, соответствующие вырождению спектра по квантовым числам ν_k, а также его минимизации. Исследованы свойства решения системы (23) и динамика квадрата модуля волновой функции.

Четвертый раздел диссертационной работы посвящен применению развитого в первом разделе общего метода для исследования конкретных физических моделей.

Первый подраздел четвертого раздела содержит в себе исследования безмассовых частиц с релятивистским законом дисперсии. Он разделен на две части: *в первой части* рассмотрена модель релятивистских безмассовых бозонов, обладающих нулевым химическим потенциалом, а *во второй части* рассмотрена модель безмассовых фермионов с ненулевым химическим потенциалом. Первый пример можно интерпретировать как газ фотонов, заключенных внутри куба конечного объема, а второй – как газ свободных электронов в кристалле графена. Для данных моделей с помощью разработанного в первом разделе метода найден логарифм статистической суммы, а также вычислены основные термодинамические величины, характеризующие систему.

Второй подраздел посвящен исследованию массивных заряженных частиц с нерелятивистским законом дисперсии. *В первой части* рассмотрен нерелятивистский газ электронов во внешнем поле накопителя. Динамика данной модели подробно была изложена во втором разделе диссертации. В данном подразделе получены выражения для термодинамических величин, совпадающие с известными при нерелятивистском пределе. *Во второй части* рассмотрен газ электронов проводимости в тонкой металлической пластинке. Найден период и амплитуда осцилляций физических величин с изменением размеров системы.

Основные результаты

В ходе работы над диссертацией были получены следующие основные результаты:

1. Разработан новый метод нахождения быстросходящегося асимптотического разложения однопетлевого Ω-потенциала квантовых полей с эллипсоидальным законом дисперсии (1), а именно, найдены явные выражения для вкладов трех различных типов: a) *квазиклассический вклад* Ω_0 (4). Для данного вклада найдены выражения, являющиеся обобщением известных формул для систем с релятивистским и нерелятивистским законом дисперсии, а также представление в виде *существенно квантовых* вкладов от полюсов закона дисперсии функции распределения. Также были вычислены выражения для низкотемпературной (7) и высокотемпературной (8), (9) асимптотик. Высокотемпературная асимптотика квазиклассического вклада, представленная в работе, является обобщением известного выражения для систем с релятивистским законом дисперсии на случай закона дисперсии в виде конечной суммы однородных функций; b) *вклад от разреза закона дисперсии* квантовых полей Ω_c (3). Показано, что данный вклад представляет собой одну из частей существенно квантовых неэкстенсивных поправок в статистическую сумму. Установлена связь Ω_c с казимировским вкладом в вакуумную энергию. Было показано, что он может быть вычислен с помощью высокотемпературной асимптотики Ω-потенциала фермионов; c) *осциллирующий* с изменением термодинамических параметров вклад в логарифм статистической суммы Ω_{os} (2), выражающий *экспоненциально подавленные* вклады

в статистическую сумму. Установлена зависимость данного вклада от вида закона дисперсии и значений параметров системы, при которых Ω_{os} может вносить существенные поправки в полный Ω-потенциал. Найдены условия применимости полученного асимптотического разложения для Ω_{os}. Разработаны способы пересуммирования полученного разложения при различных значениях параметров системы: i) полюса логарифма статистической суммы, соответствующие мацубаровским частотам, сливаются, образуя разрез (5); ii) задача эффективно сводится к одномерной, когда в системе существует выделенное направление (6); iii) полюса расположены достаточно близко к вещественной оси так, что их вклады в статистическую сумму перестают быть экспоненциально подавленными. Показано, что вклады всех трех видов для систем, имеющих физическую размерность равную d, выражаются через *неэкстенсивные* вклады соответствующих типов, для систем с меньшим количеством физических измерений $d-n$, $n=\overline{0,d}$.

2. Проведено исследование планарных физических решений уравнения Лоренца-Дирака в постоянном электромагнитном поле. Представлено решение уравнения ЛД в случае линейного движения (11). Показано, что при соответствующем виде тензора напряженности (12) внешнего поля заряженная частица, подчиняющаяся уравнению Лоренца-Дирака, должна двигаться в плоскости. Получены инварианты уравнения ЛД (13), используя которые удалось свести уравнение ЛД к одному уравнению второго порядка (14). Получены асимптотики физических решений уравнения (14) при больших собственных временах (16), (15), (17). Показано, что в постоянных однородных полях с нулевыми инвариантами заряженная частица выходит при больших собственных временах в универсальный режим (18), определяющийся только значением внешнего поля. Показано, что этот эффект возникает благодаря наличию реакции излучения и отсутствует для уравнений Лоренца в полях такой конфигурации.

3. Проведено исследование двухкомпонентного нелокального уравнения Гросса-Питаевского (19). Показано, что решение данной системы интегро-дифференциальных уравнений может быть представлено в виде произведения спинора, подчиняющегося уравнению Паули, и функции из класса траекторно сосредоточенных, подчиняющейся уравнению типа Хартри с переопределенной константой взаимодействия. Показано, что нелинейное уравнение типа Хартри может быть сведено к линейному уравнению Шредингера (22) с любой степенью точности. Установлено, что решение данного уравнения сводится в случае нестационарного внешнего поля к решению уравнения Хилла (24). Найдено асимптотическое решение уравнения Хилла, на основе которого проведено исследование динамики квантовых средних рассматриваемой системы в случае нестационарного внешнего поля. Получен явный вид решения спектральной задачи (25) в случае стационарного внешнего поя, а также задачи Коши (26) в случае нестационарного внешнего поля, для уравнения ГП (19). Проведено исследование свойств спектра и нестационарного решения данного уравнения. Найдены значения параметров системы, соответствующие вырождению спектра по квантовым числам и минимизации спектра по константе нелокального взаимодействия.

Публикации по теме диссертации

1. Kazinski P. O., Shipulya M. A. One-loop omega-potential of quantum fields with ellipsoid constant-energy surface dispersion law // Ann. Phys. (NY) – 2011. – Vol. 326. – P. 2658-2693.

2. Kazinski P. O., Shipulya M. A. Asymptotics of physical solutions to the Lorentz-Dirac equation for planar motion in constant electromagnetic fields // Phys. Rev. E. – 2011. – Vol. 83. – P. 066606 [12pp.]

3. Kazinski P. O., Shipulya M. A. Asymptotic expansion of the one-loop Ω-potential of quantum fields with a quadratic dispersion law // Russ. Phys. J. – 2011. – Vol. 54. – P. 536-547.

4. Kirnos I. V., Litvinets F. N., Trifonov A. Yu., Shipulya M. A. Semiclassical spectral series of the two-component Hartry-type operator // Russ. Phys. J. – 2007. – Vol. 50. – P. 497-502.

5. Казинский П. О., Шипуля М. А. Неэкстенсивные поправки в однопетлевой Ω-потенциал квантовых полей с квадратичным законом дисперсии // Нелинейные поля в теории гравитации и космологии: труды российского семинара. – Казань, Яльчик, 2010. – С. 185-191.

Тираж 100 экземпляров
Отпечатано в ООО “Позитив-НБ”
634050 г. Томск, пр. Ленина 34 а