

**УПРАВЛЯЕМЫЕ
СИСТЕМЫ
МАССОВОГО
ОБСЛУЖИВАНИЯ**

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В ы п у с к I

Издательство Томского университета

Томск - 1982

Управляемые системы массового обслуживания:

Сб. статей / Отв.ред. А.Ф.Терпугов. - Томск:

Изд-во Томск. ун-та, 1982. - 102л - I р., 500 экз.

I502000000.

Настоящая книга представляет собой сборник работ аспирантов и сотрудников вузов в области оптимизации управлений в системах массового обслуживания. В ней представлены работы по системам с динамическими приоритетами, системам с резервными приборами, адаптирующимся системам массового обслуживания, а также работы по приложениям теории массового обслуживания.

Сборник предназначен для аспирантов, научных сотрудников и студентов старших курсов, работающих в области теории массового обслуживания и ее приложений.

Редактор - д.ф-м.н., проф. А.Ф.Терпугов

Рецензент - д.т.н., доцент Ю.И.Параев

у I502000000_____ 59 - 82
I77 (012) - 82



Издательство Томского университета, 1982 г.

Содержание

А.М.Вайнгауз, М.Л.Прегер. Однолинейная СМО с гистерезисной стратегией обслуживания, формируемой по разности длин очередей	5
Т.П.Василевская, А.М.Горцев. Адаптивная модель распределения заявок по очередям в двухлинейной системе массового обслуживания автоматом-адаптором	13
А.М.Горцев. Оптимизация управлений в системах массового обслуживания	26
В.А.Дударев, О.А.Колосова. Оптимизация поиска канала с минимальным уровнем шума	46
Л.И.Зиновьева. Оптимизация двух систем массового обслуживания с управлением, зависящим от времени ожидания	57
Л.И.Зиновьева. Однолинейная система массового обслуживания с гистерезисным управлением интенсивностью обслуживания, зависящим от времени ожидания	67
А.В.Китаева, А.Ф.Терпугов. О некоторых двумерных распределениях в теории массового обслуживания	74
И.А.Коротаев. Приближенный расчет средней длины очереди в адаптирующих системах массового обслуживания с переменной интенсивностью обслуживания	79
Л.Л.Левин. Имитационная модель многоканальной СМО с полной памятью	87
Н.Ю.Марголис. Приближенное правило диспетчеризации задач при прогнозе потерь на один и два шага вперед	93
А.А.Назаров. Иерархические игры в приоритетных СМО с формированием очереди	102
А.А.Назаров, В.А.Чекменев. Нахождение оптимального управления в СМО при больших загрузках методом пограничного слоя	113
В.А.Новикова, А.П.Рыжаков. Быстродействие алгоритмов случайного поиска с покоординатным обучением	127

А.П.Поздняков. Вопросы оптимизации и управления ППР объектов НПС в технологическом процессе транспорта нефти	I41
С.Н.Пятков. Об одном подходе к задаче о вырожденном случайном блуждании в прямоугольнике	I52
В.В.Рыков. Некоторые постановки задач в теории управляемых систем массового обслуживания	I65
А.Ф.Терпугов. Приближенный расчет характеристик систем массового обслуживания при медленных флуктуациях интенсивности входящего потока	I74
В.М.Тонконогов. Применение автоматов с линейной тактикой в задаче управления наблюдениями	I79
Рефераты на опубликованные статьи	I90

ОДНОЛИНЕЙНАЯ СМО С ГИСТЕРЕЗИОННОЙ СТРАТЕГИЕЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ,
ФОРМИРУЕМОЙ ПО РАЗНОСТИ ДЛИН ОЧЕРЕДЕЙ.

А.М. Вайнгауз, М.Л. Прегер

Среди систем массового обслуживания (СМО) важное место занимают управляемые СМО, где возможно управление извне некоторыми факторами в зависимости от состояния системы. Сейчас хорошо изучены лишь приоритетные дисциплины обслуживания, когда заявкам различного типа присваиваются различные приоритеты и на обслуживание берется заявка с наибольшим приоритетом [1,2]. Но, очевидно, важное значение имеет и изучение СМО, где выбор очередной заявки на обслуживание производится в зависимости от числа заявок в очередях, времени ожидания заявок и т.д. В данной работе изучена одна СМО с управлением по разности длин очередей заявок различного типа.

Рассмотрим однолинейную СМО с ожиданием, на вход которой поступают два простейших потока заявок с интенсивностями λ_1 и λ_2 . Заявки первого и второго типа образуют отдельные очереди. Обслуживание заявок экспоненциальное с параметрами μ_1 и μ_2 .

Обозначим через i и j число заявок в первой и второй очередях, ν - тип обслуживаемой заявки ($\nu = \overline{1,2}$). Если $\nu = 1$, то после окончания обслуживания этой заявки на обслуживание берется заявка первого типа, если $j - i < j_0$, и второго типа, если $j - i > j_0$. Если $\nu = 2$, то после окончания обслуживания этой заявки на обслуживание берется заявка второго типа, если $i - j < i_0$, и первого типа, если $i - j > i_0$.

Поведение системы описывается марковским процессом $\{i, j, \nu\}$:

Считаем, что загрузка $\rho = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} < 1$, и рассмотрим поведение

системы в стационарном режиме. Введем обозначения для финальных вероятностей

$$P(i, j, \nu) = P_{ij}^{\nu},$$

$$P(i, j, 2) = Q_{i,j}^2,$$

$$P(0, 0, 0) = \pi,$$

где $\nu = 0$, если $i-j \geq i_0 - 1$ при $\nu = 1$ и $i-j \geq i_0$ при $\nu = 2$,
 $\nu = 1$, если $j-i \geq i_0$ при $\nu = 1$ и $j-i \geq j_0 - 1$ при $\nu = 2$,
 $\nu = 2$, если $0 \leq i-j < i_0 - 1$ при $\nu = 1$ и $0 < i-j < i_0$ при $\nu = 2$,
 $\nu = 3$, если $0 < j-i < j_0$ при $\nu = 1$ и $0 < j-i < j_0 - 1$ при $\nu = 2$.

Введем обозначения для производящих функций:

$$R^\nu(u, v) = \sum_{i,j} P_{i,j}^\nu u^i v^j,$$

$$S^\nu(u, v) = \sum_{i,j} Q_{i,j}^\nu u^i v^j.$$

Рассмотрим случай $\nu = 0$. При $\nu = 0$ справедливы соотношения (с учетом выбора областей)

$$R^0(u, v) = \sum_{k=i_0-1}^{\infty} u^k G_k^0(uv),$$

$$S^0(u, v) = \sum_{k=i_0}^{\infty} u^k F_k^0(uv),$$

где $uv = u, v$, $G_k^0(uv) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{j+k, j}^0 uv^j$, $k \geq i_0 - 1$;

$$F_k^0(uv) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_{j+k, j}^0 uv^j, \quad k \geq i_0.$$

Обратные уравнения Колмогорова имеют вид

$$\lambda_1 Q_{i-1, j}^0 + \lambda_2 Q_{i, j-1}^0 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) Q_{i, j}^0,$$

$$\lambda_1 P_{i-1, j}^0 + \lambda_2 P_{i, j-1}^0 + \mu_1 P_{i+1, j}^0 + \mu_2 Q_{i+1, j}^0 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) P_{i, j}^0.$$

Из этих уравнений следуют соотношения (если обозначить $i-j = k$ и провести соответствующее суммирование)

$$\lambda_1 F_{k-1}^0(uv) + uv \lambda_2 F_{k+1}^0(uv) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) F_k^0(uv), \quad k \geq i_0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_1 G_{k-1}^0(\omega) + \lambda_2 \omega G_{k+1}^0(\omega) + \mu_1 G_{k+1}^0(\omega) + \mu_2 F_{k+1}^0(\omega) = \\ & = (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) G_k^0(\omega), \quad k \approx i_0 - 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение уравнения (1) записывается в виде

$$F_k^0(\omega) = A_0(\omega) \zeta_0^k(\omega), \quad k \geq i_0,$$

где $\zeta_0(\omega)$ - корень уравнения

$$\omega^2 \lambda_2 x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)x + \lambda_1 = 0,$$

меньший единицы (такой корень существует).

Решение неоднородного конечноразностного уравнения (2) будет вида

$$G_k^0(\omega) = B_0(\omega) \gamma_0^k(\omega) + C_0(\omega) \zeta_0^k(\omega), \quad k \geq i_0 - 1,$$

$$\text{где } C_0(\omega) = \frac{-\mu_2 A_0(\omega) \zeta_0(\omega)}{\mu_1 (\zeta_0(\omega) - 1) + \mu_2},$$

$\gamma_0(\omega)$ - корень уравнения

$$(\lambda_2 \omega + \mu_1) x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)x + \lambda_1 = 0,$$

меньший единицы.

Следовательно, производящие функции $R^0(u, v)$ и $S^0(u, v)$ будут следующего вида:

$$S^0(u, v) = \frac{A_0(\omega) u^{i_0} \zeta_0^{i_0}(\omega)}{1 - u \zeta_0(\omega)},$$

$$R^0(u, v) = u^{i_0-1} \left[\frac{B_0(\omega) \gamma_0^{i_0-1}(\omega)}{1 - u \gamma_0(\omega)} + \frac{C_0(\omega) \zeta_0^{i_0-1}(\omega)}{1 - u \zeta_0(\omega)} \right].$$

Рассмотрим случай $\ell = 1$. При $\ell = 1$ справедливы соотношения

$$R^{\nu}(\mu, \nu) = \sum_{\kappa=j_0-1}^{\infty} \nu^{\kappa} G_{\kappa}^{\nu}(\mu),$$

$$S^{\nu}(\mu, \nu) = \sum_{\kappa=j_0}^{\infty} \nu^{\kappa} F_{\kappa}^{\nu}(\mu),$$

где (как и в случае $\nu=0$) $\mu = \mu, \nu$, $G_{\kappa}^{\nu}(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} P_{i, i+\kappa}^{\nu} \mu^i$, $\kappa \geq j_0$;

$$F_{\kappa}^{\nu}(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i, i+\kappa}^{\nu} \mu^i, \quad \kappa \geq j_0 - 1.$$

Обратные уравнения Колмогорова имеют вид

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) P_{i,j}^{\nu} = \lambda_1 P_{i-1,j}^{\nu} + \lambda_2 P_{i,j-1}^{\nu},$$

$$(\lambda_2 + \lambda_1 + \mu_2) Q_{i,j}^{\nu} = \lambda_1 Q_{i-1,j}^{\nu} + \lambda_2 Q_{i,j-1}^{\nu} + \mu_2 Q_{i,j+1}^{\nu} + \mu_1 P_{i,j+1}^{\nu}.$$

Из этих уравнений следуют соотношения для $G_{\kappa}^{\nu}(\mu)$ и $F_{\kappa}^{\nu}(\mu)$.

Тем же методами, что и для случая $\nu=0$, получаем следующие соотношения:

$$G_{\kappa}^{\nu}(\mu) = B_{\nu}(\mu) \gamma_{\nu}^{\kappa}(\mu), \quad \kappa \geq j_0,$$

где $\gamma_{\nu}(\mu)$ - корень уравнения

$$\lambda_1 \mu x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)x + \lambda_2 = 0,$$

меньший единицы;

$$F_{\kappa}^{\nu}(\mu) = A_{\nu}(\mu) \gamma_{\nu}^{\kappa}(\mu) + D_{\nu}(\mu) \gamma_{\nu}^{\kappa}(\mu), \quad \kappa \geq j_0 - 1,$$

где $D_{\nu}(\mu) = \frac{-\mu_2 B_{\nu}(\mu) \gamma_{\nu}(\mu)}{\mu_2 (\gamma_{\nu}(\mu) - 1) + \mu_1}$,

$\gamma_{\nu}(\mu)$ - корень уравнения

$$(\lambda_1 \mu + \mu_2) x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)x + \lambda_2 = 0,$$

меньший единицы.

Тогда $R^{\nu}(\mu, \nu)$ и $S^{\nu}(\mu, \nu)$ запишутся в виде

$$R^l(u, v) = \frac{B_l(u) u^{i_0} \gamma_l^{i_0}(u)}{1 - v \gamma_l(u)},$$

$$S^l(u, v) = 2v \sum_{i=0}^{i_0-1} \left[\frac{A_l(u) \gamma_l^{i_0-1}(u)}{1 - v \gamma_l(u)} + \frac{B_l(u) \gamma_l^{i_0-1}(u)}{1 - v \gamma_l(u)} \right].$$

Рассмотрим теперь области $l=2$ и $l=3$.

В этих областях после окончания обслуживания очередной заявки выбирается на обслуживание заявка того же типа, что и обслуживалась ранее, если соответствующая очередь не пуста. Пусть, например, $l=2$.

Обратные уравнения Колмогорова имеют вид

$$(A_1 + A_2 + \mu_1) P_{i,j}^2 = A_1 P_{i-1,j}^2 + A_2 P_{i,j-1}^2 + \mu_1 P_{i+1,j}^2, \quad j \neq 0;$$

$$(A_1 + A_2 + \mu_1) P_{i,0}^2 = A_1 P_{i-1,0}^2 + \mu_1 P_{i+1,0}^2 + \mu_2 Q_{i,0}^2;$$

$$(A_1 + A_2 + \mu_2) Q_{i,j}^2 = A_1 Q_{i-1,j}^2 + A_2 Q_{i,j-1}^2 + \mu_2 Q_{i+1,j}^2, \quad j \neq 0;$$

$$(A_1 + A_2 + \mu_2) Q_{i,0}^2 = A_1 Q_{i-1,0}^2 + \mu_2 Q_{i,1}^2.$$

Откуда, обозначив

$$G_K^2(u) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{i+K,j}^2 u^j,$$

$$F_K^2(u) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_{i+K,j}^2 u^j,$$

получаем соотношения:

$$(A_2 u + \mu_1) G_{K+1}^2(u) - (A_1 + A_2 + \mu_1) G_K^2(u) + A_1 G_{K-1}^2(u) = -\mu_2 Q_{K+1,0}^2, \quad 0 \leq K \leq i_0 - 2; \quad (3)$$

$$A_2 u^2 F_{K+1}^2(u) - (A_1 + A_2 + \mu_2) F_K^2(u) + (A_1 + \frac{\mu_2}{u}) F_{K-1}^2(u) = \frac{-\mu_2}{u^2} Q_{K+1,0}^2, \quad 1 \leq K \leq i_0 - 1. \quad (4)$$

Решая полученные неоднородные конечноразностные уравнения методом, аналогичным методу Коши для дифференциальных уравнений найдем, что решения уравнений (3) и (4) будут следующего вида

$$G_{\kappa}^2(\omega) = B_2(\omega) \gamma_0^{\kappa}(\omega) + C_2(\omega) \zeta_0^{\kappa}(\omega) - \frac{\mu_2}{A_2 \omega^2 + \mu_1} \sum_{s=0}^{\kappa} \left[\frac{\gamma_0^{\kappa-s} - \zeta_0^{\kappa-s}}{\gamma_0 - \zeta_0} \right] Q_{s+1,0}^2, \quad 0 \leq \kappa \leq i_0 - 2,$$

где $\gamma_0(\omega)$, $\zeta_0(\omega)$ - корни уравнения $(A_2 \omega^2 + \mu_1) x^2 - (A_1 + A_2 + \mu_1) x + A_1 = 0$.

$$F_{\kappa}^2(\omega) = A_2(\omega) \gamma_1^{\kappa}(\omega) + D_2(\omega) \alpha_1^{\kappa}(\omega) + \frac{\mu_2}{A_2 \omega^2} \sum_{s=1}^{\kappa} \left[\frac{\gamma_1^{\kappa-s} - \alpha_1^{\kappa-s}}{\gamma_1 - \alpha_1} \right] Q_{s-1,0}^2, \quad 0 \leq \kappa \leq i_0 - 1,$$

где $\gamma_1(\omega)$, $\alpha_1(\omega)$ - корни уравнения

$$A_2 \omega x^2 - (A_1 + A_2 + \mu_2) x + (A_1 + \frac{\mu_2}{\omega}) = 0.$$

Для производящих функций $R^2(u, v)$ и $S^2(u, v)$ справедливы соотношения

$$R^2(u, v) = \sum_{\kappa=0}^{i_0-2} u^{\kappa} G_{\kappa}^2(\omega),$$

$$S^2(u, v) = \sum_{\kappa=1}^{i_0-1} u^{\kappa} F_{\kappa}^2(\omega).$$

В области $\rho = 3$ обратные уравнения Колмогорова имеют вид

$$(A_1 + A_2 + \mu_1) P_{i,j}^3 = A_1 P_{i-1,j}^3 + A_2 P_{i,j-1}^3 + \mu_1 P_{i+1,j}^3, \quad i \neq 0;$$

$$(A_1 + A_2 + \mu_1) P_{0,j}^3 = A_2 P_{0,j-1}^3 + \mu_1 P_{1,j}^3;$$

$$(A_1 + A_2 + \mu_2) Q_{i,j}^3 = A_1 Q_{i-1,j}^3 + A_2 Q_{i,j-1}^3 + \mu_2 Q_{i,j+1}^3, \quad i \neq 0;$$

$$(A_1 + A_2 + \mu_2) Q_{0,j}^3 = A_2 Q_{0,j-1}^3 + \mu_2 Q_{0,j+1}^3 + \mu_1 P_{0,j+1}^3.$$

Откуда получаем уравнения для $G_K^3(u)$ и $F_K^3(u)$

(которые вводятся так же, как и при $\ell=2$)

$$\begin{aligned} \lambda_1 u^2 G_{K+1}^3(u) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) G_K^3(u) + (\lambda_2 + \frac{\mu_1}{u}) G_{K-1}^3(u) = \\ = -\frac{\mu_1}{u^2} P_{0, K-1}^3, \quad 1 \leq K \leq j_0 - 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda_1 u^2 + \mu_2) F_{K+1}^3(u) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) F_K^3(u) + \lambda_2 F_{K-1}^3(u) = \\ = -\mu_1 P_{0, K+1}^3, \quad 0 \leq K \leq j_0 - 2. \end{aligned}$$

Решения этих неоднородных уравнений будут следующего вида

$$G_K^3(u) = B_3(u) \gamma_1^K(u) + C_3(u) b_1^K(u) + \frac{\mu_1}{\lambda_1 u^2} \sum_{s=1}^K \left[\frac{\gamma_1^{K-s} - b_1^{K-s}}{\gamma_1 - b_1} \right] P_{0, s-1}^3,$$

$$1 \leq K \leq j_0 - 1;$$

$$F_K^3(u) = A_3(u) \zeta_0^K(u) + D_3(u) \alpha_0^K(u) - \frac{\mu_1}{\lambda_1 u^2 + \mu_2} \sum_{s=0}^K \left[\frac{\zeta_0^{K-s} - \alpha_0^{K-s}}{\zeta_0 - \alpha_0} \right] P_{0, s+1}^3,$$

$$0 \leq K \leq j_0 - 2,$$

где γ_1, b_1 - корни уравнения

$$\lambda_1 u^2 x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) x + (\lambda_2 + \frac{\mu_1}{u}) = 0,$$

ζ_0, α_0 - корни уравнения

$$(\lambda_1 u^2 + \mu_2) x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) x + \lambda_2 = 0.$$

Производящие функции $R^3(u, v)$ и $S^3(u, v)$ имеют вид

$$R^3(u, v) = \sum_{k=1}^{j_0-1} v^k G_k^3(u), \quad S^3(u, v) = \sum_{k=0}^{j_0-2} v^k F_k^3(u).$$

Для того, что бы определить неизвестные функции $A_0(u), A_2(u), B_0(u), B_1(u), B_2(u), B_3(u), C_1(u), C_2(u), C_3(u), D_2(u), D_3(u)$, необходимо использовать условия сшивания. Эти условия сшивания получаются из уравнений для $F_K(u)$ и $G_K(u)$ при $v=1, 2$ на границах между областями $\ell=0$ и $\ell=2$, между областя-

ми $l=2$ и $l=3$ и между областями $l=3$ и $l=1$.
Т.е. получается система из 12 уравнений с 12 неизвестными. Решив

эту систему, получим, что, например, $A_0(w)$ записывается в виде

$$A_0(w) = \frac{d_0(w)\pi + \sum_{k=0}^{i_0-1} a_k(w)Q_{k,0}^2 + \sum_{l=0}^{j_0-1} b_l(w)P_{0,l}^3}{f(w)}, \quad (5)$$

где $d_0(w)$, $f(w)$, $a_k(w)$, $k=0, \overline{i_0-1}$, $b_l(w)$, $l=0, \overline{j_0-1}$, имеют довольно громоздкий вид и здесь не приводятся.

Методика нахождения финальных вероятностей π , $Q_{k,0}^2$, $k=0, \overline{i_0-1}$, $P_{0,l}^3$, $l=0, \overline{j_0-1}$, следующая.

При $|w| \leq 1$ все функции $G_k(w)$ и $F_k(w)$ ограничены. Поэтому, если уравнение $f(w) = 0$ имеет корни по модулю меньше 1, то при этих корнях должен обращаться в нуль и числитель (5). Получим систему $i_0 + j_0$ уравнений, откуда выразим $Q_{k,0}^2$, $k=0, \overline{i_0-1}$ и $P_{0,l}^3$, $l=0, \overline{j_0-1}$, через π (если загрузка системы меньше 1, система обратных уравнений Колмогорова определит финальные вероятности с точностью до множителя π). Финальная вероятность π определится из условия нормировки.

Л и т е р а т у р а

1. Гнеденко Б.В. и др. Приоритетные системы обслуживания. - М.: Изд-во МГУ, 1973. - 446 с.
2. Джейсуол Н. Очереди с приоритетами. - М.: Мир, 1973. - 279 с.

АДАПТИВНАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАЯВОК ПО ОЧЕРЕДЯМ
В ДВУХЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
АВТОМАТОМ-АДАПТЕРОМ

Т.П. Василевская, А.М. Горцев

1. Введение. В последние годы в связи с созданием многомашиных вычислительных систем (ВС) и многопроцессорных ЭВМ появилась необходимость в рассмотрении вопросов, связанных с построением оптимальных алгоритмов диспетчеризации поступающих в ВС задач, на что указывается в работах [1,2]. Представление ВС в виде марковских сетей, где узлами являются отдельные ЭВМ, позволяет решать задачи оптимизации диспетчеризации в ВС методами теории массового обслуживания. Однако в реальных ситуациях, как правило, информация о различных характеристиках ВС и законах распределения случайных величин является неполной (либо вообще отсутствует), в особенности это относится к входящим потокам задач, интенсивности которых обычно неизвестны и, кроме того, могут изменяться со временем. Для выяснения статистики этих изменений требуется проведение большого объема экспериментальных исследований. Вследствие этого в подобных ситуациях естественным является применение адаптивных методов исследования многомашиных ВС [3]. Можно предложить достаточно много принципов построения адаптивных ВС. В [4 - 7] рассматриваются принципы построения адаптивных ВС, основанные на статистической теории оценок и теории проверки статистических гипотез. В [7], кроме того, для построения адаптивной ВС используется автоматный подход. Данная работа посвящена дальнейшему развитию применения методов адаптации в ВС. При нижеследующем рассмотрении вычислительную систему будем называть управляемой системой массового обслуживания.

2. Постановка задачи. Рассмотрим УСМО, состоящую из двух ЭВМ (обслуживающих приборов) разного класса: интенсивность обслуживания заданий (заявок) первой из них больше, чем второй. Будем

предполагать, что время обслуживания первым и вторым приборами распределено по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно (μ_1, μ_2) . На вход УСМО поступают два простейших потока заявок разной интенсивности. Заявки поступают в бункеры (накопители) к обслуживающим приборам. Предположим сначала, что интенсивности потоков известны и со временем не изменяются. Пусть интенсивность первого потока есть λ_1 , второго - λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). Рассмотрим две возможные стратегии направления заявок в бункеры: 1) поток с большей интенсивностью поступления заявок направляется в накопитель к прибору с большей интенсивностью обслуживания; поток с меньшей интенсивностью поступления заявок - в накопитель к прибору с меньшей интенсивностью обслуживания; 2) наоборот, поток с меньшей интенсивностью поступления заявок направляется в бункер к прибору с большей интенсивностью обслуживания; поток с большей интенсивностью поступления заявок - в накопитель к прибору с меньшей интенсивностью обслуживания. Чтобы решить вопрос о том - какая из двух стратегий лучше, выберем в качестве критерия оптимальности среднее число заявок в системе и потребуем минимизации критерия по применяемым стратегиям. Здесь и далее будем рассматривать стационарный режим работы системы. Обозначим через $I_1 = I_1(\lambda_i, \mu_i, i=1,2)$ среднее число заявок в системе, если применяется первая стратегия, через $I_2 = I_2(\lambda_i, \mu_i, i=1,2)$ - среднее число заявок в системе, если применяется вторая стратегия. Тогда, как нетрудно показать,

$$I_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2}, \quad I_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2 - \lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_1 - \lambda_2},$$

где $\mu_1 > \lambda_1$, $\mu_2 > \lambda_2$, последнее очевидно необходимо для существования стационарного режима работы СМО. Рассмотрим разность

$$I_2 - I_1 = \frac{(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 \mu_2 - \lambda_1 \lambda_2)}{(\mu_2 - \lambda_1)(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \lambda_1)(\mu_2 - \lambda_2)}.$$

В силу перечисленных выше условий очевидно, что $I_2 - I_1 > 0$.

Таким образом, в смысле минимума среднего числа заявок в системе наилучшей стратегией направления заявок в бункеры будет следующая стратегия: поток с большей интенсивностью поступления заявок направлять в накопитель к прибору с большей интенсивностью обслуживания; поток с меньшей интенсивностью поступления

заявок - в накопитель к прибору с меньшей интенсивностью обслуживания.

Предположим теперь, что возможны два состояния "природы":

1) интенсивность первого потока заявок - λ_1 , второго - λ_2 ;
2) интенсивность первого потока заявок - λ_2 , второго - λ_1
($\lambda_1 > \lambda_2$). Величины λ_1 , λ_2 известны. Таким образом, при первом состоянии природы интенсивность первого потока заявок больше, чем второго, при втором состоянии природы наоборот. Относительно того какое состояние природы имеет место на самом деле, известны априорные вероятности P_1 первого и P_2 второго состояний природы $P_1 + P_2 = 1$. Таким образом, в соответствии с введённым критерием (среднее число заявок в УСМО) при первом состоянии природы наилучшим является правило направления заявок из первого потока в накопитель к первому прибору, из второго потока в накопитель ко второму прибору (будем называть это правило первой стратегией); наоборот, при втором состоянии природы наилучшим является правило направления заявок из первого потока в накопитель ко второму прибору, из второго потока в накопитель к первому прибору (будем называть это правило второй стратегией). Однако для правильного применения первой либо второй стратегий необходимо идентифицировать состояние природы, имеющее место на входе УСМО, другими словами, адаптироваться к условиям входа УСМО. С этой целью используем в качестве устройства, реализующего идентификацию состояний природы, автомат-адаптер (или просто адаптер) [8], который, реагируя каким-либо образом на изменения окружающей среды (в данном случае на приход заявок), тем или иным образом изменяет стратегии направления заявок в накопители, с течением времени приближаясь к наилучшей стратегии.

3. Описание автомата-адаптера. Данный адаптер имеет свои собственные состояния с номерами $1, 2, \dots, n$. Переход из состояния в состояние осуществляется следующим образом: 1) если на вход УСМО поступает заявка из первого потока, то адаптер переходит в соседнее состояние с большим номером, 2) если на вход УСМО поступает заявка из второго потока, то адаптер переходит в соседнее состояние с меньшим номером, 3) если адаптер находится в первом состоянии, то он в этом же состоянии и остаётся, если на вход УСМО поступает заявка из второго потока, 4) если адаптер находится в n -ом состоянии, то он в этом же состоянии и остаётся, если на вход УСМО поступает заявка из первого потока.

Таким образом, если на входе УСМО реализуется первое состояние природы, то адаптер будет преимущественно находиться в состояниях с большими номерами и в этом случае необходимо применять первую стратегию; наоборот, если на входе УСМО реализуется второе состояние природы, то адаптер будет преимущественно находиться в состояниях с меньшими номерами и в этом случае необходимо применять вторую стратегию. В силу этого состояния адаптера делятся на две части: 1) если адаптер находится в состояниях с номерами $1, \dots, m-1$, то применяется вторая стратегия, 2) если адаптер находится в состояниях с номерами m, \dots, n , то применяется первая стратегия. Смена состояний адаптера представляет собой марковский процесс $i(t)$ (в силу того, что входящие потоки заявок простейшие), принимающий значения $1, \dots, n$. На рис. 1 приведён стохастический граф переходов, описывающий поведение автомата-адаптера в стационарном режиме, когда на входе УСМО имеет место первое состояние природы, где каждой дуге графа поставлены в соответствие интенсивности переходов (петли во всех состояниях, кроме граничных, опущены). На рис. 2 приведён аналогичный стохастический граф, описывающий поведение автомата-адаптера в стационарном режиме, когда на входе УСМО имеет место второе состояние природы.

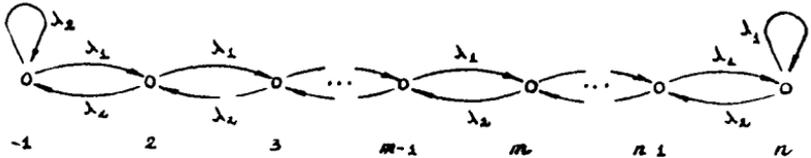


Рис. 1

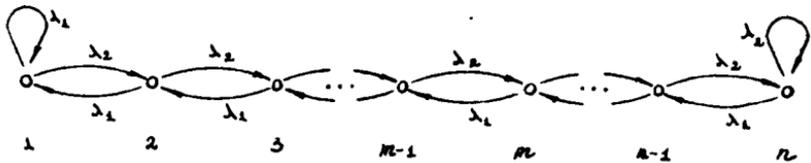


Рис. 2

Если процесс $i(t)$ находится в состояниях m, \dots, n , то адаптер приписывает применение первой стратегии; при этом, если имеет место второе состояние природы, будет совершаться ошибка: заявки из первого потока, интенсивность поступления заявок кото-

рого λ_2 меньше, чем интенсивность поступления заявок λ_1 второго потока, будут направляться в бункер к первому прибору, а заявки из второго потока - в бункер ко второму прибору. Аналогично, если процесс $i(t)$ находится в состояниях $1, \dots, n-1$, то адаптер приписывает применение второй стратегии; при этом, если имеет место первое состояние природы, будет также совершаться ошибка: заявки из первого потока, интенсивность которого λ_1 больше, чем интенсивность λ_2 второго потока, будут направляться в бункер ко второму прибору, а заявки из второго потока - в бункер к первому прибору.

Обозначим через $P(i, 1)$ стационарные вероятности состояний процесса $i(t)$, когда имеет место первое состояние природы, через $P(i, 2)$ - стационарные вероятности состояний процесса $i(t)$, когда имеет место второе состояние природы ($i = \bar{1}, \bar{n}$). Тогда вероятность ошибки адаптации очевидно запишется в виде

$$Q(n, m) = P_1 \sum_{i=1}^{m-1} P(i, 1) + P_2 \sum_{i=m}^n P(i, 2) \quad (1)$$

Ясно, что вероятность $Q(n, m)$ есть функция параметров автомата-адаптера n и m , поэтому стоит задача параметрической оптимизации адаптивного управления: определить параметры адаптера n и m , доставляющие минимум вероятности ошибки адаптации (1).

4. Оптимизация параметров автомата-адаптера. Очевидно, что явные формулы для стационарных вероятностей $P(i, 1), P(i, 2)$ имеют вид

$$P(i, 1) = \frac{1-x}{1-x^n} x^{i-1} \quad (i = \bar{1}, \bar{n}), \quad P(i, 2) = \frac{1-x}{1-x^n} x^{n-i} \quad (i = \bar{1}, \bar{n}), \quad (2)$$

где $x = (\lambda_1 / \lambda_2) > 1$.

Рассмотрим сначала случай, когда первое и второе состояния природы равновероятны, т.е. $P_1 = P_2 = 1/2$. Подставляя (2) в (1), получим

$$Q(n, m) = \frac{1}{2(1-x^n)} \left(2 - x^{m-1} - x^{n-m+1} \right), \quad \begin{matrix} n = 2, 3, \dots \\ m = \bar{1}, \bar{n}+1 \end{matrix} \quad (3)$$

Случай $m=1$ соответствует ситуации, когда при всех состояниях адаптера от первого до n -го применяется только одна первая стратегия; случай $m=n+1$ - ситуации, когда при всех состояниях адаптера применяется вторая стратегия, причём $Q(n, m=1) = Q(n, m=n+1) = 1/2$.

Зафиксируем n и, считая m непрерывной переменной, определим значение m^* , доставляющее глобальный минимум функции (3). Беря производную от (3) по m , получаем уравнение

$$\frac{\partial Q}{\partial m} (x^{n-1} - x^{n-m+1}) = 0,$$

откуда находим

$$m^* = \frac{n}{2} + 1 \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (4)$$

Отметим, во-первых, что в точке (4) действительно достигается глобальный минимум функции (3) по m при фиксированном n , так как $Q''(n, m) > 0$ для всех n и m , т.е. функция $Q(n, m)$ выпукла по m . Во-вторых, из формулы (4) следует, что при чётном n состояния адаптера делятся пополам (в состояниях $1, \dots, (n/2)$ применяется вторая стратегия, в состояниях $(n/2) + 1, \dots, n$ - первая стратегия), при этом оптимальное $m^0 = m^* = (n/2) + 1$; если n - нечётное, то для определения оптимального m^0 необходимо сравнить вероятность ошибки (3) в двух точках $m_1 = [m^*]$ и $m_2 = [m^*] + 1$ (где символ $[\cdot]$ означает целую часть числа m^*) и за оптимальное m^0 принимается то из двух значений m_1 и m_2 , для которого вероятность ошибки меньше, т.е. m^0 удовлетворяет уравнению $Q(n, m^0) = \frac{m_1^{n-1}}{m_1^{n-1} + m_2^{n-1}} (Q(n, m_1) + Q(n, m_2))$, тогда количество состояний автомата-адаптера, при которых применяется первая стратегия, будет отличаться в большую либо в меньшую сторону от количества состояний автомата-адаптера, при которых применяется вторая стратегия, на единицу.

Приступим к оптимизации по n . Подставим (4) в (3), тогда получим функцию одной переменной n :

$$Q(n) = 1 / (1 + x^{\frac{n}{2}}), \quad n = 2, 3, \dots \quad (5)$$

Очевидно, что функция (5) монотонно убывает от $1/(1+x)$ до нуля с ростом n от 2 до бесконечности. Таким образом, для случая равных вероятностей P_1 и P_2 получаем следующий результат: чем больше n и m^* , определяемое формулой (4), тем меньше вероятность ошибки адаптации.

Рассмотрим случай, когда $P_1 \neq P_2$. Тогда подставляя (2) в (1), получаем

$$Q(n, m) = \frac{1}{1-x^n} \left(1 - P_1 x^{m+1} - P_2 x^{n-m+1} \right), \quad n=2, 3, \dots, \quad (6)$$

$m = 1, n-1.$

Фиксируя n и, считая m непрерывной переменной, определим значение m^* , доставляющее глобальный минимум функции (6). Беря производную от (6) по m , получаем уравнение

$$\frac{\ln x}{x^n - 1} \cdot (P_1 x^{m+1} - P_2 x^{n-m+1}) = 0,$$

откуда находим

$$m^* = \frac{n}{2} + 1 - \frac{\ln(P_1/P_2)}{2 \ln x} \quad (n=2, 3, \dots). \quad (7)$$

Отметим, что точка (7) действительно является точкой глобального минимума, так как $Q''(n, m) > 0$ для всех n и m , т.е. функция (6) выпукла по m . При $P_1 = P_2$ получаем формулу (4). Оптимальное m^0 при фиксированном n находится аналогично рассмотренному случаю $P_1 = P_2$.

Приступим к минимизации функции (6) по n . Подставляя (7) в (6), обозначая $c = \ln(P_1/P_2)/2 \ln x = \log_x \sqrt{P_1/P_2}$, $b = (P_1/2) x^{-c} + (P_2/2) x^c = \sqrt{P_1 P_2}$, получаем функцию одной переменной n :

$$Q(n) = (1-x^n)^{-1} (1 - 2b x^{\frac{n}{2}}), \quad n=2, 3, \dots, \quad (8)$$

где $0 < b = \sqrt{P_1 P_2} < 1/2$. Случай $b=1/2$ соответствует уже рассмотренной ситуации, когда $P_1 = P_2$. Исследуем функцию (8), как функцию непрерывной переменной $n \geq 0$. Имеем $\lim_{n \rightarrow 0} Q(n) = -\infty$ при $n \rightarrow +0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(n) = 0$ при $n \rightarrow +\infty$, $Q(n) = 0$ в точке $n_1 = - (2 \ln 2b) (\ln x)^{-1}$. Имеем далее

$$\frac{\partial Q(n)}{\partial n} = - \frac{x^{\frac{n}{2}} \ln x}{(1-x^n)^2} \left\{ b' x^n - x^{\frac{n}{2}} + b \right\} \quad (n > 0). \quad (9)$$

Очевидно, что знак производной (9) определяется выражением в фигурных скобках. Обозначим $f(n) = b' x^n - x^{\frac{n}{2}} + b$. Функция $f(n)$ является монотонно возрастающей функцией и, кроме того, проходящей через ноль, так как $f(0) = 2b - 1 < 0$. Вследствие этого производная (9) при изменении n от нуля до бесконечности

имеет единственную точку (обозначим её через n^*), в которой она обращается в ноль, причём $Q'(n) > 0$ для $0 < n < n^*$ и $Q'(n) < 0$ для $n > n^*$. Таким образом, поведение функции $Q(n)$ при изменении n от нуля до бесконечности выглядит следующим образом: сначала функция (8) возрастает от $-\infty$ до своего максимального значения в точке n^* (проходя при этом через ноль в точке $n_1 < n^*$), затем убывает до нуля. Определим точку n^* , в которой функция (8) достигает своего глобального максимума и которая является решением уравнения $f(n) = b x^n - x^{n+1} + b = 0$. Положим $x^n = y^n$, тогда получаем уравнение $b y^2 - y + b = 0$, которое даёт два действительных корня $y_{\pm} = y_{\pm}(\delta) = (1 \pm \sqrt{1 - 4\delta^2}) / (2\delta^2)$. Исследуем поведение корней $y_+(\delta)$ и $y_-(\delta)$, как функций δ ($0 < \delta < 1/2$). Имеем $\lim_{\delta \rightarrow 0} y_+(\delta) = 1$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} y_-(\delta) = 1$ при $\delta \rightarrow (1/2)$; $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} y_+(\delta) = +\infty$, $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} y_-(\delta) = 0$ при $\delta \rightarrow +\infty$;

$$y_+(\delta) = -\frac{1 + \sqrt{1 - 4\delta^2}}{2\delta^2 \sqrt{1 - 4\delta^2}} < 0, y_-(\delta) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\delta^2}}{2\delta^2 \sqrt{1 - 4\delta^2}} > 0 \quad (0 < \delta < 1/2)$$

Таким образом, функция $y_+(\delta)$ при изменении δ от 0 до $1/2$ убывает от $+\infty$ до 1, функция $y_-(\delta)$ при этом возрастает от 0 до 1. Из равенства $x^n = y^n$ имеем $n^* = (2 \ln y_+) / (\ln x)^{-1}$. Учитывая ограничение $n > 0$, получаем

$$n^* = (2 \ln y_+) / (\ln x)^{-1}. \quad (10)$$

Функция $Q(n)$ для рассматриваемой задачи имеет смысл вероятности, поэтому необходимо учесть ограничения на m^* ($1 \leq m^* \leq n+1$). Из неравенства $m^* \geq 1$, учитывая (7), находим $x^n \geq (P_1 / P_2)$, аналогично из неравенства $m^* \leq n+1$ получаем $x^n > (P_2 / P_1)$, что даёт двойное неравенство

$$x^{-n} \leq (P_1 / P_2) \leq x^n. \quad (11)$$

Очевидно, что знак равенства в левой и правой частях неравенства (11) возможен лишь для случая равных вероятностей ($P_1 = P_2 = 1/2$), который рассмотрен выше.

Рассмотрим случай $P_1 > P_2$. Тогда неравенство $x^{-n} \leq (P_1 / P_2)$ выполняется для любого $n > 0$, неравенство же $x^n > (P_1 / P_2)$ выполняется только для $n > \bar{n}_1$, где $\bar{n}_1 = \ln(P_1 / P_2) / \ln x$. Тогда для $n \geq \bar{n}_1$ имеем, во-первых, $Q(n) > 0$, во-вторых, с

учётом (10) получаем

$$n^* \bar{n}_1 = \ln(P_1/P_2) / \ln x. \quad (12)$$

Таким образом, для случая $P_1 > P_2$ функция $Q(n)$ имеет смысл вероятности ошибки адаптации, начиная с n^* , определяемого формулой (12), причём в точке n^* $Q(n)$ принимает максимальное значение, убывая затем до нуля.

Рассмотрим случай $P_1 < P_2$. Тогда правая часть неравенства (II) выполняется для любого $n > 0$, левая же часть неравенства (II) выполняется только для $n > \bar{n}_2$, где $\bar{n}_2 = \ln(P_2/P_1) / \ln x$. Тогда для $n \geq \bar{n}_2$ имеем, во-первых, $Q(n) > 0$, во-вторых, с учётом (10) получаем

$$n^* - \bar{n}_2 = \ln(P_2/P_1) / \ln x. \quad (13)$$

Таким образом, для случая $P_2 > P_1$ функция $Q(n)$ имеет смысл вероятности ошибки адаптации, начиная с n^* , определяемого формулой (13), причём в точке n^* $Q(n)$ принимает максимальное значение, убывая затем до нуля.

В итоге получаем следующий результат. Для заданных P_1 и P_2 определяется n^* (либо по формуле (12), либо по формуле (13)). Количество состояний автомата-адаптера n должно быть больше, чем $\lfloor n^* \rfloor + 1$. Вероятность ошибки адаптации (6) при этом тем меньше, чем больше n и m^* , определяемое выражением (7).

5. Численные расчеты. Так как в технической реализации число состояний автомата-адаптера конечно, то оптимальные n^0 и m^0 определим следующим образом. Положим $Q(n, m) \leq \alpha$, тогда за оптимальные n^0 и m^0 примимется те значения параметров автомата-адаптера, которые доставляют заданный уровень α вероятности ошибки адаптации. Вследствие этого численный алгоритм расчёта оптимальных n^0 , m^0 выглядит следующим образом: шаг 1: для заданных P_1 , P_2 , x определяется n^* (по одной из формул (12) либо (13)); шаг 2: по формуле (8), изменяя n с шагом единица либо от $\lfloor n^* \rfloor + 2$ (для $0 \leq n^* < 1$), либо от $\lfloor n^* \rfloor + 1$ (для $n^* \geq 1$), вычисляется вероятность ошибки адаптации $Q(n)$ до тех пор, пока для некоторого n не выполнится неравенство $Q(n) \leq \alpha$; данное n принимается за оценку (\hat{n}^0) оптимального n^0 ; шаг 3: по формуле (7), где $n = \hat{n}^0$, определяется m^* и за оценку (\hat{m}^0) оптимального m^0 принимается то из двух значений $m_1 = \lfloor m^* \rfloor$ и $m_2 = \lfloor m^* \rfloor + 1$, для которого значение

функции $Q(\hat{n}^*, m)$, определяемой выражением (6), меньше; шаг 4: значение функции $Q(n, m)$ в точке (\hat{n}^*, \hat{m}^*) сравнивается с Δ ; если $Q(\hat{n}^*, \hat{m}^*) \leq \Delta$, то $n^* = \hat{n}^*$, $m^* = \hat{m}^*$; если $Q(\hat{n}^*, \hat{m}^*) > \Delta$, то значение \hat{n}^* увеличивается на единицу, после чего переходим к шагу 3. В табл. I - 6 приведены значения оптимальных параметров автомата-адаптера n^* , m^* и вероятности ошибки адаптации $Q(n^*, m^*)$ для уровня $\Delta = 0,05$, найденные для различных значений интенсивности λ_1 и вероятностей P_1, P_2 при фиксированном $\lambda_2 = 1,1$ (табл. I для $P_1 = 0,1, P_2 = 0,9$; табл. 2 для $P_1 = 0,3, P_2 = 0,7$; табл. 3 для $P_1 = 0,4, P_2 = 0,6$; табл. 4 для $P_1 = P_2 = 0,5$; табл. 5 для $P_1 = 0,7, P_2 = 0,3$; табл. 6 для $P_1 = 0,9, P_2 = 0,1$).

Табл. I ($P_1 = 0,1, P_2 = 0,9$)

λ_1	n^*	m^*	$Q(n^*, m^*)$
I,2	54	4I	0,048
I,3	29	22	0,046
I,4	2I	I6	0,04I
I,5	I6	I3	0,044
I,6	I3	IO	0,046
I,7	I2	IO	0,040
I,8	IO	8	0,044
I,9	IO	8	0,035
2,0	9	7	0,037
2,I	8	7	0,040

Табл. 2 ($P_1 = 0,3, P_2 = 0,7$)

λ_1	n^*	m^*	$Q(n^*, m^*)$
I,2	66	39	0,049
I,3	36	22	0,043
I,4	25	I5	0,043
I,5	I9	I2	0,046
I,6	I6	IO	0,043
I,7	I4	9	0,04I
I,8	I2	8	0,045
I,9	II	7	0,044
2,0	II	7	0,033
2,I	IO	7	0,036

Табл. 3 ($P_1 = 0,4, P_2 = 0,6$)

λ_1	n^*	m^*	$Q(n^*, m^*)$
I,2	68	37	0,048
I,3	36	20	0,046
I,4	25	I4	0,046
I,5	20	I2	0,042
I,6	I7	IO	0,039
I,7	I4	8	0,045
I,8	I3	8	0,038
I,9	II	7	0,046
2,0	II	7	0,035
2,I	II	6	0,038

Табл. 4 ($P_1 = P_2 = 0,5$)

λ_1	n^*	m^*	$Q(n^*, m^*)$
I,2	68	35	0,049
I,3	36	22	0,047
I,4	25	I4	0,047
I,5	I9	II	0,050
I,6	I6	9	0,048
I,7	I4	8	0,045
I,8	I2	7	0,050
I,9	II	7	0,049
2,0	IO	6	0,048
2,I	IO	6	0,038

Табл. 5 ($P_1 = 0,7, P_2 = 0,3$)

λ_1	n^*	m^*	$Q(n^*, m^*)$
I,2	66	29	0,049
I,3	36	I6	0,043
I,4	25	I2	0,043
I,5	I9	9	0,046
I,6	I6	8	0,033
I,7	I4	7	0,04I
I,8	I2	6	0,045
I,9	II	6	0,044
2,0	II	6	0,033
2,I	IO	5	0,036

Табл. 6 ($P_1 = 0,9, P_2 = 0,1$)

λ_1	n^*	m^*	$Q(n^*, m^*)$
I,2	54	I5	0,049
I,3	29	9	0,046
I,4	2I	7	0,042
I,5	I6	5	0,044
I,6	I3	5	0,046
I,7	I2	4	0,040
I,8	IO	4	0,046
I,9	IO	4	0,035
2,0	9	4	0,037
2,I	8	3	0,04I

Из анализа таблиц видно, что с увеличением $\lambda = \lambda_1 / \lambda_2$, как и следовало ожидать, оптимальное n^0 (а также и m^0) уменьшается, кроме того, с уменьшением отношения (P_1 / P_2) m^0 увеличивается.

Рассмотрим граничные случаи. Первый случай: $P_1 \gg P_2$. Тогда за уровень α можно принять вероятность P_2 , т.е. $Q(n, m) = \alpha = P_2$. Подставив в (6) $m = 1$, находим $Q(n, m = 1) = P_2$ для любых n . Последнее означает, что в данной ситуации вообще не нужно применять автомат-адаптер, а просто для распределения заявок по очередям использовать первую стратегию. Во втором случае ($P_2 \gg P_1$), наоборот, в качестве α можно принять вероятность P_1 , т.е. $Q(n, m) = \alpha = P_1$. Подставляя в (6) $m = n + 1$, находим $Q(n, m = n + 1) = P_1$ для любых n . Это означает, что в данной ситуации для распределения заявок по очередям нужно просто применить вторую стратегию (без использования автомата-адаптера).

6. Статистический эксперимент. Рассмотрим численный пример управления распределением заявок по очередям в УСМО, реализованный путём цифрового моделирования на ЭВМ. Эксперимент организован следующим образом: 1) задаются параметры λ_1, λ_2 входящих потоков заявок и априорные вероятности P_1, P_2 первого и второго состояний природы; 2) для данных значений параметров находятся оптимальные параметры автомата-адаптера n^0, m^0 и вероятность ошибки адаптации $Q(n^0, m^0)$ с использованием численного алгоритма их определения, описанного в предыдущем пункте; 3) задаётся время работы модели T ; 4) задаётся начальное состояние k автомата-адаптера и случайным образом (в соответствии с заданными вероятностями P_1, P_2) генерируется состояние природы, имеющее место на входе УСМО; 5) по окончании работы (в момент T) модели процесса распределения заявок по очередям определяются величины $t_1(T)$ (время, в течение которого применялась первая стратегия, хотя верна вторая), $t_2(T)$ (время, в течение которого применялась вторая стратегия, хотя верна первая) и вычисляется оценка вероятности ошибки адаптации $\hat{Q}_i(n^0, m^0) = \{ [t_1(T) + t_2(T)] / T \}_i$, полученная в данном (i -ом) цикле эксперимента ($i = \overline{1, N}$); 6) следующий цикл эксперимента (с целью получения выборочного среднего $\hat{Q}(n^0, m^0) = (1/N) \sum_{i=1}^N \hat{Q}_i(n^0, m^0)$) начинается с шага 4, причём начальное состояние k автомата-адаптера не изменяется; 7) после того как получено выборочное среднее, эксперимент продолжается с шага 3, при этом время T увеличивается

отся (с целью установления сходимости выборочного среднего ошибки адаптации $\hat{Q}(n^{\circ}, m^{\circ})$ к полученному на шаге 2 истинному значению вероятности ошибки адаптации $Q(n^{\circ}, m^{\circ})$).

Эксперименты проведены для $\lambda_1 = 1,8$, $\lambda_2 = 1,2$, $P_1 = 0,6$, $P_2 = 0,4$ (что соответствует $n^{\circ} = 15$, $m^{\circ} = 8$, $Q(n^{\circ}, m^{\circ}) = 0,045$), $k = 8$, $T = 10, 20, \dots, 100$. Результаты экспериментов приведены в виде графиков (см. рис. 3), где пунктиром обозначено истинное значение вероятности ошибки $Q(n^{\circ}, m^{\circ})$, кружками обозначены значения выборочных средних $\hat{Q}(n^{\circ}, m^{\circ})$ для различных T . Из анализа графика видно, что при увеличении T выборочное среднее сходится к истинному значению вероятности ошибки адаптации.

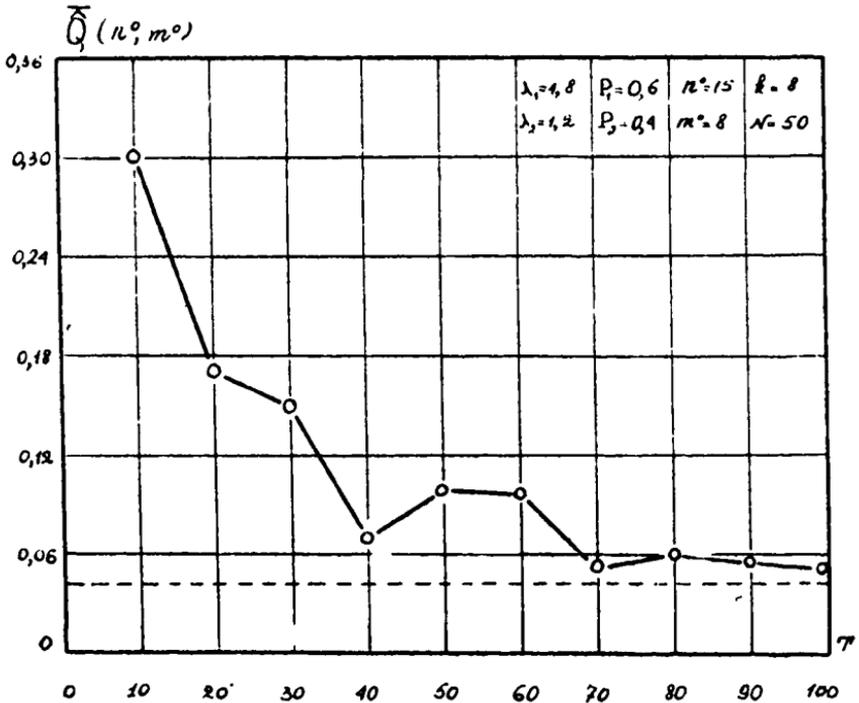


Рис. 3

7. Заключение. Отметим, что при рассмотрении данной модели предполагалась неизменность состояния природы во времени, неопределённость проявлялась только в незнании того, какое состояние

природы имеет место на самом деле на входе УСМО. Очевидно, что, если смена состояний природы образует некоторый временной процесс, то для правильного применения первой либо второй стратегий необходимо "непрерывно" идентифицировать состояние природы, имеющее место на входе УСМО, другими словами, адаптироваться к изменяющимся условиям входа УСМО. Предложенный в настоящей работе автомат может быть также использован в качестве адаптера и в этой более сложной ситуации. Однако в данном случае оптимальные параметры адаптера n° и m° очевидно будут отличаться от оптимальных параметров, полученных в настоящей статье.

Л и т е р а т у р а

1. Марчук Г.И., Котов В.Е. Проблемы вычислительной техники и фундаментальные исследования. - Автоматика и вычислительная техника, 1979, № 2, с3-14.
2. Якубайтис Э.А. Экспериментальная вычислительная сеть Академии наук Латвийской ССР.- Автоматика и вычислительная техника, 1979, № 2, с.15-19.
3. Растрингин Л.А. Структурная адаптация и многомашинные вычислительные системы.- В кн.: Структурная адаптация многомашинных систем обработки информации. Рига: Зинатне, 1978, с.3-5.
4. Горцев А.М. Системы массового обслуживания с адаптивной дисциплиной обслуживания.- В кн.: Структурная адаптация многомашинных систем обработки информации. Рига: Зинатне, 1978, с. 21-25.
5. Горцев А.М. Адаптивная модель управления резервной ЭВМ в вычислительной системе при больших нагрузках.- Автоматика и вычислительная техника, 1981, № 1, с. 44-51.
6. Горцев А.М., Ивонина Н.А., Проскурина Л.В. Адаптивное управление включением резервного канала в однолинейной системе массового обслуживания.- Автоматика и телемеханика, 1978, № 10, с. 78-86.
7. Горцев А.М., Поттосина С.А. Структурная адаптация двухлинейной системы массового обслуживания со вспомогательным прибором.- Автоматика и вычислительная техника, 1980, №5, с. 43-49.
8. Г'тля М.Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем.- М.: Наука, 1969.-316 с.

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

А.М. Горцев

Любую систему массового обслуживания (СМО) можно представить в виде некоторой формальной математической модели, основное содержание которой составляют связи и взаимодействия четырех основных компонент: 1) входящих потоков требований (λ), 2) механизмов и длительностей обслуживания (μ), 3) структуры системы (γ), 4) дисциплины обслуживания (δ). То есть СМО - это некоторый математический объект $S = S(\lambda, \mu, \gamma, \delta)$, зависящий от перечисленных выше компонент. В свою очередь, каждая компонента $\lambda, \mu, \gamma, \delta$ также задается вполне определенной математической моделью, зависящей от ряда параметров. Тогда можно определить управляемую систему массового обслуживания (УСМО) как некоторую математическую модель $S = S(\lambda, \mu, \gamma, \delta)$, если какой-либо из параметров, определяющий ту или иную компоненту $\lambda, \mu, \gamma, \delta$, допускает применение управляющих воздействий.

В дальнейшем рассмотрим более узкий класс УСМО - класс УСМО с переменной структурой, т.е. класс таких систем, которые в зависимости от возникшей ситуации тем или иным способом перестраивают свою структуру. Формально УСМО переменной структурой можно описать некоторым случайным процессом $S(t) = (i(t), j(t))$, где $i(t) = (i_1(t), \dots, i_n(t))$, $j(t) = (j_1(t), \dots, j_m(t))$; $i_k(t)$ - длина очереди заявок k -го типа, $i_k(t) = 0, 1, \dots$ (предполагается, что заявки k -го типа выстраиваются в отдельные очереди, т.е. n - количество очередей); $j_j(t) = 0, 1, \dots, n$. Здесь числа $1, \dots, n$ означают номер бункера, к которому подключен j -й обслуживающий прибор (m - количество обслуживающих приборов), число 0 обозначает фиктивный бункер, т.е. если $j_j(t) = 0$, то это означает, что j -й обслуживающий прибор находится в резерве. Отметим особую роль фиктивного бункера, последний как раз и обеспечивает переменность во времени структуры СМО: если обслу-

живающий прибор подключается к фиктивному бункеру, то количество обслуживающих приборов уменьшается, наоборот при отключении обслуживаемого прибора от фиктивного бункера количество обслуживающих приборов увеличивается. В дальнейшем будем предполагать, что процесс $S(t)$ - марковский процесс, и под состоянием системы в момент t будем понимать совокупность чисел $(i_1(t), \dots, i_n(t), j_1(t), \dots, j_m(t))$. Особенностью управляемых СМО является то, что управляющие воздействия, как правило, совпадают с моментами перехода системы из одного состояния в другое. В рассматриваемом случае изменения состояния возможны либо за счет поступления в систему заявки того или иного типа (предполагается, что потоки заявок ординарные), либо за счет взятия на обслуживание тем или иным прибором следующей заявки того или иного типа, либо, наконец, за счет подключения (или отключения) обслуживаемого прибора к фиктивному бункеру. Управляющими воздействиями при этом являются: подключение обслуживаемого прибора к фиктивному бункеру (переход в резерв), отключение обслуживаемого прибора от фиктивного бункера (выход из резерва), взятие на обслуживание тем или иным прибором заявки того или иного типа. Таким образом, для того, чтобы определить дисциплину обслуживания, необходимо рассмотреть вопрос о том, какие управляющие воздействия возможны в моменты изменения состояния системы. Будем предполагать, что прерывание обслуживания в данной системе не имеет места. Тогда в момент прихода заявки k -го типа возможны два управляющих воздействия: 1) выход некоторого обслуживаемого прибора из резерва (только одного, относительно которого выносятся решения) и его подключение к обслуживанию требования того или иного типа (подключение прибора к k -му бункеру, $k = \overline{1, n}$), 2) не подключение рассматриваемого резервного прибора к k -му бункеру, $k = \overline{1, n}$ (т.е. данный прибор остается подключенным к фиктивному бункеру). В момент окончания обслуживания j -ым прибором также возможны два управляющих воздействия: 1) подключение обслуживаемого прибора к фиктивному бункеру (переход в резерв), 2) не подключение обслуживаемого прибора к фиктивному бункеру и взятие на обслуживание заявки k -го типа (подключение обслуживаемого прибора к k -му бункеру, $k = \overline{1, n}$).

Таким образом, под дисциплиной обслуживания будем понимать закон, в соответствии с которым тот или иной обслуживающий прибор в момент прихода заявки того или иного типа или в момент оконча-

ния обслуживания берёт на обслуживание заявку из того или иного бункера, включая и фиктивный бункер.

Введём в рассмотрение величину $f_{jk}^j(i, j)$ - условная вероятность того, что в момент изменения состояния системы j - й обслуживающий прибор ($j = \overline{1, m}$) берет на обслуживание заявку из k - го бункера ($k = \overline{0, n}$), при условии, что система находится в состоянии $S = (i, j)$.

Отметим, что момент изменения состояния связан здесь либо с приходом в систему заявки того или иного типа, либо с окончанием обслуживания тем или иным прибором. В силу этого, если система находилась в состоянии $S' = (i, j)'$ и перешла в состояние $S = (i, j)$, то состояние S' отличается от состояния S значением только одной компоненты: в первом случае значением компоненты вектора i (в систему поступила, скажем заявка k - го типа, при этом компонента i_k приняла значение $i_k + 1$), во втором случае значением компоненты вектора j (j - й прибор окончил обслуживание, т.е. стал свободен, при этом компонента j_j приняла значение, равное нулю). После этого происходит дальнейшее изменение состояния системы из $S = (i, j)$ в $S'' = (i, j)''$ в соответствии с введенными условными вероятностями $f_{jk}^j(i, j)$ ($j = \overline{1, m}$, $k = \overline{0, n}$). Будем предполагать, что данные изменения состояния системы происходят мгновенно, в итоге система мгновенно переходит из состояния $S' = (i, j)'$ в состояние $S'' = (i, j)''$. Подчеркнем, что при этом состояние S' может отличаться от состояния S'' значениями либо одной, либо трех компонент, если изменение состояния системы связано с приходом в систему заявки k - го типа. Изменение на одну компоненту имеет место в двух случаях: 1) если принимается решение о неподключении рассматриваемого r - го резервного прибора к одному из n бункеров (имеет место изменение в k - й компоненте вектора i : в состоянии S' значение есть i_k , в состоянии S'' - $i_k + 1$); 2) если принимается решение о подключении рассматриваемого r - го резервного прибора именно к k - му бункеру (имеет место изменение в r - й компоненте вектора j : в состоянии S' её значение есть 0, в состоянии S'' - k). Изменение на три компоненты имеет место, если принимается решение о подключении рассматриваемого r - го резервного прибора к бункеру с номером q ($q \neq k$), тогда имеет место изменения: 1) в k - й компоненте вектора i (в состоянии S' её значение есть i_k , в состоянии S'' - $i_k + 1$);

2) в r -й компоненте вектора j (в состоянии S' $j_r = 0$, в состоянии S'' $j_r = \tau$); 3) в q -й компоненте вектора i (в состоянии S' её значение есть i_q , в состоянии S'' её значение есть $i_q - 1$). Если изменение состояния системы связано с окончанием обслуживания j -м прибором, то при этом состояние S' может отличаться от состояния S'' значениями либо одной, либо двух компонент. Изменение на одну компоненту имеет место в двух случаях: 1) если принимается решение о подключении j -го обслуживающего прибора к фиктивному бункеру, тогда имеет место изменение в j -й компоненте вектора j : в состоянии S' её значение j_j , скажем равно τ (обслуживалась заявка τ -го типа, $\tau = \overline{1, n}$), в состоянии S'' $j_j = 0$; 2) если принимается решение о подключении j -го прибора, освободившегося от обслуживания заявки τ -го типа, именно к бункеру с номером τ , тогда имеет место изменение в τ -й компоненте вектора i : в состоянии S' её значение равно i_τ , в состоянии S'' её значение есть $i_\tau - 1$. Изменение на две компоненты имеет место, если принимается решение о подключении j -го прибора (подключенного в состоянии S' к τ -му бункеру) к бункеру с номером q ($q \neq \tau$), тогда осуществляются изменения: 1) в q -й компоненте вектора i (в состоянии S' её значение есть i_q , в состоянии S'' $i_q - 1$), 2) в j -й компоненте вектора j (в состоянии S' $j_j = \tau$, в состоянии S'' $j_j = q$).

Таким образом, дисциплина обслуживания в УСМО с переменной структурой определяется матрицей условных вероятностей $\delta(S) = \delta(i, j) = \|\delta_{jk}(i, j)\|$ ($j = \overline{1, m}$, $k = \overline{0, n}$), причем $\sum_{k=0}^n \delta_{jk}(i, j) = 1$, $j = \overline{1, m}$, $0 \leq \delta_{jk}(i, j) \leq 1$ для всех j, k и всех состояний $S = (i, j)$. В дальнейшем будем рассматривать стационарные режимы работы УСМО. Как известно, поведение процесса $S(t) = (i(t), j(t))$ определяется динамической матрицей процесса $Q = \|q_{ss'}\|$, где $q_{ss'}$ - инфинитезимальные характеристики (интенсивности переходов из состояния S в состояние S'). Как будет видно из рассмотрения конкретных систем, величины $q_{ss'}$ можно представить в виде $q_{ss'} = a_{ss'} + b_{ss'}$, где $a_{ss'}, b_{ss'}$ - некоторые коэффициенты, $\delta(S, S')$ - рандомизированные управления, имеющие смысл вероятностей ($\sum_{S'} \delta(S, S') = 1$, $0 \leq \delta(S, S') \leq 1$), причем рандомизированные управления $\delta(S, S')$ определённым образом зависят от введенных выше условных вероятностей $\delta_{jk}(i, j)$. Набор $\delta(S, S')$ образует матрицу управлений δ .

В качестве первого примера УСМО с переменной структурой рассмотрим однолинейную СМО с несимметричным резервным каналом [1,2]. Для данной системы $n = 1$, $m = 2$, $S = (i_1, j_1, j_2)$, $i_1 \geq 0$, $j_1 = 1$, $j_2 = 0, 1$, т.е. первый обслуживающий прибор не может подключаться к фиктивному бункеру (не может переходить в резерв). В силу этого состояние системы описывается двумерным вектором $S = (i_1, j_2)$. Дисциплина обслуживания определяется матрицами

$$D(i_1, 0) = \| \delta_{20}^0(i_1, 0) \quad \delta_{21}^0(i_1, 0) \| = \| \delta_1^0(i_1, 0) \quad 1 - \delta_2^0(i_1, 0) \|,$$

$$D(i_1, 1) = \| \delta_{20}^1(i_1, 1) \quad \delta_{21}^1(i_1, 1) \| = \| \delta_2^1(i_1, 1) \quad 1 - \delta_2^1(i_1, 1) \|,$$

где $\delta_2^0(i_1, 0)$ - условная вероятность того, что второй (резервный) прибор не подключается к обслуживанию в момент прихода заявки, а остается в резерве, $\delta_2^1(i_1, 1)$ - условная вероятность того, что второй прибор после окончания обслуживания отключается, т.е. переходит в резерв. Рассмотрим состояние $(i_1, 0)$, при котором второй прибор находится в резерве. Из состояния $(i_1, 0)$ возможны переходы в состояния $(i_1 + 1, 0)$, $(i_1, 1)$, $(i_1 - 1, 0)$. Переход из состояния $S = (i_1, 0)$ в состояние $S' = (i_1 + 1, 0)$ осуществляется в момент прихода заявки с интенсивностью $q_{2S, S'} = \lambda \delta_2^0(i_1 + 1, 0)$, здесь λ - параметр входящего потока заявок. В данном случае $a_{2S, S'} = 0$, $b_{2S, S'} = \lambda$, $d^0(S, S') = \delta_2^0(i_1 + 1, 0)$. Переход из состояния $S = (i_1, 0)$ в состояние $S' = (i_1, 1)$ осуществляется также в момент прихода заявки с интенсивностью $q_{2S, S'} = \lambda [1 - \delta_2^0(i_1 + 1, 0)] = \lambda - \lambda \delta_2^0(i_1 + 1, 0)$. В данном случае $a_{2S, S'} = \lambda$, $b_{2S, S'} = -\lambda$, $d^0(S, S') = \delta_2^0(i_1 + 1, 0)$. Переход из состояния $S = (i_1, 0)$ в состояние $S' = (i_1 - 1, 0)$ осуществляется в момент окончания обслуживания первым прибором с интенсивностью $q_{2S, S'} = \mu_1$, здесь μ_1 - интенсивность обслуживания первым прибором. В данном случае $a_{2S, S'} = \mu_1$, $b_{2S, S'} = 0$. Рассмотрим состояние $(i_1, 1)$, при котором второй прибор подключен к бункеру. Из состояния $(i_1, 1)$ возможны переходы в состояния $(i_1, 0)$, $(i_1 - 1, 1)$, $(i_1 + 1, 1)$. Переход из состояния $S = (i_1, 1)$ в состояние $S' = (i_1, 0)$ осуществляется в момент окончания обслуживания вторым прибором с интенсивностью $q_{2S, S'} = \mu_2 \delta_2^1(i_1, 1)$, здесь μ_2 - интенсивность обслуживания вторым прибором. В данном случае $a_{2S, S'} = 0$, $b_{2S, S'} = \mu_2$, $d^1(S, S') = \delta_2^1(i_1, 1)$. Переход из состояния $S = (i_1, 1)$ в состояние $S' = (i_1 - 1, 1)$ осуществляется двумя путями: 1) в момент окон-

чания обслуживания первым прибором с интенсивностью μ_1 , 2) в момент окончания обслуживания вторым прибором с интенсивностью $\mu_2 [1 - \delta_2(i_1, 1)]$. Таким образом, интенсивность перехода из состояния $S = (i_1, I)$ в состояние $S' = (i_1 - 1, I)$ есть $q_{SS'} = (\mu_1 + \mu_2) - \mu_2 \delta_2^2(i_1, I)$. В данном случае $a_{SS'} = -\mu_1 + \mu_2$, $b_{SS'} = -\mu_2$, $\sigma^2(S, S') = \delta_2^2(i_1, I)$. Наконец, переход из состояния $S = (i_1, I)$ в состояние $S' = (i_1 + 1, I)$ осуществляется в момент прихода заявки с интенсивностью $q_{SS'} = \lambda$. В данном случае $a_{SS'} = \lambda$, $b_{SS'} = 0$.

В качестве второго примера рассмотрим одноканальную систему с динамическими приоритетами [3]. Для данной системы $n = 2$, $m = 1$, $S = (i, j_1) = (i_1, i_2, j_1)$, $i_1 \geq 0$, $i_2 \geq 0$, $j_1 = 1, 2$, т.е. обслуживающий прибор не может подключаться к фиктивному бункеру (не может переходить в резерв). Дисциплина обслуживания определяется матрицами

$$D^1(i, 1) = \|\delta_{i_1}^1(i_1, i_2, 1) \delta_{i_2}^1(i_1, i_2, 1)\| = \|\delta_{i_1}^1(i_1, i_2, 1) 1 - \delta_{i_2}^1(i_1, i_2, 1)\|,$$

$$D^2(i, 2) = \|\delta_{i_1}^2(i_1, i_2, 2) \delta_{i_2}^2(i_1, i_2, 2)\| = \|\delta_{i_2}^2(i_1, i_2, 2) 1 - \delta_{i_1}^2(i_1, i_2, 2)\|,$$

где $\delta_{i_1}^j(i_1, i_2, j_1)$ - условная вероятность того, что в момент окончания обслуживания очередная заявка берется на обслуживание из первого бункера при условии, что прибор был подключен к бункеру с номером j_1 . Рассмотрим состояние (i_1, i_2, I) , при котором обслуживающий прибор подключен к первому бункеру. Из состояния $S = (i_1, i_2, I)$ возможны переходы в состояния $(i_1 + 1, i_2, I)$, $(i_1, i_2 + 1, I)$, $(i_1 - 1, i_2, I)$, $(i_1, i_2 - 1, I)$. Переход в состояние $S' = (i_1 + 1, i_2, I)$ осуществляется в момент прихода заявки 1-го типа с интенсивностью $q_{SS'} = \lambda_1$, где λ_1 - параметр входящего потока заявок первого типа (в данном случае $a_{SS'} = \lambda_1$, $b_{SS'} = 0$). Аналогично переход в состояние $S' = (i_1, i_2 + 1, I)$ происходит с интенсивностью $q_{SS'} = \lambda_2$ в момент прихода заявки 2-го типа, где λ_2 - параметр входящего потока заявок 2-го типа (здесь $a_{SS'} = \lambda_2$, $b_{SS'} = 0$). Переход в состояние $S' = (i_1 - 1, i_2, I)$ осуществляется с интенсивностью $q_{SS'} = \mu_1 \delta_1^2(i_1, i_2, I)$ в момент окончания обслуживания прибором очередной заявки 1-го типа (здесь $a_{SS'} = 0$, $b_{SS'} = -\mu_1$, $\sigma^2(S, S') = \delta_1^2(i_1, i_2, I)$). Наконец, переход из состояния $S = (i_1, i_2, I)$ в состояние $S' = (i_1, i_2 - 1, I)$ осуществляется также в момент окончания обслуживания прибором заявки первого типа с интенсивностью $q_{SS'} = \mu_1 - \mu_1 \delta_1^2(i_1, i_2, I)$ (в данном случае $a_{SS'} = \mu_1$, $b_{SS'} = -\mu_1$, $\sigma^2(S, S') = \delta_1^2(i_1, i_2, I)$). Здесь μ_1 - интенсивность

обслуживания прибором заявок первого типа. Аналогично рассматриваются переходы из состояния $\sum = (i_1, i_2, i)$, т.е. состояния, в котором прибор подключен ко второму бункеру, в состояния $(i_1+1, i_2, 2)$, $(i_1, i_2+1, 2)$, $(i_1, i_2-1, 2)$, $(i_1-1, i_2, 1)$.

Для нахождения оптимальных управлений (оптимальной дисциплины обслуживания) необходимо задаться некоторым критерием оптимальности. Для задания этого критерия необходимо точно представить, где и какие потери несёт УСМО. Все потери можно разбить на три типа: 1) потери, возникающие в обслуживаемых устройствах, 2) потери, возникающие от находящихся в СМО требований, 3) потери на управление. В свою очередь, потери, возникающие в обслуживаемых устройствах, можно также разбить на несколько типов потерь:

1) Потери от включения и выключения обслуживаемого прибора. При включении резервного и выключении обслуживаемого прибора в УСМО возникают (могут возникнуть) некоторые потери, связанные с изменением состояния резервного и обслуживаемого приборов. Величина этих потерь, как правило, пропорциональна частотам включения и выключения обслуживаемых приборов.

2) Потери на переориентацию. Так как обслуживаемое устройство может обслуживать заявки различных типов, то переход от обслуживания одного типа требований к другому вызывает необходимость в переналадке (переориентации, перестройке) обслуживаемого прибора, что влечёт за собой определённые потери. Величина этих потерь, как правило, пропорциональна частоте переналадок. Кроме того, подчеркнём, что учёт потерь на переориентацию обычно приводит к возникновению в УСМО гистерезисных явлений.

3) Потери в связи с амортизацией обслуживаемого прибора. Функционирование обслуживаемого устройства связано с его износом, с потерями на его обслуживание и т.д. Эти потери объединяются под термином потерь в связи с амортизацией. Данные потери обычно пропорциональны времени функционирования обслуживаемого устройства, а их математическое ожидание пропорционально вероятности работы обслуживаемого прибора.

Второй тип потерь — потери, возникающие от находящихся в УСМО требований, также могут иметь несколько видов. Самая главная причина этих потерь — потери от простоя требований в очередях, поэтому величина этих потерь зависит от времени ожидания или от времени пребывания требования в УСМО. Подчеркнём, что в реальных системах величина этих потерь не всегда пропорциональна времени

ожидания. В частности, если требованиями являются контейнеры со скоропортящимися продуктами, то очевидно, что при малых временах ожидания величина этих потерь пропорциональна времени ожидания,

однако, если время ожидания велико, то продукт в контейнере испортится весь и потери, достигнув некоторой максимальной величины, перестанут далее увеличиваться. Вследствие этого потери за ожидание естественно брать в виде некоторой нелинейной функции от времени ожидания. Однако анализ и оптимизация управлений в УСМО при этом становится чрезвычайно затруднительными. Вследствие этого делается некоторая аппроксимация потерь от ожидания, т.е. потери представляются не в виде функции от времени ожидания, а в виде некоторой функции от длин очередей. Оправданием этому служит тот факт, что при больших очередях длина очереди почти однозначно определяет время ожидания, поэтому функцию потерь от времени можно заменить функцией от длин очередей.

Наконец, последний тип потерь - потери на управление. Данные потери связаны с моментами изменения состояния системы, и УСМО несет при этом потери от применяемого управления, если в эти моменты осуществляются управляющие воздействия. Подчеркнем, что рассмотренные выше потери от включения и выключения обслуживаемого устройства, потери на переориентацию прибора можно отнести и к потерям на управление.

Совершенно не обязательно, чтобы в изучаемой УСМО присутствовали все перечисленные виды потерь, некоторые из потерь могут быть настолько малы, что ими можно будет пренебречь и исключить из рассмотрения. В качестве критерия оптимальности естественно выбрать математическое ожидание функции потерь. Сама же задача оптимизации управлений в УСМО будет тогда заключаться в отыскании минимума критерия оптимальности по набору управлений δ . Подчеркнем, что при малом времени работы УСМО существенную роль при её анализе и синтезе играют переходные процессы и начальное состояние УСМО. Если же УСМО функционирует достаточно долго (идеальный случай - бесконечно долго), то при определенных условиях в ней устанавливается стационарный режим работы, поэтому переходными процессами, играющими роль лишь на начальном этапе функционирования УСМО, можно пренебречь. Вследствие этого критерий оптимальности определяется как математическое ожидание функции потерь по стационарному (финальному) распределению вероятностей состояний УСМО, которое устанавливается в стационар-

ном режиме работы системы.

Функцию потерь запишем в виде

$$Q(s) = F(s) + \frac{1}{\Delta t} \sum_{s' \neq s} C_{ss'} I(t_{ss'}, t, t + \Delta t), \quad (I)$$

где

$$I(t_{ss'}; t, t + \Delta t) = \begin{cases} 1, & t = t_{ss'} \leq t + \Delta t, \\ 0, & t_{ss'} < t, t_{ss'} > t + \Delta t, \end{cases}$$

если переход из s -го состояния в s' -е произошел и $I(t_{ss'}; t, t + \Delta t) = 0$ в противном случае; $F(s)$ - потери за пребывание системы в s -ом состоянии в единицу времени, включающие в себя потери от ожидания заявок в очереди и потери в связи с амортизацией; $C_{ss'}$ - потери на управление, связанные с переходом системы из состояния s в состояние s' ; $t_{ss'}$ - моменты таких переходов, т.е. второе слагаемое в (I) есть потери на управление в единицу времени; Δt - достаточно малый интервал времени; t - текущее время. Функция $Q(s)$ не зависит от t , так как рассматривается стационарный режим работы. Тогда критерий оптимальности запишется в виде

$$\begin{aligned} L(\delta) &= H\{Q(s)\} = \sum_s P_s(\delta) F(s) + \sum_s \sum_{s' \neq s} P_s(\delta) q_{ss'} C_{ss'} = (2) \\ &= \sum_s P_s(\delta) F(s) + \sum_s \sum_{s' \neq s} P_s(\delta) a_{ss'} C_{ss'} + \sum_s \sum_{s' \neq s} P_s(\delta) b_{ss'} c'(s, s') C_{ss'}, \end{aligned}$$

где $P_s(\delta)$ - финальные вероятности состояний УСМО.

Изложим методы решения поставленной задачи об оптимизации управления.

I. Прямой метод. Сущность прямого метода заключается в решении системы уравнений для стационарного распределения вероятностей состояний $P_s(\delta)$ [4]:

$$\begin{aligned} \sum_{s \neq s'} P_s(\delta) q_{ss'} - P_{s'}(\delta) q_{s's} &= \sum_{s \neq s'} P_s(\delta) [a_{ss'} + b_{ss'} \delta'(s, s')] - (3) \\ - P_{s'}(\delta) [a_{s's} + b_{s's} \delta'(s', s')] &= 0, \quad \forall s'; \quad \sum_s P_s(\delta) = 1. \end{aligned}$$

Если решение системы (3) найдено, то принципиальных трудностей при решении задачи оптимизации управления не возникает, так как знание финальных вероятностей $P_s(\delta)$ позволяет получить явный вид критерия оптимальности (2) в зависимости от $\delta'(s, s')$. Трудность в применении такого подхода заключается в том, что явный вид стационарных вероятностей удается найти далеко не всегда, однако, если это удается, то задача об оптимальном управ-

мального управления часто решается аналитически.

2. Метод линейного программирования. Метод линейного программирования при оптимизации управлений предлагается в работах [5,6]. Сущность метода заключается в следующем. Вводятся новые переменные $x_{s,s'} = \rho_s(\delta) \delta'(s, s')$. Тогда критерий оптимальности (2) и система уравнений (3) примут вид

$$\sum_{s, s'} x_{s, s'} \bar{F}(s) + \sum_{s, s'} a_{s, s'} x_{s, s'} C_{s, s'} + \sum_{s'} \sum_{s} x_{s, s'} b_{s, s'} C_{s, s'} \Rightarrow \min, \quad (4)$$

$$\sum_{s, s'} \sum_{s'} x_{s, s'} a_{s, s'} - \sum_{s'} x_{s, s'} a_{s, s'} + \sum_{s, s'} b_{s, s'} x_{s, s'} - b_{s, s'} x_{s, s'} = 0, \\ \forall s'; \sum_{s, s'} x_{s, s'} = 1, x_{s, s'} \geq 0, \forall s, s',$$

где принято во внимание, что $\rho_s(\delta) = \sum_{s'} x_{s, s'}$. Полученная задача является стандартной задачей линейного программирования. Зная величины $x_{s, s'}$, доставляющие минимум функции (4), можно найти и оптимальные управления $\delta^0(s, s') = x_{s, s'} / \sum_{s'} x_{s, s'}$.

3) Метод динамического программирования. Одной из первых работ, где метод динамического программирования применяется для определения оптимальных однородных марковских управлений, является работа Ховарда [7]. Применительно к оптимизации управлений в УСМО метод динамического программирования изложен в главе I монографии [8].

Общая схема метода при принятой функции потерь (I) и инфинитезимальных коэффициентах, представимых в виде $\gamma_{s, s'} = a_{s, s'} + b_{s, s'} \delta'(s, s')$, выглядит следующим образом.

Введём функционал (преобразование Лапласа-Карсона от условного математического ожидания функции потерь (I))

$$\Phi(s, \alpha) = \min_{\delta} \left[\alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha(\tau-t)} M \{ G[s(\tau)] / s(t) = s \} d\tau \right], \quad (5)$$

здесь минимум ищется по набору управлений $\delta = \{ \delta'(s, s') \}$. Подчеркнём, что моменты перехода из состояния s в состояние s' образуют счётное множество, вследствие этого момент времени t не совпадает с моментами $t_{s, s'}$, т.е. моментами перехода системы из состояния в состояние. Кроме того, так как рассматривается стационарный режим работы УСМО, то (5) не зависит от t . Разобьём промежуток интегрирования $[t, \infty)$ на два промежутка $[t, t + \Delta t)$, $[t + \Delta t, \infty)$, где Δt - достаточно малый интервал времени. Тогда имеем

$$\Phi(s, \alpha) = \min_{\delta} \left[\alpha \int_t^{t+\Delta t} e^{-\alpha(\tau-t)} M \{ G[s(\tau)] / s(t) = s \} d\tau + (6) \right]$$

$$+ \Delta t e^{-\Delta t} \int_{t+\Delta t}^{\infty} e^{-\Delta(\tau-t-\Delta t)} M\{Q[S(\tau)]/S(t) = S\} d\tau].$$

Учитывая марковость и принимая во внимание, что за время Δt система перейдет в состояние $S' \neq S$ с вероятностью $q_{SS'}$, Δt и останется в состоянии S с вероятностью $1 - q_{SS}$ Δt ($q_{SS} = \sum_{S' \neq S} q_{SS'}$), имеем с точностью до членов $O(\Delta t)$

$$M\{Q[S(\tau)]/S(t) = S\} = (1 - q_{SS} \Delta t) M\{Q[S(\tau)]/S(t+\Delta t) = S\} + \sum_{S' \neq S} q_{SS'} \Delta t M\{Q[S(\tau)]/S(t+\Delta t) = S'\} + O(\Delta t).$$

Тогда первое слагаемое в квадратных скобках выражения (6) примет вид

$$\Delta \int_t^{t+\Delta t} e^{-\Delta(\tau-t)} M\{Q[S(\tau)]/S(t) = S\} d\tau = \Delta \Delta t F(S) + \Delta \Delta t \sum_{S' \neq S} q_{SS'} C_{SS'} + O(\Delta t).$$

Второе слагаемое в квадратных скобках выражения (6) примет вид

$$\Delta e^{-\Delta \Delta t} \int_{t+\Delta t}^{\infty} e^{-\Delta(\tau-t-\Delta t)} M\{Q[S(\tau)]/S(t) = S\} d\tau =$$

$$= e^{-\Delta \Delta t} [(1 - q_{SS} \Delta t) \tilde{\Phi}(S, \Delta) + \sum_{S' \neq S} q_{SS'} \Delta t \tilde{\Phi}(S', \Delta) + O(\Delta t)],$$

где через $\tilde{\Phi}(S, \Delta)$ обозначена правая часть (5) без символа \min по \mathcal{J} . Таким образом, (6) перепишется в виде

$$\Phi(S, \Delta) = \min_{\mathcal{J}} [\Delta F(S) \Delta t + \Delta \Delta t \sum_{S' \neq S} q_{SS'} C_{SS'} + e^{-\Delta \Delta t} \{(1 - q_{SS} \Delta t) \tilde{\Phi}(S, \Delta) + \sum_{S' \neq S} q_{SS'} \Delta t \tilde{\Phi}(S', \Delta)\} + O(\Delta t)].$$

Учитывая, что $e^{-\Delta \Delta t} = 1 - \Delta \Delta t + O(\Delta t)$, имеем

$$\Phi(S, \Delta) = \min_{\mathcal{J}} [\Delta \Delta t F(S) + \Delta \Delta t \sum_{S' \neq S} q_{SS'} C_{SS'} + (1 - q_{SS} \Delta t - \Delta \Delta t) \tilde{\Phi}(S, \Delta) + \sum_{S' \neq S} q_{SS'} \Delta t \tilde{\Phi}(S', \Delta) + O(\Delta t)].$$

Пусть $\mathcal{J}_S = (\mathcal{J}(S, S'), \mathcal{J}(S, S''), \dots)$ - набор управлений на промежутке $[t, t + \Delta t)$, $\mathcal{J}' = \{\mathcal{J}(S, S')\}'$ - набор управлений на промежутке $[t + \Delta t, \infty)$. Тогда, применяя принцип оптимальности Беллмана, находим

$$\Phi(S, \Delta) = \min_{\mathcal{J}_S} [\Delta \Delta t F(S) + \Delta \Delta t \sum_{S' \neq S} q_{SS'} C_{SS'} + (1 - q_{SS} \Delta t - \Delta \Delta t) \Phi(S, \Delta) + \sum_{S' \neq S} q_{SS'} \Delta t \Phi(S', \Delta) + O(\Delta t)].$$

Сокращая $\Phi(S, \Delta)$, деля левую и правую части равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем уравнение, определяющее $\Phi(S, \Delta)$:

$$\Delta F(S) + \min_{\mathcal{J}_S} [\Delta \sum_{S' \neq S} q_{SS'} C_{SS'} + \sum_{S' \neq S} q_{SS'} \Phi(S', \Delta) - (1 + q_{SS}) \Phi(S, \Delta)] = 0. \quad (7)$$

Подчеркнем, что в силу предпосылок рассматриваемый процесс является эргодическим, тогда для оптимального управления имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} M^0 \{ Q[s(\tau)] / s(t) = s \} = M^0 \{ Q(s) \} = \min_{\rho} L = L^0.$$

С другой стороны, в силу того, что $\Phi(s, \alpha)$ есть преобразование Лалласа-Карсона от условного математического ожидания при применении оптимального управления, то для $\Phi(s, \alpha)$ справедлива предельная теорема

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Phi(s, \alpha) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} M^0 \{ Q[s(\tau)] / s(t) = s \} = L^0.$$

Отсюда следует, что $\Phi(s, 0) = L^0$. Будем далее предполагать, что

$$\int_t^{\infty} [M^0 \{ Q[s(\tau)] / s(t) = s \} - L^0] d\tau < +\infty.$$

Тогда существует $\Phi'_\alpha(s, 0) = \varphi(s)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \Phi'_\alpha(s, 0) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{ [\Phi(s, \alpha) - L^0] / \alpha \} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_t^{\infty} e^{-\alpha(\tau-t)} \times \\ &\times [M^0 \{ Q[s(\tau)] / s(t) = s \} - L^0] d\tau = \\ &= \int_t^{\infty} [M^0 \{ Q[s(\tau)] / s(t) = s \} - L^0] d\tau < +\infty. \end{aligned}$$

Вследствие этого $\Phi(s, \alpha)$ представима в виде

$$\Phi(s, \alpha) = L^0 + \alpha \varphi(s) + o(\alpha). \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), деля левую и правую части равенства на α и переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, получим уравнение

$$L^0 = F(s) + \min_{\delta_s} \left\{ \sum_{s' \neq s} q_{ss'} [C_{ss'} + \varphi(s') - \varphi(s)] \right\}. \quad (9)$$

Так как $q_{ss'} = a_{ss'} + b_{ss'} c^p(s, s')$, то, подставляя $q_{ss'}$ в (9), находим

$$L^0 = F(s) + \sum_{s' \neq s} a_{ss'} [C_{ss'} + \varphi(s') - \varphi(s)] + \min_{\delta_s} \left\{ \sum_{s' \neq s} b_{ss'} \times \right. \quad (10)$$

$$\left. \times c^p(s, s') [C_{ss'} + \varphi(s') - \varphi(s)] \right\}.$$

Выражение под знаком минимума в (10) является линейной функцией по $\delta^p(s, s')$. Вследствие этого для нахождения оптимальных $\delta^p(s, s')$ необходимо определить $\min_{\delta_s} b_{ss'} [C_{ss'} + \varphi(s') - \varphi(s)]$, заметим, что $C_{ss} = 0$. Если этот минимум достигается при $s' = s^0$, то

$$\delta^p(s, s') = \begin{cases} 1, & s' = s^0, \\ 0, & s' \neq s^0. \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, из (I0) и (II) следует два вывода: I) в системах, у которых инфинитезимальные коэффициенты представимы в виде $\gamma_{ss'} = a_{ss'} + b_{ss'} \delta(s; s')$ и критерий оптимальности задан выражением (2), оптимальные управления принадлежат классу нерандомизированных стратегий, 2) полученные из (I0) оптимальные нерандомизированные управления (II) доставляют глобальный минимум критерия оптимальности (2).

Уравнение (I0) с учетом (II) переписывается в виде

$$L^0 = F(s) + \sum_{s' \neq s} a_{ss'} [c_{ss'} + \Psi(s') - \Psi(s)] + \min_{s'} b_{ss'} [c_{ss'} + \Psi(s') - \Psi(s)]. \quad (I2)$$

Полученные соотношения (II) и (I2) являются основными соотношениями, определяющими оптимальное управление в УСМО. Так как уравнение (I2) справедливо для любых s , то уравнение (I2) представляет собой систему (конечную или бесконечную) алгебраических уравнений относительно неизвестных L^0 и $\Psi(s)$. Отметим, что данные уравнения определяют неизвестные $\Psi(s)$ с точностью до постоянного слагаемого, так как они входят в (I2) в виде разностей $\Psi(s') - \Psi(s)$, однако, так как оптимальные управления зависят лишь от этих разностей, то постоянное слагаемое не изменяет величин $\delta^0(s, s')$ и L^0 . Для однозначного определения $\Psi(s)$ необходимо добавить ещё одно уравнение $\sum_s p_s(\beta) \cdot \Psi(s) = 0$, которое вытекает из очевидного равенства $\sum_s p_s(\beta) \cdot \Phi(s, \alpha) = L^0$.

Аналитическое решение уравнений (I2) возможно лишь в редких случаях. При численном решении уравнений (I2) естественно воспользоваться методом последовательных приближений в пространстве стратегий [7], который в данном случае будет выглядеть следующим образом.

Пусть $\delta_1(s, s')$ - некоторое начальное управление. Тогда, решая конечную систему уравнений:

$$L^0 = F(s) + \sum_{s' \neq s} (a_{ss'} + b_{ss'} \delta_1(s, s')) [c_{ss'} + \Psi_1(s') - \Psi_1(s)],$$

определим L_1^0 и, с точностью до постоянного слагаемого, $\Psi_1(s)$. Следующее приближение $\delta_2(s, s')$ найдем из условия: $\delta_2(s, s') = -1$ для $s' = s^0$ и $\delta_2(s, s') = 0$ для $s' \neq s^0$, где s^0 есть значение s' , при котором достигается минимум выражения $b_{ss'} [c_{ss'} + \Psi_1(s') - \Psi_1(s)]$. Повторяя этот процесс, получим последовательность управлений $\delta_1(s, s'), \delta_2(s, s'), \dots, \delta_n(s, s')$ и

последовательность значений критерия оптимальности $L_1^0, L_2^0, \dots, L_n^0$. Покажем, что последовательность L_1^0, \dots, L_n^0 - невозрастающая последовательность. Имеем

$$L_j^0 - L_{j+1}^0 = \sum_{s' \neq s} q_{ss'}^{(j)} [C_{ss'} + \varphi_j(s') - \varphi_j(s)] - \sum_{s' \neq s} q_{ss'}^{(j+1)} [C_{ss'} + \varphi_{j+1}(s') - \varphi_{j+1}(s)].$$

В соответствии с алгоритмом следующее приближение $d_{j+1}^0(s, s')$ находится из условия минимума $\sum_{s' \neq s} q_{ss'}^{(j)} [C_{ss'} + \varphi_j(s') - \varphi_j(s)]$, тогда

$$L_j^0 - L_{j+1}^0 \geq \sum_{s' \neq s} q_{ss'}^{(j+1)} [C_{ss'} + \varphi_j(s') - \varphi_j(s)] - \sum_{s' \neq s} q_{ss'}^{(j+1)} [C_{ss'} + \varphi_{j+1}(s') - \varphi_{j+1}(s)] = \sum_{s' \neq s} q_{ss'}^{(j+1)} [\varphi_j(s') - \varphi_{j+1}(s') - \varphi_j(s) + \varphi_{j+1}(s)].$$

Обозначим $L_j^0 - L_{j+1}^0 = G$, $\varphi_j(s') - \varphi_{j+1}(s') = \pi(s')$ и введём такие $\mathcal{Q}(s) \geq 0$, что

$$G = \mathcal{Q}(s) + \sum_{s' \neq s} q_{ss'}^{(j+1)} [\pi(s') - \pi(s)].$$

Так как математическое ожидание $M\{\mathcal{Q}(s)\} = G$, то $G \geq 0$, отсюда следует, что $L_j^0 \geq L_{j+1}^0$. В силу того, что значение L^0 ограничено снизу, существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n^0 = L^*$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n^0(s, s') = d^*(s, s')$ при $n \rightarrow \infty$. Можно показать, что L^* и $d^*(s, s')$ удовлетворяют уравнениям (I2) и являются поэтому минимальным значением критерия оптимальности и оптимальным управлением.

Подчеркнем, что рассмотренные методы оптимизации управления в УСМО, как правило, позволяют получить только численное решение. В первую очередь это относится к методу линейного программирования, хотя этот метод привлекателен тем, что для него имеется хорошо разработанные численные алгоритмы решения задач оптимизации, например, широко известный симплекс-алгоритм. Прямой метод подсчёта финальных вероятностей труден тем, что не всегда удается получить аналитические выражения для финальных вероятностей состояний УСМО и даже, если такие выражения найдены, задача минимизации критерия оптимальности (2) зачастую решается только численно. Метод динамического программирования обычно также приводит к численному решению, однако в некоторых случаях возможно и аналитическое решение уравнений (I2).

Выше рассматривалось УСМО в предположении, что все параметры, характеризующие компоненты $\lambda, \mu, \delta, \sigma'$, точно известны.

Однако на практике дело обстоит, как правило, иначе. Если параметры обслуживаемых устройств можно считать известными, во времени не изменяющимися, то о параметрах входящих потоков этого обычно сказать нельзя. Интенсивность входящих потоков во многих случаях меняется со временем, часто изменения носят случайный характер и нахождение статистики этих изменений требует проведения большого объема экспериментальных исследований. В подобных ситуациях наиболее рациональным является применение адаптивных УСМО, которые в процессе функционирования оценивают неизвестные параметры и применяют управление (стремясь приблизить его к оптимальному) в соответствии с полученными оценками. Можно предложить много различных принципов построения адаптивных УСМО [9]. Рассмотрим три подхода к построению адаптивных УСМО: 1) подход, основанный на применении статистической теории оценок [10], 2) подход, опирающийся на теорию проверки статистических гипотез [10], 3) автоматный подход, использующий для построения адаптивных УСМО автоматы с линейной тактикой [11].

Пусть θ - вектор параметров, характеризующих УСМО. Тогда очевидно, что оптимальное управление d^0 является функцией неизвестных параметров θ : $d^0 = d^0(\theta)$. Наблюдая некоторый процесс $X(t)$ ($0 < t \leq T$), стохастически связанный с θ , находится оценка $\hat{\theta}$ векторного параметра θ и в качестве адаптивного управления берется $d^0(\hat{\theta})$, т.е. оптимальное управление с заменой истинного значения параметра его оценкой. Находить оценку $\hat{\theta}$ неизвестного параметра θ можно различными путями. Если априорное распределение $P(\theta)$ неизвестно, наиболее обычным путем является использование метода максимального правдоподобия, когда $\hat{\theta}$ находится из условия $P(X/\theta) \Rightarrow \max_{\theta}$. Если $P(\theta)$ известно, то можно для определения $\hat{\theta}$ использовать обобщенный метод максимального правдоподобия и искать $\hat{\theta}$ из условия $P(X, \theta) = P(\theta) P(X/\theta) \Rightarrow \max_{\theta}$. Адаптивный алгоритм при этом будет выглядеть следующим образом: на начальном этапе адаптации применяется некоторое произвольное управление; в момент получения оценки $\hat{\theta}$ начальное управление заменяется на $d^0(\hat{\theta})$, после чего процесс наблюдения за работой системы продолжается и оценка $\hat{\theta}$ в процессе этого наблюдения уточняется и т.д. Если рассматриваются стационарные режимы работы УСМО, то при $T \rightarrow \infty$ (T - время наблюдения системы) $d^0(\hat{\theta}) \rightarrow d^0(\theta)$, где θ - истинное значение векторного

параметра. Если же параметры θ зависят от времени (т.е. имеют место нестационарные режимы), то в общем случае о сходимости адаптивного алгоритма ничего определённого сказать нельзя.

Изложенный выше принцип построения адаптивной УСМО основан на теории оценок. Для построения адаптивной УСМО можно также применить идеи и методы проверки статистических гипотез. Пусть в процессе функционирования УСМО наблюдаются некоторые случайные величины x_1, \dots, x_p . Тогда, зная структуру УСМО и дисциплину обслуживания, можно в принципе определить математическое ожидание d_i величины x_i при оптимальном управлении $f^*(\theta)$: $d_i = f_i(\theta)$. Введём в рассмотрение систему координат $\{d_1, \dots, d_p\}$. Функции $f_i(\theta)$ определяют в данной системе координат некоторую область \mathcal{D} , соответствующую применению оптимального управления. В процессе управления величины d_1, \dots, d_p являются, конечно, неизвестными (так как неизвестны параметры θ), известны лишь величины x_1, \dots, x_p . Рассмотрим теперь следующую двухальтернативную статистическую гипотезу:

$$H_0 : \{d_1, \dots, d_p\} \in \mathcal{D}; \quad H_1 : \{d_1, \dots, d_p\} \notin \mathcal{D}.$$

Если по наблюдениям x_1, \dots, x_p выносится решение в пользу альтернативы H_0 , то это будет означать, что применяемое управление оптимально. Если же будет вынесено решение в пользу альтернативы H_1 , то применяемое управление не является оптимальным и его надо изменить. В этом случае область \mathcal{D} следует ещё дополнительно разбить на подобласти, указывающие, как должно быть изменено используемое управление. Далее процесс адаптации повторяется и т.д.

Подходы, основанные на теории оценок и проверке статистических гипотез, применимы и в случае структурной адаптации [II]. Оптимальная (в смысле некоторого критерия оптимальности) структура системы зависит от вектора параметров $\theta = (t_1, \dots, t_q)$, который является неизвестным. Тогда в пространстве переменных $\{t_1, \dots, t_q\}$ можно в принципе построить области оптимальности R_j , которые являются наилучшими в смысле минимума критерия оптимальности для значений параметров $\theta \in \Theta_j$, где $j = \overline{1, \rho}$, ρ - количество возможных структур. Θ_j - область изменения параметров θ для оптимальной структуры R_j . Тогда адаптивный алгоритм управления структурой УСМО будет

выглядеть следующим образом. В течение времени T (при некоторой начальной структуре R_k) наблюдается работа системы и строится функция правдоподобия $P(X/\theta)$, где X - некоторые наблюдения за время T . После чего проверяется гипотеза об оптимальности выбранной структуры R_k , т.е. решается уравнение

$$\max_j \max_{\theta \in \Theta_j} P(X/\theta) = \max_{\theta \in \Theta_k} P(X/\theta),$$

где $\max_{\theta \in \Theta_k} P(X/\theta) \geq \max_{\theta \in \Theta_j} P(X/\theta)$, $j = \bar{1}, \bar{r}$;

если $k = l$, то выбранная структура R_k оптимальна, если $k \neq l$, то выбранная структура R_k не оптимальна и её надо изменить на структуру R_l , которая будет являться оценкой оптимальной структуры. Далее процесс адаптации повторяется.

Для построения адаптивных УСМО можно также использовать некоторые устройства - адаптеры, которые, реагируя на состояние окружающей среды, тем или иным образом изменяют управление в УСМО [II]. Чаще всего адаптеры представляют собой конечные автоматы с линейной тактикой. Построение таких автоматов связано с конкретной УСМО и конкретными условиями, в которых происходит работа системы (с конкретным поведением "окружающей среды"). В качестве примера рассмотрим построение адаптера для следующей задачи массового обслуживания. Предположим, что имеется два входящих пуассоновских потока заявок и два обслуживающих прибора, длительность обслуживания которых распределена по экспоненциальному закону с интенсивностями μ_1 и μ_2 ($\mu_1 > \mu_2$). Стратегии обслуживания при этом следующие: 1-я стратегия обслуживания - первый поток направляется на первый прибор, второй поток направляется на второй прибор, 2-я стратегия - первый поток направляется на второй прибор, второй поток - на первый прибор. Относительно потоков известно, что интенсивность одного из них больше, чем другого (какого точно - неизвестно), кроме того, соотношение интенсивностей может меняться со временем. Если в качестве критерия оптимальности взять среднее число заявок в системе, то можно показать, что наилучшая стратегия обслуживания является следующей: поток с большей интенсивностью направлять на прибор также с большей интенсивностью обслуживания, а поток с меньшей интенсивностью направлять на прибор с меньшей интенсивностью обслуживания. Так как интенсивности потоков неизвестны и могут меняться со временем, то

ясна цель адаптации: необходимо постоянно в процессе адаптации стараться "выйти" на наилучшую стратегию, т.е. направлять заявки из потока с большей интенсивностью на первый прибор, а заявки из потока с меньшей интенсивностью - на второй прибор (так как $\mu_1 > \mu_2$). Примем, что параметры потоков могут принимать значения λ_1 либо λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). Введём "состояния природы": 1- е состояние природы - первый поток имеет интенсивность λ_1 , второй поток λ_2 ; 2- е состояние природы - первый поток имеет интенсивность λ_2 , второй поток - интенсивность λ_1 ($\lambda_1 > \lambda_2$). Будем предполагать, что изменения состояний природы образуют марковский процесс $j(t)=1,2$: если $j(t)=1$, то имеет место первое состояние природы, если $j(t)=2$, то имеет место второе состояние природы, причём интенсивность перехода из первого состояния природы во второе есть α , наоборот, из второго в первое - β . Пусть теперь имеется некоторое устройство (автомат-адаптер) с состояниями $1, 2, \dots, n$. Переход из состояния в состояние осуществляется следующим образом: 1) если в систему поступает заявка из первого потока, то адаптер переходит в соседнее состояние с большим номером, 2) если в систему поступает заявка из второго потока, то адаптер переходит в соседнее состояние с меньшим номером, 3) если адаптер находится в состоянии i и поступает заявка из второго потока, то он в этом состоянии и остаётся, 4) если адаптер находится в состоянии n и поступает заявка из первого потока, то он в этом состоянии и остаётся. Если теперь имеет место 1- е состояние природы, то автомат будет преимущественно находиться в состояниях с большими номерами, и в этом случае необходимо применять 1- ю стратегию. Если же имеет место 2- е состояние природы, то автомат будет преимущественно находиться в состояниях с меньшими номерами, и в этом случае необходимо применять 2- ю стратегию. В силу этого состояния адаптера делятся на две части: если адаптер находится в состояниях с номерами $1, \dots, m-1$, то применяется 2- я стратегия; если же адаптер находится в состояниях с номерами m, \dots, n , то применяется 1- я стратегия. Очевидно, что при этом возникает некоторая ошибка, так называемая, ошибка адаптации, которую естественно минимизировать за счет соответствующего выбора параметров адаптера (за счет выбора n и m). Переходы из одного состояния адаптера в другое образуют марковский процесс $i(t)$ ($i(t)=1, \dots, n$), так как по предпо-

ложению входящих потоки заявок пуассоновские. Поэтому поведение окружающей среды ("природы") и поведение адаптора описывается двумерным марковским процессом $(i(t), j(t))$ с двумя дискретными компонентами: состояние адаптора, состояние природы. Если теперь обозначить через $P(i, j)$ - стационарные вероятности состояний данного марковского процесса, то вероятность ошибки адаптации выразится формулой $P_0(n, m) = \sum_{i=1}^{m-1} P(i, 1) + \sum_{i=m}^n P(i, 2)$. В силу этого задача оптимизации параметров адаптора состоит в минимизации $P_0(n, m)$ по n и m ($n \geq m$). Рассмотренная задача адаптации показывает, что применение автоматов в качестве адаптеров является целесообразным, так как позволяет достаточно легко обойти вопросы построения оценок неизвестных параметров, которые возникали в вышеупомянутых подходах к адаптации.

В заключение отметим, что изложенные подходы к оптимизации управлений в системах массового обслуживания могут успешно применяться в многомашинных вычислительных системах, которые во многих случаях рассматривать как марковские системы. В таких системах возникают вопросы оптимизации структуры и вопросы оптимизации дисциплины обслуживания (диспетчеризации).

Л и т е р а т у р а

1. Горцев А.И. Система массового обслуживания с резервным каналом. - Техническая кибернетика, 1975, № 6, с.85.
2. Горцев А.И. Об оптимальной стратегии включения второго или резервного канала в однолинейной системе массового обслуживания. - Автоматика и телемеханика, 1977, № I, с.179-187.
3. Рыков В.В., Лемберг Э.Е. Об оптимальных динамических приоритетах в однолинейных системах массового обслуживания. - Техническая кибернетика, 1967, № I, с. 25-34.
4. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания и её приложения. - Советское радио, -М., 1971.
5. Мова В.В., Пономаренко Л.А. Обоснование одного метода управления в системах массового обслуживания. - В кн.: Системы и средства автоматического управления, Киев, 1970.
6. Ланин М.И., Шварц Л.Б. Об оптимизации приоритетов в однолинейной системе массового обслуживания с потерями. - Авто-

матика и телемеханика, 1972, № 5, с. 163-168.

7. Ховард Р.А. Динамическое программирование и марковские процессы.- Советское радио , 1964.
8. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания.-Изд-во Томского университета, 1978.
9. Растригин Л.А. Структурная адаптация и многомашинные вычислительные системы.-В кн.: Структурная адаптация многомашинных систем обработки информации. Рига. Зинатне , 1978, с. 3-5.
10. Горцев А.М. Системы массового обслуживания с адаптивной дисциплиной обслуживания.-В кн.: Структурная адаптация и многомашинные вычислительные системы. Рига. Зинатне ,1978, с. 21-24.
11. Горцев А.М., Поттосина С.А. Структурная адаптация двухлинейной системы массового обслуживания со вспомогательным прибором. - Автоматика и вычислительная техника, 1980, № 5, с. 43-49.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОИСКА КАНАЛА С МИНИМАЛЬНЫМ УРОВНЕМ ШУМА

В.А. Дударев, О.А. Колосова

Постановка задачи. С проблемой поиска канала с минимальным уровнем шума приходится сталкиваться в многоканальных системах связи с поиском свободного канала при большой загрузке ддиапазона частот. К этой же задаче сводится задача о поиске глобального минимума быстро колеблющейся функции при наличии ошибок измерений. В данной работе мы ориентируемся на поиск канала в системах связи.

Пусть имеется система связи, которая для своей работы может использовать n каналов. Передача по каждому каналу может происходить до тех пор, пока мощность шума в канале меньше некоторого порогового значения. Когда мощность шума превысит это пороговое значение, то передача информации прерывается и начинается поиск другого канала.

Поиск канала происходит следующим образом: каждый из n каналов изучается некоторое время с целью измерения в нем мощности шума. В результате находится тот канал, где мощность шума минимальна, и система связи начинает работу на этом канале.

Целью оптимизации является нахождение оптимального числа каналов, подлежащих просмотру " нахождение оптимального времени изучения каждого канала.

Оценка логарифма мощности шума

Пусть $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_T$ - измеренные значения (отсчеты) шума, которые предполагаются распределенными по нормальному закону с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 , т.е.

$$p(\rho_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\rho_i^2 / 2\sigma^2).$$

Рассмотрим величину $a = \ln(\sigma^2)$, т.е. логарифм мощности шума, и построим оценку \hat{a} этой величины. Так как $a = \ln(\sigma^2)$,

$\sigma^2 = M\{r_i^2\}$, то эту оценку естественно строить на основании статистики

$$w = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \ln(r_i^2) = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^T \ln|r_i|.$$

Найдем характеристики этой статистики. Так как

$$\begin{aligned} M\{\ln|r_i|\} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|r| e^{-r^2/2\sigma^2} dr = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \ln y e^{-y^2/2\sigma^2} dy = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \ln(t\sigma\sqrt{2}) e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \ln t \exp(-t^2/2) dt + \ln(\sigma\sqrt{2}) = \\ &= \ln\sigma - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} C, \end{aligned}$$

где C - постоянная Эйлера, то

$$M\{w\} = \ln(\sigma^2) - \ln 2 - C$$

и теперь в качестве оценки \hat{a} величины a естественно взять статистику

$$x = \hat{a} = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^T \ln|r_i| + \ln 2 + C = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^T \ln|r_i| + 1,270.$$

Эта оценка является несмещенной, т.к. $M\{\hat{a}\} = a$.

Найдем теперь дисперсию этой оценки. Имеем

$$\begin{aligned} D\{x\} &= \frac{4}{T} D\{\ln|r_i|\} = \frac{4}{T} \int_{-\infty}^{\infty} [\ln|r| - M\{\ln|r|\}]^2 p(r) dr = \\ &= \frac{8}{T} \int_0^{\infty} \left[\ln y - \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{2} C \right]^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2\sigma^2) dy \end{aligned}$$

Делая замену переменных $y/\sigma\sqrt{2} = t$ и вычисляя соответствующие интегралы, получим $D\{x\} = \sigma_a^2 = \pi^2/2T$.

При достаточно больших T в силу центральной предельной теоремы можно считать поэтому, что оценка x величины a распределена по нормальному закону со средним значением a и дисперсией $\frac{\pi^2}{2T}$:

$$x \sim N\left(a, \frac{\pi^2}{2T}\right).$$

Среднее время жизни канала

Рассмотрим случай, когда логарифм мощности шума α есть гауссовский случайный процесс со средним значением α_0 , дисперсией σ_a^2 и нормированной функцией корреляции $e^{-\gamma|\tau|}$, т.е. [1]

$$p(\alpha) = \frac{1}{\sigma_a\sqrt{2\pi}} \exp[-(\alpha - \alpha_0)^2/2\sigma_a^2], R(\tau) = \sigma_a^2 \exp(-\gamma|\tau|).$$

Пусть α_n - максимальное значение мощности шума, при котором еще возможна передача информации по каналу, а в начальный момент

времени логарифм мощности шума равен a . Обозначим $a - a_0 = y$, $a_n - a_0 = y_n$ и найдем среднее время жизни канала $T(y)$, т.е. среднее время, проходящее между началом работы и тем моментом времени, когда величина $a(t)$ впервые достигнет значения a_n .

Расчет основан на том обстоятельстве, что при сделанных выше предположениях процесс $y(t)$ может быть представлен как решение стохастического дифференциального уравнения [2]

$$dy = -\gamma y dt + \sigma_a \sqrt{2\gamma} dw(t), \quad (1)$$

где $w(t)$ - винеровский случайный процесс.

Обозначим через $T(y)$ среднее время жизни канала, если в начальный момент времени $y(t) = y$. Рассматривая состояние канала спустя время Δt , получим

$$T(y) = \Delta t + M\{T(y + \Delta y)\}.$$

Разлагая $T(y + \Delta y)$ в ряд Тейлора, и учитывая, что для представления (1) выполняются свойства:

$$M\{\Delta y\} = -\gamma y \Delta t + o(\Delta t),$$

$$M\{\Delta y^2\} = 2\gamma \sigma_a^2 \Delta t + o(\Delta t),$$

$$M\{\Delta y^n\} = o(\Delta t), \quad n \geq 3,$$

получим

$$T(y) = \Delta t + T(y) + T'(y) M\{\Delta y\} + \frac{1}{2} T''(y) M\{\Delta y^2\} + \dots = \\ = \Delta t + T(y) - \gamma y T'(y) \Delta t + \gamma \sigma_a^2 T''(y) \Delta t + o(\Delta t).$$

Сокращая $T(y)$, деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим, что $T(y)$ удовлетворяет уравнению

$$T''(y) \cdot \gamma \sigma_a^2 - T'(y) \gamma y + 1 = 0. \quad (2)$$

Одно граничное условие естественно: $T(y_n) = 0$. Второе получается из требования, чтобы при $y \rightarrow -\infty$ в $T(y)$ не было экспоненциально нарастающих членов.

Решение уравнения (2), полученное методом вариации произвольных постоянных, имеет вид

$$T(y) = C_2 + C_1 \int_{-\infty}^y e^{x^2/2\sigma_a^2} dx - \frac{1}{\gamma \sigma_a^2} \int_{-\infty}^y e^{x^2/2\sigma_a^2} dx \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2\sigma_a^2} dt.$$

Граничное условие $T(y_n) = 0$ дает

$$T(y) = \frac{1}{\gamma \sigma_a^2} \int_y^{y_n} e^{x^2/2\sigma_a^2} dx \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2\sigma_a^2} dt + C_1 \int_y^{y_n} e^{x^2/2\sigma_a^2} dx.$$

Первое слагаемое при $y \rightarrow -\infty$ растет не быстрее, чем линейно, а второе слагаемое при $y \rightarrow -\infty$ возрастает приблизительно как $e^{y^2/2\sigma_a^2}$.

Поэтому $C_1 = 0$ и окончательно, после замены переменных

$$T(y) = \frac{1}{\gamma} \int_{y/\sigma_a}^{y_n/\sigma_a} e^{v^2/2} dv \int_{-\infty}^v e^{-u^2/2} du.$$

Обозначая

$$\Phi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-u^2/2} du$$

и вводя функцию

$$\tau(y) = \sqrt{2\pi} \int_0^y \Phi(v) e^{v^2/2} dv,$$

можно записать

$$T(y) = \frac{1}{\gamma} \left[\tau\left(\frac{y_n}{\sigma_a}\right) - \tau\left(\frac{y}{\sigma_a}\right) \right] = \frac{1}{\gamma} \left[\tau\left(\frac{a_n - a_0}{\sigma_a}\right) - \tau\left(\frac{a - a_0}{\sigma_a}\right) \right].$$

График функции $\tau(y)$ приведен на рис. I

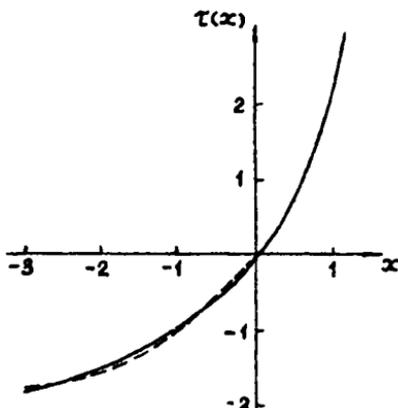


Рис 1

В интервале $-3 \leq y \leq 0$ $\tau(y)$ достаточно хорошо аппроксимируется параболой $\tau(y) = cy + by^2$, где $c = 1.0695$, $b = 0.1660$ (пунктирная кривая на рис. I) и поэтому для $a < a_0$ (наиболее обычный случай) можно записать

$$T(a) = \frac{1}{\gamma} \left[\tau\left(\frac{a_n - a_0}{\sigma_a}\right) - c \frac{a - a_0}{\sigma_a} - b \left(\frac{a - a_0}{\sigma_a}\right)^2 \right].$$

Именно эта аппроксимация и использовалась в дальнейшем.

Апостериорное распределение мощности шума

Пусть имеется n каналов, причем логарифм мощности шума в i -м канале равен a_i . Величины a_1, a_2, \dots, a_n будем считать не-

зависимыми случайными величинами с плотностью вероятностей $p(a)$.

Каналы просматриваются последовательно один за другим, и результатом просмотра i -го канала является величина x_i - оценка величины a_i , распределенная с плотностью вероятностей $p(x/a)$. Тогда очевидно, что

$$p(a/x) = \frac{p(x/a)p(a)}{p(x)}, \quad p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x/a)p(a)da. \quad (3)$$

Для нахождения канала с минимальной мощностью шума найдем среди величин x минимальную величину

$$x_m = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

и в качестве канала с минимальным шумом будем брать именно тот канал, где достигается это минимальное значение. Истинное значение мощности шума a_m в этом канале нам неизвестно, однако условная плотность вероятностей $p(a_m/x_m)$ должна просто повторять формулу (3) с заменой x на x_m :

$$p(a_m/x_m) = \frac{p(x_m/a_m)p(a_m)}{p(x_m)}$$

Однако, если нам необходимо найти безусловную плотность вероятностей $p_m(a_m)$ величины a_m , то усреднить $p(a_m/x_m)$ следует по $p_m(x_m)$, которая отличается от $p(x)$. Найдем поэтому $p_m(x_m)$.

Обозначим через $F(x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx$ функцию распределения величины x . Так как $x_m = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то функция распределения $F_m(x)$ величины x_m имеет вид

$$F_m(x) = (1 - (1 - F(x))^n)$$

и поэтому

$$p_m(x) = n(1 - F(x))^{n-1} p(x).$$

Окончательно

$$p(a_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x_m/a_m)p(a_m)}{p(x_m)} \cdot n(1 - F(x))^{n-1} p(x_m) dx_m.$$

Рассмотрим частный случай этих формул.

Пусть величина a распределена по нормальному закону со средним значением a_0 и дисперсией σ_a^2 , т.е.

$$p(a) = \frac{1}{\sigma_a \sqrt{2\pi}} \exp[-(a - a_0)^2 / 2\sigma_a^2],$$

а оценка x величины a - также по нормальному закону со средним a и дисперсией σ_x^2 , т.е.

$$p(x|a) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp[-(x-a)/2\sigma_x^2].$$

Тогда

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x|a)p(a) da = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_a^2)}} \exp\left[-\frac{(x-a_0)^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_a^2)}\right],$$

$$p(a|x) = \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_a^2}}{\sqrt{2\pi} \sigma_x \sigma_a} \exp\left\{-\frac{(\sigma_x^2 + \sigma_a^2)\left[a - x \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_a^2} - a_0 \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_a^2}\right]^2}{2\sigma_x^2 \sigma_a^2}\right\}.$$

Далее

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx = \Phi\left(\frac{x-a_0}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_a^2}}\right),$$

поэтому

$$p_m(x) = n \left[1 - \Phi\left(\frac{x-a_0}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_a^2}}\right)\right]^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_a^2)}} \exp\left[-\frac{(x-a_0)^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_a^2)}\right].$$

Поэтому апостериорное распределение вероятностей величины a_m в канале с минимальным измеренным значением x_m равно

$$p_m(a_m) = \frac{n\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_a^2}}{2\pi\sigma_x\sigma_a} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \Phi(t)\right]^{n-1} \exp\left\{-\frac{t^2}{2} - \frac{[a_m - a_0 - t\sigma_a/\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_a^2}]^2}{2\sigma_x^2\sigma_a^2/(\sigma_x^2 + \sigma_a^2)}\right\} dt.$$

Оптимизация поиска канала с минимальным шумом

Пусть было рассмотрено n каналов, в каждом из которых получены оценки x_i величины a_i , характеризующих мощность шума в этом канале и выбран канал с минимальным x_i . Тогда среднее время жизни этого канала составит

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \int_{-\infty}^{\infty} T(a_m) p(a_m) da_m = \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\tau\left(\frac{a_m - a_0}{\sigma_a}\right) - \left[\frac{a - a_0}{\sigma_a} - \beta \left(\frac{a - a_0}{\sigma_a}\right)^2 \right] \right] \cdot \frac{n\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_a^2}}{2\pi\sigma_x\sigma_a} da_m = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \Phi(t)\right]^{n-1} \exp\left\{-\frac{t^2}{2} - \frac{[a - a_0 - t\sigma_a/\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_a^2}]^2}{2\sigma_x^2\sigma_a^2/(\sigma_x^2 + \sigma_a^2)}\right\} dt \end{aligned}$$

(использование аппроксимации для $\tau((a-a_0)/\sigma_a)$ возможно в данном интеграле, т.к. $p(a_m)$ для $a_m < a_0$ мало). Меняя порядок интегрирования, получим

$$\bar{T} = \frac{1}{\delta} \left[\tau\left(\frac{a_m - a_0}{\sigma_a}\right) - \left[\frac{\sigma_a}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_a^2}} I_1(n) - \beta \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_a^2} \left(\frac{\sigma_a^2}{\sigma_x^2} I_2(n) + 1\right) \right] \right],$$

где

$$I_1(n) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t [1 - \Phi(t)]^{n-1} e^{-t^2/2} dt < 0,$$

$$I_2(n) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 [1 - \Phi(t)]^{n-1} e^{-t^2/2} dt > 0.$$

Из общего времени жизни канала t_c времени идет на вхождение в синхронизм, и лишь $\bar{T} - t_c$ остается на полезную работу - передачу сообщений. На просмотр каналов идет время, пропорциональное Tn , где n - число каналов, а T - число отсчетов шума в одном канале. Из этих соображений в качестве величины, характеризующей эффективность системы поиска канала, можно взять отношение полезного времени к бесполезному, т.е.

$$L = \frac{\bar{T} - t_c}{\Delta t n T + t_c},$$

где Δt - интервал времени, через который берутся отсчеты шума.

Обозначим $\frac{\sigma_a^2}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_x^2}}$ через α . Тогда

$$\frac{\sigma_a^2}{\sigma_x^2 + \sigma_a^2} = \alpha^2, \quad \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_a^2} = 1 - \alpha^2$$

и поэтому

$$\bar{T} - t_c = \frac{1}{\gamma} [\tau \left(\frac{a_n - a_0}{\sigma_a} \right) - \gamma t_c - C \alpha I_1(n) - B(1 - \alpha^2 + \alpha^2 I_2(n))].$$

Далее,

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_a^2} = \frac{\sigma^2}{2T\sigma_a^2} = \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2}$$

и поэтому

$$T = \frac{\sigma^2}{2\sigma_a^2} \cdot \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}.$$

Критерий оптимальности принимает вид

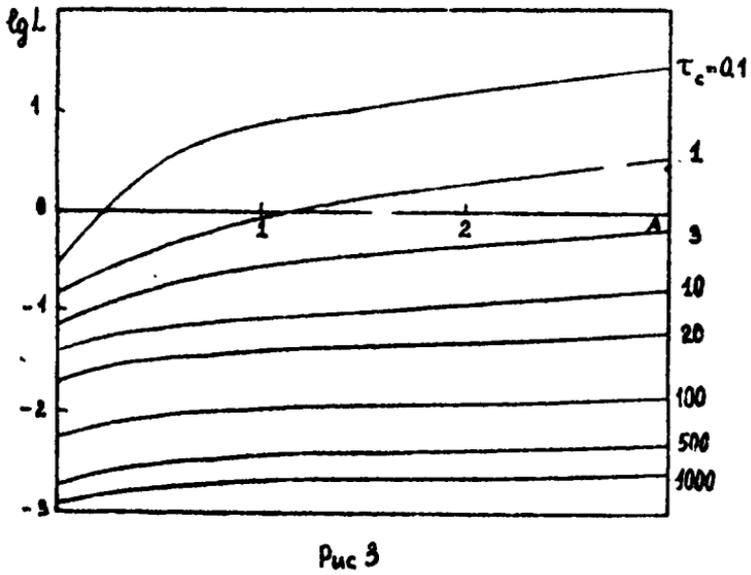
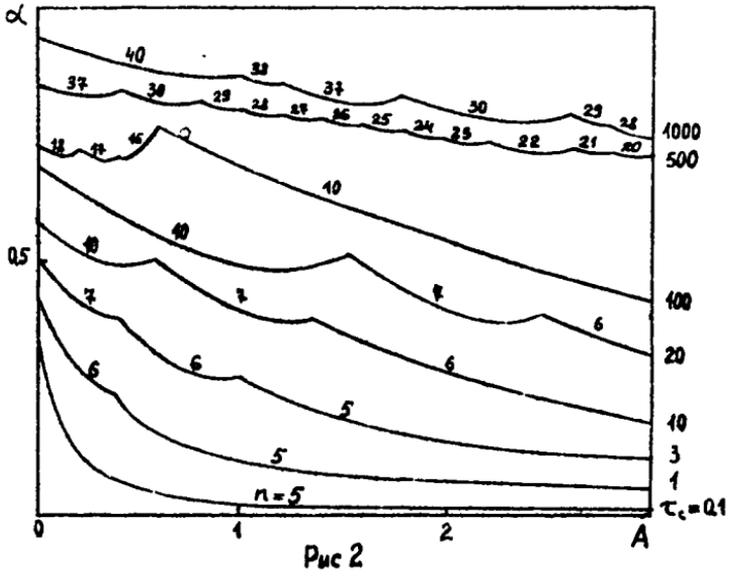
$$L = \frac{2\sigma_a^2}{\gamma \Delta t \sigma^2} \frac{A - C I_1(n) \alpha - B(1 - \alpha^2 + \alpha^2 I_2(n))}{n \alpha^2 + \tau_c (1 - \alpha^2)},$$

где

$$\tau_c = \frac{2\sigma_a^2}{\sigma^2} \frac{t_c}{\Delta t}, \quad A = \tau \left(\frac{a_n - a_0}{\sigma_a} \right) - \gamma t_c.$$

Так как постоянный множитель $\frac{2\sigma_a^2}{\gamma \Delta t \sigma^2}$ не влияет на результат оптимизации, то под L можно понимать лишь второй множитель.

Тогда задача оптимизации принимает вид



$$L = \frac{A - CI_1(n)\alpha - B(1 - \alpha^2 + \alpha^2 I_2(n))}{n\alpha^2 + \tau_c(1 - \alpha^2)} (1 - \alpha^2) \Rightarrow \max_{\alpha, n},$$

что определит нам оптимальное число каналов для просмотра и (через α) оптимальное время просмотра каналов, т.к. T однозначно выражается через α и σ_a^2 . Отметим, что оптимальные значения α и n полностью определяются величинами τ_c и

A

Находя $\frac{\partial L}{\partial \alpha}$ в точке $\alpha = 0$, получим

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = -\frac{CI_1(n)}{\tau_c} > 0,$$

что говорит о том, что максимум по α всегда есть, т.к. при $\alpha = 1$ $L = 0$.

Поиск оптимального значения n и α реализован программно на языке ФОРТРАН. Ниже приводятся некоторые результаты численных расчетов.

На рис.2 приведены оптимальные значения параметра α в зависимости от A при различных значениях параметра τ_c . На рис.3 даны значения $\lg L$ в зависимости от тех же величин.

Для определения выигрыша по мощности, получаемого в случае применения рассмотренной процедуры поиска, возьмем следующие данные. Пусть средний уровень шума $a_0 = 35$ Дб, его среднеквадратическое отклонение $\sigma_a = 6$ Дб, а передача по каналу возможна, когда уровень шума не превосходит 35 Дб, т.е. $a_n = 35$ Дб. Будем считать, что время корреляции флуктуаций мощности шума $\frac{1}{\delta} = 10$ мин. Отметим, что исходные данные взяты произвольно. Для этих значений

получены следующие программные результаты: $n = 17$, $\alpha = 0,7314$, $L_n = 0,01133$. С учетом коэффициента $\frac{2\sigma_a^2}{\delta \Delta t \sigma^2}$, отброшенного при решении задачи оптимизации, величина которого в данном случае равна ≈ 28973 , имеем $L = 28973 \cdot L_n \approx 328$

Выигрыш определяется из соотношения

$$\frac{1 - \Phi\left(\frac{a_n^2 - a_0^2}{\sigma_a}\right)}{\Phi\left(\frac{a_n^2 - a_0^2}{\sigma_a}\right)} = 328.$$

Откуда $(a_n^2 - a_0^2)/\sigma_a = 27$, $a_n^2 - a_0^2 = 27 \cdot \sigma_a = 16$, т.е. полученный выигрыш по мощности составляет для рассмотренного случая 16 Дб.

Приведенные расчетные соотношения были сопоставлены с результатами трассовых испытаний на опытной декаметровый линии радиосвязи.

Методика проверки предусматривала сравнение достоверности принятых сообщений в стандартном канале буквопечатания с полосой

пропускания $\Delta F=500$ Гц, при предварительном выборе и без выбора канала с минимальным уровнем шума.

Энергетический выигрыш подсчитывался как соотношение мощностей при обеспечении одинаковой достоверности приема, также определялось повышение достоверности в случае равенства мощностей.

Сеансы связи назначались в различное время суток, рабочие частоты устанавливались по прогнозу распространения радиоволн.

В качестве устройства поиска канала с минимальным уровнем помех использовалось "Устройство прогнозирования канала связи" [3], укрупненная функциональная схема которого приведена на рис. 4.

Оно содержит смеситель I, полосовой фильтр 2, усилитель промчастоты 3, амплитудный детектор 4, интегратор 5, аналого-цифровой преобразователь 6, измеритель 7, индикатор 8, блок выбора лучшего канала 9, блок частотных подставок 10, блок синхронизации и управления II.

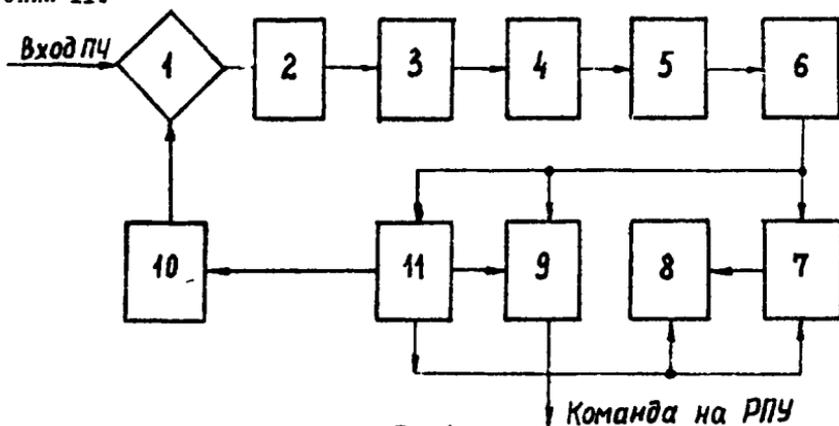


Рис. 4

Устройство работает следующим образом. На вход поступает напряжение промежуточной частоты с выхода радиоприемника а. В смесителе с помощью блока частотных подставок оно преобразуется в новую, третью промчастоту. Значение этой частоты изменяется дискретно с заданным шагом через 2 кГц. В полосе пропускания преселектора радиоприемного устройства одновременно размещается 10 анализируемых каналов. При этом имеется возможность оперативной перестройки группы каналов на десять новых, заранее подготовленных участков диапазона.

Со смесителя напряжение поступает на полосовой фильтр, в

котором происходит разделение каналов по частоте, далее на усилитель, детектор и интегратор. В интеграторе производится усреднение измеряемых значений напряжения помех. Постоянная времени интегрирования изменяется в зависимости от характера помех и условий связи.

В аналоговом цифровом преобразователе замеренные значения помех переводятся в цифровую форму, что необходимо для работы измерителя.

Уровни помех в децибелах отображаются на экране дисплея в матричной форме.

Блок выбора лучшего канала осуществляет запоминание оценки качества всех измеряемых каналов, их сравнение и выбор лучшего по минимуму мощности помех. Он же выдает команды для перестройки радиолинии на новую частоту.

Блок синхронизации и управления задает режим переключения частот в БЧП, синхронизирует работу блока индикации и измерения.

Проведенные испытания показали, что при использовании для выбора рабочих частот названного устройства, выигрыш по мощности в сравнении с системой без поиска составляет в среднем 12 Дб.

Как видно из сопоставления материалов расчета и эксперимента, имеется хорошее совпадение результатов, что позволяет сделать вывод о пригодности методики и программы для практических целей.

Л и т е р а т у р а

1. Комарович В.Ф., Сосунов В.И. Случайные помехи и надежность КВ связи.-М.: Связь, 1977.-135 с.
2. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления.-М.: Сов. радио, 1968.-256 с.
3. Авт.свид. 341169 (СССР). Устройство прогнозирования канала связи. Дударев В.А., Мамонов Н.И., Михляев В.В. - Спб. в Б.Н., 1972, № 18 ЮА8 15/00

ОПТИМИЗАЦИЯ ДВУХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С УПРАВЛЕНИЕМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ

Л. И. Зиновьева

Хорошей математической моделью многих реальных систем является управляемые системы массового обслуживания (УСМО) с переменной интенсивностью обслуживания, зависящей от времени ожидания [1]. Однако СМО с управлением по времени ожидания остались изученными очень слабо. В данной работе изучены две однолинейные СМО: первая отличается от рассмотренной в [2] тем, что моменты включения и отключения резервного прибора зависят не от длины очереди, а от текущего времени ожидания заявки, стоящей в очереди первой; вторая система аналогична изученной в [3], но отличающаяся тем, что интенсивность обслуживания определяется не временем пребывания заявки в системе, а текущим временем ожидания заявки, находящейся первой в очереди.

1. Система массового обслуживания с резервным прибором, управление которым зависит от времени ожидания

Рассмотрим однолинейную СМО с пуассоновским входящим потоком интенсивности λ , к которой может подключаться резервный прибор. Обслуживание предполагается экспоненциальным с интенсивностями μ_1 и μ_2 соответственно для основного и резервного приборов. Если рассматривается состояние системы в некоторый момент времени t , а заявка, находящаяся первой в очереди, поступила в систему в момент времени t_0 , то величину $s(t) = t - t_0$ будем называть текущим временем ожидания заявки, находящейся первой в очереди. Дисциплина обслуживания резервным прибором следующая: как только s - текущее время ожидания заявки, находящейся в очереди первой, дос-

тигает величины s_0 (s_0 - некоторая постоительная константа), подключается резервный прибор и берет на обслуживание заявку, стоящую первой в очереди; после обслуживания одного требования резервный прибор выключается, если у заявки, которая в этот момент будет в очереди первой, $s < s_0$ и продолжает работать, если $s \geq s_0$.

Рассматриваемую систему опишем марковским случайным процессом с компонентами $\{s(t), \nu_1(t), \nu_2(t)\}$ и особыми состояниями $\{\nu_1(t) = \nu_1, \nu_2(t) = \nu_2\}$ ($\nu_1, \nu_2 = 0$ или I), где $\nu_1(t), \nu_2(t)$ - число требований, находящихся в момент времени t на обслуживании на основном и резервном приборах соответственно. Будем рассматривать стационарный режим работы системы. Критерий качества возьмем в виде $L = MF(s, \nu_1, \nu_2)$, где $F(s, \nu_1, \nu_2)$ - целевая функция. Необходимо найти такой момент включения резервного прибора s_0 , который бы минимизировал величину L , то есть $F(s, \nu_1, \nu_2)$ можно интерпретировать как величину штрафа в единицу времени за пребывание системы в состоянии $\{s(t) = s, \nu_1(t) = \nu_1, \nu_2(t) = \nu_2\}$, а L - как математическое ожидание величины этого штрафа. Целевую функцию $F(s, \nu_1, \nu_2)$ будем обозначать $F_0(s)$ в области $0 \leq s \leq s_0$, если $\nu_1 = 1, \nu_2 = 0$; $F_2(s)$ в области $0 \leq s \leq s_0$, если $\nu_1 = \nu_2 = 1$; $F_3(s)$ в области $s \geq s_0$, для которой $\nu_1 = \nu_2 = 1$; $F(0, 0)$, если система пуста; $F(0, 1)$, если очередь пуста и работает только резервный прибор; $F(1, 0)$, если очередь пуста и работает только основной прибор; $F(1, 1)$, если работают оба прибора, а очередь пуста.

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{L}(s, \nu_1, \nu_2, \alpha) = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha(\tau-t)} M\{F(s(\tau), \nu_1(\tau), \nu_2(\tau)) / s(t) = s, \nu_1(t) = \nu_1, \nu_2(t) = \nu_2\} d\tau,$$

обозначая ее $\mathcal{L}_0(s, \alpha)$ в области $0 \leq s \leq s_0$, если $\nu_1 = 1, \nu_2 = 0$;

$\mathcal{L}_2(s, \alpha)$ в области $0 \leq s \leq s_0$, если $\nu_1 = \nu_2 = 1$; $\mathcal{L}_3(s, \alpha)$ в области $s \geq s_0$, для которой $\nu_1 = \nu_2 = 1$. Введем обозначения

$$\mathcal{L}_{001}(\alpha) = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha(\tau-t)} M\{F(s(\tau), \nu_1(\tau), \nu_2(\tau)) / \nu_1(t) = 1, \nu_2(t) = 0\} d\tau,$$

$$\mathcal{L}_{101}(\alpha) = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha(\tau-t)} M\{F(s(\tau), \nu_1(\tau), \nu_2(\tau)) / \nu_1(t) = 0, \nu_2(t) = 1\} d\tau,$$

$$\mathcal{L}_{002}(\alpha) = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha(\tau-t)} M\{F(s(\tau), \nu_1(\tau), \nu_2(\tau)) / \nu_1(t) = 1, \nu_2(t) = 1\} d\tau,$$

$$\mathcal{L}^*(\alpha) = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha(\tau-t)} M\{F(s(\tau), \nu_1(\tau), \nu_2(\tau)) / \nu_1(t) = 0, \nu_2(t) = 0\} d\tau.$$

Пусть система в некоторый момент времени t находится в состоянии $\{s(t) = s, \nu_1(t) = 1, \nu_2(t) = 0, 0 \leq s \leq s_0\}$. Тогда, рассматривая достаточно малый интервал времени $(t, t + dt)$, можно записать

$$\mathcal{L}_0(s, \alpha) = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha(\tau-t)} M_1\{F_1(s(\tau), \nu_1(\tau), \nu_2(\tau)) / s(t) = s, \nu_1(t) = 1, \nu_2(t) = 0\} d\tau +$$

$$+ \alpha \int_{t-\Delta t}^t e^{-\lambda(t-t-\Delta t)} (1-\alpha \lambda \Delta t) M\{F_1(s(t), v_1(t), v_2(t)) / s(t)=s, v_1(t)=v_1, v_2(t)=v_2\} dt + o(\Delta t)$$

Рассматривая возможные переходы и пренебрегая слагаемыми порядка малости $o(\Delta t)$, получим

$$M\{F_1(s(t), v_1(t), v_2(t)) / s(t)=s, v_1(t)=v_1, v_2(t)=v_2\} = (1-\mu, \Delta t) M\{F_1(s(t), v_1(t), v_2(t)) / s(t+\Delta t)=s+\Delta t, v_1(t+\Delta t)=v_1, v_2(t+\Delta t)=v_2\} + \mu, \Delta t \lambda \int_0^s e^{-\lambda v} M\{F_1(s(t), v_1(t), v_2(t)) / s(t+\Delta t)=s-v, v_1(t+\Delta t)=v_1, v_2(t+\Delta t)=v_2\} dv + \mu, \Delta t \lambda \int_0^s e^{-\lambda v} M\{F_1(s(t), v_1(t), v_2(t)) / v_1(t+\Delta t)=v_1, v_2(t+\Delta t)=v_2\} dv,$$

где v - длина интервала времени, через который поступило требование, следующее за находящимся в очереди первым. Тогда

$$\mathcal{L}_1(s, \alpha) = \alpha F_1(s) \Delta t + (1 - \alpha \Delta t - \mu, \Delta t) \mathcal{L}_1(s + \Delta t, \alpha) + \mu, \Delta t \lambda \int_0^s e^{-\lambda v} \mathcal{L}_1(s - v, \alpha) dv + \mu, \Delta t e^{-\lambda s} \mathcal{L}_{оч.}(\alpha).$$

Разлагая функцию $\mathcal{L}_1(s + \Delta t, \alpha)$ в ряд Тейлора по Δt , поделив на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим уравнение

$$(\alpha + \mu) \mathcal{L}_1(s, \alpha) = \alpha F_1(s) + \frac{\partial \mathcal{L}_1(s, \alpha)}{\partial s} + \mu, e^{-\lambda s} \mathcal{L}_{оч.}(\alpha) + \lambda \mu, \int_0^s e^{-\lambda v} \mathcal{L}_1(s - v, \alpha) dv. \quad (1)$$

Для функций $\mathcal{L}(s, v_1, v_2, \alpha)$, $\mathcal{L}_{оч.}(\alpha)$, $\mathcal{L}_{рег.}(\alpha)$, $\mathcal{L}_{обс.}(\alpha)$, $\mathcal{L}^*(\alpha)$ нетрудно получить соотношения:

$$\mathcal{L}(s, v_1, v_2, \alpha) = L + \alpha \ell(s, v_1, v_2) + o(\alpha), \quad (2)$$

$$\int \mathcal{L}(s, v_1, v_2, \alpha) \rho(s, v_1, v_2) ds = L, \quad (3)$$

$$\mathcal{L}_{оч.}(\alpha) = L + \alpha \ell_{оч.} + o(\alpha), \quad (4)$$

$$\mathcal{L}_{рег.}(\alpha) = L + \alpha \ell_{рег.} + o(\alpha),$$

$$\mathcal{L}_{обс.}(\alpha) = L + \alpha \ell_{обс.} + o(\alpha), \quad (5)$$

$$\mathcal{L}^*(\alpha) = L + \alpha \ell^* + o(\alpha),$$

где $\rho(s, v_1, v_2)$ - функция, определяющая стационарное распределение величины (s, v_1, v_2) такая, что $\int \rho(s, v_1, v_2) ds$ есть вероятность того, что $\alpha \leq s(t) < \alpha + \delta$, $v_1(t) = v_1$, $v_2(t) = v_2$ ($0 \leq \alpha \leq \delta < \infty$). Подставляя разложения (2), (4) в (1) и (3) и приравнявая коэффициенты при первой степени α , получим

$$L + \mu, \ell_1(s) = F_1(s) + \frac{d \ell_1(s)}{ds} + \mu, e^{-\lambda s} \ell_{оч.} + \quad (6)$$

$$+ \lambda \mu, \int_0^s e^{-\lambda v} \ell_1(s - v) dv, \quad (7)$$

$$\int \ell(s, v_1, v_2) \rho(s, v_1, v_2) ds = 0.$$

Производя в интеграле в (6) замену $s-v=y$, умножая затем на $e^{\lambda s}$ и дифференцируя по s , получим

$$\frac{d^2 \ell_1(s)}{ds^2} + (\lambda - \mu_1) \frac{d \ell_1(s)}{ds} = \lambda L - \lambda F_1(s) - \frac{d F_1(s)}{ds}.$$

Рассматривая состояния $\{s(t)=s, \nu_1(t)=1, \nu_2(t)=1, 0 \leq s \leq s_0\}$, $\{s(t)=s, \nu_1(t)=1, \nu_2(t)=1, s > s_0\}$ и используя разложения (2), (5) аналогичным образом получим уравнения:

$$L + (\mu_1 + \mu_2) \ell_2(s) = F_2(s) + \frac{d \ell_2(s)}{ds} + \mu_2 \ell_1(s) + \mu_1 \ell_0(s) e^{-\lambda s} + \lambda \mu_1 \int_0^s e^{-\lambda v} \ell_2(s-v) dv, \quad (8)$$

$$L + (\mu_1 + \mu_2) \ell_3(s) = F_3(s) + \frac{d \ell_3(s)}{ds} + (\mu_1 + \mu_2) \int_0^{s-s_0} \lambda e^{-\lambda v} \ell_3(s-v) dv + (\mu_1 + \mu_2) \int_{s-s_0}^s \lambda e^{-\lambda v} \ell_2(s-v) dv + (\mu_1 + \mu_2) e^{-\lambda s} \ell_0(s). \quad (9)$$

Преобразованные, аналогичными выше изложенным, (8), (9) приводят-ся, соответственно, к виду

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \ell_2(s)}{ds^2} + (\lambda - \mu_1 - \mu_2) \frac{d \ell_2(s)}{ds} - \lambda \mu_2 \ell_2(s) = \lambda L - \lambda F_2(s) - \\ & - \frac{d F_2(s)}{ds} - \lambda \mu_2 \ell_1(s) - \mu_2 \frac{d \ell_1(s)}{ds}, \\ & \frac{d^2 \ell_3(s)}{ds^2} + (\lambda - \mu_1 - \mu_2) \frac{d \ell_3(s)}{ds} = \lambda L - \lambda F_3(s) - \frac{d F_3(s)}{ds}. \end{aligned}$$

Выведем теперь условия сшивания в точке $s = s_0$. Рассматривая состояния системы $\{s(t) = s_0 - at, \nu_1(t) = 1, \nu_2(t) = 1\}$, $\{s(t) = s_0 - at, \nu_1(t) = 1, \nu_2(t) = 0\}$, учитывая возможные переходы и используя разложения (2), (5), получим, соответственно, первое условие сшивания $\ell_2(s_0) = \ell_3(s_0)$ и соотношение вида

$$\ell_1(s_0) = \lambda \int_0^{s_0} e^{-\lambda v} \ell_2(s_0 - v) dv + e^{-\lambda s_0} \ell_0(s_0). \quad (10)$$

Полагая в (9) $s = s_0$ и сравнивая его с (10), получим второе условие сшивания

$$(\mu_1 + \mu_2) [\ell_3(s_0) - \ell_1(s_0)] + L - F_3(s_0) - \frac{d \ell_3(s)}{ds} \Big|_{s=s_0} = 0.$$

Полагая теперь в (8), (9) $s = s_0$ и сравнивая полученное, третье условие сшивания, запишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{L}{\mu_1 + \mu_2} + \ell_3(s_0) - \frac{F_3(s_0)}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{d \ell_3(s)}{ds} \Big|_{s=s_0} = \frac{L}{\mu_1} + \\ & + \frac{(\mu_1 + \mu_2) \ell_2(s_0)}{\mu_1} - \frac{F_2(s_0)}{\mu_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \ell_1(s_0) - \frac{1}{\mu_1} \frac{d \ell_2(s)}{ds} \Big|_{s=s_0}. \end{aligned}$$

Рассматривая возможные переходы за интервал времени Δt при $s=0$, получим следующие условия в нуле:

$$\begin{aligned} L + \lambda e^* &= \lambda l_{осн} + F(0,0), \\ L + (\lambda + \mu_1) l_{осн} &= \lambda l_1(0) + \mu_1 e^* + F(1,0), \\ L + (\lambda + \mu_1 + \mu_2) l_{осн} &= \lambda l_2(0) + \mu_1 l_{рез} + \mu_2 l_{осн} + F(1,1), \\ L + (\lambda + \mu_2) l_{рез} &= \lambda l_{осн} + \mu_2 e^* + F(0,1), \\ L + \mu_1 l_1(0) &= F_1(0) + \left. \frac{d l_1(s)}{ds} \right|_{s=0} + \mu_1 l_{осн}, \\ L + (\mu_1 + \mu_2) l_2(0) &= F_2(0) + \left. \frac{d l_2(s)}{ds} \right|_{s=0} + \mu_2 l_1(0) + \mu_1 l_{осн}. \end{aligned}$$

Выписанные выше уравнения для $l_1(s)$, $l_2(s)$, $e^*(s)$, условия сшивки в точке $s=z_1$, граничные условия при $s=0$ и условие (7) определяют L однозначно. Рассмотрим случай, когда $F(0,0)=F(1,0)=F_1(0)=0$; $F(0,1)=F(1,1)=F_2(0)=C$ ($C=const > 0$), то есть считаем, что если очередь пуста или $s=0$ и резервный прибор не работает, то СМО несет нулевые потери; если же очередь пуста или $s=0$, но резервный прибор работает, то система несет в единицу времени потери равные C . В этом случае L имеет вид

$$\begin{aligned} l_1(s_0) &= \frac{\lambda(\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_1 - \mu_2)}{m} \left\{ C(\lambda + \mu_1 + \mu_2)(z_1 + z_2) e^{(\lambda - \mu_1)s_0} + \right. \\ &+ \lambda [a_1 e^{(z_2 + \mu_2)s_0} + a_2 e^{(\mu_2 - z_1)s_0}] \int_{s_0}^{\infty} e^{(\lambda - \mu_1 - \mu_2)u} F_3(u) du + \\ &+ [a_1 e^{z_2 s_0} (z_2 + \mu_1 + \mu_2) - a_2 e^{-z_1 s_0} (z_1 - \mu_1 - \mu_2)] \int_0^{s_0} e^{(\lambda - \mu_1)u} \times \\ &\times F_1(u) du + \lambda a_1 e^{(\lambda - \mu_1)s_0} \int_0^{s_0} e^{z_2 u} F_2(u) du - \lambda a_1 e^{(\lambda - \mu_1)s_0} \times \\ &\times \int_0^{s_0} e^{z_2 u} F_1(u) du + \lambda a_2 e^{(\lambda - \mu_1)s_0} \int_0^{s_0} e^{-z_1 u} F_2(u) du - \\ &\left. - \lambda a_2 e^{(\lambda - \mu_1)s_0} \int_0^{s_0} e^{-z_1 u} F_1(u) du \right\}, \end{aligned}$$

где

$$z_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2 - \lambda + \sqrt{(\lambda - \mu_1 - \mu_2)^2 + 4\lambda\mu_1}}{2},$$

$$z_2 = \frac{\lambda - \mu_1 - \mu_2 + \sqrt{(\lambda - \mu_1 - \mu_2)^2 + 4\lambda\mu_2}}{2},$$

$$a_1 = (\lambda + z_1)(\lambda + \mu_2) - \lambda\mu_1,$$

$$a_2 = (\lambda + \mu_2)(z_2 - \lambda) + \lambda\mu_1,$$

$$m = \alpha_1 e^{z_1 s_0} \left\{ \lambda^2 e^{(\lambda - \mu_1) s_0} [(\lambda - \mu_1 - \mu_2)(z_1 + \mu_1 + \mu_2) - \lambda(\lambda - \mu_1)] - \right. \\ \left. - \mu_1^2 (\lambda - \mu_1 - \mu_2)(z_1 + \mu_1 + \mu_2) \right\} - \alpha_2 e^{-z_2 s_0} \left\{ \lambda^2 e^{(\lambda - \mu_1) s_0} [(\lambda - \mu_1 - \mu_2) \times \right. \\ \left. \times (z_2 - \mu_1 - \mu_2) + \lambda(\lambda - \mu_1)] - \mu_1^2 (\lambda - \mu_1 - \mu_2)(z_2 - \mu_1 - \mu_2) \right\}.$$

Таким образом, оптимизация рассматриваемой системы сводится к нахождению минимума $L(s_0)$ по s_0 . Находим производную $L'(s_0)$ и приравняв её к нулю, получим уравнение для определения оптимального момента включения резервного прибора. Аналитически решить это уравнение не удастся. Оно решено численно. На языке ФОРТРАН-IV реализована программа нахождения оптимального момента включения резервного прибора, минимизирующего функцию потерь $L(s_0)$.

2. Однолинейная система мас этого обслуживания с переменной интенсивностью, зависящей от времени ожидания

Рассмотрим однолинейную СМО, на вход которой поступает простейший поток заявок интенсивности λ . Будем считать, что в интервале времени $(t, t + \Delta t)$ обслуживание заявки закончится с вероятностью $\mu(s)\Delta t + o(\Delta t)$ независимо от предьстории, то есть обслуживание предполагается марковским с интенсивностью $\mu(s)$. Поведение рассматриваемой системы описывается марковским процессом $s(t)$ с особыми состояниями: $\nu(t) = 0$ и $\nu(t) = 1$, где $\nu(t)$ - число требований, находящихся в момент времени t на обслуживании, если очередь в этот момент пуста. Критерий качества функционирования системы возьмем в виде

$$L = MF^*(s),$$

где

$$F^*(s) = \begin{cases} F(s) + f(\mu(s)), & \text{если } s > 0, \\ f(\mu_1), & \text{если СМО находится в состоянии } \nu(t) = 1, \\ 0, & \text{если СМО находится в состоянии } \nu(t) = 0. \end{cases}$$

Здесь $F(s)$ - дифференцируемая функция, характеризующая потери от ожидания заявок в очереди, такая, что $F(0) = 0$; $f(\mu(s))$ - монотонно возрастающая, трижды дифференцируемая функция, характеризующая потери на амортизацию при работе прибора с интенсивностью $\mu(s)$. Задача оптимизации рассматриваемой системы сводится к отысканию такой интенсивности обслуживания $\mu(s)$, которая бы минимизировала функционал L . Аналогично выше изложенному введем в рассмотрение функции

$$L(s, \alpha) = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha(\tau-t)} M\{F^*(s(\tau)) | s(t) = s\} d\tau,$$

$$\tilde{\mathcal{L}}(\alpha) = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha(\tau-t)} M\{F^*(s(\tau)) / \gamma(t) = 1\} d\tau,$$

$$\mathcal{L}^*(\alpha) = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha(\tau-t)} M\{F^*(s(\tau)) / \gamma(t) = 0\} d\tau.$$

Для функций $\mathcal{L}(s, \alpha)$, $\tilde{\mathcal{L}}(\alpha)$, $\mathcal{L}^*(\alpha)$ имеют место соотношения, аналогичные (2)-(5):

$$\mathcal{L}(s, \alpha) = L + \alpha \ell(s) + o(\alpha), \quad (II)$$

$$\int \mathcal{L}(s, \alpha) p(s) ds = L, \quad (II)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}(\alpha) = L + \alpha \tilde{\ell} + o(\alpha),$$

$$\mathcal{L}^*(\alpha) = L + \alpha \ell^* + o(\alpha),$$

где $p(s)$ - финальная плотность вероятностей величины s . Учитывая (II) и рассуждая, как и выше, получим уравнение

$$\frac{d^2 \ell(s)}{ds^2} + \left[\lambda - \frac{\mu'(s)}{\mu(s)} - \mu(s) \right] \frac{d\ell(s)}{ds} = \lambda L - \frac{\lambda \mu'(s)}{\mu(s)} - \lambda F^*(s) - F^{*'}(s) + \frac{F^*(s) \mu'(s)}{\mu(s)}. \quad (I3)$$

Рассматривая состояния системы $\gamma(\tau) = 0$, $\gamma(t) = 1$, $s(t) = 0$ и учитывая возможные переходы, получим следующие условия в нуле

$$\lambda \tilde{\ell} - \lambda \ell^* - L = 0,$$

$$L + (\lambda + \mu(0)) \tilde{\ell} - \lambda \ell(0) - \mu(0) \ell^* - f'(\mu_1) = 0,$$

$$\left. \frac{d\ell(s)}{ds} \right|_{s=0} - \mu(0) \ell(0) + \mu(0) \tilde{\ell} - L + f(\mu_1) = 0.$$

Общее решение уравнения (I3) имеет вид

$$\ell(s) = \int_0^s \mu(y) e^{-\lambda y - m(y)} \left\{ \int_0^y [L - F^*(u)] e^{\lambda u - m(u)} du \right\} dy + \int_0^s [L - F^*(u)] du + \left(C_1 + \frac{f(\mu_1) - L}{\mu_1} \right) \int_0^s \mu(u) e^{-\lambda u - m(u)} du + C_2, \quad (I4)$$

где $m(s) = \int_0^s \mu(u) du$.

Из (I4) с учетом (I2) получим условие на бесконечности

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{\lambda s - m(s)} \ell(s) = 0.$$

Уравнение (I3), условия в нуле и условие на бесконечности определяют L однозначно. Решение имеет вид

$$L = \frac{\int_0^{\infty} e^{\lambda u - m(u)} [F(u) + f'(\mu_1 u)] du + f(\mu_1) / \lambda}{\frac{1}{\lambda} + \frac{\mu(0)}{\lambda^2} + \int_0^{\infty} e^{\lambda u - m(u)} du}. \quad (I5)$$

Таким образом, задача оптимизации описанной выше СМО сводится к минимизации функционала (15) с начальными условиями $m(0) = 0$, $m'(0) = \mu_1$. Применяя методы вариационного исчисления, для определения оптимальной интенсивности обслуживания $\mu(s)$ получим дифференциальное уравнение вида

$$\mu'(s)f''(\mu) + (\lambda - \mu(s))f'(\mu) + f(\mu) - \alpha + F(s) = 0, \quad (16)$$

где α - множитель Лагранжа, а граничное условие имеет вид $\mu(0) = \mu_1$. Аналитически решить уравнение (16) не удастся даже в случае, когда $f(\mu)$ и $F(s)$ достаточно простые функции. Оно решено численно. На языке ФОРТРАН-IV реализована программа нахождения оптимальной интенсивности обслуживания, минимизирующей функционал (15).

Собойм для такой задачи является случай $f(\mu) = D\mu$ ($D = \text{const} > 0$). При этом уравнение (16) вырождается в $\lambda D - \alpha + F(s) = 0$, что говорит о том, что решение вариационной задачи в этом случае находится в классе разрывных функций, для которых методика классического вариационного исчисления неприменима.

Этот особый случай рассмотрен с использованием принципа максимума Понтрягина [4]. Будем считать дополнительно, что $\mu(s)$ лежит в границах $\mu_1 \leq \mu(s) \leq \mu_2$, а $F(s)$ является монотонно возрастающей функцией от s . Применяя методику принципа максимума, получаем, что решение в этом случае имеет вид

$$\mu(s) = \begin{cases} \mu_1 & \text{при } 0 \leq s \leq s_0, \\ \mu_2 & \text{при } s > s_0. \end{cases}$$

СМО с подобным законом изменения $\mu(s)$ будем называть двухуровневой системой.

3. Исследование двухуровневой системы

Рассмотрим случай, когда функция потерь на амортизацию имеет вид

$$f(\mu) = \begin{cases} C & \text{при } \mu = \mu_1, \\ C & \text{при } \mu = \mu_2. \end{cases}$$

Тогда (15) примет вид

$$L(s_0) = \int_0^{s_0} F(s) p_1(s) ds + \int_{s_0}^{\infty} F(s) p_2(s) ds + C \int_{s_0}^{\infty} \tilde{p}_2(s) ds,$$

где при $\lambda \neq \mu_1$

$$p_1(s) = \frac{\lambda^2 (\lambda - \mu_2) (\lambda - \mu_1) \exp[(\lambda - \mu_1) s]}{\lambda^2 (\mu_1 - \mu_2) \exp[(\lambda - \mu_1) s_0] - \mu_1^2 (\lambda - \mu_2)},$$

$$P_2(s) = \frac{\lambda^2 (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) \exp[\lambda s - \mu_1 s_0 - \mu_2 (s - s_0)]}{\lambda^2 (\mu_1 - \mu_2) \exp[(\lambda - \mu_1) s_0] - \mu_1^2 (\lambda - \mu_2)},$$

а при $\lambda = \mu_1$,

$$P_1(s) = \frac{\lambda (\lambda - \mu_2)}{(\lambda - \mu_2) (1 + \lambda s_0) - \mu_2},$$

$$P_2(s) = \frac{\lambda (\lambda - \mu_2) \exp[(\lambda - \mu_2) (s - s_0)]}{(\lambda - \mu_2) (1 + \lambda s_0) - \mu_2}.$$

Преобразуя уравнение $L'(s_0) = 0$, получим соответственно при $\rho_1 \neq 1$ и $\rho_1 = 1$

$$C_2 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1^2 (1 - \rho_1)} \left\{ \rho_1 \rho_2 (\rho_1 - 1) \int_0^{x_0} F\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{\frac{(\rho_1 - 1)x}{\rho_1}} dx + \right. \\ \left. + (\rho_2 - 1) (\rho_1^2 e^{\frac{(\rho_1 - 1)x_0}{\rho_1}} - 1) e^{\frac{(1 - \rho_2)x_0}{\rho_2}} \int_{x_0}^{\infty} F\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{\frac{(\rho_2 - 1)x}{\rho_2}} dx \right\},$$

$$C_2 = \frac{(\rho_2 - 1)}{\rho_1^2} \left\{ \rho_2 \int_0^{x_0} F\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx + (\rho_2 - 1) (2 + x_0) e^{-\frac{(\rho_2 - 1)x_0}{\rho_2}} \times \right. \\ \left. \times \int_{x_0}^{\infty} F\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{\frac{(\rho_2 - 1)x}{\rho_2}} dx \right\},$$

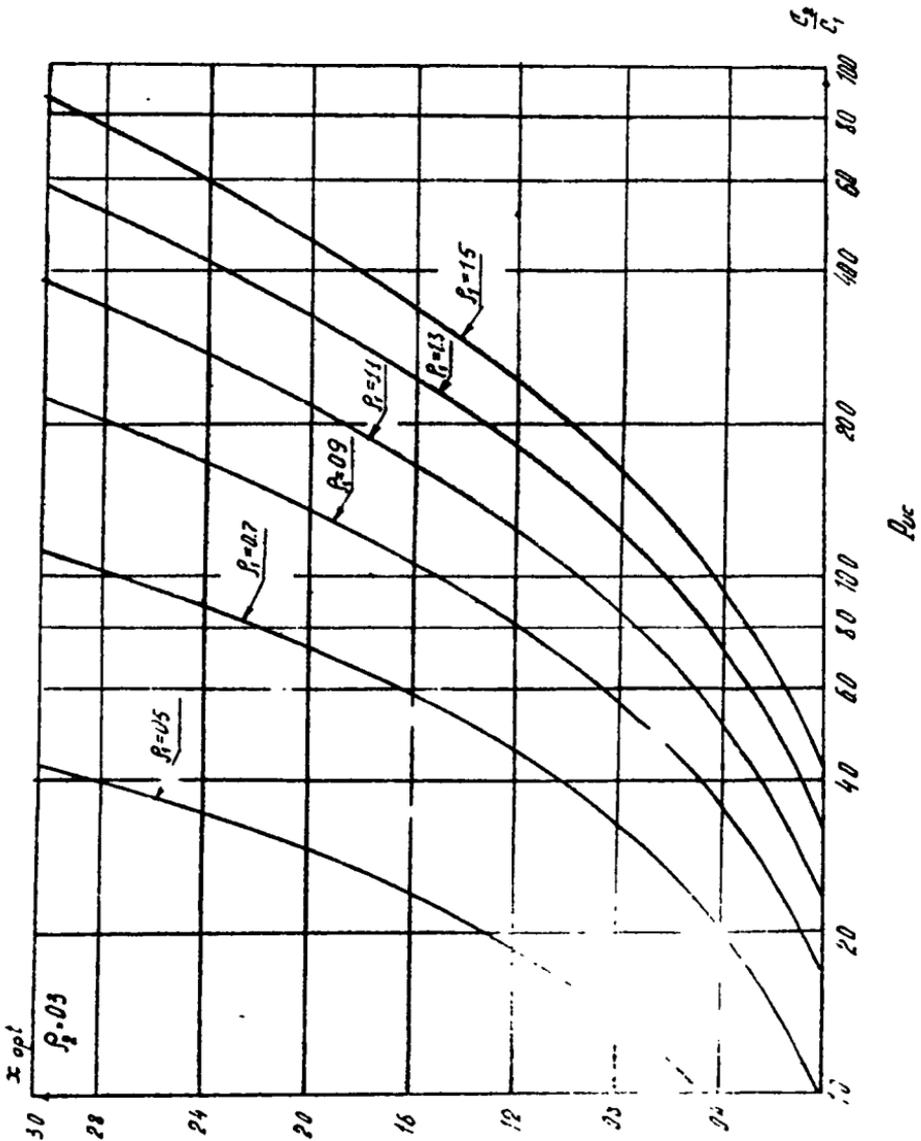
где $\rho_i = \lambda / \mu_i$, $x_0 = \lambda s_0$. Если $F(s)$ - положительная, монотонно возрастающая функция от s , то эти уравнения имеют единственный корень, в котором $L(s_0)$ принимает свое минимальное значение. На рисунке приведен пример зависимости $x_0 = \lambda s_0$ от C_2 / C_1 для случая $F(s) = C_1 (\lambda s + 1)$.

Л и т е р а т у р а

1. Wolisz A., Isydorozyk I. Queuing systems with waiting time dependent service times (Analysis and optimization). - Magy. tud. akad. szamitastechn. és automatis. kut. inter. tanul., 1979, в. 100, в. 103-135.
2. Горцев А.М. Об оптимальной стратегии включения второго или резервного канала в однолинейной системе массового обслуживания ижд. - Автоматика и телемеханика, 1977, № I, с. 179-187.
3. Зиновьева Д.И., Терпугов А.Ф. Однолинейная система массового обслуживания с переменной интенсивностью, зависящей от време-

ни ожидания.-Автоматика и телемеханика, 1981, №1, с.27-30.

4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов.-М.: Наука, 1976.- 392 с.



ОДНОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С
ГИСТЕРЕЗИСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ОБСЛУ-
ЖИВАНИЯ, ЗАВИСЯЩАЯ ОТ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ

Л. И. Зиновьева

В последние годы возросло число работ, посвященных изучению управляемых систем массового обслуживания СМО [1]. Значительное число работ посвящено изучению СМО, в которых интенсивность обслуживания зависит от длины очереди или от числа заявок в системе [2-4]. Однако СМО с управлением по времени ожидания остались изученными очень слабо. В данной работе изучена однолинейная СМО, аналогичная двухуровневой системе, рассмотренной в [5], но отличающаяся двумя моментами: во-первых, тем, что интенсивность обслуживания определяется не временем пребывания заявки в системе, а текущим временем ожидания заявки, находящейся первой в очереди, и во-вторых, тем, что включение и выключение большей интенсивности имеет гистерезис.

Описание системы. Пусть имеется один обслуживающий прибор, на который поступает простейший поток заявок интенсивности λ . Если заявка, находящаяся в некоторый произвольный момент времени t первой в очереди, поступила в систему в момент времени t_0 , то величину $s(t) = t - t_0$ будем называть текущим временем ожидания заявки, находящейся первой в очереди. Обслуживание предполагается марковским с одной из двух интенсивностей μ_1 или μ_2 ($\mu_2 > \mu_1$). Переключение от обслуживания с одной интенсивностью на обслужива-

ние с другой интенсивностью описывается следующим правилом. Если обслуживание происходило с интенсивностью μ_1 , то переключение на обслуживание с интенсивностью μ_2 происходит тогда, когда текущее время ожидания s станет равным s_1 . Если же заявка обслуживается с интенсивностью μ_2 , то переключение на обслуживание с интенсивностью μ_1 происходит тогда, когда s станет меньше s_2 ($s_2 < s_1$). Счевидно, что это обратное переключение с интенсивности μ_2 на μ_1 происходит тогда, когда заявка, стоящая первой в очереди, поступает на обслуживание и ее место занимает заявка, ранее бывшая в очереди второй.

Поведение системы будем описывать марковским процессом $\{s(t), \gamma(t)\}$ с особыми состояниями $\gamma(t)=0$ и $\gamma(t)=1$, где $\gamma(t)$ - число заявок, находящихся на обслуживании, если очередь пуста; $\gamma(t)$ - уровень обслуживания: $\gamma(t)=1$, если обслуживание производится с интенсивностью μ_1 , и $\gamma(t)=2$, если обслуживание производится с интенсивностью μ_2 . Будем рассматривать стационарный режим работы системы. Найдем функции $p(s, \gamma)$ ($0 \leq s < \infty, \gamma = 1, 2$), определяющие стационарное распределение состояний системы, такие, что $\int_0^{\infty} p(s, \gamma) ds$ есть вероятность того, что уровень обслуживания равен γ , а текущее время ожидания заявки, находящейся первой в очереди, заключено в интервале $[a, b]$, где $0 < a < b < \infty$. Обозначим функцию $p(s, \gamma)$ через $p_1(s)$ в области $0 \leq s < s_1$, в которой $\gamma = 1$; через $p_2(s)$ в области $s_1 \leq s < s_2$, если $\gamma = 1$; $p_3(s)$ в области $s_2 \leq s < s_1$, если $\gamma = 2$; $p_4(s)$ в области $s > s_1$, в которой $\gamma = 2$. Рассматривая возможные переходы за бесконечно малый промежуток времени Δt , запишем обратное уравнение Колмогорова

$$\begin{aligned}
 p_1(s) = & (1 - \mu_1 \Delta t) p_1(s - \Delta t) + \mu_1 \Delta t \int_{s_1-s}^{s_1-s} \lambda e^{-\lambda v} p_2(s+v) dv + \\
 & + \mu_2 \Delta t \int_{s_2-s}^{s_1-s} \lambda e^{-\lambda v} p_3(s+v) dv + \mu_1 \Delta t \int_0^{s_1-s} \lambda e^{-\lambda v} p_1(s+v) dv + \\
 & + \mu_2 \Delta t \int_{s_1-s}^{\infty} \lambda e^{-\lambda v} p_4(s+v) dv,
 \end{aligned} \quad (I)$$

где v - длина интервала времени, через который поступило требование, следующее за находящимся в очереди первым. Разлагая в (I) функцию $p_1(s - \Delta t)$ в ряд Тейлора по Δt , поделив почленно на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_1(s)}{ds} + \mu_1 p_1(s) = & \lambda \mu_1 \int_0^{s_1-s} e^{-\lambda v} p_1(s+v) dv + \lambda \mu_1 \int_{s_2-s}^{s_1-s} e^{-\lambda v} p_2(s+v) dv + \\
 & + \lambda \mu_2 \int_{s_1-s}^{s_1-s} e^{-\lambda v} p_3(s+v) dv + \lambda \mu_2 \int_{s_1-s}^{\infty} e^{-\lambda v} p_4(s+v) dv.
 \end{aligned} \quad (2)$$

Производя в интегралах замену $s+v=x$, умножая на $e^{-\lambda x}$ и дифференцируя по s , приведем (2) к виду

$$\frac{d^2 p_1(s)}{ds^2} + (\mu_1 - \lambda) \frac{d p_1(s)}{ds} = 0.$$

Аналогично получаем

$$\frac{d p_2(s)}{ds} + \mu_1 p_2(s) = \mu_1 \int_0^{s_1-s} \lambda e^{-\lambda v} p_2(s+v) dv, \quad (3)$$

или

$$\frac{d^2 p_2(s)}{ds^2} + (\mu_1 - \lambda) \frac{d p_2(s)}{ds} = 0.$$

Подобным же образом получим:

$$\frac{d p_3(s)}{ds} + \mu_2 p_3(s) = \mu_2 \int_0^{s_1-s} \lambda e^{-\lambda v} p_3(s+v) dv + \mu_2 \int_{s_1-s}^{\infty} \lambda e^{-\lambda v} p_4(s+v) dv, \quad (4)$$

$$\frac{d p_4(s)}{ds} + \mu_2 p_4(s) = \mu_2 \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda v} p_4(s+v) dv,$$

или

$$\frac{d^2 p_3(s)}{ds^2} + (\mu_2 - \lambda) \frac{d p_3(s)}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2 p_4(s)}{ds^2} + (\mu_2 - \lambda) \frac{d p_4(s)}{ds} = 0.$$

Выведем теперь условия сшивания в точках $s=s_0$ и $s=s_1$. Рассматривая переходы в точке $s=s_0$, получим

$$p_2(s_0) = (1 - \mu_1 \Delta t) p_1(s_0 - \Delta t) + \mu_1 \Delta t \int_0^{s_0-s_0} \lambda e^{-\lambda v} p_2(s_0+v) dv,$$

откуда после предельного перехода при $\Delta t \rightarrow 0$ получим

$$p_1(s_0) = p_2(s_0).$$

Далее, в точке $s=s_1$ справедливо уравнение

$$p_3(s_1) = \mu_2 \Delta t \int_0^{s_1-s_1} \lambda e^{-\lambda v} p_3(s_1+v) dv + \mu_2 \Delta t \int_{s_1-s_1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda v} p_4(s_1+v) dv.$$

откуда следует, что $p_3(s_1) = 0$.

Пслагая в уравнениях (2), (3), (4) $s=s_0$, получим

$$\left. \frac{d p_1(s)}{ds} \right|_{s=s_0} + \mu_1 p_1(s_0) = \left. \frac{d p_2(s)}{ds} \right|_{s=s_0} + \mu_1 p_2(s_0) + \left. \frac{d p_3(s)}{ds} \right|_{s=s_0} + \mu_2 p_3(s_0).$$

Аналогично, в точке $s=s_1$ получаются следующие условия сшивания

$$p_4(s_1) = p_3(s_1) + p_2(s_1),$$

$$\frac{d p_2(s)}{ds} \Big|_{s=s_1} + \mu_1 p_2(s_1) = 0,$$

$$\frac{d p_3(s)}{ds} \Big|_{s=s_1} + \mu_2 p_3(s_1) = \frac{d p_4(s)}{ds} \Big|_{s=s_1} + \mu_2 p_4(s_1).$$

Выведем теперь условия в нуле, обозначая через $\pi(\nu)$ финальную вероятность того, что система находится в состоянии $\nu(t) = \nu$ ($\nu = 1, 2$). Пусть система находится в некоторый момент времени t в состоянии $\nu(t) = 0$. Рассматривая возможные переходы за время Δt , получим первое условие в нуле

$$\lambda \pi(0) = \mu_1 \pi(1).$$

Рассматривая состояние системы $\{s(t) = 0, \nu(t) = 1\}$ и особое состояние $\nu(t) = 1$, получим с учетом возможных переходов за время Δt , соответственно, следующие соотношения:

$$p_1(0) = \lambda \pi(1) \quad (5)$$

и

$$(\lambda + \mu_1) \pi(1) = \lambda \pi(0) + \mu_1 \int_0^{s_1} e^{-\lambda v} p_1(v) dv + \mu_1 \int_{s_0}^{s_1} e^{-\lambda v} p_2(v) dv + \mu_2 \int_{s_0}^{s_1} e^{-\lambda v} p_3(v) dv + \mu_2 \int_{s_1}^{\infty} e^{-\lambda v} p_4(v) dv.$$

Умножая последнее соотношение почленно на λ и используя (5), получим

$$(\lambda + \mu_1) p_1(0) - \lambda^2 \pi(0) = \mu_1 \lambda \int_0^{s_1} e^{-\lambda v} p_1(v) dv + \mu_1 \lambda \int_{s_0}^{s_1} e^{-\lambda v} p_2(v) dv + \mu_2 \lambda \int_{s_0}^{s_1} e^{-\lambda v} p_3(v) dv + \mu_2 \lambda \int_{s_1}^{\infty} e^{-\lambda v} p_4(v) dv. \quad (6)$$

Полагая теперь в уравнении (2) $s = 0$ и сравнивая его правую часть с правой частью (6), получим второе условие в нуле

$$\frac{d p_1(s)}{ds} \Big|_{s=0} - \lambda p_1(0) = -\lambda^2 \pi(0).$$

К этим условиям следует добавить еще естественное условие

$\lim_{s \rightarrow \infty} p_4(s) = 0$ и условие нормировки

$$\pi(0) + \pi(1) + \int_0^{s_0} p_1(s) ds + \int_{s_0}^{s_1} [p_2(s) + p_3(s)] ds + \int_{s_1}^{\infty} p_4(s) ds = 1.$$

Выведенные уравнения вместе с условиями живания, нормировки и граничными условиями решают задачу о нахождении $p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_3(s)$, $p_4(s)$ однозначно. Решение имеет вид

$$p_1(s) = A(\lambda - \mu_2) \left[\mu_1 e^{(\lambda - \mu_1)(s + s_0)} - \lambda e^{(\lambda - \mu_1)(s + s_1)} \right],$$

$$p_2(s) = A(\lambda - \mu_2) \left[\mu_1 e^{(\lambda - \mu_1)(s + s_0)} - \lambda e^{(\lambda - \mu_1)(s_0 + s_1)} \right], \quad (7)$$

$$P_3(s) = A \lambda (\lambda - \mu_1) e^{(\lambda - \mu_1)(s_0 + s_1)} [1 - e^{(\lambda - \mu_2)(s - s_0)}],$$

$$P_4(s) = A (\lambda - \mu_1) e^{(\lambda - \mu_2)s} [\mu_2 e^{(\lambda - \mu_1)s_0 + (\mu_1 - \mu_2)s_1} - \lambda e^{(\lambda - \mu_1)s_0 + (\mu_2 - \mu_1)s_1}],$$

где

$$A = \frac{\lambda^2 (\lambda - \mu_2)}{\lambda^2 (\lambda - \mu_1) (\mu_2 - \mu_1) [1 + \lambda (s_1 - s_0)] e^{(\lambda - \mu_1)(s_0 + s_1)} + \mu_2^2 (\lambda - \mu_2) [\lambda e^{(\lambda - \mu_1)s_0} - \mu_1 e^{(\lambda - \mu_1)s_1}]}.$$

Отметим, что для случая $\lambda = \mu_1$ формулы (7) не пригодны, так как имеется неопределенность, раскрывая которую, получим

$$P_1(s) = A (\mu_1 - \mu_2) [1 - \mu_1 (s_1 - s_0)],$$

$$P_2(s) = A (\mu_1 - \mu_2) [1 - \mu_1 (s_0 - s)],$$

$$P_3(s) = A \mu_1 [\exp((\lambda - \mu_2)(s - s_0)) - 1],$$

$$P_4(s) = A [\lambda \exp((\lambda - \mu_2)(s - s_0)) - \mu_2 \exp((\lambda - \mu_2)(s - s_0))], \text{ где}$$

$$A = 2\mu_1 \{ 2(\lambda - \mu_2) (\mu_2 + \mu_1 s_0) [1 + \mu_1 (s_1 - s_0)] + \mu_1 [(1 + \mu_1 (s_1 - s_0))^2 + ((\lambda - \mu_2)(s_1 - s_0) - 2) + (\lambda - \mu_2)(s_1 - s_0)] \}^{-1}.$$

Оптимизация системы. В описанной системе могут возникать потери различных видов. Рассмотрим случай, когда в исследуемой системе возникает потери только трех типов.

I. Потери от ожидания. Нахождение в системе заявок, ожидающих обслуживания, приводит к потерям, которые будем называть потерями от ожидания. Пусть потери от ожидания определяются числом заявок i , находящихся в очереди. Будем считать, что если в очереди в течение единицы времени находится i заявок, то потери от ожидания в единицу времени равны $F(i)$. Найдем математическое ожидание $MF(i)$ этих потерь. Пусть в какой-то момент времени заявка, находящаяся в очереди первой, ожидает обслуживания в течение времени s . За это время с вероятностью $(\lambda s)^{i-1} e^{-\lambda s} / (i-1)!$ пришла еще $i-1$ заявок. Таким образом, условное распределение числа заявок в очереди i есть

$$p(i/s) = \frac{(\lambda s)^{i-1} e^{-\lambda s}}{(i-1)!}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тогда безусловное распределение $p(i)$ числа заявок в очереди имеет вид

$$p(i) = \int_0^{s_0} \frac{(\lambda s)^{i-1} e^{-\lambda s}}{(i-1)!} P_1(s) ds + \int_{s_0}^{s_1} \frac{(\lambda s)^{i-1} e^{-\lambda s}}{(i-1)!} [P_2(s) + P_3(s)] ds + \int_{s_1}^{\infty} \frac{(\lambda s)^{i-1} e^{-\lambda s}}{(i-1)!} P_4(s) ds.$$

Отсюда

$$L_1 = MF(s) = \int_0^{s_0} \tilde{F}(s) p_1(s) ds + \int_{s_0}^{s_1} \tilde{F}(s) [p_2(s) + p_3(s)] ds + \int_{s_1}^{\infty} \tilde{F}(s) p_4(s) ds,$$

где

$$\tilde{F}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} F(i) \frac{(\lambda s)^{i-1} e^{-\lambda s}}{(i-1)!}.$$

В частности, если $F(i) = C_{11}$, то $\tilde{F}(s) = C_1 (\lambda s + 1)$.

2. Потери на амортизацию обслуживающего устройства. Будем считать, что работа обслуживающего прибора с интенсивностью μ_2 приводит в единицу времени к потерям, равным C_2 . Тогда среднее значение потерь на амортизацию в единицу времени равно

$$L_2 = C_2 \left[\int_{s_0}^{s_1} p_3(s) ds + \int_{s_1}^{\infty} p_4(s) ds \right].$$

3. Потери на переключение. Будем считать, что каждое включение большей интенсивности связано с потерями, равными C_3 . Так как включение интенсивности μ_2 происходит при достижении текущим временем ожидания заявки, стоящей в очереди первой, s величины s_1 , то среднее число включений в единицу времени равно $p_2(s_1)$ и среднее значение потерь на переключение в единицу времени равно

$$L_3 = C_3 p_2(s_1).$$

Будем считать, что средние суммарные потери системы в единицу времени равны

$$L = L_1 + L_2 + L_3.$$

Тогда

$$L(s_0, s_1) = \int_0^{s_0} \tilde{F}(s) p_1(s) ds + \int_{s_0}^{s_1} \tilde{F}(s) [p_2(s) + p_3(s)] ds + \int_{s_1}^{\infty} \tilde{F}(s) p_4(s) ds + C_2 \left[\int_{s_0}^{s_1} p_3(s) ds + \int_{s_1}^{\infty} p_4(s) ds \right] + C_3 p_2(s_1). \quad (8)$$

Таким образом, средние суммарные потери системы в единицу времени зависят от параметров s_0 , s_1 и оптимизация рассматриваемой системы сводится к нахождению минимума функции $L(s_0, s_1)$ по s_0 , s_1 . Так как функция $L(s_0, s_1)$ вида (8) имеет довольно сложный вид даже в случаях, когда $F(s)$ достаточно простая функция, то аналогически найти точку (s_0^*, s_1^*) , доставляющую минимум функции (8) не удастся. Эта задача решена численно. На языке ФОРТРАН-IV реализована программа, позволяющая находить оптимальные моменты включения и выключения большей интенсивности обслужи-

вания, минимизирующие функцию потерь (8).

Л и т е р а т у р а

1. Рыков В.В. Управляемые системы массового обслуживания.-В кн.: Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР.-М., 1975, т.12, с.43-153.
2. Соловьев А.Д. Задача об оптимальном обслуживании.-Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1970, № 5, с.40-49.
3. Коваленко И.Н. О системе массового обслуживания со скоростью обслуживания, зависящей от числа требований в системе, и периодическим отключением каналов.- Проблемы передачи информации, 1971, т.7, вып.2, с.106-111.
4. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания.-Томск: Из-во ТТУ, 1978.- 208 с.
5. Зиновьева Л.И., Терпугов А.Ф. Однолинейная система массового обслуживания с переменной интенсивностью, зависящей от времени ожидания.-Автоматика и телемеханика, 1971, №1, с.27-30.

О НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ В ТЕОРИИ
МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

А.В. Китаева, А.Ф. Терпугов

При расчете систем массового обслуживания обычно ограничиваются расчетом одномерных распределений вероятностей таких величин, как длина очереди, время ожидания и т.п. Однако в некоторых случаях необходимо знание и двумерных распределений. Ниже найдется два таких двумерных распределения.

1. Пусть имеется однолинейная СМО на которую поступает простейший поток заявок интенсивности λ . Обслуживание рекуррентное, причем плотность вероятностей длительности обслуживания τ есть $\beta(\tau)$. Пусть в системе существует стационарный режим. Обозначим через $\rho(x, i) dx$ вероятность того, что в произвольный момент времени t в системе будет находиться i заявок, причем заявка, находящаяся на обслуживании, находится на приборе в течение времени $\xi \in [x, x+dx]$. Найдем $\rho(x, i)$.

Очевидно, что пара (x, i) является двумерным марковским процессом с одной непрерывной и одной дискретной компонентами в силу отсутствия последействия во входящем потоке и рекуррентности обслуживания. Поэтому, рассматривая состояние системы спустя время Δt , можем записать

$$\rho(x + \Delta t, i) = \lambda \Delta t \rho(x, i-1) + \rho(x, i)(1 - \lambda \Delta t - a(x)\Delta t) + o(\Delta t), \quad i > 1,$$

где $a(x) = \beta(x)/(1 - B(x))$, $B(x) = \int_0^x \beta(\tau) d\tau$. Для $i=1$ имеем

$$\rho(x + \Delta t, 1) = \rho(x, 1)(1 - \lambda \Delta t - a(x)\Delta t) + o(\Delta t).$$

Разлагая $\rho(x + \Delta t, i)$ в Тейлора по Δt , получим

$$\frac{\partial \rho(x, i)}{\partial x} = \lambda \rho(x, i-1) - \lambda \rho(x, i) - a(x) \rho(x, i), \quad i > 1,$$

$$\frac{\partial \rho(x, 1)}{\partial x} = -\lambda \rho(x, 1) - a(x) \rho(x, 1).$$

Вводя производящую функцию $G(z, x) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i p(x, i)$, получим

$$\frac{\partial G(z, x)}{\partial z} = \lambda(x-1) G(z, x) - a(x) G(z, x),$$

откуда $G(z, x) = (1 - B(z)) e^{\lambda z(x-1)} G_0(x)$, где $G_0(x)$ - пока неизвестная функция.

Для определения $G_0(x)$ рассмотрим переходы в состояние $(0, i)$. Так как при $i > 1$ переход в это состояние может происходить лишь при окончании обслуживания заявки, то

$$p(0, i) = \int_0^{\infty} p(x, i+1) a(x) dx.$$

Если через π обозначить финальную вероятность того, что в системе отсутствуют заявки, то

$$p(0, 1) = \int_0^{\infty} p(x, 2) a(x) dx + \lambda \pi,$$

$$\lambda \pi = \int_0^{\infty} p(x, 1) a(x) dx.$$

Умножая уравнения для $p(0, i)$ на x^i и складывая, получим

$$G(0, x) + \lambda \pi = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} G(z, x) a(z) dz + \lambda x \pi.$$

Отсюда, подставляя явное выражение для $G(z, x)$, получим

$$G_0(x) + \lambda \pi = \frac{G_0(x)}{x} \int_0^{\infty} \beta(z) e^{\lambda z(x-1)} dz + \lambda x \pi = \lambda x \pi + \frac{G_0(x)}{x} \mathcal{P}(\lambda - \lambda x),$$

где $\mathcal{P}(s)$ - преобразование Лапласа от $\beta(x)$.

Отсюда

$$G_0(x) = \frac{\lambda(x-1) x \pi}{x - \mathcal{P}(\lambda - \lambda x)},$$

$$G(z, x) = \frac{\lambda(x-1) x (1 - B(z))}{x - \mathcal{P}(\lambda - \lambda x)} e^{\lambda z(x-1)}.$$

Для нахождения π заметим, что в силу условия нормировки

$$\pi + \int_0^{\infty} G(z, 1) dz = 1. \quad \text{Так как}$$

$$\int_0^{\infty} (1 - B(z)) e^{\lambda z(x-1)} dz = \frac{\mathcal{P}(\lambda - \lambda x) - 1}{\lambda(x-1)},$$

то это условие приобретает вид

$$\lim_{x \rightarrow 1} \pi \cdot \frac{\mathcal{P}(\lambda - \lambda x)(x-1)}{x - \mathcal{P}(\lambda - \lambda x)} = 1.$$

Раскрывая неопределенность, получим, что $\pi_i = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$, где $\mu = \left[\int_0^{\infty} \beta(z) dz \right]^{-1}$. Поэтому окончательно

$$G(z, x) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \frac{\lambda x(x-1)(1-B(z))}{x - \mathcal{P}(\lambda - \lambda x)} e^{\lambda z(x-1)}.$$

В частном случае, когда $\beta(z) = \mu e^{-\mu z}$,

$$G(z, x) = \frac{\lambda x(1-\rho)(\mu + \lambda - \lambda x)}{\mu - \lambda x} e^{-(\mu + \lambda - \lambda x)z}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Разлагая $G(z, x)$ в ряд Тейлора по x , можно найти все $\rho(z, i)$

II. Пусть имеется однолинейная СМО, на которую поступит простейший поток заявок интенсивности λ . Обслуживание экспоненциальное с параметром μ . Найдем совместную плотность вероятностей $\rho(s, z)$ текущего времени ожидания s заявки, находящейся первой в очереди и текущего времени z нахождения на приборе заявки, которая обслуживается.

Наряду с этим будем рассматривать состояние системы, когда на обслуживающем приборе есть заявка, а очередь пуста, т.е. когда величина s не имеет смысла, и состояние, когда в системе вообще нет заявок. Совокупность всех этих состояний образует марковский процесс.

Рассмотрим сначала те состояния, когда в очереди есть заявки. Тогда, рассматривая состояние системы спустя время Δt , получим

$$\rho(s + \Delta t, z + \Delta t) = (1 - \mu \Delta t) \rho(s, z) + o(\Delta t),$$

откуда

$$\frac{\partial \rho(s, z)}{\partial s} + \frac{\partial \rho(s, z)}{\partial z} + \mu \rho(s, z) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $\rho(s, z) = \varphi(s, z) e^{-\mu z}$.

Для нахождения функции $\varphi(\cdot)$ рассмотрим граничные условия.

Рассмотрим состояние системы, когда очередь пуста, но на обслуживающем приборе есть заявка, текущее время обслуживания которой есть z . Обозначим через $\pi(z)$ финальную плотность вероятностей величины z .

Тогда имеем

$$\pi(z + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t - \mu \Delta t) \pi(z) + o(\Delta t),$$

откуда $\pi'(z) + (\lambda + \mu) \pi(z) = 0$. Решение имеет вид

$$\pi(z) = C_1 e^{-(\lambda + \mu)z}.$$

Так как в состояние $(0, \pi)$ можно попасть только из состояния с пустой очередью с приходом очередной заявки, то $\rho(0, \pi) = \lambda \pi(\pi)$. Отсюда получается, что $\varphi(-s) = \lambda C_1 e^{-\lambda s}$. Отметим, что это граничное условие определяет $\varphi(\pi)$ лишь для отрицательных значений аргумента.

Итак, в области $s < \pi$

$$\rho(s, \pi) = \lambda C_1 e^{-(\lambda + \mu)\pi + \lambda s}.$$

Обозначим через π_0 финальную вероятность того, что система пуста. Тогда $\lambda \pi_0 = \mu \int_0^{\infty} \pi(x) dx$ и поэтому

$$C_1 = \frac{\lambda(\mu + \lambda)}{\mu} \pi_0,$$

$$\pi(x) = \pi_0 \frac{\lambda(\mu + \lambda)}{\mu} e^{-(\mu + \lambda)x},$$

$$\rho(s, \pi) = \pi_0 \frac{\lambda^2(\mu + \lambda)}{\mu} e^{-(\lambda + \mu)\pi - \lambda s}, \quad s < \pi.$$

Рассмотрим теперь границу $\pi = 0$. Так как переход в состояние $(s, 0)$ возможен лишь при освобождении обслуживаемого устройства, то

$$\rho(s, 0) = \mu \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \rho(s+v, \pi) \lambda e^{-\lambda v} dv d\pi.$$

Подставляя сюда выражение для $\rho(s, \pi)$, получим

$$\varphi(s) = \mu \lambda \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(s+v-\pi) e^{-\lambda v - \mu \pi} dv d\pi.$$

Обозначая $v - \pi = u$, получим

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} \left[\int_0^{\infty} \varphi(s+u) e^{-\lambda u} du + \int_0^{\infty} \varphi(s+u) e^{-\lambda u} du \right] = \\ &= \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} \left[e^{-\mu s} \int_0^s \varphi(x) e^{\mu x} dx + e^{-\lambda s} \int_s^{\infty} \varphi(x) e^{-\lambda x} dx \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Умножим обе части этого равенства на $e^{\mu s}$ и продифференцируем по s , затем умножим на $e^{-\lambda s}$ и снова продифференцируем по s , тогда получим

$$\varphi''(s) + (\mu - \lambda) \varphi'(s) = 0.$$

Отсюда $\varphi(s) = C_2 + C_3 e^{-(\mu - \lambda)s}$ и в области $s > \pi$

$$\rho(s, \pi) = C_2 e^{-\mu s} + C_3 e^{-(\mu - \lambda)(s - \pi) - \mu \pi}.$$

Константу C_2 следует положить равной нулю, т.к. иначе $\int_0^{\infty} p(s, z) ds = \infty$. Поэтому при $s > 0$, $\varphi(s) = C_3 e^{-(\mu-\lambda)s}$.

Для нахождения C_3 возьмем снова уравнение (1) и в области $x < 0$ вместо $\varphi(x)$ возьмем выражение $\lambda C_1 e^{\lambda x}$. Тогда получим

$$C_3 e^{-(\mu-\lambda)s} = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} \left[\lambda C_1 e^{-\mu s} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x - \mu x} dx + C_3 e^{-\mu s} \int_0^s e^{-(\mu-\lambda)x + \mu x} dx + C_3 e^{\lambda s} \int_s^{\infty} e^{-(\mu-\lambda)x - \lambda x} dx \right].$$

Вычисляя интегралы, получим, что равенство выполняется при любых s лишь при выполнении соотношения

$$C_3 = \frac{\lambda^2 C_1}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda^2}{\mu} \pi_0,$$

и поэтому в области $s > z$

$$p(s, z) = \frac{\lambda^2}{\mu} \pi_0 e^{-(\mu-\lambda)s - \lambda z}.$$

Константа π_0 находится из условия нормировки

$$\pi_0 + \int_0^{\infty} \pi(z) dz + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} p(s, z) ds dz = 1,$$

откуда

$$\pi_0 = 1 - \rho, \quad \rho = \lambda/\mu,$$

$$\pi(z) = \rho(1-\rho)(\mu+\lambda) e^{-(\mu+\lambda)z},$$

$$p(s, z) = \begin{cases} (1-\rho^2) \lambda^2 e^{-(\mu+\lambda)s + \lambda z}, & s < z, \\ \rho(1-\rho) \lambda^2 e^{-\lambda s - (\mu-\lambda)z}, & s > z. \end{cases}$$

Заметим, что вдоль границы $s=z$ $p(s, z)$ терпит разрыв

$$p(z-0, z) = (1-\rho^2) \lambda^2 e^{-\mu z},$$

$$p(z+0, z) = \rho(1-\rho) \lambda^2 e^{-\mu z},$$

$$\frac{p(z+0, z)}{p(z-0, z)} = \frac{\rho}{1+\rho}.$$

Разрыв вдоль прямой $z=s$ объясняется тем, что состояние $s < z$ и $s > z$ принципиально различны: при $s < z$ после взятия заявки на обслуживание очередь оказалась пустой, а при $s > z$ после снятия заявки на обслуживание в очереди были еще и другие заявки.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ В
АДАПТИРУЮЩИХСЯ СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С
ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ОБСЛУЖИВАНИЯ

И.А.Коротаев

В случае, когда значения параметров системы массового обслуживания (СМО) либо неизвестны, либо меняются со временем, наиболее рациональным является применение адаптирующихся СМО [1]. Часто возникают ситуации, когда неизвестны параметры входных потоков, и задача адаптации - подобрать оптимальный в смысле какого-то критерия режим работы обслуживаемых приборов. Обычно в таких СМО переход на другую интенсивность обслуживания либо включение и отключение резервного прибора осуществляется некоторым устройством - адаптором, воспринимающим информацию о входных потоках [2-3]. Для отыскания оптимального режима работы системы необходимо знать ее характеристики (финальное распределение вероятностей, среднюю длину очереди и т.д.). Точный расчет этих величин является очень сложной математической задачей, особенно в случае, когда при работе с меньшей интенсивностью обслуживания либо без подключения резервного прибора система оказывается перегруженной. В связи с этим возникает потребность в приближенных методах расчета характеристик таких систем. Ниже предлагается приближенный метод расчета среднего числа заявок в адаптивных СМО такого рода.

Адаптивная СМО с двумя интенсивностями обслуживания.

Рассмотрим однолинейную СМО, на которую поступает простейший поток заявок неизвестной интенсивности λ . Обслуживание экспоненциальное, с одним из двух возможных параметров: μ_1 или μ_2 , причем $\mu_1 < \mu_2$. Включение той или иной интенсивности обслуживания осуществляется адаптором в соответствии с информацией, получаемой им о входном потоке. Считаем, что время работы обслуживаемого прибора с интенсивностью μ_2 есть случайная величина с функцией распределения $F_2(t)$ ($i = 1, 2$).

Пусть $\lambda < \mu_1 < \mu_2$. Идея предлагаемого метода расчета среднего числа заявок в системе состоит в следующем: считаем, что к моменту переключения на интенсивность μ_i в системе успело установиться финальное распределение вероятностей $P_j^{(i)}(n)$, где n - число заявок ($i, j = 1, 2, i \neq j$). После перехода на μ_i в системе начнется переходной процесс, и среднее число заявок в момент будет равно $I_n^{(i)}(t)$, если в момент переключения $t=0$ в системе было n заявок. Усредняя по $P_j^{(i)}(n)$, получим

$$I^{(i)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_j^{(i)}(n) I_n^{(i)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_j^n}{1 - \rho_j} I_n^{(i)}(t),$$

где $\rho_j = \lambda / \mu_j$. Тогда суммарное среднее число задач за период работы с интенсивностью μ_i при условии, что переключение произошло с μ_j на μ_i , равно

$$L_{ji} = \int_0^t dF_i(t) \int_0^t I^{(i)}(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} I^{(i)}(t) [1 - F_i(t)] dt. \quad (I)$$

Так как средняя длительность работы прибора с интенсивностью равна

$$T_i = \int_0^{\infty} [1 - F_i(t)] dt,$$

то среднее число заявок в системе

$$L = (L_{12} + L_{21}) / (T_1 + T_2). \quad (2)$$

Таким образом, для подсчета L необходимо вычислить $I_n^{(i)}(t)$. Пусть $P_{nk}^{(i)}(t)$ есть вероятность того, что в системе в момент t находится k заявок при условии, что в момент переключения на интенсивность μ_i $t=0$ в ней было n заявок и с тех пор переключений не происходило. Тогда имеет место система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{P}_{n0}^{(i)}(t) = -\lambda P_{n0}^{(i)}(t) + \mu_i P_{n1}^{(i)}(t) \\ \dot{P}_{nk}^{(i)}(t) = \lambda P_{nk-1}^{(i)}(t) - (\lambda + \mu_i) P_{nk}^{(i)}(t) + \mu_i P_{nk+1}^{(i)}(t) \end{cases} \quad (3)$$

с начальными условиями $P_{nk}^{(i)}(0) = \delta_{nk}$. Применяя к системе (3) преобразование Лапласа-Карсона, получим систему разностных уравнений

$$\begin{cases} s Q_{n0}(s) = -\lambda Q_{n0}(s) + \mu_i Q_{n1}(s) \\ s Q_{nk}(s) - \lambda \delta_{nk} = \lambda Q_{nk-1}(s) - (\lambda + \mu_i) Q_{nk}(s) + \mu_i Q_{nk+1}(s), \end{cases} \quad (4)$$

где

$$Q_{nk}(s) = \int_0^{\infty} P_{nk}^{(i)}(t) e^{-st} dt.$$

Решая систему (4), получим

$$Q_{nk}(s) = \frac{s^k \lambda^n (\lambda + s - \mu_i \tilde{z}_2) \mu_i^{n-k}}{\lambda^n (\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2) (\lambda + s - \mu_i \tilde{z}_1)} \tilde{z}_1^k - \frac{s^k \lambda^n \mu_i^{n-k}}{\lambda^n (\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2)} \tilde{z}_2^k, k \leq n \quad (5)$$

$$Q_{nk}(s) = \frac{s \mu_i^{n-1} [(\lambda + s - \mu_i \tilde{z}_2) \tilde{z}_1^n - (\lambda + s - \mu_i \tilde{z}_1) \tilde{z}_2^n]}{\lambda^n (\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2) (\lambda + s - \mu_i \tilde{z}_1)} \tilde{z}_1^k \quad k > n,$$

где $\tilde{z}_{1,2} = [\lambda + \mu_i + s \mp \sqrt{(\lambda + \mu_i + s)^2 - 4\lambda\mu_i}] / 2\mu_i$.

Согласно [4]

$$I_n^{(i)}(t) = n + (\lambda - \mu_i)t + \mu_i \int_0^t P_{n0}^{(i)}(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$J_n^{(i)}(s) = \tilde{z} I_n^{(i)}(s) = n + \frac{\lambda - \mu_i}{s} + \frac{\mu_i}{s} Q_{n0}(s) \quad (6)$$

и

$$J^{(i)}(s) = \tilde{z} I^{(i)}(s) = \frac{p_j}{1-p_j} + \frac{\lambda - \mu_i}{s} + \frac{(1-p_j)\mu_i}{s} \frac{\mu_i - \lambda + s + \sqrt{(\lambda + \mu_i + s)^2 - 4\lambda\mu_i}}{\mu_i + \lambda + s + \sqrt{(\lambda + \mu_i + s)^2 - 4\lambda\mu_i}} \quad (7)$$

$$J^{(i)}(s) = G(s, \lambda, \mu_j, \mu_i).$$

Из (7) обратным преобразованием Лапласа-Карсона можно получить

$I^{(i)}(t)$ в виде бесконечного ряда; однако сложность этого выражения делает крайне затруднительным вычисление интегралов (I). Однако величины L_{ji} можно получить и другим путем, без обратного преобразования. Заметим, что, если $F_i(t) = 1 - e^{-d_i t}$, то

$$L_{ji} = d_i^{-1} G(d_i, \lambda, \mu_j, \mu_i).$$

Попытаемся привести интеграл (I) к виду $\int_0^\infty s^{-1} G(s, \lambda, \mu_j, \mu_i) H_i(s) ds$.

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty s^{-1} G(s, \lambda, \mu_j, \mu_i) H_i(s) ds &= \int_0^\infty 1(s) ds \int_0^\infty e^{-st} I^{(i)}(t) dt = \\ &= \int_0^\infty I^{(i)}(t) dt \int_0^\infty e^{-st} H_i(s) ds. \end{aligned}$$

Отсюда

$$[1 - F_i(t)] = \int_0^\infty e^{-st} H_i(s) ds.$$

Обозначим $\tilde{F}_i(s) = \tilde{z} [1 - F_i(s)]$ и найдем явное выражение для $H_i(s)$

$$\tilde{F}_i(s) = s \int_0^\infty e^{-st} [1 - F_i(t)] dt = s \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^\infty H_i(p) e^{-pt} dp = \int_0^\infty \frac{s}{p+s} H_i(p) dp.$$

Это интегральное уравнение Стильтеса. Согласно [5], его решение имеет вид

$$H_i(p) = \frac{\xi}{2\pi i} \left[\frac{\tilde{F}_i(p e^\xi)}{p e^\xi} - \frac{\tilde{F}_i(p e^{-\xi})}{p e^{-\xi}} \right], \quad \xi = \sqrt{-\pi^2}.$$

Таким образом, среднее суммарное число заявок в системе за время работы с интенсивностью μ_i после переключения с интенсивности μ_j можно записать в виде

$$L_{j_i} = \int_0^{\infty} \frac{\xi}{2\pi^2 s} \left[\frac{\tilde{F}_i(s e^{\xi})}{s e^{\xi}} - \frac{\tilde{F}_i(s e^{-\xi})}{s e^{-\xi}} \right] G(s, \lambda, \mu_j, \mu_i) ds. \quad (8)$$

Предыдущие рассуждения проводились в предположении, что к моменту переключения интенсивностей с μ_j на μ_i в системе успевало установиться финальное распределение. Оценим точность этого приближения, для чего рассмотрим разность $\varepsilon(t) = I^{(i)}(t) - P_i / (1 - \rho_i)$.

$$\varepsilon(t) = \mathcal{L}^{-1} G(s, \lambda, \mu_j, \mu_i) - \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} = (\mu_i \rho_j - \lambda) \mu_i (1 - \rho_j) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu_i \rho_j)^k}{(\sqrt{\lambda \mu_j})^{k+1}} \cdot \left[\int_t^{\infty} e^{-(\lambda + \mu_i) \xi} I_{k+1}(2\sqrt{\lambda \mu_i} \xi) d\xi - t \int_t^{\infty} e^{-(\lambda + \mu_i) \xi} \xi^{-1} I_{k+1}(2\sqrt{\lambda \mu_i} \xi) d\xi \right],$$

где $I_k(\xi)$ - функция Бесселя k -го порядка.

Производя приближенное вычисление интегралов, можно получить, что для больших t

$$\varepsilon(t) \sim C t^{-3/2} e^{-(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu_i})^2 t}$$

$$C = \frac{(\mu_i \rho_j - \lambda) \mu_i (1 - \rho_j)}{(\lambda \mu_j)^{5/4} (1 - \sqrt{\mu_i \lambda^{-1} \rho_j})^2 2 \sqrt{\pi} (\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu_i})^4}.$$

Пусть теперь $\mu_1 < \lambda < \mu_2$. Для этого случая можно получить формулы, аналогичные приведенным выше. Возникающая здесь сложность заключается в том, что при интенсивности обслуживания μ_1 стационарный режим не устанавливается, так как система перегружена. Поэтому при вычислении $I^{(2)}(t)$ необходимо усреднять $I_n^{(2)}(t)$ не по установившемуся стационарному распределению $P_i(n)$, а по переходному распределению $P_{n-1}^{(1)}(t)$, уже усредненному по λ . Получившиеся выражения оказываются чрезвычайно громоздкими, что делает невозможным подсчет интегралов (I) или (8). В связи с этим возникает необходимость подсчета среднего числа заявок в системе более "грубым" способом.

Раскладывая в (5) $Q_{nk}(s)$ в ряд по s , отбрасывая члены, содержащие s^2, s^3, \dots (что соответствует при обратном преобразовании t^{-2}, t^{-3}, \dots), беря обратное преобразование Лапласа-Карсона, получим, что для $\lambda > \mu_1$

$$P_{nk}^{(1)}(t) \sim \left(\frac{\lambda}{\mu_1} \right)^{k-n} e^{-(\lambda + \mu_1)t} I_{k-n}(2\sqrt{\lambda \mu_1} t),$$

что соответствует разности двух пуассоновских распределений с параметрами λ и μ_1 . Иными словами, число заявок в системе в момент t с достаточной степенью точности (с вероятностью ошибки порядка $o(t^{-1})$) можно представить в виде $k = k_+ - k_- + n$, где n - число заявок в системе в момент переключения на μ_1 , $t=0$,

k_1, k_2 - случайные величины, распределенные по пуассоновскому закону с параметрами λ и μ_1 соответственно. Находя из (6) $I_n^{(i)}(t)$, можно получить, что при $t \downarrow 0$ $[I_n^{(i)}(t) - n] \sim (\lambda - \mu_1)t$, т.е. средняя длина очереди с момента переключения с μ_1 на μ_2 начинает линейно убывать.

Итак, пусть в системе в момент переключения с μ_1 на μ_2 $t=0$ было в среднем n заявок. Поскольку мы считаем, что при работе с μ_2 стационарный режим успевает установиться, то

$$n = \bar{n} = \rho_2 / (1 - \rho_2).$$

Затем обслуживающий прибор работал с интенсивностью μ_2 и к моменту переключения $t=t_1$ в системе было $k = k_1 - k_2 + n$ заявок. После переключения на μ_2 длина очереди стала линейно убывать и достигла стационарного уровня \bar{n} в момент $t^* = \frac{k - \bar{n}}{\mu_2 - \lambda}$. Тогда длину очереди при работе с μ_2 можно записать в виде

$$I^{(2)}(t) = \begin{cases} k - (\mu_2 - \lambda)t_2 & t_2 \leq t^* \\ \bar{n} & t_2 \geq t^* \end{cases} \quad t_2 = t - t_1.$$

Суммарная длина очереди за время t_1 равна

$$\int_0^{t_1} I^{(2)}(\tau) d\tau = \frac{(k_1 - k_2)^2}{2(\mu_2 - \lambda)} + \bar{n} t_2.$$

Усредняя это выражение, получим

$$L_{12} = \frac{1}{2} (\mu_2 - \lambda)^{-1} [(\lambda - \mu_1)^2 M t_1^2 + (\lambda + \mu_1) M t_1] + \bar{n} M t_2. \quad (9)$$

Аналогично

$$L_{21} = \frac{\lambda}{\mu_2 - \lambda} M t_1 + \frac{\lambda - \mu_1}{2} M t_1^2.$$

Средняя длина очереди в системе определяется так же, как и прежде, по формуле (2).

Адаптивная двухлинейная СМО с вспомогательным прибором.

Рассмотрим двухлинейную СМО, на которую поступают два простейших потока заявок с неизвестными параметрами λ_1 и λ_2 . Поток интенсивности λ_i поступает на прибор с интенсивностью обслуживания μ_i (обслуживание ведется по экспоненциальному закону). В системе имеется также вспомогательный прибор, который может обслуживать заявки i -го потока с интенсивностью μ_i^* . Подключением этого прибора к тому или иному потоку осуществляет адаптор, причем так, что время работы прибора на i -ом потоке имеет функцию распределения $F_i(t_i)$ ($i=1,2$).

Для подсчета суммарной длины очереди у каждого прибора мы можем воспользоваться методом, описанным выше. Пусть $\lambda_1 < \mu_1 < \mu_1^* < \mu_2^*$,

$\lambda_2 < \mu_2 < \mu_2 + \mu_2^*$. Тогда длина очереди у i -го прибора может быть определена по формуле

$$R_i = \frac{\int_0^{\infty} \frac{\rho}{2\pi s^2} \left[\frac{F_i(se^s)}{se^s} - \frac{F_i(se^{-s})}{se^{-s}} \right] \left[G(s, \lambda_i, \mu_i, \mu_i + \mu_i^*) + G(s, \lambda_i, \mu_i + \mu_i^*, \mu_i) \right] ds}{\int_0^{\infty} [1 - F_1(t)] dt + \int_0^{\infty} [1 - F_2(t)] dt} \quad (10)$$

Теперь рассмотрим случай $\mu_1 < \lambda_1 < \mu_1 + \mu_1^*$, $\lambda_2 < \mu_2 < \mu_2 + \mu_2^*$, т.е. на первом приборе возникает перегрузка, которую можно снять подключением резервного прибора. Тогда среднюю длину очереди у второго прибора можно по-прежнему определять по (10), а для средней длины очереди у первого прибора имеем

$$R_1 = \frac{\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_1^* - \lambda_1) \left[(\lambda_1 - \mu_1^*)^2 M_{t_1}^2 + (\lambda_1 + \mu_1) M_{t_1} \right] + \frac{\lambda_1}{\mu_1 + \mu_1^* - \lambda_1} \left[M_{t_2} + M_{t_1} + \frac{\lambda_1 + \mu_1}{2} M_{t_1}^2 \right]}{\int_0^{\infty} [1 - F_1(t)] dt + \int_0^{\infty} [1 - F_2(t)] dt} \quad (11)$$

В случае $\mu_1 < \lambda_1 < \mu_1 + \mu_1^*$, $\mu_2 < \lambda_2 < \mu_2 + \mu_2^*$ обе длины очереди определяются по формуле (11).

Адаптивная СМО с N интенсивностями обслуживания.

Рассмотрим однолинейную СМО с обслуживающим прибором, который может работать с одной из интенсивностей $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$. Входящий поток, как и прежде, простейший, с неизвестным параметром λ , причем $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_N < \lambda < \mu_{N+1} < \dots < \mu_N$. Включением той или иной интенсивности обслуживания управляет адаптор по следующему закону: время работы прибора с интенсивностью μ_i ; есть случайная величина с функцией распределения $F_i(t)$; переключение с интенсивности с вероятностью p_i происходит на интенсивность μ_{i+1} , и с вероятностью $q_i = 1 - p_i$ - на интенсивность μ_{i-1} ($i = \overline{1, N}$, $q_1 = p_N = 0$). Тогда для подсчета среднего числа заявок в системе можно воспользоваться формулой

$$L = \left(\sum_{i=1}^N l_i \right) / \left(\sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} [1 - F_i(t)] dt \right),$$

где l_i - средняя суммарная длина очереди за время работы с интенсивностью μ_i . Для подсчета воспользуемся методикой, описанной выше. Для $i = \overline{S+2, N}$ перегрузки ни на одном уровне не возникает, и переключение происходит также с неперегруженного уровня (уровень i назовем неперегруженным, если $\rho_i = \lambda / \mu_i > 1$). Поэтому справедлива формула

$$l_i = p_i l_{i+1} + q_i l_{i-1}, \quad (12)$$

где l_i подсчитывается по (8).

В момент переключения с интенсивности μ_s на μ_{s+1} , среднее число заявок в системе будет равно

$$\bar{k} = \sum_{z=1}^s m_z (\lambda - \mu_z) M t_z, \quad (13)$$

где m_z - среднее число переключений на интенсивность μ_z за время работы системы на перегруженных уровнях. Тогда длина очереди в момент t при работе с интенсивностью μ_{s+1} равна

$$I(t) = \begin{cases} \bar{k} - (\mu_{s+1} - \lambda) t & t \leq \frac{\bar{k} - \bar{n}}{\mu_{s+1} - \lambda} \\ \bar{n} = \frac{\rho_{s+1}}{1 - \rho_{s+1}} & t \geq \frac{\bar{k} - \bar{n}}{\mu_{s+1} - \lambda} \end{cases}$$

и средняя суммарная длина очереди за время работы с интенсивностью μ_{s+1} при условии, что переключение перешло с интенсивности μ_s , имеет вид

$$L_{s, s+1} = \frac{(\bar{k} - \bar{n})^2}{2(\mu_s - \lambda)} + \bar{n} M t_s. \quad (14)$$

Очевидно, что m_z можно записать в виде

$$m_z = P(z) \gamma_s / \sum_{z=1}^s P(z),$$

где $P(z)$ - стационарная вероятность работы с интенсивностью μ_z , γ_k - время до поглощения состоянием $s+1$ при условии выхода из состояния k марковской цепи с матрицей переходных вероятностей

$$A = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q_2 & 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q_3 & 0 & p_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Легко найти, что

$$P(z) = \frac{\prod_{i=2}^{z-1} p_i}{\prod_{i=1}^{z-1} q_i} \left(1 + \sum_{j=2}^s \frac{\prod_{i=1}^j p_i}{\prod_{i=1}^j q_i} \right)^{-1}.$$

Для γ_k имеем следующую систему

$$\begin{cases} \gamma_1 = 1 + \gamma_2 \\ \gamma_k = 1 + p_k \gamma_{k+1} + q_k \gamma_{k-1} \\ \gamma_s = 1 + q_s \gamma_{s-1} \end{cases}.$$

Отсюда $\gamma = (E - A)^{-1} I$, где $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)^T$, $I = (1, 1, \dots, 1)^T$.

Среднюю суммарную длину очереди за время работы с интенсивностью μ_{s+1} определяем по формуле (12), где $L_{s-1, s}$ определяется по-прежнему по (8), а $L_{s+1, s}$ - по выведенной нами формуле

(I4). Для средней суммарной длины очереди за время работы с интенсивностью μ_i имеем

$$L_i = \bar{k} M t_i + \frac{\lambda - \mu_i}{2} M t_i^2, \quad i = \overline{1, S},$$

где \bar{k} определяется по (I3).

Л и т е р а т у р а

1. Растрюгин Л.А. Структурная адаптация и многомашинные вычислительные системы.-В кн.: Структурная адаптация многомашинных систем обработки информации. Рига: Зинатне, 1978, с.3-5.
2. Горцев А.М., Поттосина С.А. Структурная адаптация двухлинейной системы массового обслуживания со вспомогательным прибором.-Автоматика и вычислительная техника, 1980, №5, с.43-49.
3. Назаров А.А. Адаптация интенсивности обслуживания к неизвестному параметру входящего потока автоматом с целесообразным поведением.-Автоматика и вычислительная техника, 1979, № 5, с. 56-61.
4. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения.-М.: Мир, 1965.-302 с.
5. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье.-М.-Л.: Гостехиздат, 1948.-479 с.

ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СМО С ПОЛНОЙ ПАМЯТЬЮ

Л.Л. Левин

При имитационном моделировании на "В" систем массового обслуживания (СМО) обычно [1] индивидуальные характеристики поступающих заявок (время поступления, времена начала и конца обслуживания, номер обслуживаемого прибора и т.д.) не запоминаются, что затрудняет или делает невозможным вычисление некоторых характеристик системы, а также реализации отдельных дисциплин обслуживания, например, выход заявки из системы при превышении времени ожидания некоторого порога. С целью устранения этих недостатков была построена для ПВМ на языке ПЛ/Т программная имитационная модель с полной памятью.

Г. Описание системы. Заявки известных M типов, поступающие на вход СМО, сначала попадают к диспетчеру, который устанавливает тип поступившей заявки, анализирует состояние системы (наличие свободных приборов, стоимости переключений, длину очереди и т.д.) и, руководствуясь некоторым критерием, или ставит заявку в очередь, или передает какому-либо прибору для обслуживания. Анализ состояния системы происходит только в моменты времени освобождения приборов и в моменты поступления заявок. Количество приборов в системе равно M и они могут иметь различные характеристики, возможно зависящие от типа поступившей заявки.

П. Имитационная модель описанной многоканальной СМО, построенная для ПВМ, состоит из трех, в определенном смысле независимых блоков.

А. Формирование заявок. Под поток заявок отводится массив структур, в котором заявки упорядочены по времени поступления. Структура отдельной заявки такова: момент времени поступления, номер типа заявки, момент начала обслуживания, длительность обслуживания, номер обслуживаемого прибора. Последние три характерно-

тики определяются в процессе функционирования системы. Хранение такой информации позволяет определить большинство характеристик системы, кроме того структура заявки может быть дополнена, например, такими данными: с какого типа заявки переключился прибор для обслуживания этой заявки.

Идея формирования (имитации) потока заявок такова. Весь массив структур заполняется заявками одного какого-либо типа. Затем начинают генерироваться моменты поступления заявок другого типа, при этом "новая" заявка вклинивается в соответствующее по времени место в массиве структур, сдвигая часть его вправо с потерей последнего элемента структуры. Программная реализация этого алгоритма имеет следующий вид:

```
1. P =  $\mu P2L(1)$ ;   BP2(1) = GEN(P);   NTP2(1) = 1;
2. DO K = 2 TO MK2;
3.   BP2(K) = BP2(K-1) + GEN(P);   NTP2(K) = 1;
4. END;
5. DO L = 2 TO K22;   P =  $\mu P2L(L)$ ;   R = GEN(P);
6. DO K = 1 TO MK2;
7.   IF R < BP2(K) THEN
8.     DO; DO M = MK2 BY -1 TO K+1;
9.       BP2(M) = BP2(M-1);   NTP2(M) = NTP2(M-1);
10.    END;
11.    BP2(K) = R;   NTP2(K) = L;   R = R + GEN(P);
12.  END;
13. END;
14. END;
```

Здесь P и R - рабочие ячейки; $MK2$ - моделируемое количество заявок; $K22$ - количество типов заявок; $\mu P2L(I:K22)$ - массив интенсивностей поступления заявок; $GEN(P)$ - датчик псевдо-случайных экспоненциально распределенных чисел с параметром P ; $BP2(I:MK2)$ - массив времен поступления заявок; $NTP2(I:MK2)$ - массив номеров типов заявок. Вместо экспоненциального генератора можно поставить любой другой или заполнить массив структур заявок реальными данными.

Б. Диспетчер - программа анализа состояния системы.

Текущее время в системе ичитруется с помощью ячейки, где хранится номер анализируемой заявки ($MA2$), по которому это время может быть восстановлено.

Алгоритм функционирования диспетчера следующий: если в момент прихода анализируемой заявки ($MA2$) свободных приборов нет, то

заявка устанавливается в очередь (запоминается ее общий номер, увеличивается длина очереди, увеличивается на 1 номер анализируемой заявки) и происходит возврат к началу алгоритма, иначе диспетчер пытается устроить какую-либо заявку из очереди на какой-либо свободный прибор, руководствуясь некоторым решающим правилом (дисциплиной обслуживания). Если заявка ставится на обслуживание, то очередь сокращается и опять возврат к началу алгоритма, иначе (критерий не разрешает или очередь нулевой длины) анализируемая заявка устанавливается в очередь и возврат к началу алгоритма. Таким образом, заявка может попасть на обслуживание, только по- стояв, возможно и нулевое время, в очереди.

Программа диспетчера при дисциплине "первым пришел-первым поставлен на обслуживание" реализуется следующим образом:

```
1. R7: DO M=1 TO KP; NR=NPB(M);
2. IF BOP(NR) > BP2(MA2) THEN GOTO R8;
3. R5: DO K=1 TO K250;
4. N1=N2PO(K);
5. DO, NRO2(N1)=NR; K5=N5P(NR); K6=NTP2(N1);
6. OCP(NR)=OCP(NR)+CPER(K5,K6);
7. IF N5P(NR) != NTP2(N1) THEN
8. DO; KPER(NR)=KPER(NR)+1; N5P(NR)=NTP2(N1); END;
9. IF BOP(NR) > BP2(N1) THEN BHO2(N1)=BOP(NR);
10. ELSE BHO2(N1)=BP2(N1);
11. BOP(NR)=BHO2(N1)+DBO2(N1); 12 + время обслуживания * 1
12. N2=NTP2(N1); KTDO(N2)=KTDO(N2)-1; K250=K250-1;
13. DO L=K TO K250; NRPO(L)=NRPO(L+1); END;
14. DO L=1 TO KP; RM(L)=OP(L); END;
15. DO N=1 TO KP; R=RM(N); NPB(N)=1;
16. DO L=2 TO KP;
17. IF R > RM(L) THEN DO; R=RM(L); NPB(N)=L; END;
18. END;
19. NR=NPB(N); RM(N1)=1.#E30;
20. END; GOTO R7; END; END R5; END R7;
21. R8: DO; IF MA2 = MK2 THEN GOTO KOM;
22. K250=K250+1; NR=NTP2(MA2); KTDO(NR)=KTDO(NR)+1;
23. NRPO(K250)=MA2; MA2=MA2+1; GOTO R7;
24. END R8;
25. KOM:
```

Для имитации диспетчера, реализующего приоритетное обслуживание (на освободившийся прибор ставится заявка из очереди, номер

типа которой меньше номеров остальных заявок из очереди, а при равенстве - первую пришедшую в очередь), необходимо в предыдущую программу внести следующие дополнения и изменения: оператор номер 3 заменить группой операторов, находящихся заявку с наивысшим приоритетом.

1. $R5: D0; IF K230 < 1 THEN GO TO R8;$
2. $K=1; K5=K23;$
3. $DO L=1 TO K230; N1=N2PO(L);$
4. $IF NTP2(N1) < K5 THEN D0; K=L; K5=NTP2(N1); END;$
5. $END;$

Другие дисциплины обслуживания также могут быть реализованы без значительных затруднений. Эта универсальность достигается структурой основной программы диспетчера, разработчику остается лишь написать программу блока, выбирающую, какую заявку из очереди нужно поставить на один из свободных приборов.

В. Третий блок, после завершения процесса имитации вычисляет характеристики системы: средние времена простоя и пребывания заявок в системе, соответствующие среднеквадратические отклонения для каждого типа заявок и в целом по СМО, интенсивности работы приборов, количества переключений приборов с одного типа заявок на другой, стоимость работы системы. Программа вычисления этих характеристик существенных особенностей не имеет и поэтому не приводится. При необходимости этот блок печатает в удобном виде массив структур заявок, по которому может быть полностью восстановлена история работы системы.

Для проверки правильности алгоритма и программы была проведена имитация различных систем массового обслуживания, которые отличались количеством приборов, количеством типов заявок, начальными данными и дисциплинами обслуживания. При этом печатались итоговые массивы структур заявок и экспериментальные характеристики систем. По этим данным проверялись логика и арифметика работы имитационных моделей.

Для иллюстрации работы программы на рис. 1 приведен отрезок одной реализации процесса имитации приоритетной системы обслуживания из 10 приборов и 10 типов (приоритетов) заявок при экспоненциальном распределении промежутков времен поступления и длительностей обслуживания заявок. По оси абсцисс отложено системное время, отмечены моменты прихода, начала и завершения обслуживания заявок, а также номера типов поступивших заявок. По оси ординат вверх от нуля отложены номера включаемых приборов, т. е. линии

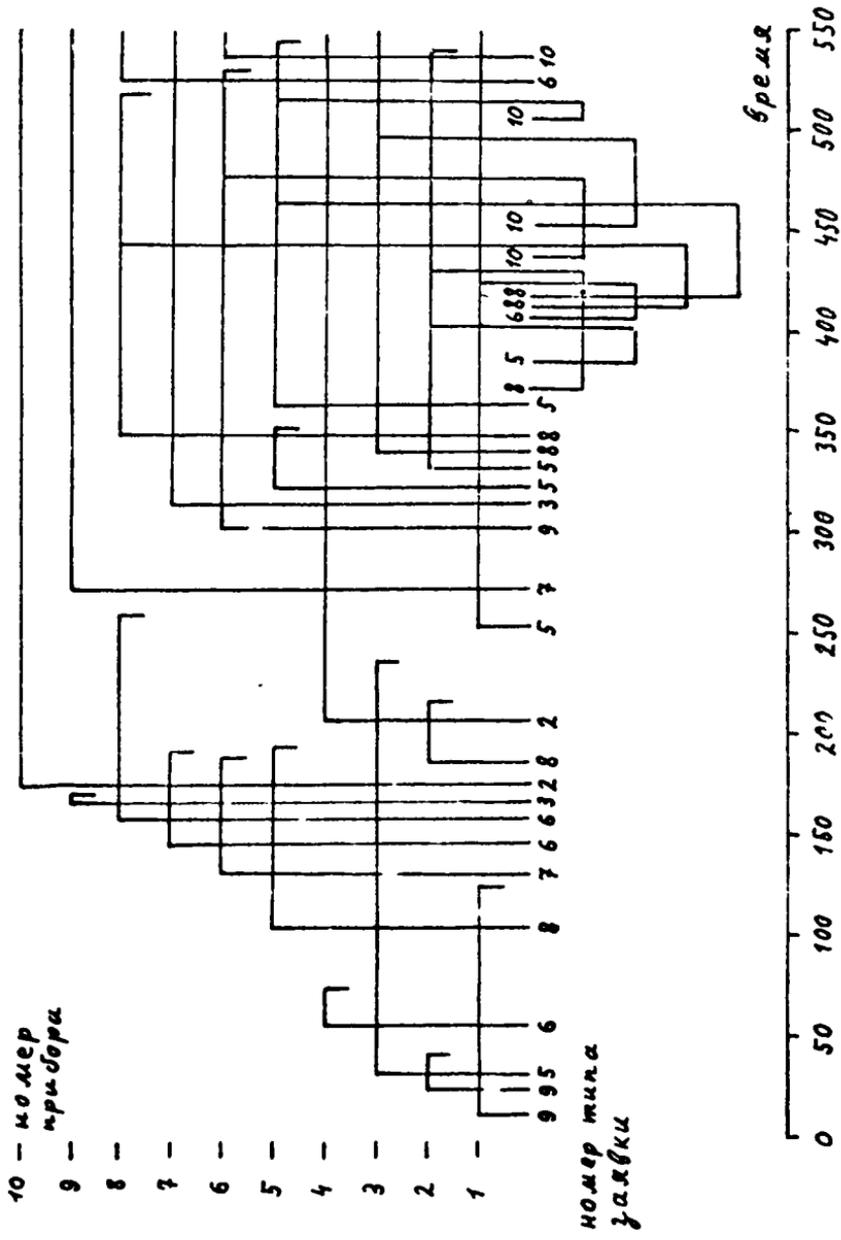


Рис. 1.

вниз от нуля отмечают тот факт, что заявка застала все приборы занятыми и встала в очередь.

Основным результатом данной работы является принцип имитационного моделирования с полной памятью для систем массового обслуживания и его реализация в виде универсальной программы диспетчера, которая позволяет имитировать весьма разнообразные критерии (дисциплины) обслуживания. В целом программа может быть использована для сравнения дисциплин обслуживания по эффективности. Алгоритм диспетчера можно применять при разработке операционных систем для многопроцессорных ЦВМ, а также при автоматизации реальных диспетчерских систем.

Л и т е р а т у р а

- Г. Лифшиц А.Л., Мальц Э.А. Статистическое моделирование систем массового обслуживания. = Сов. радио, М., 1978.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРАВИЛО ДИСПЕТЧЕРИЗАЦИИ ЗАДАЧ ПРИ ПРОГНОЗЕ ПОТЕРЬ НА ОДНУ И ДВА ШАГА ВПЕРЕД

Н. Ю. Марголис

Создание вычислительных центров коллективного пользования, когда на группу вычислительных машин поступают задачи от большого числа абонентов, выдвинуло на одно из главных мест проблему диспетчеризации в таких системах, т.е. определения порядка обслуживания задач от разных абонентов с учетом их количества, требуемого времени решения, степени срочности и т.д. Если поток задач является регулярным, то к проблеме диспетчеризации лучше подходить с точки зрения теории расписаний [1]. Если же поток задач подвержен случайным флуктуациям, то проблему лучше решать методами теории массового обслуживания.

Наиболее изученными системами подобного рода являются приоритетные системы [2,3], в которых задачам различных абонентов присваиваются различные приоритеты и на основании берется задача абонента с наибольшим приоритетом. Системы с так называемыми динамическими приоритетами, когда выбор на решение той или иной задачи зависит от числа задач, поступивших от различных абонентов, изучены гораздо слабее, так как их аналитическое решение возможно, по-видимому, лишь в случае больших загрузок [4]. Поэтому возникает проблема приближенного решения задачи диспетчеризации. В данной работе исследуются алгоритмы диспетчеризации для случая одной вычислительной машины с прогнозированием потерь не более, чем на два шага вперед.

Описание системы. Имеется одна вычислительная машина, на которую поступает пуассоновский поток задач интенсивности λ . На каждой задаче имеются три метки (числа), задающие

1) декретированный срок решения задачи T , т.е. то время, к которому задача должна быть решена.

2) приблизительное время решения задачи X , причем считает-

ся известной условная плотность вероятностей $\rho(\tau/x)$ времени решения задачи τ при известном x .

3) коэффициент c , определяющий потери, которые несет абонент, если задача будет решена позже декретированного срока T .

Будем считать, что в рассматриваемой системе имеют место потери двух типов:

а) Если в очереди находятся n задач с декретированными сроками решения T_i ($i=1, \dots, n$) и коэффициентами c_i , то суммарные потери к моменту времени t составят величину $\sum_{i=1}^n c_i u(t-T_i)$, где

$$u(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Тем самым считается, что потери на ожидание одной задачи пропорциональны просрочке времени в ее решении.

б) Если решалась k -ая задача, то на переориентацию машины на решение i -ой задачи необходимо время t_{ki} , в течение которого очередь не "движется", т.е. задачи на решение не берутся. В частном случае эти потери могут и отсутствовать, т.е. может считаться, что $t_{ki} = 0$.

Диспетчеризация задач с одинаковым средним временем решения.

Пусть в момент, когда машину покидает очередная решенная задача, в очереди находится n задач с декретированными сроками решения T_1, \dots, T_n ; для простоты выкладок считаем, что в этот момент $t=0$; реально, под T_i , которые фигурируют в дальнейшем, следует понимать разность $T_i - t_0$, где t_0 - рассматриваемый момент времени, т.е. интервал времени, оставшийся до декретированного срока ее решения. Время решения задач распределено экспоненциально с параметром μ , т.е. $\rho(\tau) = \mu e^{-\mu\tau}$, и μ одинаково для всех задач.

Предположим, что на решение будет взята задача номер i .

Подсчитаем среднее значение потерь на ожидание за время решения этой и следующей задачи, т.е. подсчитаем прогнозируемые потери на два шага вперед. При этом будем считать, что плотность вероятностей $\rho(\Delta T)$, где под ΔT понимается разность между декретированным сроком решения задачи и моментом ее поступления, известна и одинакова для всех поступающих задач, независимо от их важности.

Пусть τ_1 - время решения первой задачи и τ_2 - время решения следующей задачи. За интервал τ_1 с вероятностью $(\lambda\tau_1)^k e^{-\lambda\tau_1}/k!$ поступит еще k задач, и их моменты поступления будут t'_1, \dots, t'_k . За интервал τ_2 поступит еще m задач с вероятностью $(\lambda\tau_2)^m e^{-\lambda\tau_2}/m!$, и их моменты поступления будут t'_1, \dots, t'_m . К моменту времени

$\tau_i + \tau_2$ суммарные потери составят величину

$$L_i = c_i \int_0^{\infty} u(\tau_i - T_i) p(\tau_i) d\tau_i + \sum_{j=1}^m c_j \iint_0^{\infty} u(\tau_i + \tau_2 - T_j) p(\tau_i) p(\tau_2) d\tau_i d\tau_2 +$$

$$M_c \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\Delta \tau_i)^k}{k!} e^{-\lambda \tau_i} p(\tau_i) p(\tau_2) \sum_{s=1}^k c_s u(\tau_i + \tau_2 - \Delta T_s - t_s) p(\Delta T_s) p(t_s | \kappa, \tau_i) dt_s d\tau_2 d\Delta T_s \right\}$$

$$M_c \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\Delta \tau_2)^m}{m!} e^{-\lambda \tau_2} p(\tau_2) \sum_{k=0}^m c_k u(\tau_i + \tau_2 - t'_k - \Delta T_k) p(\Delta T_k) p(t'_k | m, \tau_2) dt'_k d\Delta T_k \right\}.$$

Отметим, что в этом выражении от i зависят лишь два первые слагаемые, а два последних от i не зависят. Вычисляя интегралы и деля значение потерь на среднее время решения одной задачи, чтобы получить средние потери в единицу времени, получим

$$\tilde{L}_i = \mu L_i = c_i e^{-\mu T_i} + \sum_{j=1}^m c_j (\mu T_j e^{-\mu T_j} + 2e^{-\mu T_j}) + \tilde{L},$$

где \tilde{L} - величина, не зависящая от i .

Тогда правило выбора из решения задачи получится следующим:

$\tilde{L}_i \Rightarrow \min_i$. После несложных преобразований оно принимает вид

$$c_i (1 + \mu T_i) e^{-\mu T_i} \Rightarrow \max_{i \in I, A},$$

что и определяет номер той задачи, которую следует взять для решения.

Заметим, что для задач, у которых $T_i < 0$, т.е. для задач с просроченным сроком решения, следует полагать $T_i = 0$.

Дискретизация задач с газелью средним временем решения
(при прогнозе потерь на один шаг).

Пусть на находящейся в очереди n задачах имеются их декретированные сроки решения T_i , ориентировочные времена решения τ_i и коэффициенты важности c_i .

Если взять на решение i -ую задачу, то она будет решаться время τ , распределенное с плотностью вероятностей $p(\tau | \tau_i)$. За это время с вероятностью $(\lambda \tau)^k e^{-\lambda \tau} / k!$ придут еще k задач, причем их моменты поступления будут t_1, \dots, t_k . Тогда суммарные потери за время решения i -ой задачи составят величину

$$L_i = \sum_{j=1}^n c_j \int_0^{\infty} u(\tau - T_j) p(\tau | \tau_i) d\tau + \quad (I)$$

$$+ M_c \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda \tau)^k}{k!} e^{-\lambda \tau} \sum_{s=1}^k c_s u(\tau - t_s - \Delta T_s) p(t_s | \kappa, \tau) p(\Delta T_s) p(\tau | \tau_i) dt_s d\Delta T_s \right\},$$

где M_c означает усреднение по коэффициенту важности c . Вычисляя входящие сюда интегралы. Обозначим

$$\int_0^{\tau} u(\tau - T_j) p(\tau | z_i) d\tau = \int_0^{\tau} (\tau - T_j) p(\tau | z_i) d\tau = Q(T_j, z_i).$$

Рассмотрим подробнее второе слагаемое. Как известно, для пуассоновского потока при фиксированном τ и K величины t_1, \dots, t_k распределены равномерно

$$p(t_1, \dots, t_k | \tau, \kappa) = c.$$

Используя тот факт, что

$$\int_{a < x_1 < \dots < x_n < b} dx_1 \dots dx_n = (b-a)^n / n!,$$

из условия нормировки получаем

$$p(t_1, \dots, t_k | \tau, \kappa) = \kappa! / \tau^{\kappa}.$$

Теперь можно найти $p(t_s | \tau, \kappa)$

$$\begin{aligned} p(t_s | \tau, \kappa) &= \int \dots \int_{0 < t_1 < \dots < t_{s-1} < t_s < t_{s+1} < \dots < t_k < \tau} \dots \int p(t_1, \dots, t_k | \tau, \kappa) dt_1 \dots dt_{s-1} dt_{s+1} \dots dt_k = \\ &= \frac{\kappa!}{\tau^{\kappa}} \frac{t_s^{s-1}}{(s-1)!} \frac{(\tau - t_s)^{\kappa-s}}{(\kappa-s)!}. \end{aligned}$$

Поэтому второе слагаемое в (I) в предположении, что c_s и ΔT_s независимы, примет вид

$$\bar{c} \sum_{s=0}^{\infty} \int_0^{\tau} \lambda^{\kappa} e^{-\lambda \tau} p(\tau | z_i) d\tau \sum_{s=0}^{\kappa} \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} u(\tau - t - \Delta T) \frac{t^{s-1} (\tau - t)^{\kappa-s}}{(s-1)! (\kappa-s)!} dt p(\Delta T) d\Delta T.$$

Переставляя местами ряды, получим

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s \sum_{s=1}^{\kappa} \frac{t^{s-1} (\tau - t)^{\kappa-s}}{(s-1)! (\kappa-s)!} &= \lambda \sum_{s=1}^{\infty} \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \lambda^{s-1} \sum_{\kappa-s}^{\infty} \frac{\lambda^{\kappa-s} (\tau - t)^{\kappa-s}}{(\kappa-s)!} = \\ &= \lambda e^{\lambda(\tau-t)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^s}{s!} = \lambda e^{\lambda \tau}. \end{aligned}$$

и второе слагаемое в выражении для L_i принимает вид

$$\bar{c} \lambda \int_0^{\tau} p(\tau | z_i) d\tau \int_0^{\tau} p(\Delta T) d\Delta T \int_0^{\tau} u(\tau - t - \Delta T) dt.$$

Переставляя местами интегралы, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} p(\tau | z_i) d\tau \int_0^{\tau} u(\tau - t - \Delta T) dt &= \int_0^{\tau} dt \int_0^{\tau} u(\tau - t - \Delta T) p(\tau | z_i) d\tau = \\ &= \int_0^{\tau} Q(t + \Delta T, z) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} (\tau - \Delta T)^2 p(\tau | z_i) d\tau, \end{aligned}$$

и окончательно

$$L_i = \sum_{j=1}^n c_j Q(T_j, z_i) + \bar{c} \lambda \iint_0^{\infty} Q(t+\Delta T, z_i) p(\Delta T) dt d\Delta T.$$

Средние потери в единицу времени составят величину

$$\tilde{L}_i = \frac{L_i}{z_i} = \frac{1}{z_i} \sum_{j=1}^n c_j Q(T_j, z_i) + \frac{\bar{c} \lambda}{z_i} \iint_0^{\infty} Q(t+\Delta T, z_i) p(\Delta T) dt d\Delta T.$$

Номер задачи, которая должна быть взята на решение, следует выбирать из условия $\tilde{L}_i \Rightarrow \min$.

Рассмотрим некоторые частные случаи этой формулы.

1) Пусть $p(\tau|z_i) = \mu_i e^{-\mu_i \tau}$, где $\mu_i = 1/z_i$. Тогда

$$Q(T, z_i) = \int_0^{\infty} (\tau - T) \mu_i e^{-\mu_i \tau} d\tau = e^{-\mu_i T} / \mu_i,$$

$$\int_0^{\infty} Q(t+\Delta T, z_i) dt = \frac{1}{\mu_i} \int_0^{\infty} e^{-\mu_i(t+\Delta T)} dt = e^{-\mu_i \Delta T} / \mu_i^2$$

и правило выбора задачи на решение принимает вид

$$\sum_{j=1}^n c_j e^{-\mu_i T_j} + \frac{\bar{c} \lambda}{\mu_i} \int_0^{\infty} e^{-\mu_i \Delta T} p(\Delta T) d\Delta T \Rightarrow m_i.$$

Заметим, что стоящий справа интеграл есть не что иное, как преобразование Лапласа от плотности вероятностей $p(\Delta T)$.

2) Пусть $p(\tau|z_i) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\tau - z_i)^2}{2\sigma^2}}$, т.е. время решения задачи распределено по нормальному закону со средним значением z_i и дисперсией σ^2 . Тогда

$$Q(T, z) = \int_0^{\infty} (\tau - T) \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\tau - z)^2}{2\sigma^2}} d\tau =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(T-z)^2}{2\sigma^2}} + (z-T) \Phi\left(\frac{z-T}{\sigma}\right), \quad (2)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$;

$$\int_0^{\infty} Q(t+\Delta T, z) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\tau - \Delta T)^2 \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\tau - z)^2}{2\sigma^2}} d\tau =$$

$$= \frac{\sigma(z-\Delta T)}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta T - z)^2}{2\sigma^2}} + \frac{(\Delta T - z)^2 + \sigma^2}{4} \left[1 - \Phi\left(\frac{\Delta T - z}{\sigma}\right) \right].$$

Предположение о независимости стоимостных коэффициентов c_i от директивных сроков T_i не всегда имеет место. В этом случае можно весь поток задач разбить на подпотоки интенсивностями λ_γ , $\gamma = \bar{i}, \bar{k}$, причем каждый подпоток имеет фиксированный стоимостной коэффициент c_γ и плотность вероятностей $\rho_\gamma(\Delta T)$. Тогда выражение для \tilde{L}_i принимает вид

$$\tilde{L}_i = \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n c_j Q(T_j, z_i) + \frac{1}{x_i} \sum_{\gamma=1}^k c_\gamma \lambda_\gamma \iint_0^{\infty} Q(t+\Delta T, z_i) \rho_\gamma(\Delta T) dt d\Delta T.$$

Правило выбора задачи сохраняет свой вид $\tilde{L}_i \Rightarrow \min_i$. Теперь может быть выписано и \tilde{L}_i ; оно здесь не приводится из-за громоздкости.

Диспетчеризация задач с разным следним временем решения с учетом потерь на переключение.

Пусть переключение машины с решения k -й задачи на решение i -й задачи занимает время t_{ki} ; тогда, если после окончания решения k -й задачи мы возьмем на решение i -ю задачу, то суммарные потери за время её решения составят величину

$$L_i = \sum_{j=1}^n c_j \int_0^{\infty} u(\tau+t_{ki}-T_j) p(\tau/z_i) d\tau + \\ + M_c \left\{ \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} \frac{[\lambda(\tau+t_{ki})]^k}{k!} e^{-\lambda(\tau+t_{ki})} \rho(\tau/z_i) d\tau \int \sum_{s=1}^k c_s u(\tau+t_{ki}-T_s-\Delta T_s) \cdot \right. \\ \left. \cdot p(t_s/k, \tau+t_{ki}) dt_s p(\Delta T_s) d\Delta T_s \right\}.$$

Теперь

$$\int_0^{\infty} u(\tau+t_{ki}-T_j) p(\tau/z_i) d\tau = Q(T_j - t_{ki}, z_i).$$

Производя во втором слагаемом преобразования, аналогичные тем, которые были сделаны выше, приведем второе слагаемое к виду

$$\bar{c} \lambda \int_0^{\infty} p(\tau/z_i) d\tau \int_0^{\infty} p(\Delta T) d\Delta T \int_0^{\tau+t_{ki}} u(\tau+t_{ki}-t-\Delta T) dt$$

и поэтому суммарные средние потери за время решения i -ой задачи составят величину

$$L_i = \sum_{j=1}^n c_j Q(T_j - t_{ki}, z_i) + \bar{c} \lambda \iint_0^{\infty} Q(t+\Delta T - t_{ki}, z_i) p(\Delta T) d\Delta T dt,$$

и правило выбора задачи на решение принимает вид

$$\tilde{L}_i = \frac{1}{x_i + t_{ki}} \sum_{j=1}^n c_j Q(T_j - t_{ki}, z_i) + \frac{\bar{c} \lambda}{x_i + t_{ki}} \iint_0^{\infty} Q(t+\Delta T - t_{ki}, z_i) p(\Delta T) d\Delta T dt \Rightarrow \min_i.$$

В частном случае $p(\tau/z_i) = \mu_i e^{-\mu_i \tau}$, $u_i = 1/z_i$, это правило принимает вид

$$\frac{e^{\mu_i t_{ki}}}{1 + \mu_i t_{ki}} \left(\sum_{j=1}^n c_j e^{-\mu_i T_j} + \frac{\bar{c}\lambda}{\mu_i} \int_0^{\infty} p(\Delta T) e^{-\mu_i \Delta T} d\Delta T \right) \Rightarrow \min_i.$$

Дискретизация задач с разным средним временем решения для прогноза потерь на два шага.

Более точное правило выбора задач на решение получается при прогнозе потерь на два шага вперед.

Пусть по-прежнему задачи, находящиеся в очереди, имеют разное среднее время решения и $t_{ki} = 0$.

Предлагается прогнозировать потери на два шага вперед, но делать это на каждом шаге. Таким образом, на каждом шаге будет решаться вопрос о выборе на решение двух из имеющихся в очереди задач с номерами i и j , но реально браться на решение будет лишь задача с номером i , так как на следующем шаге правило выбора на обслуживание будет корректироваться с учетом поступивших задач.

В этом случае суммарные средние потери L_{ij} за суммарное время решения обеих задач составят величину

$$L_{ij} = c_i \int_0^{\infty} u(\tau, -T_j) p(\tau, |z_i) d\tau + \sum_{k \neq i} c_k \int_0^{\infty} u(\tau, +\tau_2 - T_j) p(\tau, |z_i) p(\tau_2 | z_j) d\tau, d\tau_2 + \\ + M_c \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{[\lambda(\tau, +\tau_2)]^k}{k!} e^{-\lambda(\tau, +\tau_2)} p(\tau, |z_i) p(\tau_2 | z_j) \sum_{s=1}^k c_s u(\tau, +\tau_2 - t_s - \Delta T_s) \cdot \right. \\ \left. \cdot p(t_s | \lambda, \tau + \tau_2) p(\Delta T_s) d\tau, d\tau_2, dt_s, d\Delta T_s \right\}.$$

Вводя обозначение

$$Q_2(T, z_i, z_j) = \iint_{\tau, \tau_2 > T} (\tau, +\tau_2 - T) p(\tau, |z_i) p(\tau_2 | z_j) d\tau, d\tau_2,$$

приведем L_{ij} к виду

$$L_{ij} = c_i Q(T_i, z_i) + \sum_{k \neq i} c_k Q_2(T_k, z_i, z_j) + \\ + \bar{c}\lambda \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} Q_2(t + \Delta T, z_i, z_j) p(\Delta T) d\Delta T dt.$$

Средние потери в единицу времени составят величину

$$\tilde{L}_{ij} = L_{ij} / (z_i + z_j)$$

и поэтому правило выбора задачи на решение будет определяться правилом $\tilde{L}_{ij} \Rightarrow \min_{(i,j)}$.

Рассмотрим частные случаи.

1) $\rho(\tau|z) = \mu e^{-\mu\tau}$, где $\mu = 1/\pi$. Тогда

$$Q(T, z) = e^{-\mu T} / \mu$$

$$Q_2(T, z_i, z_j) = \iint_{\tau_1, \tau_2 > T} e^{-\mu_i \tau_1 - \mu_j \tau_2} \mu_i \mu_j d\tau_1 d\tau_2.$$

Вычисляя интегралы, получим

$$Q_2(T, z_i, z_j) = \frac{1}{\mu_j - \mu_i} \left[\frac{\mu_j}{\mu_i} e^{-\mu_i T} - \frac{\mu_i}{\mu_j} e^{-\mu_j T} \right],$$

$$\int_0^T Q_2(t + \Delta T, z_i, z_j) dt = \frac{1}{\mu_j - \mu_i} \left[\frac{\mu_j}{\mu_i} e^{-\mu_i \Delta T} - \frac{\mu_i}{\mu_j} e^{-\mu_j \Delta T} \right].$$

Так как в этом случае $z_i + z_j = 1/\mu_i + 1/\mu_j$, то

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{ij} &= \frac{\mu_j c_i}{\mu_i + \mu_j} e^{-\mu_i T_i} + \frac{\mu_i \mu_j}{\mu_j^2 - \mu_i^2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{\mu_j}{\mu_i} e^{-\mu_i T_k} - \frac{\mu_i}{\mu_j} e^{-\mu_j T_k} \right) + \\ &+ \frac{\lambda \bar{c}}{\mu_i \mu_j (\mu_j^2 - \mu_i^2)} \left[\mu_j^3 g_{\Delta T}(\mu_i) - \mu_i^3 g_{\Delta T}(\mu_j) \right], \end{aligned}$$

где $g_{\Delta T}(s)$ - преобразование Лапласа от $\rho(\Delta T)$.

Если $\mu_i = \mu_j$, то \tilde{L}_{ij} приобретает вид

$$\tilde{L}_{ij} = \frac{c_i}{2} e^{-\mu_i T_i} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\mu_i T_k + z) e^{-\mu_i T_k} + \frac{\lambda \bar{c}}{2\mu_i} \int_0^T \rho(\Delta T) (z + \mu_i \Delta T) e^{-\mu_i \Delta T} d\Delta T.$$

2) $\rho(\tau|z) = e^{-\frac{(\tau - \mu)^2}{2\sigma^2}} / \sigma \sqrt{2\pi}$. Тогда $Q(T, z)$ выражается формулой (2). Так как сумма нормальных случайных величин есть также нормальная случайная величина, то

$$Q_2(T, z_i, z_j) = \sqrt{\frac{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}{2\pi}} e^{-\frac{(T - z_i - z_j)^2}{2(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}} + (z_i + z_j - T) \Phi\left(\frac{z_i + z_j - T}{\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}}\right).$$

Тогда величина \tilde{L}_{ij} примет вид

$$\tilde{L}_{ij} = \frac{1}{z_i + z_j} \left\{ \frac{c_i \sigma_i}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(T_i - z_i)^2}{2\sigma_i^2}} + c_i (z_i - T_i) \Phi\left(\frac{z_i - T_i}{\sigma_i}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{k \neq i} c_k \left[\frac{\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_k^2}}{2\lambda} e^{-\frac{(T_k - z_i - z_j)^2}{2(\sigma_i^2 + \sigma_k^2)}} + (z_i + z_j - T_k) \Phi\left(\frac{z_i + z_j - T_k}{\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_k^2}}\right) \right] + \right. \\ \left. \frac{\bar{c}\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \rho(\Delta T) \left[1 - \Phi\left(\frac{\Delta T - z_i - z_j}{\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}}\right) + \int_0^{\tilde{z}_i + z_j - t - \Delta T} \Phi\left(\frac{z_i + z_j - t - \Delta T}{\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}}\right) dt \right] d\Delta T \right\}.$$

Л и т е р а т у р а .

1. Конвей Р. и др. Теория расписаний. - М.: Наука, 1975.
2. Джейсуол Н. Очереди с приоритетами. - М.: Мир, 1973. - 279 с.
3. Гнеденко Л.В. и др. Приоритетные системы обслуживания. - Изд-во МГУ, 1973. - 446с.
4. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. - Изд-во Томского университета. 1978.

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ В ПРИОРИТЕТНЫХ СМО С ФОРМИРОВАНИЕМ ОЧЕРЕДЕЙ

А. А. Назаров

Введение. Рассмотрим однолинейную СМО с ожиданием и двумя простейшими входящими потоками требований с параметрами λ_1 и λ_2 . Требования i -го потока имеют рекуррентное время обслуживания со средним a_i и вторым моментом b_i . Перед обслуживающим прибором имеется два бункера с бесконечным числом мест для ожидания в каждом. Поток с номером i долю x_i ($0 \leq x_i \leq 1$) своих требований направляет в первый бункер, а остальные $1 - x_i$ во второй. Распределение производится по биномиальной схеме, так что разделенные потоки остаются простейшими.

Прибор осуществляет приоритетное обслуживание, предоставляя более высокий приоритет требованиям либо из первого, либо из второго бункера.

Обслуживающий прибор стремится произвести оптимальное назначение приоритета, минимизирующего среднее время ожидания каждого из всех требований в очереди.

Поток с номером i стремится выбрать оптимальное значение соответствующей ему доли x_i , минимизирующей среднее время ожидания каждого своего требования.

Будем предполагать, что обслуживающий прибор обладает преимуществом перед потоками, выраженным в том, что он назначает приоритеты, зная значения x_1 и x_2 . Каждый же поток, зная свои доли требований, распределяемых по различным бункерам, не знает долей, назначаемых другим потоком. Но потокам известно правило выбора оптимального приоритета обслуживающим прибором.

Рассматриваемую игру естественно исследовать методами теории иерархических игр трех игроков [1].

Ниже будет показано, что рассматриваемая игра сводится к неантагонистической непрерывной на единичном квадрате игре двух лиц с

противоположными интересами.

Доказано, что в полученной игре ситуацию равновесия составляют оптимальные смешанные минимаксные стратегии, вид которых найден.

Показано, что использование кооперативных стратегий в рассматриваемой игре не целесообразно, так как их применение не уменьшает значений целевых функций.

1. Вычисление целевых функций

Целевые функции обслуживающего прибора и i -го потока обозначим $L_0(x_1, x_2, \sqrt{v})$, $L_i(x_1, x_2, \sqrt{v})$, где \sqrt{v} может принимать лишь два значения 1 либо 2, в соответствии с номером бункера, требованиям которого предоставлен обслуживающим прибором более высокий приоритет.

При заданных x_1, x_2, \sqrt{v} значением L_0 является среднее время ожидания в очереди каждого требования обоих потоков, а значением L_i - среднее время ожидания в очереди каждого требования i -го потока. Очевидно

$$L_i(x_1, x_2, \sqrt{v}) = x_i M f_i + (1 - x_i) M f_2,$$

где f_i - время ожидания требования в i -м бункере в стационарном режиме функционирования СМО при фиксированных значениях x_1, x_2, \sqrt{v} . Целевая функция обслуживающего прибора имеет вид

$$L_0(x_1, x_2, \sqrt{v}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} L_1(x_1, x_2, \sqrt{v}) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} L_2(x_1, x_2, \sqrt{v}).$$

Как известно [2], для минимизации $L_0(x_1, x_2, \sqrt{v})$ по \sqrt{v} при фиксированных x_1, x_2 более высокий приоритет обслуживающий прибор должен предоставлять требованиям их того бункера, среднее время обслуживания которых меньше. Так как в первый бункер поступает простейший поток требований с параметром $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, то время обслуживания этих требований рекуррентное со средним и вторым моментом вида

$$\frac{\lambda_1 x_1 a_1 + \lambda_2 x_2 a_2}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}, \quad \frac{\lambda_1 x_1 b_1 + \lambda_2 x_2 b_2}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}.$$

Аналогично для требований второго бункера имеем параметр $\lambda_1(1-x_1) + \lambda_2(1-x_2)$, а среднее и второй момент времени обслужи-

важны равны

$$\frac{\lambda_1(1-x_1)a_1 + \lambda_2(1-x_2)a_2}{\lambda_1(1-x_1) + \lambda_2(1-x_2)}, \quad \frac{\lambda_1 x_1 b_1 + \lambda_2 x_2 b_2}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}$$

Не нарушая общности, можно считать, что $a_2 > a_1$, тогда

$$\frac{\lambda_1 x_1 a_1 + \lambda_2 x_2 a_2}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} < \frac{\lambda_1(1-x_1)a_1 + \lambda_2(1-x_2)a_2}{\lambda_1(1-x_1) + \lambda_2(1-x_2)}$$

при $x_2 < x_1$; При $x_2 > x_1$ выполняется обратное строгое неравенство и при $x_2 = x_1$ выполнено равенство среднегремени обслуживания. Таким образом, оптимальное $\sqrt{^*}$ правило назначения приоритетов имеет вид

$$\sqrt{^*}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_2 < x_1 \\ 2, & \text{если } x_2 > x_1 \end{cases}$$

Найдем значения $L_i(x_1, x_2) = L_i(x_1, x_2, \sqrt{^*})$. Если $\sqrt{^*} = 1$, то, как следует из [2],

$$M\mu_1 = \frac{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \frac{\lambda_1 x_1 b_1 + \lambda_2 x_2 b_2}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} + (\lambda_1(1-x_1) + \lambda_2(1-x_2)) \frac{\lambda_1(1-x_1) b_1 + \lambda_2(1-x_2) b_2}{\lambda_1(1-x_1) + \lambda_2(1-x_2)}}{2 \left[1 - (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \frac{\lambda_1 x_1 a_1 + \lambda_2 x_2 a_2}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} \right]}$$

$$= \frac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2}{2(1 - \lambda_1 x_1 a_1 - \lambda_2 x_2 a_2)},$$

$$M\mu_2 = \frac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2}{2(1 - \lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2)(1 - \lambda_1 x_1 a_1 - \lambda_2 x_2 a_2)}$$

Обозначим $\lambda_i a_i = \rho_i$, $\frac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2}{2(1 - \rho_1 - \rho_2)} = c$, тогда

$$L_i(x_1, x_2) = c \frac{1 - (\rho_1 + \rho_2) x_i}{1 - \rho_1 x_1 - \rho_2 x_2}$$

Аналогично, если $\sqrt{^*} = 2$, то

$$L_i(x_1, x_2) = c \frac{1 - (\rho_1 + \rho_2)(1 - x_i)}{1 - \rho_1(1 - x_1) - \rho_2(1 - x_2)}$$

Учитывая (1), можно записать, что

$$L_1(x_1, x_2) = \begin{cases} C \frac{1 - (\rho_1 + \rho_2) x_1}{1 - \rho_1 x_1 - \rho_2 x_2}, & \text{если } x_2 < x_1, \\ C \frac{1 - (\rho_1 + \rho_2)(1 - x_1)}{1 - \rho_1(1 - x_1) - \rho_2(1 - x_2)}, & \text{если } x_2 > x_1. \end{cases} \quad (2)$$

Так как при $x_1 = x_2$, $L_1(x_1, x_2) = C$, то в (2) строгое неравенство следует заменить на нестрогое.

2. Определение оптимальных стратегий потоков

Таким образом, иерархическая игра трех игроков сведена к непрерывной на единичном квадрате игре двух лиц с целевыми функциями вида (2). Так как $L_1(x_1, x_2) + L_2(x_1, x_2) \neq const$, то полученная игра не является антагонистической, но при $C = \rho_1 / (\rho_1 + \rho_2)$ имеем

$$C_1 L_1(x_1, x_2) + C_2 L_2(x_1, x_2) = C, \quad (3)$$

следовательно, рассматриваемая игра является игрой двух лиц с противоположными интересами [1]. Обозначим

$$E_1(F, G) = \int_0^1 \int_0^1 L_1(x_1, x_2) dF(x_1) dG(x_2),$$

где F, G - функции распределения, такие, что $F(0) = G(0) = 0$, $F(1) = G(1) = 1$.

Дадим следующие определения.

Определение 1. Будем говорить, что $F_1^*(x_1), G_1^*(x_2)$ образуют седловую точку в классе смешанных стратегий функции $L_1(x_1, x_2)$, если $\forall F, G$ выполнены два неравенства

$$E_1(F_1^*, G) \leq E_1(F_1^*, G_1^*) \leq E_1(F, G_1^*). \quad (4)$$

Определение 2. Будем говорить, что $F_2^*(x_1), G_2^*(x_2)$ в классе смешанных стратегий образуют седловую точку функции $L_2(x_1, x_2)$, если $\forall F, G$ выполнены два неравенства

$$E_2(F, G_2^*) \leq E_2(F_2^*, G_2^*) \leq E_2(F_2^*, G) . \quad (5)$$

Определение 3. Будем говорить, что $F^*(x_1)$, $G^*(x_2)$ в классе смешанных стратегий образуют ситуацию равновесия функций $L_1(x_1, x_2)$, $L_2(x_1, x_2)$, если $\forall F, G$ выполнены два неравенства:

$$E_1(F^*, G^*) \leq E_1(F, G^*), \quad (6)$$

$$E_2(F^*, G^*) \leq E_2(F^*, G).$$

Докажем три утверждения.

Теорема 1. Если $L_1(x_1, x_2)$ и $L_2(x_1, x_2)$ непрерывные функции на единичном квадрате и существуют такие константы $C_1 > C_2 > 0$, что выполнено (3), то седловые точки функций $L_1(x_1, x_2)$ и $L_2(x_1, x_2)$ совпадают.

Доказательство.

Из (3) следует, что

$$C_1 E_1(F, G) + C_2 E_2(F, G) \equiv C ,$$

тогда

$$E_1(F, G) = \frac{C - C_2 E_2(F, G)}{C_1} , \quad (7)$$

$$E_2(F, G) = \frac{C - C_1 E_1(F, G)}{C_2} . \quad (8)$$

Так как $L_1(x_1, x_2)$, $L_2(x_1, x_2)$ непрерывны, то по основной теореме непрерывных игр [3] для L_1 и L_2 существуют седловые точки.

Пусть выполнено (4), тогда, используя (7), неравенства (4) можно переписать в виде

$$\frac{C - C_2 E_2(F_1^*, G)}{C_1} \leq \frac{C - C_2 E_2(F_1^*, G_1^*)}{C_1} \leq \frac{C - C_2 E_2(F, G_1^*)}{C_1} .$$

откуда имеем

$$E_2(F_1^*, G) \geq E_2(F_1^*, G_1^*) \geq E_2(F, G_1^*) ,$$

т.е. (5) выполняется для F_1^* , G_1^* , следовательно, седловая точка функции $L_1(x_1, x_2)$ является одновременно и седловой точкой функции $L_2(x_1, x_2)$.

Пусть выполнено (5), тогда используя (8), неравенство (5) можно переписать в виде

$$\frac{C - C_1 E_1(F, G_2^*)}{C_2} \leq \frac{C - C_1 E_1(F_2^*, G_2^*)}{C_2} \leq \frac{C - C_1 E_1(F_2^*, G)}{C_2},$$

откуда имеем

$$E_1(F, G_2^*) \geq E_1(F_2^*, G_2^*) \geq E_1(F_2^*, G).$$

т.е. (4) выполняется для F_2^* , G_2^* , следовательно, седловая точка функции $L_2(x_1, x_2)$ является одновременно и седловой точкой функции $L_1(x_1, x_2)$.

Теорема 2. Если $L_1(x_1, x_2)$, $L_2(x_1, x_2)$ непрерывные функции на единичном квадрате и существуют такие константы $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, что выполнено (3), то седловая точка (F_1^*, G_1^*) функции $L_1(x_1, x_2)$ образует ситуацию равновесия для функций $L_1(x_1, x_2)$, $L_2(x_1, x_2)$.

Доказательство.

Из т.1 следует, что (4) и (5) выполняются при $F_1^* = F_2^*$, $G_1^* = G_2^*$, но в этом случае правые части неравенств (4) и (5) образуют систему неравенств (6), следовательно, F_1^* , G_1^* является ситуацией равновесия для функций $L_1(x_1, x_2)$ и $L_2(x_1, x_2)$.

Теорема 3. Если $L_1(x_1, x_2)$, $L_2(x_1, x_2)$ непрерывные функции на единичном квадрате и существуют такие константы $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, что выполнено (3), то кооперативное решение [4] игры двух лиц с платежными функциями $L_1(x_1, x_2)$, $L_2(x_1, x_2)$ состоит из единственной точки, соответствующей седловой точке (F_1^*, G_1^*) функции $L_1(x_1, x_2)$.

Доказательство.

В силу (3) образ единичного квадрата $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$ представляет собой отрезок R при λ линии с уравнением

$$C_1 L_1 + C_2 L_2 = C. \quad (9)$$

Следовательно, образ R' всех кооперативных смешанных стратегий совпадает с R . Так как $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, то оптимальное множество Парето [4] совпадает со всем множеством R .

Но кооперативным решением называют [4] точки $\{L_1, L_2\}$ оптимального множества Парето, для которых одновременно выполняются неравенства:

$$L_1 \leq L_1^* \quad , \quad L_2 \leq L_2^* \quad . \quad (10)$$

где L_1^* , L_2^* - значения функций $L_1(x_1, x_2)$, $L_2(x_1, x_2)$ в седловых точках. Так как по теореме [1] седловые точки совпадают, то L_1^* , L_2^* удовлетворяют уравнению (9). В самом деле, проинтегрируем по функциям $F_1^*(x_1)$, $G_1^*(x_2)$ правую и левую части (9), будем иметь

$$C_1 L_1^* + C_2 L_2^* = C \quad . \quad (11)$$

Из (9) почленно вычтем (11), получим

$$C_1(L_1 - L_1^*) + C_2(L_2 - L_2^*) = 0$$

Так как в силу (10) каждое слагаемое в этом равенстве не положительно, то из того, что $C_1 > 0$, следует $L_1 = L_1^*$, а из того, что $C_2 > 0$, следует $L_2 = L_2^*$. Таким образом, совокупность точек оптимального множества Парето, удовлетворяющих неравенствам (10), состоит из единственной точки (L_1^*, L_2^*) , являющейся образом седловой точки функции $L_1(x_1, x_2)$.

Из сформулированных теорем вытекает, что для рассматриваемой игры целесообразно оптимальными назвать такие смешанные стратегии $F^*(x_1)$, $G^*(x_2)$, которые образуют седловую точку функции $L(x_1, x_2) \equiv L_1(x_1, x_2)$.

В исходной игре, как следует из (2),

$$L(x_1, x_2) = \begin{cases} C \frac{1 - (\rho_1 + \rho_2)x_1}{1 - \rho_1 x_1 - \rho_2 x_2} \quad , & \text{если } x_2 \leq x_1 \\ C \frac{1 - (\rho_1 + \rho_2)(1 - x_1)}{1 - \rho_1(1 - x_1) - \rho_2(1 - x_2)} \quad , & \text{если } x_2 \geq x_1 \end{cases}$$

3. Вычисление оптимальных стратегий потоков

Таким образом, для того, чтобы найти оптимальные стратегии $F^*(x_1)$, $G^*(x_2)$ потоков, достаточно определить седловую точку функции $L(x_1, x_2)$.

Пусть $G^*(x_2)$ - оптимальная стратегия второго потока. Так как

$$\frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \begin{cases} < 0, & \text{если } x_2 \leq x_1, \\ > 0, & \text{если } x_2 > x_1, \end{cases}$$

и $\partial^2 L(x_1, x_2) / \partial x_1^2 < 0$, то $L(x_1, x_2)$ для любого x_2 вогнута, следовательно,

$$\varphi(x_1) = L(x_1, 1),$$

но так как $L(0, 1) < L(1, 1)$, то $\varphi(0) < \varphi(1)$, что противоречит допущению. Таким образом, $\varphi(0) = \varphi(1)$ и

$$F^*(x_1) = \alpha J_0(x_1) + (1-\alpha) J_1(x_1).$$

Так как $\frac{\partial^2 L(0, x_2)}{\partial x_2^2} > 0$, $\frac{\partial^2 L(1, x_2)}{\partial x_2^2} > 0$, то

$$g(\alpha, x_2) = \int_0^1 L(x_1, x_2) dF^*(x_1)$$

строго вогнута, тогда

$$\max_G \int_0^1 g(\alpha, x_2) dG(x_2) = \begin{cases} g(\alpha, 0), & \text{если } g(\alpha, 0) < g(\alpha, 1) \\ g(\alpha, 0) = g(\alpha, 1), & \text{если } g(\alpha, 0) = g(\alpha, 1) \\ g(\alpha, 1), & \text{если } g(\alpha, 0) > g(\alpha, 1). \end{cases}$$

Следовательно,

$$G^*(x_2) = \begin{cases} J_0(x_2), & \text{если } g(\alpha, 0) < g(\alpha, 1) \\ \beta J_0(x_2) + (1-\beta) J_1(x_2), & \text{если } g(\alpha, 0) = g(\alpha, 1) \\ J_1(x_2), & \text{если } g(\alpha, 0) > g(\alpha, 1). \end{cases}$$

1) Допустим $g(\alpha, 0) < g(\alpha, 1)$, тогда $G^*(x_2) = J_0(x_2)$, следовательно,

$$\varphi(x_1) = L(x_1, 0),$$

что противоречит условию $\varphi(0) = \varphi(1)$.

2) Допустим $g(\alpha, 0) > g(\alpha, 1)$, тогда $G^*(x_2) = J_1(x_2)$, следовательно, $\varphi(x_1) = L(x_1, 1)$, что противоречит условию $\varphi(0) = \varphi(1)$. Таким образом,

$$g(\alpha, 0) = g(\alpha, 1)$$

$$G^*(x_2) = \beta J_0(x_2) + (1 - \beta) J_1(x_2).$$

Так как $g(\alpha, 0) = g(\alpha, 1)$, то

$$\varphi(x_1) = \int_0^1 L(x_1, x_2) dG^*(x_2)$$

также вогнута, тогда

$$\min_F \int_0^1 \varphi(x_1) dF(x_1) = \begin{cases} \varphi(0), & \text{если } \varphi(0) < \varphi(1) \\ \varphi(0) = \varphi(1), & \text{если } \varphi(0) = \varphi(1) \\ \varphi(1), & \text{если } \varphi(0) > \varphi(1) \end{cases}$$

Следовательно,

$$F^*(x_1) = \begin{cases} J_0(x_1), & \text{если } \varphi(0) < \varphi(1) \\ \alpha J_0(x_1) + (1 - \alpha) J_1(x_1), & \text{если } \varphi(0) = \varphi(1) \\ J_1(x_1), & \text{если } \varphi(0) > \varphi(1), \end{cases}$$

$$\text{где } J_\alpha(x_1) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq c \\ 1, & \text{если } x > c, \end{cases} \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

1) Допустим $\varphi(0) < \varphi(1)$, тогда $F^*(x_1) = J_0(x_1)$, следовательно,

$$\int_0^1 L(x_1, x_2) dF^*(x_1) = L(0, x_2).$$

Так как $\frac{\partial L(0, x_2)}{\partial x_2} < 0$, то

$$\max_G \int_0^1 L(0, x_2) dG(x_2) = L(0, 0),$$

т. е. $G^*(x_2) = J_0(x_2)$, следовательно,

$$\varphi(x_1) = L(x_1, 0)$$

Но так как $L(0, 0) > L(1, 0)$, то $\varphi(0) > \varphi(1)$, что противоречит допущению.

2) Допустим $\varphi(0) > \varphi(1)$, тогда $F^*(x_1) = J_1(x_1)$, следовательно,

$$\int_0^1 L(x_1, x_2) dF^*(x_1) = L(1, x_2).$$

Так как $\frac{\partial L(1, x_2)}{\partial x_2} > 0$, то

$$\max_G \int_0^1 L(1, x_2) dG(x_2) = L(1, 1),$$

т. е. $G^*(x_2) = J_1(x_2)$, следовательно,

$$\alpha L(0, 0) + (1-\alpha)L(1, 0) = \alpha L(0, 1) + (1-\alpha)L(1, 1),$$

откуда

$$\alpha = \frac{L(1, 1) - L(1, 0)}{L(0, 0) + L(1, 1) - L(1, 0) - L(0, 1)} = \frac{1}{2}$$

Так как $\varphi(0) = \varphi(1)$, то

$$\beta L(0, 0) + (1-\beta)L(0, 1) = \beta L(1, 0) + (1-\beta)L(1, 1),$$

откуда

$$\beta = \frac{L(1, 1) - L(0, 1)}{L(0, 0) + L(1, 1) - L(1, 0) - L(0, 1)} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, оптимальные стратегии первого и второго игроков равны

$$F^*(x_1) = \frac{1}{2} J_0(x_1) + \frac{1}{2} J_1(x_1),$$

$$G^*(x_2) = \frac{1}{2} J_0(x_2) + \frac{1}{2} J_1(x_2).$$

Интерпретация постановки задачи и полученного решения

Рассмотренная МО возникла как простейшая модель вычислительного центра, которым пользуются две группы программистов. Здесь входящими потоками являются потоки программ, обслуживаемым прибором - вычислительная машина. Приоритетное правило просчета программ довольно часто используется на вычислительных центрах.

Естественно-выбраны и целевые функции как среднее время ожидания в очереди.

Очевидно, что вычислительный центр имеет некоторое преимущество перед потоками, так как он может фиксировать и моменты поступления программ и продолжительность их счета на машине, поэтому естественно считать, что обслуживаемому прибору известны доли X_1 и X_2 требований, назначаемых потоками.

Получающаяся противоположность интересов групп программистов делает излишней их кооперацию, в частности, сообщение друг другу значений выбираемых долей X_i .

Найденное решение показывает, что каждая из групп программистов с вероятностью $1/2$ все свои требования направляет в первый бункер и с вероятностью $1/2$ - во второй. В этом случае с вероятностью $1/2$ (когда складываются ситуации $(0,0)$ $(1,1)$) продолжительность задержки программы в очереди у первой и второй групп совпадают и фактически осуществляется прямой порядок обслуживания всех поступающих программ. С вероятностью $1/2$ (когда складываются ситуации $(1,0)$ $(0,1)$) все программы первой группы программистов обслуживаются как приоритетные, а для второй группы все программы не приоритетные. Существенное преимущество первой группы возникло благодаря предположению о том, что $a_1 < a_2$, т.е. среднее время счета программ второй группы программистов больше, чем для первой.

Л и т е р а т у р а

1. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами.-М.: Наука, 1976.
2. Джейсуол Н. Очереди с приоритетами.-М.: Мир, 1973.
3. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр.-М.: Изматгиз, 1960.
4. Дьюс Р.Д., Райфа Х. Игры и решения.-М.: ИЛ, 1961.

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В СМО ПРИ БОЛЬШИХ ЗАГРУЗКАХ МЕТОДОМ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

А. А. Назаров, В. А. Чеменев

Введение. Как известно [1,2], нахождение оптимальных управлений, зависящих от состояний в системах массового обслуживания, представляет значительные трудности и осуществляется, главным образом, численными методами [3], реализуемыми лишь при существенных ограничениях на множество состояний. Если множество состояний неограничено, то в зависимости от величины загрузки системы имеет смысл рассмотрение двух подходов для анализа и оптимального управления такими СМО. При малой загрузке ограничения на множество состояний приводят к незначительным погрешностям по сравнению с СМО без ограничений, поэтому возможно использование численных методов. При большой загрузке обслуживаемых приборов и неограниченном множестве состояний весьма перспективным направлением анализа и оптимального управления такими системами является асимптотическая аппроксимация дискретных марковских процессов процессами с непрерывными компонентами, описывающих изменение во времени состояний соответствующих СМО [4, 6]. Тако приближение возможно, лишь когда загрузка системы ρ близка к единице. Используя этот подход в [4], удалось найти асимптотическую при $\rho \rightarrow 1$ плотность распределения нормированного соответствующим образом числа требований в некоторых управляемых системах массового обслуживания, таких как СМО с формированием очередей и системы с динамическими приоритетами. Показано, что распределение вырождено и имеет вид дельта-функции вдоль границы изменения значений управления.

При изучении реальных объектов [5], модели которых можно описывать подобными системами массового обслуживания, естественно представляет интерес вид зависимости характеристик СМО от малого параметра $1-\rho$, обозначаемого δ .

Ниже показано, что искомая плотность распределения имеет пограничный экспоненциально убывающий слой вдоль кривой разрыва значе-

ний управления. Полученную плотность распределения будем называть пограничной. Используя найденную плотность распределения, определено (с точностью до бесконечно малой $1-\rho$) оптимальное управление как для МО с формированием очередей, так и для систем с динамическими приоритетами.

§ 1. Нахождение оптимального правила назначения динамических приоритетов

Постановка задачи

Рассмотрим однолинейную МО с динамическими приоритетами, на вход которой поступают два потока требований с параметрами λ_1 , λ_2 . Интенсивность обслуживания требований первого потока равна μ_1 , а требований второго потока равна μ_2 . В этом случае загрузка системы ρ определяется как $\rho = \lambda_1/\mu_1 + \lambda_2/\mu_2$. Будем предполагать, что $1-\rho > 0$. Состояние системы определяется вектором (i, j, V) , где $V = 1$ или 2 в зависимости от типа требований на обслуживание. В момент окончания обслуживания правило выбора требования на прибор в состоянии (i, j, V) определяется величиной $\delta(i, j)$ - условной вероятностью того, что на прибор необходимо поставить требование первого типа при условии, что система находится в состоянии (i, j, V) . Будем рассматривать динамические приоритеты вида

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i > \mu_1 \cdot f(\kappa), j < \mu_2 \cdot (\kappa - f(\kappa)); \\ 0, & \text{если } i < \mu_1 \cdot f(\kappa), j > \mu_2 \cdot (\kappa - f(\kappa)), \end{cases} \quad (1.1)$$

где граница изменения значения $\delta(i, j)$ определяется в параметрическом виде $i = \mu_1 \cdot f(\kappa)$, $j = \mu_2 \cdot (\kappa - f(\kappa))$, для неотрицательных значений параметра κ .

Качество функционирования системы оценим функционалом

$$L = M G(i, j) = \sum_{i, j, V} G(i, j, V) \cdot P(i, j, V), \quad (1.2)$$

где $G(i, j, V)$ - интерпретируется как величина штрафа от пребывания МО в состоянии (i, j, V) в течении единицы времени, а

M - символ математического ожидания по стационарному распределению $P(i, j, V)$, которое зависит от управления $f(K)$. Будем предполагать, что выполнены условия существования стационарного режима. Необходимо найти такие $f(K)$, при которых (1.2) принимает минимальное значение.

Асимптотическая аппроксимация

Для решения поставленной задачи рассмотрим асимптотическую аппроксимацию дискретного марковского процесса $\{i(t), j(t), V(t)\}$ процессом с непрерывными компонентами $\{X(t) = \varepsilon \cdot i(t), Y(t) = \varepsilon \cdot j(t), U(t)\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Построим уравнения для стационарного распределения $P(i, j, V)$ процесса $\{i(t), j(t), V(t)\}$.
Для $V = 1$ имеем

$$P(i(t+\Delta t)=i, j(t+\Delta t)=j, V(t+\Delta t)=1) = \lambda_1 \Delta t P(i(t)=i-1, j(t)=j, V(t)=1) + \lambda_2 \Delta t \cdot P(i(t)=i, j(t)=j-1, V(t)=1) + \mu_1 \Delta t P(i(t)=i+1, j(t)=j, V(t)=1) \cdot \delta(i+1, j) + \mu_2 \Delta t \cdot P(i(t)=i+1, j(t)=j, V(t)=2) \cdot \delta(i+1, j) + (1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) \Delta t) P(i(t)=i, j(t)=j, V(t)=1),$$

тогда

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) P(i, j, 1) = \lambda_1 P(i-1, j, 1) + \lambda_2 P(i, j-1, 1) + \mu_1 \delta(i+1, j) P(i+1, j, 1) + \mu_2 P(i+1, j, 2) \tag{1.3}$$

Для $V = 2$ аналогично имеем

$$P(i(t+\Delta t)=i, j(t+\Delta t)=j, V(t+\Delta t)=2) = \lambda_1 \Delta t P(i(t)=i-1, j(t)=j, V(t)=2) + \lambda_2 \Delta t P(i(t)=i, j(t)=j-1, V(t)=2) + \mu_1 \Delta t P(i(t)=i+1, j(t)=j, V(t)=2) \cdot (1 - \delta(i, j+1)) + \mu_2 \Delta t P(i(t)=i, j(t)=j+1, V(t)=1) (1 - \delta(i, j+1)) + (1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) \Delta t) P(i(t)=i, j(t)=j, V(t)=2),$$

отсюда

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) P(i, j, 2) = \lambda_1 P(i-1, j, 2) + \lambda_2 P(i, j-1, 2) + \mu_1 P(i, j+1, 2) \cdot (1 - \delta(i, j+1)) + \mu_2 P(i, j+1, 1) (1 - \delta(i, j+1)) \tag{1.4}$$

Аналогично [7] перейдем от дискретного распределения $P(i, j, V)$ к непрерывному $P(x, y, V)$, для которого уравнения (1.3), (1.4) примут вид:

при $\delta(x, y) = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{A_2 + M_1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial^2 P(x, y, 1)}{\partial x^2} + \frac{A_2}{2} \epsilon^2 \frac{\partial^2 P(x, y, 1)}{\partial y^2} + (M_1 - A_1) \epsilon \frac{\partial P(x, y, 1)}{\partial x} - A_1 \epsilon \frac{\partial P(x, y, 1)}{\partial y} + \\ & + M_1 \left[P(x, y, 2) + \epsilon \frac{\partial P(x, y, 2)}{\partial x} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 P(x, y, 2)}{\partial x^2} \right] = 0 \\ & \frac{A_1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial^2 P(x, y, 2)}{\partial x^2} + \frac{A_2}{2} \epsilon^2 \frac{\partial^2 P(x, y, 2)}{\partial y^2} - A_1 \epsilon \frac{\partial P(x, y, 2)}{\partial x} - A_2 \epsilon \frac{\partial P(x, y, 2)}{\partial y} - \\ & - M_2 P(x, y, 2) = 0 ; \end{aligned} \quad (1.5)$$

при $\delta(x, y) = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{A_1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial^2 P(x, y, 2)}{\partial x^2} + \frac{A_2 + M_1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial^2 P(x, y, 2)}{\partial y^2} + (M_2 - A_2) \epsilon \frac{\partial P(x, y, 2)}{\partial y} - \\ & - A_1 \epsilon \frac{\partial P(x, y, 2)}{\partial x} + M_1 \left[P(x, y, 1) + \epsilon \frac{\partial P(x, y, 1)}{\partial y} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 P(x, y, 1)}{\partial y^2} \right] = 0 \\ & \frac{A_1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial^2 P(x, y, 1)}{\partial x^2} + \frac{A_2}{2} \epsilon^2 \frac{\partial^2 P(x, y, 1)}{\partial y^2} - A_2 \epsilon \frac{\partial P(x, y, 1)}{\partial y} - A_1 \epsilon \frac{\partial P(x, y, 1)}{\partial x} - \\ & - M_1 P(x, y, 1) = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Система (1.5), (1.6) является системой дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, решение которой $P(x, y, 1)$, $P(x, y, 2)$ определено в первой четверти плоскости x, y .

Особенностью этой системы является наличие малого параметра при старших производных и разрыв коэффициентов вдоль кривой $x = M_1 f(\psi)$, $y = M_2 (\psi - f(\psi))$, заданной параметрически с параметром $\psi > 0$, определяющей динамический приоритет $\delta(x, y)$ в рассматриваемом асимптотическом варианте.

Уравнения с малым параметром при старшей производной встречаются в гидродинамике при обосновании пограничного слоя. Ниже термин "пограничный слой" используется нами для обозначения метода решения систем вида (1.5), (1.6) заключающийся в переходе к новой,

специальным образом выбранной. системе координат и преобразованию дифференциальных уравнений в частных производных (1.5), (1.6) в обыкновенные дифференциальные уравнения.

Метод пограничного слоя

Для решения систем уравнений (1.5), (1.6) воспользуемся методом пограничного слоя, для этого в области $\{(x, y): \delta(x, y) = 1\}$ перейдем к новой системе координат $\varphi = \frac{x}{M_1} + \frac{y}{M_2}, t = \frac{x - M_1 f(\varphi)}{M_2 \epsilon}$, где $\epsilon = 1 - \rho$.

Обозначим $P(x, y, 1) \equiv \bar{\mathcal{H}}_1(\varphi, t), P(x, y, 2) \equiv \bar{\mathcal{H}}_2(\varphi, t)$. Тогда для функций $\bar{\mathcal{H}}_1(\varphi, t), \bar{\mathcal{H}}_2(\varphi, t)$ с точностью до бесконечно малых порядка ϵ^2 будем иметь систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{d_1 + M_1}{M_1^2} (1 - f'(\varphi))^2 + \frac{d_2}{M_2} f''(\varphi) \right] \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{H}}_1(\varphi, t)}{\partial t^2} + \frac{d_1}{M_2} \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_1(\varphi, t)}{\partial t} + \\ & + M_2 \left[\bar{\mathcal{H}}_1(\varphi, t) + \frac{(1 - f'(\varphi))}{M_1} \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_2(\varphi, t)}{\partial t} + \frac{(1 - f'(\varphi))^2}{2 M_1^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{H}}_2(\varphi, t)}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (1.7) \\ & \frac{1}{2} \left[\frac{d_1}{M_1^2} (1 - f'(\varphi))^2 + \frac{d_2}{M_2} f''(\varphi) \right] \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{H}}_2(\varphi, t)}{\partial t^2} + (f'(\varphi) - \frac{d_1}{M_1}) \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_2(\varphi, t)}{\partial t} - M_2 \bar{\mathcal{H}}_2(\varphi, t) = 0, \end{aligned}$$

где использовано асимптотическое равенство $M_1/M_1 + M_2/M_2 = 1$. Очевидно, что полученные уравнения являются обыкновенными дифференциальными уравнениями по переменной t с постоянными коэффициентами.

Совершенно аналогично для области $\{(x, y): \delta(x, y) = 0\}$, переходя к новой системе координат $\varphi = \frac{x}{M_1} + \frac{y}{M_2}, t = \frac{M_1 f(\varphi) - x}{M_2 \epsilon}$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{d_1}{M_1^2} (1 - f'(\varphi))^2 + \frac{d_2}{M_2} f''(\varphi) \right] \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{H}}_1(\varphi, t)}{\partial t^2} + (d_1 - f'(\varphi)) \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_1(\varphi, t)}{\partial t} - M_1 \bar{\mathcal{H}}_1(\varphi, t) = 0 \\ & \frac{1}{2} \left[\frac{d_1}{M_1^2} (1 - f'(\varphi))^2 + \frac{d_2 + M_2}{M_2} f''(\varphi) \right] \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{H}}_2(\varphi, t)}{\partial t^2} + \frac{d_1}{M_2} \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_2(\varphi, t)}{\partial t} + M_2 \left[\bar{\mathcal{H}}_2(\varphi, t) + \right. \\ & \left. + \frac{f'(\varphi)}{M_2} \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_1(\varphi, t)}{\partial t} + \frac{f'(\varphi)^2}{2 M_2^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{H}}_1(\varphi, t)}{\partial t^2} \right] = 0. \quad (1.8) \end{aligned}$$

Решение полученных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными по t коэффициентами не представляет труда, поэтому, чтобы не загромождать изложение, ограничимся случаем $M_1 = M_2 = M$.

В этом случае обозначим $\bar{\mathcal{H}}_1(\varphi, t) + \bar{\mathcal{H}}_2(\varphi, t) = \bar{\mathcal{H}}(\varphi, t)$, для которой системы (1.7) и (1.8) примут вид.

Для области $\delta(x, y) = 1$

$$\frac{1}{2\mu} \left[2\mu f' + (\mu + \lambda_1)(1 - 2f') \right] \frac{\partial^2 \Pi(\varphi, t)}{\partial t^2} + \lambda_2 \frac{\partial \Pi(\varphi, t)}{\partial t} = 0,$$

а для области $\delta(x, y) = 0$

$$\frac{1}{2\mu} \left[2\mu f'' + \lambda_1(1 - 2f') \right] \frac{\partial^2 \Pi(\varphi, t)}{\partial t^2} + \lambda_1 \frac{\partial \Pi(\varphi, t)}{\partial t} = 0.$$

Решение которых $\tilde{\Pi}_1(\varphi, t)$ и $\tilde{\Pi}_0(\varphi, t)$ получим в виде

$$\tilde{\Pi}_1(\varphi, t) = C_1^{(1)} + C_2^{(1)} \cdot e^{-\lambda_1(\varphi) t}$$

$$\tilde{\Pi}_0(\varphi, t) = C_1^{(0)} + C_2^{(0)} \cdot e^{-\lambda_0(\varphi) t},$$

где

$$\lambda_1(\varphi) = \frac{2\lambda_1\mu}{2\mu \cdot f'' + (\mu + \lambda_1)(1 - 2f')}, \quad \lambda_0(\varphi) = \frac{2\lambda_1\mu}{2\mu \cdot f'' + \lambda_1(1 - 2f')}.$$

Произвольные функции $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, $C_1^{(0)}$, $C_2^{(0)}$ найдем из дополнительных условий:

1. $\tilde{\Pi}_1(\varphi, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$

2. $\tilde{\Pi}_0(\varphi, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$

3. $\tilde{\Pi}_0(\varphi, 0) = \tilde{\Pi}_1(\varphi, 0)$, условие непрерывности функции $\tilde{\Pi}(\varphi, t)$ на

границе.

Четвертое условие запишем в виде $\int_0^{\varphi} P(x, \varphi - x) dx = e^{-\varphi}$, где слева стоит распределение суммы $x+y$, а справа асимптотическая плотность одномерного дискретного марковского процесса $i(t) + j(t)$.

Из первого и второго условий получим, что $C_2^{(1)} = C_2^{(0)} = 0$, из третьего, что $C_1^{(1)} = C_1^{(0)} = C_1(\varphi)$. Используя последнее равенство, будем иметь

$$C_1(\varphi) = \frac{e^{-\varphi}}{\mu \cdot \epsilon (1/\lambda_1 + 1/\lambda_2)}.$$

Таким образом, пограничная плотность распределения для состояний системы с динамическими приоритетами имеет вид

$$\Pi(x, y) = \begin{cases} \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\epsilon \cdot \mu (\lambda_0 + \lambda_2)} e^{-\varphi} \exp \left\{ -\lambda_0 \frac{\mu \cdot f(\varphi) - x}{\mu \cdot \epsilon} \right\}, & \text{при } \delta(x, y) = 0; \\ \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_2}{\epsilon \cdot \mu (\lambda_0 + \lambda_2)} e^{-\varphi} \exp \left\{ -\lambda_2 \frac{x - \mu \cdot f(\varphi)}{\mu \cdot \epsilon} \right\}, & \text{при } \delta(x, y) = 1. \end{cases} \quad (1.9)$$

Оптимальное назначение динамических приоритетов

В условиях большой нагрузки качество функционирования СМО можно оценить функционалом

$$L_1(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{F}(x, y) \bar{H}(x, y) dx dy, \quad (1.10)$$

где $\bar{F}(x, y) = G(\frac{x}{\mu}, \frac{y}{\epsilon})$

Представим интеграл (1.10) в виде суммы двух интегралов по областям $\{(x, y) : x < \mu \cdot f(\varphi), y > \mu(\varphi - f(\varphi))\}$, $\{(x, y) : x > \mu \cdot f(\varphi), y < \mu(\varphi - f(\varphi))\}$

и, делая замену $\varphi = \frac{x+y}{\mu}$, $t = \frac{x - \mu \cdot f(\varphi)}{\epsilon}$ в первом интеграле и $t = \frac{\mu \cdot f(\varphi) - x}{\mu \cdot \epsilon}$ во втором с точностью до бесконечно малых порядка ϵ , получим

$$L_1(t) = \mu \int_0^{\infty} \left[\bar{F}(\mu \cdot f(\varphi), \mu(\varphi - f(\varphi))) + \epsilon \mu \left(\frac{t}{\mu \cdot \epsilon} - \frac{1}{\mu \cdot \epsilon} \right) \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} \right) \right] e^{-\varphi} d\varphi \Bigg|_{\substack{x = \mu \cdot f(\varphi) \\ y = \mu(\varphi - f(\varphi))}}. \quad (1.11)$$

Рассмотрим функционал вида

$$L_1(t) = \int_0^{\infty} \left[G(\varphi, f(\varphi)) + \epsilon H(\varphi, f(\varphi)) \right] d\varphi$$

и вальшем для него уравнение Эйлера

$$G_{\varphi} + \epsilon H_{\varphi} - \frac{d}{d\varphi} (\epsilon H_{f'}) = 0$$

или

$$G_{\varphi} + \epsilon \left[H_{\varphi} - \frac{d}{d\varphi} H_{f'} \right] = 0.$$

Оптимальное решение будем искать в виде

$$f'(\varphi) = f'_0(\varphi) + \epsilon f'_1(\varphi).$$

Тогда, используя разложение в ряд, функции G_{φ} , H_{φ} , $H_{f'}$ можно представить следующим образом

$$G_{\varphi}(\varphi, f_0 + \epsilon f_1) = G_{\varphi}(\varphi, f_0) + \epsilon f_1 G_{\varphi f}$$

$$H_{\varphi}(\varphi, f_0 + \epsilon f_1, f'_0 + \epsilon f'_1) = H_{\varphi}(\varphi, f_0, f'_0) + \epsilon f_1 \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} \right)$$

$$\frac{d}{d\varphi} H_{f'}(\varphi, f_0 + \epsilon f_1, f'_0 + \epsilon f'_1) = \frac{d}{d\varphi} \left[H_{f'}(\varphi, f_1, f'_1) + \epsilon f_1 \cdot \left(\frac{\partial H_{f'}}{\partial x} - \frac{\partial H_{f'}}{\partial y} \right) \right] \Bigg|_{\substack{x = f_0(\varphi) + \epsilon f_1(\varphi) \\ y = f'_0(\varphi) + \epsilon f'_1(\varphi)}}.$$

Подставляя полученные разложения в уравнение Эйлера и пренебрегая членами порядка ϵ^2 , получим уравнение вида

$$G_{\varphi}(\varphi, f_0) + \epsilon \left[f_1 G_{\varphi f}(\varphi, f_0) + H_{\varphi}(\varphi, f_0, f'_0) - \frac{d}{d\varphi} H_{f'}(\varphi, f_0, f'_0) \right] = 0,$$

которое распадается на два уравнения :

$$G_2(\varphi, t_0) = 0 ; \quad (1.12)$$

$$f_1(G_{21}(\varphi, t_0) + H_1(\varphi, t_0, t_0') - \frac{d}{d\varphi} H_1(\varphi, t_0, t_0')) = 0 , \quad (1.13)$$

из которых можно определить f_0 и f_1 , а следовательно, $f(\varphi) = f_0(\varphi) + f_1(\varphi)$.

Для функционала (1.11) уравнение (1.12) имеет вид

$$G_2(\varphi, t_0) = \mu e^{-\varphi} \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right] \Big|_{\substack{x=\mu, t_0 \\ y=\mu(\varphi-t_0)}} = 0 , \quad (1.14)$$

откуда определим $f_0(\varphi)$. Переписывая уравнение (1.13) в виде

$$f_1(\varphi) = \frac{\frac{d}{d\varphi} H_1(\varphi, t_0, t_0') - H_1(\varphi, t_0, t_0')}{G_{21}(\varphi, t_0)} ,$$

где

$$G_{21} = \mu^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \Big|_{\substack{x=\mu, t_0 \\ y=\mu(\varphi-t_0)}},$$

$$H_1 = -\mu^2 e^{-\varphi} \left(\frac{1-t_0}{t_0} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \Big|_{\substack{x=\mu, t_0 \\ y=\mu(\varphi-t_0)}},$$

$$\frac{d}{d\varphi} H_1 = -\frac{d}{d\varphi} \left[\left(\frac{d'_{t_0}}{t_0} - \frac{d'_{t_0}}{t_0} \right) \cdot e^{-\varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right] =$$

$$= -e^{-\varphi} \left(\frac{d'_{t_0}}{t_0} - \frac{d'_{t_0}}{t_0} \right) \left[f_0' \left(\frac{\partial F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right] \Big|_{\substack{x=\mu, t_0 \\ y=\mu(\varphi-t_0)}} ,$$

определим $f_1(\varphi)$. Таким образом, асимптотически оптимальное правило назначения динамических приоритетов имеет вид

$$f(\varphi) = f_0(\varphi) + \epsilon f_1(\varphi) ,$$

где $f_0(\varphi)$ определяется из уравнения (1.14), а $f_1(\varphi)$ из (1.15)

Рассмотренный метод нахождения асимптотической плотности распределения состояний МО с динамическими приоритетами и метод оптимизации назначения приоритетов можно использовать для оптимизации и других управляемых МО, например, для систем с форпро-

ванием очередей.

§ 2. Оптимальное правило формирования очередей

Постановка задачи

Рассмотрим [6] двулинейную простейшую СМО, на вход которой поступает пуассоновский поток с параметром λ . Обслуживание каждым прибором экспоненциальное с интенсивностью μ_1 для первого и μ_2 для второго прибора. Поступившее требование ставится в очередь либо к первому, либо ко второму прибору. Обозначим i, j число требований в первой и второй подсистемах. Правило формирования очереди определяется величинами $\delta(i, j)$ - условной вероятностью того, что поступившее требование ставится в первую подсистему при условии, что система находится в состоянии (i, j) . Качество функционирования системы оценивается функционалом

$$L = M G(i, j) = \sum_{i, j} G(i, j) P(i, j), \quad (2.1)$$

где $G(i, j)$ интерпретируется как величина штрафа от пребывания СМО в состоянии (i, j) в течение единицы времени, а M - символ математического ожидания, определяемого по стационарному распределению $P(i, j)$. Будем предполагать, что выполнены условия существования стационарного режима.

Необходимо найти такие $\delta(i, j)$, при которых (2.1) принимает минимальное значение.

Как показано в [7], оптимальное для (2.1) правило формирования очереди является детерминированным, т.е. $\delta(i, j) = 0$ либо 1 для любых состояний (i, j) , следовательно, оптимальное можно искать в виде

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i < f(k), j > k - f(k), \\ 0, & \text{если } i > f(k), j < k - f(k), \end{cases} \quad (2.2)$$

где параметр $k = i + j$, а вид функции $f(k)$ подлежит определению.

В рассматриваемой СМО загрузкой системы называется величина $\rho = \lambda / (\mu_1 + \mu_2)$. Для существования стационарного режима необходимо, чтобы $\rho < 1$. Условием большой загрузки назовем такие условия на ρ и f , что стационарный режим существует и есть величина бесконечно малая. Таким образом, необходимо в усло-

влиях большой загрузки определить оптимальное правило формирования очереди, т. е. такую функцию $f(z)$ из (2.2), для которой (2.1) минимально.

Диффузионная аппроксимация СМО

Для решения поставленной задачи рассмотрим диффузионную аппроксимацию дискретного марковского процесса $\{i(t), j(t)\}$, для этого введем $x(t) = \varepsilon \cdot i(t), y(t) = \varepsilon j(t)$. Процесс $\{x(t), y(t)\}$ является диффузионным двумерным процессом. Для рассматриваемого процесса коэффициенты переноса равны

$$\varepsilon [M_1 - \delta(x, y)(M_1 + M_2)], \quad \varepsilon [M_2 - (1 - \delta(x, y))(M_1 + M_2)],$$

а коэффициенты диффузии имеют вид

$$\frac{\varepsilon^2}{2} [M_1 + \delta(x, y)(M_1 + M_2)], \quad \frac{\varepsilon^2}{2} [M_2 + (1 - \delta(x, y))(M_1 + M_2)],$$

где

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < f(z), y > z - f(z); \\ 0, & \text{если } x > f(z), y < z - f(z), \end{cases} \quad (2.3)$$

$Z = x + y$, вид функции $f(z)$ будет определен ниже. Следовательно, стационарная плотность $P(x, y)$ диффузионного процесса $\{x(t), y(t)\}$, аппроксимирующая стационарное распределение $P(i, j)$, удовлетворяет следующему уравнению Фоккера-Планка

$$\frac{\varepsilon^2}{2} [M_1 + \delta(x, y)(M_1 + M_2)] \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2}{2} [M_2 + (1 - \delta(x, y))(M_1 + M_2)] \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial y^2} +$$

$$\varepsilon [M_1 - \delta(x, y)(M_1 + M_2)] \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \varepsilon [M_2 - (1 - \delta(x, y))(M_1 + M_2)] \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 0,$$

которое имеет кусочно-постоянные коэффициенты и обращается в два с постоянными коэффициентами эллиптических дифференциальных уравнения:

при $\delta(x, y) = 1$, т. е. в области $x < f(z), y > z - f(z)$

$$\varepsilon^2 \frac{(M_1 + M_2)}{2} \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{M_2}{2} \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial y^2} - \varepsilon M_1 \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \varepsilon M_2 \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 0; \quad (2.5)$$

при $\delta(x, y) = 0$, т. е. в области $x > f(z), y < z - f(z)$

$$\varepsilon^2 \frac{M_1}{2} \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{(M_1 + M_2)}{2} \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial y^2} + \varepsilon M_1 \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} - \varepsilon M_2 \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.4) имеет бесконечно малый параметр ϵ^2 при старших производных, поэтому для его решения воспользуемся методом пограничного слоя. Для этого в уравнение (2.5) сделаем замену переменных

$$x+y=z, \quad \frac{f(z)-x}{\epsilon} = t, \quad P(x,y) = P_1(t,z)$$

и, отбрасывая бесконечно малые слагаемые, будем иметь уравнение

$$\frac{(2\mu_1 + \mu_2)(f'(z)-1)^2 + \mu_2(f'(z))^2}{2} \frac{\partial^2 P_1(t,z)}{\partial t^2} + \mu_2 \frac{\partial P_1(t,z)}{\partial t} = 0,$$

решение которого $P_1(t,z)$ имеет вид

$$P_1(t,z) = A(z) \exp\{-\lambda_1(z)t\}, \quad (2.7)$$

где

$$\lambda_1(z) = \frac{2\mu_2}{(2\mu_1 + \mu_2)(f'(z)-1)^2 + \mu_2(f'(z))^2}.$$

Аналогично, сделав в уравнении (2.6) замену

$$x+y=z, \quad \frac{x-f(z)}{\epsilon} = t, \quad P(x,y) = P_0(t,z),$$

получим

$$P_0(t,z) = B(z) \exp\{-\lambda_0(z)t\}, \quad (2.8)$$

где

$$\lambda_0(z) = \frac{2\mu_1}{\mu_2(f'(z)-1)^2 + (2\mu_2 + \mu_1)(f'(z))^2}.$$

Функции $A(z)$ и $B(z)$ найдем из условия сшивания на границе $t=0$.

Из условия непрерывности плотности $P(x,y)$ на границе $x=f(z)$ $y=z-f(z)$ имеем

$$P_0(0,z) \equiv P_1(0,z), \quad \text{т.е. } A(z) \equiv B(z). \quad (2.9)$$

Второе условие запишем в виде

$$\int_0^z P(x, z-x) dx = e^{-z},$$

где слева стоит распределение суммы, а справа плотность диффузионной аппроксимации одномерного дискретного процесса $i(t)+j(t)$.

Из приведенного уравнения получим

$$A(z) = \left[\frac{1}{\lambda_1(z)} \left(1 - \exp\left\{-\lambda_1(z) \frac{z-f(z)}{\epsilon}\right\}\right) + \frac{1}{\lambda_0(z)} \left(1 - \exp\left\{-\lambda_0(z) \frac{z-f(z)}{\epsilon}\right\}\right) \right]^{-1}.$$

Вне окрестности точек z , таких, что $f(z) = 0, z = f(z)$, имеем

$$A(z) = \frac{e^{-z}}{\varepsilon [1/\lambda_1(z) + 1/\lambda_0(z)]} \quad (2.10)$$

Таким образом, формулы (2.8) - (2.10) определяют плотность $P(x, y)$, аппроксимирующую стационарное распределение $P(i, j)$ из (2.1), тогда в условиях большой загрузки качество функционирования СМО можно оценить функционалом

$$L(t) = \iint_0^{\infty} F(x, y) P(x, y) dx dy, \quad (2.11)$$

где $F(x, y) = G\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right)$

Таким образом, для нахождения оптимального правила формирования очередей $f(z)$ необходимо решить вариационную задачу минимизации функционала (2.11).

Нахождение оптимального правила формирования очередей

Интеграл (2.11) представим в виде суммы двух интегралов по областям $\{(x, y) : x < f(z), y > z - f(z)\}, \{(x, y) : x > f(z), y < z - f(z)\}$.

Сделаем замену переменных: в первом интеграле вида $x = f(z) - \varepsilon t, y = z - f(z) + \varepsilon t$, а во втором вида $x = f(z) + \varepsilon t, y = z - f(z) - \varepsilon t$, получим

$$L(t) = \int_0^{z/f(z)} \int_{z-f(z)+\varepsilon t}^{\infty} F(f(z)-\varepsilon t, z-f(z)+\varepsilon t) A(z) e^{-y/\varepsilon} \varepsilon dz dt + \int_{z/f(z)}^{\infty} \int_0^{z-f(z)-\varepsilon t} F(f(z)+\varepsilon t, z-f(z)-\varepsilon t) A(z) e^{-y/\varepsilon} \varepsilon dz dt$$

Вне окрестности точек $f(z) = 0, f'(z) = x$ будем иметь

$$L(t) = \varepsilon \int_0^{\infty} A(z) \left[\int_{z-f(z)+\varepsilon t}^{\infty} F(f(z)-\varepsilon t, z-f(z)+\varepsilon t) e^{-y/\varepsilon} + \int_0^{z-f(z)-\varepsilon t} F(f(z)+\varepsilon t, z-f(z)-\varepsilon t) e^{-y/\varepsilon} \right] dz dt$$

Если функция F достаточно гладкая, то $L(t)$ можно представить следующим образом

$$L(t) = \int_0^{\infty} \left[F(f(z), z-f(z)) - \varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right] e^{-z/\varepsilon} dz, \quad \begin{matrix} x=f(z) \\ y=z-f(z) \end{matrix}$$

т. е. он имеет вид

$$L(t) = \int_0^{\infty} [G(z, f(z)) + \varepsilon H(z, f(z), f'(z))] dz,$$

где

$$G(z, f(z)) = e^{-z/\varepsilon} F(f(z), z - f(z)),$$

$$H(z, f(z), f'(z)) = e^{-z} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_0} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \Big|_{\substack{x=f_0(z) \\ y=z-f_0(z)}}$$

и, применяя вышеописанный метод решения вариационной задачи, получим оптимальное решение в виде

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z),$$

в котором $f_0(z)$ есть решение уравнения

$$\left(\frac{\partial F_1(f_0(z), z - f_0(z))}{\partial x} - \frac{\partial F_1(f_0(z), z - f_0(z))}{\partial y} \right) \Big|_{\substack{x=f_0(z) \\ y=z-f_0(z)}} = 0,$$

$$f_1(z) = \frac{\frac{d}{dz} H_1(z, f_0(z), f_0'(z)) - H_1(z, f_0(z), f_0'(z))}{G_{11}(f_0(z), z - f_0(z))},$$

$$\text{где } H_1(z, f_0(z), f_0'(z)) = e^{-z} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_0} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \Big|_{\substack{x=f_0(z) \\ y=z-f_0(z)}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} H_1(z, f_0(z), f_0'(z)) &= \frac{d}{dz} \left[e^{-z} \left(\frac{1}{z_0'} - \frac{1}{z_1'} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right] = \\ &= -e^{-z} \left(\frac{1}{z_0'} - \frac{1}{z_1'} \right) \left[f_0'(z) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right] \Big|_{\substack{x=f_0(z) \\ y=z-f_0(z)}}. \end{aligned}$$

Заключение. Таким образом, в работе рассмотрен метод анализа и нахождения оптимального управления системами массового обслуживания при больших нагрузках, функционирующих в стационарных режимах. Предложенный метод заключается, во-первых, в построении непрерывной аппроксимации дискретного марковского процесса, описывающего изменение во времени состояний системы, во-вторых, учитывая кусочную постоянность коэффициентов соответствующего обратного уравнения Колмогорова и его сингулярность, т.е. наличие бесконечно малого параметра при старших производных, используя метод пограничного слоя, находится его общее решение. В-третьих, сформулированы условия сшивки, позволяющие выделить частное решение, представляющее собой стационарную плотность распределения аппроксимирующего процесса. Учитывая детерминированность оптимального управления СМО, задачу его нахождения удалось свести к вариационной задаче минимизации интеграла, подынтегральная функция которого не зависит от производной варианта, и тем самым, задача сводится к решению несложного (для достаточно хороших функций качест-

ва) функционального уравнения.

Л и т е р а т у р а

1. Гнеденко и др. Приоритетные системы обслуживания.-М., 1978.
2. Джейсуол Н. Очереди с приоритетами.-М.: Мир, 1978.
3. Горцев А.М. и др. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. Томск. Изд-во ТГУ, 1978.
4. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями.-М. Мир, 1979.
5. Авен О.И., Коган Я.А. Управление вычислительным процессом в ЭВМ.-М.: Энергия, 1978.
6. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Асимптотически оптимальное формирование очередей в многоканальных СМО при больших нагрузках. — Автоматика и телемеханика, 1977, № 9, с. 53-57.
7. Назаров А.А. Оптимальное формирование очередей в многоканальных СМО.-Автоматика и телемеханика, 1975, № 8, с. 36-39.

БЫСТРОДЕЙСТВИЕ АЛГОРИТМОВ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА С ПООБРАЗОВАНИЕМ ОБУЧЕНИЯ

Б.А. Новикова, А.П. Рыжаков

В связи с широким распространением в практике решения сложных задач поисковых процедур оптимизации проблема сравнительного анализа эффективности используемых алгоритмов приобретает все возрастающее значение. В частности, при решении самых разнообразных оптимизационных задач довольно широко используются статистические процедуры [1]. В то же время аналитические результаты исследования быстродействия таких процедур (особенно для алгоритмов случайного поиска с обучением и при наличии ошибок измерения (вычисления) целевой функции) практически отсутствуют. Известно, что обучение в процессе случайного поиска [1] увеличивает быстродействие алгоритмов, позволяет сделать поисковую процедуру более гибкой, постоянно приспосабливаемой к изменяющейся в процессе поиска геометрии целевой функции.

Целью настоящей работы является исследование быстродействия случайного поиска, основанного на простейших алгоритмах пообразования обучения.

Пусть $Q(X)$ - целевая функция, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ вектор управляемых (оптимизируемых) параметров, значения которого на i -й итерации (такте управления) будем обозначать $X_i = \{x_{i1}, \dots, x_{in}\}$. Будем рассматривать задачу минимизации функции $Q(X)$, значения которой определяются с ошибками. Результат вычисления (измерения)

$Q(X)$ на i -м шаге поиска имеет вид $\Phi_i = Q(X_i) + \eta_i$; величины η_i , $i=0, 1, \dots$ представляют собой независимые отсчеты стационарного случайного процесса. Способ определения величины $\Delta X_{i+1} = X_{i+1} - X_i$ задается алгоритмом поиска. Поскольку

целью работы является исследование зависимости быстродействия поисковой процедуры от используемого алгоритма обучения, все рассуждения ниже проведены на примере простейшего из шаговых алгоритмов

случайного поиска: поиска с возвратом при неудачном шаге [1] :

$$\Delta X_{i+1} = \begin{cases} \alpha \bar{F}_i, & \Phi_i \leq \Phi_{i-1} \\ -\Delta X_i, & \Phi_i > \Phi_{i-1} \end{cases}, \quad (I)$$

где $\alpha = const$ - величина рабочего шага; $\bar{F}_i = \{F_{i1}, \dots, F_{in}\}$ - единичный случайный вектор. При отсутствии обучения вектор \bar{F}_i принимает с равной вероятностью любое значение из числа возможных.

Будем рассматривать алгоритм покоординатного случайного поиска; в этом случае вектор \bar{F}_i для любого такта i имеет лишь одну отличную от нуля координату. Для любой i - я реализации случайного вектора имеем

$$F_{ij} = \begin{cases} I & \text{с вероятностью } \frac{1}{\pi} P_j(i), \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - \frac{1}{\pi}, \\ -I & \text{с вероятностью } \frac{1}{\pi} (1 - P_j(i)), \end{cases}$$

причём зависимость между F_{ij} такова, что

$$\sum_{j=1}^n |F_{ij}| = I, \quad i = 0, 1, \dots$$

Покоординатное обучение [1] состоит в целенаправленном изменении вероятности $P_j(i)$ шага в положительном направлении по координате x_j на i -ом шаге поиска. При отсутствии обучения $P_j(i) \equiv \frac{1}{\pi}$, $j = \overline{1, n}$, $i = 0, 1, \dots$. Наиболее распространенным алгоритмом покоординатного обучения является алгоритм Буша и Мостеллера (см., например, [1]):

$$P_j(i+1) = A P_j(i) + (1-A) \lambda_{ij}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

где

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 0,5 + \delta, & \Delta X_{ij} \Delta \Phi_i < 0, \\ P_j(i), & \Delta X_{ij} \Delta \Phi_i = 0, \\ 0,5 - \delta, & \Delta X_{ij} \Delta \Phi_i > 0, \end{cases}$$

$\Delta \Phi_i = \Phi_i - \Phi_{i-1}$, $0 \leq \delta \leq 0,5$; параметр

A определяет "скорость" обучения, $0 \leq A \leq 1$.

Несмотря на относительную простоту алгоритма обучения (2) аналитическое исследование эффективности случайного поиска (I), использующего такое обучение, особенно в случае, когда вычисления (измерения) целевой функции $Q(X)$ производятся с ошибками η , затруднительно. В связи с этим ниже рассматриваются три алгоритма обучения, каждый из которых является упрощенным вариантом алгоритма обучения (2) Буша и Мостеллера.

I. Исследуемые алгоритмы обучения.

Для описания алгоритмов обучения введём в рассмотрение вектор

$\mu_i = \{\mu_{i1}, \dots, \mu_{in}\}$, $\mu_{ij} = 0, \pm 1, \pm 2$, с помощью которого будем кодировать предисторию поведения системы оптимизации и который будем называть содержимым памяти алгоритма обучения. Пусть вектор μ_i однозначно определяет статистические свойства (вероятности $P_j(i)$) случайного вектора ξ на i -м шаге поиска:

$$P_j(i) = 0,5 - \delta \mu_{ij}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где δ - заданная положительная константа.

Алгоритм обучения в таком случае будет задан, если определить правило изменения в процессе поиска вектора μ_i .

Алгоритм 1

$$\mu_{i+1j} = \begin{cases} \text{sign}[\Delta x_{ij} \Delta \Phi_i], & \Delta x_{ij} \Delta \Phi_i \neq 0 \\ \mu_{ij}, & \Delta x_{ij} \Delta \Phi_i = 0, \quad j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\text{sign}[z] = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z = 0, \\ -1, & z < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что алгоритм 2 является частным случаем (2) при $A = 0$, т.е. при максимальной скорости обучения. Величины могут принимать в процессе поиска лишь два значения (± 1) и, следовательно, вероятности $P_j(i)$ при использовании алгоритма обучения (4) принимают лишь значения $0,5 \pm \delta$ (предельные для алгоритма (2) Буша и Мостеллера).

Алгоритм 2

$$\mu_{i+1j} = \begin{cases} \mu_{ij}, & \text{если } |\mu_{ij}| = 1, \mu_{ij} \Delta x_{ij} \Delta \Phi_i > 0 \\ \mu_{ij} + \text{sign}[\Delta x_{ij} \Delta \Phi_i] & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (5)$$

$j = \overline{1, n}; \quad i = 0, 1, \dots, \mu_{0j} = 0.$

При работе алгоритма 2 величины μ_{ij} могут принимать значения $0, \pm 1$ и алгоритм обучения (5) отличается от алгоритма 1, таким образом, только наличием промежуточного значения вероятностей $P_j(i) = 0,5$ и является в этом смысле промежуточным между алгоритмом 1 и (2) при $A \neq 0$.

Алгоритм 3

$$\mu_{i+1j} = \begin{cases} \mu_{ij} & \text{если } |\mu_{ij}| = 2, \mu_{ij} \Delta x_{ij} \Delta \Phi_i > 0 \\ \mu_{ij} + \text{sign}[\Delta x_{ij} \Delta \Phi_i] & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (6)$$

$j = \overline{1, n}, \quad i = 0, 1, \dots; \quad \mu_{0j} = 0.$

Алгоритм 3 отличается от алгоритмов 1,2 тем, что вероятности $P_j(i)$ могут принимать в процессе поиска значения $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \pm \delta, \frac{1}{4} \pm 2\delta$ и последовательно перестраиваться с одного уровня на другой по правилу (3), (6). Таким образом, алгоритм 3 является промежуточным между алгоритмом 2 и алгоритмом Гуша и Мостеллера (2) при $A \neq 0$.

В качестве характеристики быстродействия алгоритма поиска приемем среднее время (число шагов), необходимое для достижения экстремума по некоторой дискретизированной переменной x_j из заданной начальной точки. Покоординатная динамика алгоритма поиска и постоянная величина рабочего шага a приводят к тому, что в процессе поиска система может находиться лишь в точках $X = \{a s_j, \dots, a s_n\}$, $s_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $j = \overline{1, n}$. Этот факт и вид исследуемых алгоритмов обучения (3) - (6) позволяет использовать для анализа методику, развитую в [2,3]. Будем называть состоянием системы по переменной x_j пару чисел (s_j, k) . Первое число $s_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ определяет значение переменной x_j ($x_j = a s_j$), а второе $k = \overline{1, 23}$ кодирует в соответствии с табл. I ситуацию, в которой находится алгоритм поиска (содержимое памяти алгоритма обучения и предпринимаемое действие)

Таблица I

K	Шаг алгоритма поиска (величина Δx_{i+1j})	Содержимое памяти u_j
I	случайный шаг ($\Delta x_{i+1j} = a \tau_{ij}$)	0
2		1
3		2
4		-1
5		-2
6	вправо ($\Delta x_{i+1j} = a$)	0
7		1
8		-1
9		-2
10	влево ($\Delta x_{i+1j} = -a$)	0
11		1
12		-1

14	} возврат по координате $x_\ell, \ell \neq j$ после неудачного шага, сделанного в правильном направлении ($\Delta x_{i+1j} = 0$)	0
15		1
16		2
17		-1
18		-2
19	} возврат по координате $x_\ell, \ell \neq j$ после неудачного шага, сделанного в неправильном направлении ($\Delta x_{i+1j} = 0$)	0
20		1
21		2
22		-1
23		-2

Будем предполагать целевую функцию унимодальной и сепарабельной:

$$Q(X) = \sum_{j=1}^n q_j(x_j) \quad (7)$$

Без ограничения общности можно считать, что все функции $q_j, j = \overline{1, n}$ имеют единственный минимум в начале координат. Для функции (7) динамику системы оптимизации по координате x_j можно рассматривать независимо от остальных координат.

При описании динамики алгоритма поиска важную роль играют вероятности ошибки в определении знака приращения целевой функции

$$d_s^j = \text{Вер} \{ \eta_{i+1} - \eta_i > | q_j((i+1)a) - q_j(sa) | \},$$

$$j = \overline{1, n}, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В частном случае, когда $q_j(x_j) = |x_j|, j = \overline{1, n}$, эти вероятности не зависят от s, j

$$d_s^j \equiv d = \text{const}, \quad j = \overline{1, n}, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

и анализ существенно упрощается.

Все аналитические результаты, полученные в следующем пункте, справедливы для произвольной целевой функции вида (7) при отсутствии помех ($\eta_i \equiv \eta$) и для кусочно-линейных функций $q_j(x_j) = |x_j|, j = \overline{1, n}$, если ошибки вычисления (измерения) $Q(X)$ отсутствуют.

2. Анализ быстродействия алгоритмов

Процесс поиска по координате x_j описывается марковской цепью

с состояниями (s, κ) , $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\kappa = \overline{1, 23}$. Пусть $t(s, \kappa)$ - среднее время поиска экстремума (среднее число шагов) по координате x_j из исходного положения $x_j = s a$, если алгоритм поиска находится в ситуации κ [система оптимизации начинает движение из состояния (s, κ)]. Не приводя отдельно выражения вероятностей одношаговых переходов, запишем сразу систему уравнений для величин $t(s, \kappa)$. Напомним, что коэффициент при $t(s, \ell)$ в выражении $t(s, \kappa)$ есть вероятность перехода из состояния (s, κ) в состояние (s, ℓ) за один шаг.

Алгоритм I. Из соотношений (1), (3), (4) и используя табл. I, имеем для $S > 0$

$$\begin{aligned}
 t(s, 2) &= 1 + \frac{\beta(1-\delta)}{2n} t(s-1, 2) + \frac{\alpha(1-\delta)}{2n} t(s-1, 7) + \\
 &+ \frac{\alpha(1-\delta)}{2n} t(s+1, 4) + \frac{\beta(1-\delta)}{2n} t(s+1, 13) + \\
 &+ \frac{n-1}{n} \{ [\alpha\beta + (1-\alpha)\alpha] t(s, 2) + \alpha\alpha t(s, 17) + (1-\alpha)\beta t(s, 22) \} \\
 t(s, 4) &= 1 + \frac{\beta(1-\delta)}{2n} t(s-1, 2) + \frac{\alpha(1-\delta)}{2n} t(s-1, 7) + \\
 &+ \frac{\alpha(1-\delta)}{2n} t(s+1, 4) + \frac{\beta(1-\delta)}{2n} t(s+1, 13) + \\
 &+ \frac{n-1}{n} \{ [\alpha\beta + (1-\alpha)\alpha] t(s, 4) + \alpha\alpha t(s, 15) + (1-\alpha)\beta t(s, 20) \}; \\
 t(s, 7) &= 1 + \alpha t(s+1, 4) + \beta t(s+1, 13); \\
 t(s, 13) &= 1 + \beta t(s-1, 2) + \alpha t(s-1, 7); \\
 t(s, 15) &= 1 + \alpha t(s, 4) + \beta t(s, 20); \\
 t(s, 17) &= 1 + \alpha t(s, 2) + \beta t(s, 22); \\
 t(s, 20) &= 1 + \beta t(s, 4) + \alpha t(s, 15); \\
 t(s, 22) &= 1 + \beta t(s, 2) + \alpha t(s, 17),
 \end{aligned} \tag{8}$$

где $\beta = 1 - \alpha$, а через α обозначена вероятность того, что случайный шаг, не изменивший рассматриваемую координату, будет сделан в правильном направлении (в сторону убывания целевой функции). Понятно, что α зависит от точки, из которой этот шаг делается, и изменяется в процессе поиска. Учсть это измене-

ние сложно, поэтому будем считать величину α постоянной, а полученное выражение среднего времени поиска экстремума используем для записи оценок времени сверху и снизу, учитывая, что

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1+2\delta}{2} \quad (9)$$

Поскольку поиск начинается со случайного шага, в системе (8) нас интересует, вообще говоря, одна неизвестная функция $t(s, 2)$ (или $t(s, 4)$). Несложными преобразованиями, исключая из (8) остальные неизвестные функции, можно получить следующую систему разностных уравнений:

$$\begin{aligned} [2(1-\alpha\beta) - (1-\delta)\beta^2] t(s, 2) &= 3 + 2(n-1)R - 2\delta(1-2\alpha) + \\ &+ (1+2\delta)\alpha^2 t(s, 4) + (1-2\delta)\alpha t(s+1, 4) + (1+2\delta)\beta t(s-1, 2) \\ [2(1-\alpha\beta) - (1-\delta)\alpha^2] t(s, 4) &= 3 + 2(n-1)R + 2\delta(1-2\alpha) + \\ &+ (1+2\delta)\beta^2 t(s, 2) + (1-2\delta)\beta t(s-1, 2) + (1+2\delta)\alpha t(s+1, 4), \quad 3 > 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $R = 1 + \alpha\alpha + (1-\alpha)\beta$, $t(0, 2) = t(0, 4) = 0$.

Система (10) имеет асимптотически (при больших s) линейное решение вида

$$t(s, 2) = Bs + e, \quad t(s, 4) = Bs + f,$$

где e, f - константы, значение которых неопределено, а

$$B = \frac{[3 + 2(n-1)R][1 - \alpha\beta(1+2\delta)] - 2\delta(1-2\alpha)^2}{(1-2\alpha)(1+2\delta)(1-\alpha\beta)}, \quad (11)$$

и имеет смысл средних затрат времени (числа шагов) на единичное смещение к экстремуму по координате x ; при условии, что расстояние до экстремума достаточно велико.

Алгоритм 2. Из соотношений (2), (3), (5) и учитывая табл. I, имеем для $s > 0$

$$\begin{aligned} t(s, 1) &= 1 + \frac{\beta}{2n} t(s-1, 2) + \frac{\alpha}{2n} t(s-1, 4) + \frac{\beta}{2n} t(s+1, 1) + \frac{\alpha}{2n} t(s+1, 4) + \\ &+ \frac{n-1}{n} \{ [\alpha\beta + (1-\alpha)\alpha] t(s, 1) + \alpha\alpha t(s, 4) + (1-\alpha)\beta t(s, 1) \}; \\ t(s, 2) &= 1 + \frac{\beta(1+2\delta)}{2n} t(s-1, 2) + \frac{\alpha(1+2\delta)}{2n} t(s-1, 4) + \frac{\beta(1-2\delta)}{2n} t(s+1, 1) + \\ &+ \frac{\alpha(1-2\delta)}{2n} t(s+1, 4) + \frac{n-1}{n} \{ [\alpha\beta + (1-\alpha)\alpha] t(s, 2) + \alpha\alpha t(s, 4) + (1-\alpha)\beta t(s, 2) \}; \\ t(s, 4) &= 1 + \frac{\beta(1-2\delta)}{2n} t(s-1, 1) + \frac{\alpha(1-2\delta)}{2n} t(s-1, 4) + \frac{\beta(1+2\delta)}{2n} t(s+1, 1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\alpha(1+2\delta)}{2n} t(s+1, 4) + \frac{n-1}{n} \{ [\alpha\beta + (1-\alpha)\alpha] t(s, 4) + \alpha t(s, 15) + (1-\alpha)\beta t(s, 20) \}; \\
 t(s, 6) &= 1 + \alpha t(s+1, 4) + \beta t(s+1, 13); \\
 t(s, 7) &= 1 + \alpha t(s+1, 4) + \beta t(s+1, 17); \\
 t(s, 10) &= 1 + \beta t(s-1, 2) + \alpha t(s-1, 7); \\
 t(s, 13) &= 1 + \beta t(s-1, 2) + \alpha t(s-1, 6); \\
 t(s, 14) &= 1 + \alpha t(s, 1) + \beta t(s, 19); \\
 t(s, 15) &= 1 + \alpha t(s, 4) + \beta t(s, 20); \\
 t(s, 17) &= 1 + \alpha t(s, 2) + \beta t(s, 22); \\
 t(s, 19) &= 1 + \beta t(s, 1) + \alpha t(s, 14); \\
 t(s, 20) &= 1 + \beta t(s, 2) + \alpha t(s, 15); \\
 t(s, 22) &= 1 + \beta t(s, 2) + \alpha t(s, 17).
 \end{aligned} \tag{I2}$$

Поиск "необученным" алгоритмом начинается из состояния $(s, 1)$, поэтому в системе (I2) нас фактически интересует лишь одна неизвестная функция $t(s, 1)$. Преобразуя систему (I2), можно выделить из неё следующую систему разностных уравнений, связывающую три неизвестных функции:

$$\begin{aligned}
 2(1-\alpha\beta) t(s, 1) &= 3 + 2(n-1)R + \beta t(s-1, 2) + \alpha t(s+1, 4) + \alpha^2 t(s, 4) + \beta^2 t(s, 2) \\
 [2(1-\alpha\beta) - \beta^2(1-2\delta)] t(s, 2) &= 3 + \alpha(n-1)R - 2\delta(1-2\alpha) + \beta(1+2\delta) t(s-1, 2) + \\
 & + \beta\alpha^2(1-2\delta) t(s+1, 4) + \alpha(1-\alpha\beta)(1-2\delta) t(s+1, 1) + \alpha^2(1+2\delta) t(s, 4) \\
 [2(1-\alpha\beta) - \alpha^2(1-2\delta)] t(s, 4) &= 3 + \alpha(n-1)R + 2\delta(1-2\alpha) + \beta(1-\alpha\beta)(1-2\delta) t(s-1, 1) + \\
 & + \alpha\beta^2(1-2\delta) t(s-1, 2) + \alpha(1+2\delta) t(s+1, 4) + \beta^2(1+2\delta) t(s, 2), \quad s=1, 2, \dots,
 \end{aligned} \tag{I3}$$

где R имеет тот же смысл, что и в (I0), $t(0, 1) = t(0, 2) = t(0, 4) = 0$.

Система (I3) имеет асимптотически (при больших s) линейное решение вида

$$t(s, \kappa) = C_s + e_\kappa, \quad \kappa = 1, 2, 4,$$

причём

$$C = \frac{[\beta + 2(n-1)R][4 - 2\alpha\beta(5 - 2\alpha\beta)] - 4\delta M}{(1-2\alpha)[4 - 2\alpha\beta(5 - 2\alpha\beta) + 4\delta(2 - 2\alpha(1 + \alpha\beta) - \beta\alpha\beta(1 - 2\alpha\beta))]}, \quad (I4)$$

где $M = 2 - 2\alpha[\beta + R(n-1)(\beta + 2\alpha\beta) - 2\alpha\beta] - \delta 2\alpha\beta[\beta + \alpha\beta(R(n-1) - 1)]$.

Заметим, что при отсутствии обучения (в случае $\delta = 0$) характеристики быстродействия алгоритмов 1 и 2, определенные выражениями (I1) и (I4), совпадают между собой и дают полученный ранее в [4] результат. При отсутствии ошибок вычисления целевой функции ($\alpha = 0, \beta = 1$) состояния (s, I) становятся невозвратными и выражения (I1) и (I4) также совпадают.

Алгоритм 3. Из соотношений (I), (9), (6) и табл. I получаем для $s > 0$

$$\begin{aligned} t(s, 1) &= 1 + \frac{\alpha}{2n} t(s+1, 4) + \frac{\beta}{2n} t(s+1, 11) + \frac{\beta}{2n} t(s-1, 2) + \frac{\alpha}{2n} t(s-1, 8) + \\ &+ \frac{n-1}{n} \{ [\alpha\beta + (1-\alpha)\alpha] t(s, 1) + \alpha t(s, 14) + (1-\alpha)\beta t(s, 19) \}; \\ t(s, 2) &= 1 + \frac{\alpha(1-2\delta)}{2n} t(s+1, 1) + \frac{\beta(1-2\delta)}{2n} t(s+1, 12) + \frac{\beta(1+2\delta)}{2n} t(s-1, 3) + \\ &+ \frac{\alpha(1+2\delta)}{2n} t(s-1, 6) + \frac{n-1}{n} \{ [\alpha\beta + (1-\alpha)\alpha] t(s, 2) + \alpha t(s, 15) + (1-\alpha)\beta t(s, 20) \}; \\ t(s, 3) &= 1 + \frac{\alpha(1-4\delta)}{2n} t(s+1, 2) + \frac{\beta(1-4\delta)}{2n} t(s+1, 12) + \frac{\beta(1+4\delta)}{2n} t(s-1, 3) + \\ &+ \frac{\alpha(1+4\delta)}{2n} t(s-1, 7) + \frac{n-1}{n} \{ [\alpha\beta + (1-\alpha)\alpha] t(s, 3) + \alpha t(s, 16) + (1-\alpha)\beta t(s, 21) \}; \\ t(s, 4) &= 1 + \frac{\alpha(1+2\delta)}{2n} t(s+1, 5) + \frac{\beta(1+2\delta)}{2n} t(s+1, 10) + \frac{\beta(1-2\delta)}{2n} t(s-1, 4) + \\ &+ \frac{\alpha(1-2\delta)}{2n} t(s-1, 9) + \frac{n-1}{n} \{ [\alpha\beta + (1-\alpha)\alpha] t(s, 4) + \alpha t(s, 17) + (1-\alpha)\beta t(s, 22) \}; \\ t(s, 5) &= 1 + \frac{\alpha(1+4\delta)}{2n} t(s+1, 5) + \frac{\beta(1+4\delta)}{2n} t(s+1, 13) + \frac{\beta(1-4\delta)}{2n} t(s-1, 4) + \\ &+ \frac{\alpha(1-4\delta)}{2n} t(s-1, 9) + \frac{n-1}{n} \{ [\alpha\beta + (1-\alpha)\alpha] t(s, 5) + \alpha t(s, 18) + (1-\alpha)\beta t(s, 23) \}; \\ t(s, 6) &= 1 + \alpha t(s+1, 4) + \beta t(s+1, 11); \\ t(s, 7) &= 1 + \alpha t(s+1, 1) + \beta t(s+1, 12); \\ t(s, 8) &= 1 + \alpha t(s+1, 5) + \beta t(s+1, 10); \end{aligned} \quad (I5)$$

$$t(s,9) = 1 + \alpha t(s+1,5) + \beta t(s+1,13);$$

$$t(s,10) = 1 + \beta t(s-1,2) + \alpha t(s-1,8);$$

$$t(s,11) = 1 + \beta t(s-1,3) + \alpha t(s-1,6);$$

$$t(s,12) = 1 + \beta t(s-1,3) + \alpha t(s-1,7);$$

$$t(s,13) = 1 + \beta t(s-1,1) + \alpha t(s-1,9);$$

$$t(s,14) = 1 + \alpha t(s,1) + \beta t(s,19);$$

$$t(s,15) = 1 + \alpha t(s,2) + \beta t(s,20);$$

$$t(s,16) = 1 + \alpha t(s,3) + \beta t(s,21);$$

$$t(s,17) = 1 + \alpha t(s,4) + \beta t(s,22);$$

$$t(s,18) = 1 + \alpha t(s,5) + \beta t(s,23);$$

$$t(s,19) = 1 + \beta t(s,1) + \alpha t(s,14);$$

$$t(s,20) = 1 + \beta t(s,2) + \alpha t(s,15);$$

$$t(s,21) = 1 + \beta t(s,3) + \alpha t(s,16);$$

$$t(s,22) = 1 + \beta t(s,4) + \alpha t(s,17);$$

$$t(s,23) = 1 + \beta t(s,5) + \alpha t(s,18);$$

Система уравнений (15) позволяет получить уравнения, содержащие лишь неизменные функции $t(s, k)$, $k = 1, \dots, 5$:

$$2(1-\alpha\beta)t(s,1) = 3 + 2(n-1)R - \alpha t(s+1,4) + \beta^2 t(s,3) + \beta t(s-1,2) + \alpha^2 t(s,5);$$

$$2(1-\alpha\beta)t(s,2) = 3 + 2(n-1)R - 2\delta(1-2\alpha) + \alpha(1-2\beta)t(s+1,1) + \\ + \beta^2(1-2\beta)t(s,3) + \beta(1+2\beta)t(s-1,3) + \alpha^2(1+2\beta)t(s,4); \quad (16)$$

$$[2(1-\alpha\beta) - \beta^2(1-4\beta)]t(s,3) = 3 + 2(n-1)R - 4\delta(1-2\alpha) + \beta(1+4\beta)t(s-1,3) + \\ + \alpha(1+4\beta)(1-\alpha\beta)t(s+1,3) + \alpha^2\beta(1-4\beta)t(s+1,1) + \alpha^2(1+4\beta)t(s,1);$$

$$2(1-\alpha\beta)t(s,4) = 3 + 2(n-1)R + 2\delta(1-2\alpha) + \alpha(1+2\beta)t(s+1,5) +$$

$$+\beta^2(1+2\delta)t(s,2) + \beta(1-2\delta)t(s-1,1) + \alpha^2(1-2\delta)t(s,5);$$

$$[2(1-\alpha\beta) - \alpha^2(1-\delta)]t(s,5) = 3 + 2(n-1)R + 4\delta(1-2\alpha) + \alpha(1+4\delta)t(s+1,5) + \\ + \beta(1-\alpha\beta)(1-4\delta)t(s-1,4) + \beta^2(1+4\delta)t(s,1) + \alpha\beta^2(1-4\delta)t(s-1,1);$$

$$s=1, 2, \dots, \quad t(0, \kappa) = 0.$$

Система разностных уравнений (I6) имеет асимптотически (при больших S) линейное решение вида

$$t(s, \kappa) = E S + \varepsilon_{\kappa}, \quad \kappa = \overline{1, 5},$$

причём для неизвестных констант E , ε_{κ} из (I6) получаем

$$\begin{aligned} (1-2\alpha)E - 2(1-\alpha\beta)\varepsilon_1 - \beta\varepsilon_2 - \beta^2\varepsilon_3 - \alpha\varepsilon_4 - \alpha^2\varepsilon_5 &= 3 + 2(n-1)R \\ (1-2\alpha+2\delta)E - \alpha(1+2\delta)\varepsilon_1 + 2(1-\alpha\beta)\varepsilon_2 - \beta(1+\beta+4\alpha\delta)\varepsilon_3 - \alpha^2(1+2\delta)\varepsilon_5 &= \\ &= 3 + 2(n-1)R - 2\delta(1-2\alpha); \\ (1-2\alpha+4\delta)E - \alpha^2(1+\beta+4\alpha\delta)\varepsilon_1 - \alpha(1+4\delta)(1-\alpha\beta)\varepsilon_2 + [2(1-\alpha\beta) - & \quad (I7) \\ - \beta(1+\beta+4\alpha\delta)]\varepsilon_3 = 3 + 2(n-1)R - 4\delta(1-2\alpha); \\ (1-2\alpha-2\delta)E - \beta(1-2\delta)\varepsilon_1 - \beta^2(1+2\delta)\varepsilon_2 + 2(1-\alpha\beta)\varepsilon_4 - \alpha(1+\alpha+2\beta\delta)\varepsilon_5 &= \\ &= 3 + 2(n-1)R + 2\delta(1-2\alpha); \\ (1-2\alpha-4\delta)E - \beta^2(1+\alpha+4\beta\delta)\varepsilon_1 - \beta(1-\alpha\beta)(1+4\delta)\varepsilon_2 + [2(1-\alpha\beta) - & \\ - \alpha(1+\alpha+4\beta\delta)]\varepsilon_3 = 3 + 2(n-1)R + 4\delta(1-2\alpha). \end{aligned}$$

(I7) представляет собой систему из 5 линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных E , $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5$, причём величины $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5$ определяются из (I7) с точностью до постоянной величины; значение E , удовлетворяющее (I7), не зависит от того, каким образом доопределён набор $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5$. Условия (I7) не позволяют получить аналитическое выражение для характеристики быстрогодействия E , но, зафиксировав в (I7) одну из величин ε_{κ} (положив, например, $\varepsilon_1 = 0$) и решая (I7) численно, можно табулировать величину E в зависимости от параметров α, n, δ .

В частности, в случае $\delta = 0$ (обучение отсутствует) решение (I7) имеет вид

$$E = \frac{3 + 2(n-1)R}{1-2\alpha},$$

т.е. совпадает с полученным ранее в [4] результатом. При отсутствии помех ($\alpha=0, \beta=1$) система (I7) дает

$$E = \frac{3 + 2(n-1)(2-\alpha) - 4\delta}{1+4\delta},$$

откуда следует, что при отсутствии ошибок вычисления (измерения) целевой функции алгоритмы 1, 2 и 3 асимптотически (при большом отклонении от экстремума) эквивалентны по быстродействию.

3. Сравнение алгоритмов и выводы

Нетрудно убедиться, что характеристики быстродействия B, C, E , определённые (II), (I4), (I7), являются монотонно убывающими функциями параметра α . Используя условие (9) из (II), (I4) и (I7), получаем

$$B \leq b = \frac{[3 + 2(n-1)(1+\beta)][1 - \alpha\beta(1+2\delta)] - 2\delta(1-2\alpha)^2}{(1-2\alpha)(1+2\delta)(1-\alpha\beta)}; \quad (I8)$$

$$C \leq c = \frac{[3 + 2(n-1)(1+\beta)][4 - \alpha\beta(5 - \alpha\beta)] - 4\delta N}{(1-2\alpha)[4 - \alpha\beta(5 - \alpha\beta) + 4\delta(2 - \alpha\beta)(1 + \alpha\beta) - \delta\alpha\beta(1 - \alpha\beta)],}$$

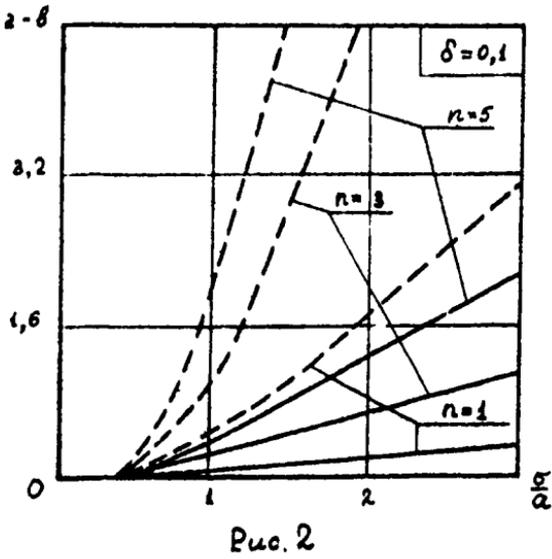
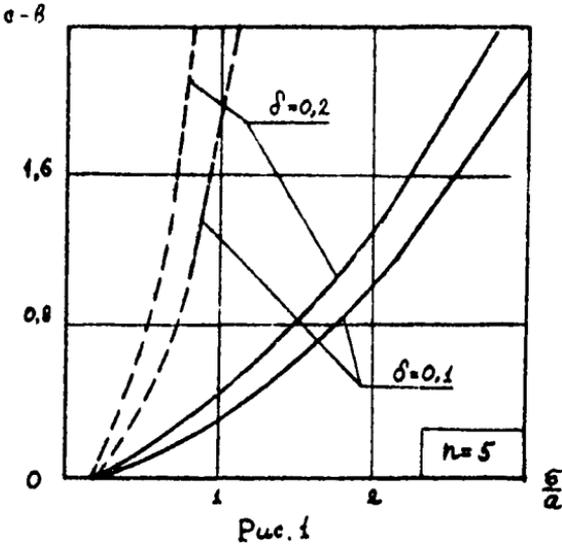
где $N = 2 - \alpha\beta[3 - (1+\beta)(n-1)(3 + 2\alpha\beta) - \alpha\beta] - \delta\alpha\beta[1 + \alpha\beta((1+\beta)(n-1) - 1)]$;

$$E \leq e = E|_{\alpha=0}.$$

В случае когда ошибки η_i вычисления целевой функции являются нормально распределёнными случайными величинами с дисперсией σ^2 , вероятность α ошибки в определении знака приращения целевой функции легко вычисляется

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\rho}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2/2} dt. \quad (I9)$$

На рис. I, 2 приведены зависимости величин $c-\beta, e-\beta$ от параметров $\alpha, \delta, \sigma/\alpha$, рассчитанные по (I7)-(I9). Сплошными линиями на рисунках изображены зависимости $c-\beta$, пунктиром - $e-\beta$.



Из рис. 1,2 следует, что усложнение алгоритмы обучения и приближение его к алгоритму Буша и Мостеллера ухудшает быстродействие и помехоустойчивость поиска. Моделирование поиска минимума функции $Q(X) = \sum_{i=1}^n |x_i|$ с обучением по Бушу и Мостеллеру, проведенное для $n=1,3$, подтверждает монотонную зависимость величины среднего времени поиска экстремума от параметра обучения A в (2). Таким образом, при покоординатном случайном поиске использование алгоритма обучения Буша и Мостеллера с $A \neq 0$ нецелесообразно с точки зрения быстродействия системы.

Л и т е р а т у р а

1. Растринин Л.А. Системы экстремального управления.- М.: Наука, 1974, - 630 с.
2. Медведев Г.А., Тарасенко В.П. Вероятностные методы исследования самоорганизующихся систем.- М.: Наука, 1967.- 403 с.
3. Медведев Г.А. Численные методы исследования дискретных автоматических систем поиска.- В кн.: Методы статистической оптимизации, Рига: Зинатне, 1968, с. 67-72.
4. Рыжаков А.П. О влиянии помех на эффективность алгоритмов покоординатного случайного поиска.- Труды Сибирского физико-технического института, Томск, 1973, вып. 64, с.127-137.

ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ШИР ОБЪЕКТОВ НИС В ТЕХНОЛОГИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ ТРАНСПОРТА НЕФТИ

А.И.Поздняков

Введение

По мере роста протяженности и диаметра магистральных нефтепроводов (МН), автоматизации технологических операций и систем управления к вопросам обеспечения их надежности в эксплуатации предъявляются повышенные требования. Одним из путей увеличения надежности МН является организация системы планово-предупредительных ремонтов (ППР) и оптимальное управление ею в процессе эксплуатации.

Нефтеперекачивающая станция (НИС) является одной ответственной и сложной технической системой МН, насчитывающей десятки составляющих ее объектов. Ненадежность работы объектов НИС приводит к снижению или даже прекращению процесса перекачки, увеличению эксплуатационных затрат, к авариям. Влияние отказов разных видов оборудования НИС на характеристики работы МН будет различно. Поэтому целесообразно при решении задачи оптимизации и управления ШИР надежностные характеристики различных видов оборудования НИС объединить общим критерием эффективности.

В связи с внедрением на уроле управления магистральных нефтепроводов (УМН) централизованной системы технического обслуживания и ремонта, созданием в рамках АСУН подсистемы ремонта требуется системный подход к исследованию надежности и управления ШИР объектов НИС в процессе эксплуатации.

1. Постановка задачи

Как было отмечено выше, одним из путей повышения надежности является организация ШИР объектов НИС в процессе эксплуатации.

Известные в настоящее время теоретические модели и методы оптимизации и управления ШИР для НИС в целом применить не удается

виду сложности соответствующей системы. Не осуществляют метода, позволяющего получить решение поставленной задачи оптимизации и управления ПНР даже для относительно простых технических подсистем объекта НПС [3]. В существующих работах при решении поставленной задачи для МН и отдельных его объектов не ставился вопрос о нахождении оптимального правила обслуживания, а производился наилучший выбор некоторых параметров этого обслуживания [3]. Поэтому для комплексного решения поставленной задачи предлагается использовать метод имитационного моделирования с целью сравнения некоторых стратегий управления ПНР на ней и выбора наиболее приемлемой [1].

При построении имитационной модели предлагается использовать структурную надежность модель НПС в процессе эксплуатации. При этом под "элементом" данной надежности модели понимается прибор, устройство или система, которые при проведении ПНР являются первичными.

Задаваясь некоторой фиксированной стратегией ПНР всех объектов НПС, на основании существующей организации обслуживания в УМН, с учетом определенных надежности характеристик "элементов" и структурной надежности модели строится имитационная модель функционирующей НПС. На данной имитационной модели исследуется следующий критерий эффективности [4]:

$$(1) K_{\mathcal{T}}(T) = \frac{Э_{\mathcal{T}}(T)}{З_{\mathcal{T}}(T)} = \frac{Э_{\mathcal{T}}(T)}{W_{\mathcal{T}}(T) + SAR_{\mathcal{T}}(T) + SPR_{\mathcal{T}}(T) + N_{\mathcal{T}}(T)}$$

где: $\mathcal{T} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ - фиксированная стратегия ПНР для всех объектов оборудования НПС, причем θ_i - соответствующий межремонтный цикл для i -го элемента модели;

$Э_{\mathcal{T}}(T)$ - фактическое выполнение плана перекачки продукта за период $[0, T]$ при фиксированной стратегии (суммарный эффект);

$З_{\mathcal{T}}(T)$ - суммарные затраты, связанные с эксплуатацией НПС за период $[0, T]$ при стратегии ПНР \mathcal{T} ;

$SAR_{\mathcal{T}}(T), SPR_{\mathcal{T}}(T)$ - затраты за период $[0, T]$, связанные соответственно с проведением внеплановых и профилактических ремонтов при стратегии ПНР \mathcal{T} ;

$W_{\mathcal{T}}(T)$ - суммарные затраты за период $[0, T]$, связанные с последствиями для МН от внеплановых отказов объектов НПС при стратегии ПНР \mathcal{T} ;

$N_{\mathcal{T}}(T)$ - суммарные затраты за период $[0, T]$, связанные с непопо-

ставкой продукта из-за внепланового снижения производительности при стратегии ППР \mathcal{F} .

На имитационной модели сравнению подвергаются различные стратегии, как предложенные эвристически, так и построенные с помощью математических методов для упрощенных моделей отдельных звеньев НПС. С этой целью в имитационную модель вносится блок имитации стратегий управления ППР, причем функцией блока является формирование класса допустимых стратегий ППР \mathcal{F} .

Кроме того имитационная модель позволяет вычислять различные характеристики надежности системы, улучшать класс оптимальных стратегий \mathcal{F} , используя при этом дополнительную статистическую информацию, накапливаемую и получаемую в процессе эксплуатации системы.

2. Содержательное описание объекта функционирования НПС

В управлении магистральных нефтепроводов центральной Сибири (УМИПС), для которого автором разрабатывается подсистема АСУ ремонтом в рамках АСУц, принята следующая структура технического обслуживания. В управлении существуют две базы производственного обслуживания (БПО), на которых работают специализированные бригады по обслуживанию механической части НПС, электрической и контрольно-измерительной аппаратуры и средств защиты (КИП и А). Заявки на обслуживание (восстановление) объектов НПС поступают на БПО и обслуживаются сразу, если соответствующая бригада свободна, т.е. существуют три обслуживающих линии.

В этой связи мы разделяем объекты НПС в надежностной модели на группы, соответствующие:

а) механическому оборудованию, б) электрическому, в) КИП и А. Причем поступление требований на обслуживание от каждой группы оборудования будет частично зависеть друг от друга в том смысле, что поступление некоторых требований на обслуживающий канал влечет за собой остановку всей системы и, следовательно, прекращение на период времени восстановления поступления заявок от других групп оборудования.

При выборе надежностной структуры функционирования НПС учитываются следующие особенности отдельных ее объектов. Отказы некоторых объектов (т.е. поступление требований на восстановление) может приводить:

- к остановке всей НПС,
- к частичному изменению производительности,
- вообще ни к какому изменению производительности.

В этой связи объекты КИП и А НЭС мы разделяем на две группы, обслуживаемые одной линией, элементы которых различаются видами отказа:

- случайное срабатывание,
- выход из строя, т.е. неспособность выполнять свои функции в систем контроле, защиты.

С учетом вышеназванных замечаний предлагается следующая надежностная структура НЭС, применяемых в УМЦС (см. рис.1). Первая группа характеризует все основное оборудование НЭС; вторая - объекты КИП и А, отказы которых мы выделяем только, как случайное срабатывание; третья - объекты КИП и А, отказы которых мы выделяем только, как выход из строя (т.е. потеря рабочих функций); четвертая - электрособорудование и электрическая часть НЭС.

За надежность характеристики λ_{i20} элемента данной структурной модели при фиксированной стратегии ПНР $T_0 = (\theta_i^0, \theta_i^0)$ принимаются:

ξ_i - случайная величина времени работы i -го элемента;

η_i - случайная величина времени профилактического обслуживания;

γ_i - случайная величина времени аварийного ремонта;

причем эти случайные величины определяются следующими функциями распределения:

$$F_i^{\eta p}(t) = P\{\eta_i < t\},$$

$$F_i^{\gamma}(t) = P\{\gamma_i < t\},$$

$$F_i^{\xi}(t) = P\{\xi_i < t\}.$$

Причем, зная функцию распределения $F_i(t)$, можно определить функцию распределения времени функционирования системы при наличии ПНР:

$$F_i'(t) = P\{\xi_i < t\} = P\{\min(\xi_i, \theta_i^0) < t\} = \begin{cases} F_i(t) & t < \theta_i^0 \\ 1 & t > \theta_i^0. \end{cases}$$

3. Оптимальный выбор межремонтного периода ПНР для частных подмоделей

Для выбора класса допустимых стратегий ПНР \mathcal{Q} ,

используемых при определении оптимальной на имитационной модели, предлагается надежность модель всей НЭС разложить на отдельные подмодели, причем на такие, влияние которых друг на друга с точки зрения надежности будет только в виде остановки всей НЭС.

С.А.А - III группа

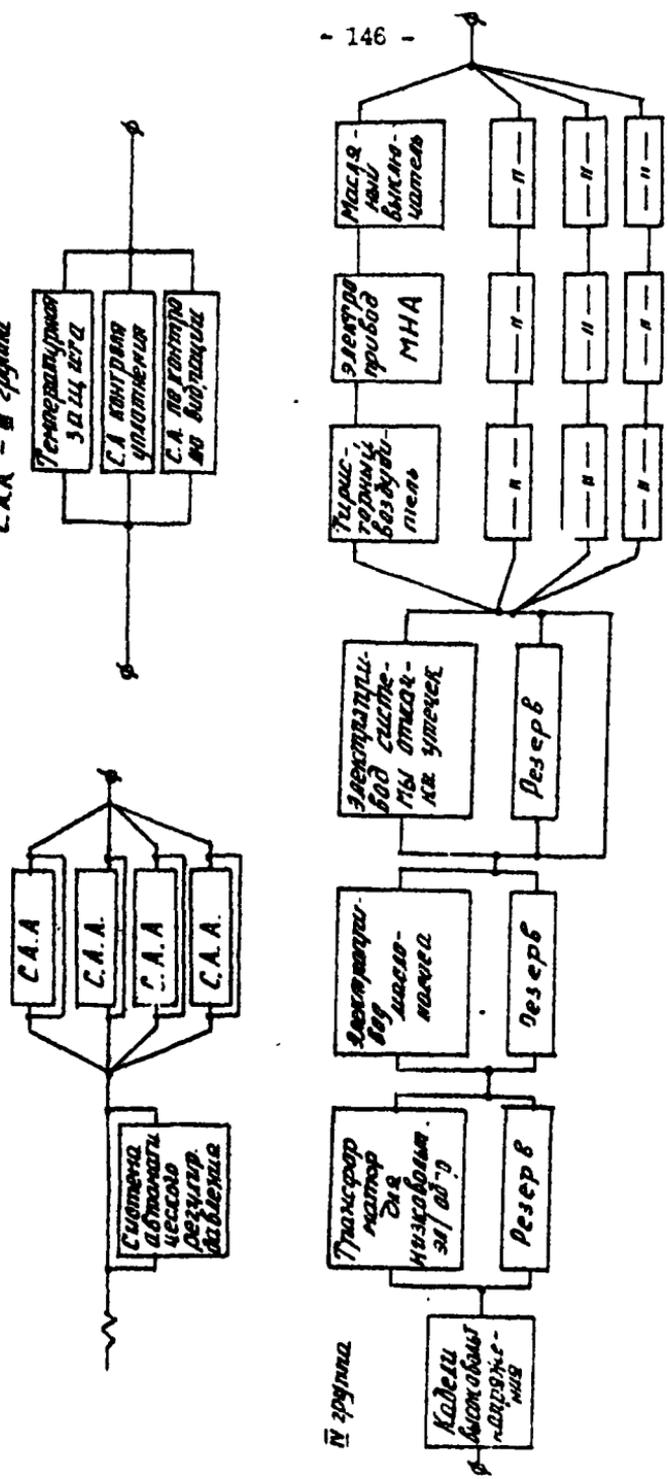


Рис. 1 (продолжение)

Часто встречающимися здесь будут следующие блоки (с рис.2). Эти

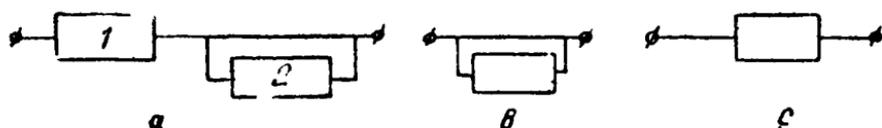


Рис.2. Частные подмодели объектов НПС.

блоки представляют надежные модели различных систем автоматической защиты (системы автоматической защиты по пожару, по давлению на входе, давлению на выходе, система автоматического регулирования давления и др.). Так же различные участки кабелей высоковольтного напряжения, линии электропередач, приданных НПС, передаточные линии и др.

При решении задачи выбора оптимального периода профилактики для блока **С** в работе [2] используется критерий минимум среднего времени простоя. Обобщим результаты на случай более общего критерия и решим аналитическим способом задачу определения оптимального периода профилактики для данных блоков. Критерий будем использовать минимум затрат от функционирования системы для УИИ. Этот критерий близок к более общему критерию (1).

Рассмотрим блок **А** (рис.2). Данный блок характеризует работу некоторой системы автоматики защиты, имеющей два типа отказов. Элемент 1 имеет отказ только типа случайное срабатывание, элемент 2 отказ типа не выполнение функций защиты. Если имеется отказ того или другого типа, то система считается отказавшей. ПНР проводится для всего блока **А** и полностью восстанавливает 1-й и 2-й элементы. Считаем отказы элементов независимыми событиями.

С точки зрения надежности работу данной системы можно описать случайным процессом $X(t)$, принимающим значения: $X(t) = 0$, если в момент времени t блок исправлен; $X(t) = 1$, $X(t) = 2$, $X(t) = 3$, если в момент времени t соответственно отказал 1-й элемент, 2-й элемент, произошел ПНР.

Случайное время безотказной работы задается функцией надежности

$$R(t) = P\{\tau > t\} = P\{\tau_1 > t\} \cdot P\{\tau_2 > t\} = R_1(t) \cdot R_2(t), \text{ где } R_1(t), R_2(t)$$

- функции надежности 1-го и 2-го элементов. Случайное время аварийного восстановления 1-го и 2-го элементов задается одной функцией

распределения $\Psi_1(t) = P\{\gamma < t\}$, а время ШИР функцией распределения $\Psi_2(t) = P\{\eta < t\}$.

Случайный процесс $X(t)$ будет являться регенерирующим. Точки регенерации $t_0: X(t_0) = 0$. Пусть $V_0(T)$ потери за время T при условии, что профилактика проводилась через время θ . Если t момент первого возвращения процесса $X(t)$ в состояние $X(t) = 0$, то справедливо

$$(2) \tilde{V}_0(T) = M[\omega_0(t) + V_0(T-t)] = \int_0^T [\omega_0(t) + V_0(T-t)] dG_0(t),$$

где $\omega_0(t)$ - условные потери за один шаг; $G_0(t)$ - функция распределения времени между моментами регенерации, при условии, что профилактика проводилась через время θ .

$$G_0(t) = \begin{cases} - \int_0^t P\{\gamma < t-u\} dR(u) & \text{при } t \leq \theta \\ - \int_0^\theta P\{\gamma < t-u\} dR(u) + R(\theta) P\{\eta < t-\theta\} & \text{при } t > \theta. \end{cases}$$

Обозначим преобразование Лапласа ст функции $F(t)$ через $\tilde{F}(z)$.

Тогда, используя соотношение $\chi(\theta) = \lim_{z \rightarrow 0} z \tilde{V}_0(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \tilde{V}_0(z)$, перейдем в соотношении (2) к преобразованию Лапласа и получим

$$(3) \tilde{V}_0(z) = \tilde{W}_0(z, \theta) + \tilde{G}_0(z) \tilde{V}_0(z),$$

$$\text{где } \tilde{W}_0(z, \theta) = \int_0^\infty e^{-zu} \omega_0(u) dG_0(u),$$

из соотношения (3) и найдя $\tilde{G}_0(z)$, следует

$$(4) \tilde{V}_0(z) = \frac{\tilde{W}_0(z, \theta)}{1 - \tilde{G}_0(z)} = \frac{\tilde{W}_0(z, \theta)}{1 + \tilde{\Psi}_2(z) \int_0^\infty e^{-zu} dR(u) - e^{-z\theta} R(\theta) \tilde{\Psi}_2(z)}.$$

Умножим (4) на z и, перейдя к пределу при $z \rightarrow 0$, получим

$$(5) \chi(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{m_1 + (\theta + m_0 - m_1)R(\theta) - \int_0^\infty u dR(u)},$$

где $\rho(\theta) = \int_0^\infty \omega_0(u) dG_0(u)$ - безусловные средние потери за один шаг;

$m_1 = M[\gamma]$, $m_2 = M[\eta]$ - математические ожидания времени аварийного и профилактического монтажа.

Определим $\rho(\theta)$ следующим образом:

$$(6) \rho(\theta) = c_1 \int_0^\theta (1 - F_1(u)) dF_1(u) + c_2 \int_0^\theta (1 - F_1(u)) dF_2(u) + c_3 (1 - F_1(\theta))(1 - F_2(\theta)),$$

где

$$c_1 = SAR_1 + SD \cdot a \cdot m_1; \quad c_2 = SAR_2 + D \cdot P \cdot m_2; \quad c_3 = SPR + D \cdot P \cdot m_2,$$

причем SAR_1 и SAR_2 - соответственно затраты на восстановление 1-го и 2-го элементов, при аварийном отказе;

- SD - штраф за недопоставку единицы продукции для УМ;
- α - средняя производительность нефтепровода в единицу времени;
- D - потеря в случае одновременного отказа включенной параллельно механической части или всей НПС;
- P - вероятность одновременного отказа включенной параллельно механической части или всей НПС в единицу времени;
- SPP - затраты на проведение ППР.

Таким образом, проинтегрировав (6), получаем

$$P(\theta) = (C_1 - C_2)F_1(\theta) + (C_2 - C_3)F_2(\theta) + (C_2 - C_1) \int_0^{\theta} F_2(u) dF_1(u) + (C_1 - C_2)F_1(\theta)F_2(\theta) + C_3.$$

Т.е. для нахождения оптимального периода профилактики для нашей системы в смысле критерия $\min_{T^*} \int_0^T V_0(T)$ необходимо найти оптимум выражения (5).

Для систем автоматической защиты НПС в ряде работ, на основании статистических данных за ряд лет, функции расщепления времени работ аппроксимировались распределением Вейбулла, а отказы типа случайное срабатывание эксплуатационной функцией [3]. Поэтому предположим

$$F_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad F_2(t) = 1 - e^{-\beta t^\alpha}, \quad \text{тогда}$$

$$(7) \quad Z(\theta) = \frac{a_1 + a_2 e^{-\lambda \theta} + a_3 e^{-\beta \theta^\alpha} + a_4 \int_0^{\theta} \lambda e^{-(\lambda + \beta u^\alpha)} dt + a_5 e^{-(\lambda + \beta \theta^\alpha)}}{m_1 + \theta e^{-(\lambda \theta + \beta \theta^\alpha)} + (m_2 - m_1) e^{-(\lambda \theta + \beta \theta^\alpha)} + \int_0^{\theta} (\lambda + \beta u^{\alpha-1}) e^{-(\lambda u + \beta u^\alpha)} du},$$

где: $a_1 = C_1 + C_2 - C_3$; $a_2 = C_2 - C_3$; $a_3 = C_3 - C_2$; $a_4 = C_1 - C_2$, продифференцировав выражение (7), по θ найдем уравнение, корни которого дают оптимум выражения (7)

$$(8) \quad (d_1 + d_2 \theta^{\alpha-1}) + e^{-\lambda \theta} (d_3 + d_4 \theta + d_5 \theta^{\alpha-1}) + e^{-\beta \theta^\alpha} (d_6 + d_7 \theta^\alpha) + e^{-\lambda \theta} e^{-\beta \theta^\alpha} (d_8 + d_9 \theta + d_{10} \theta^\alpha) + (d_{10} e^{-\beta \theta^\alpha} + d_{11} \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda \theta}) + M_0(a, \beta, \lambda) (d_9 e^{-\beta \theta^\alpha} + d_{11} \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda \theta} + d_9 + d_{11} \theta^{\alpha-1}) + M_0(a, \beta, \lambda) (d_{12} + d_{13} \theta^{\alpha-1}) = 0,$$

где $d_1 = m_1 \lambda (a_1 - a_2) + a_1 \lambda (m_2 - m_1) - a_1$; $d_2 = d\beta (a_1 m_2 - m_1 (a_1 + a_2))$;
 $d_3 = -a_2$; $d_4 = -a_2 \lambda$; $d_5 = a_2 (m_1 - m_2) d\beta$; $d_6 = a_3 (m_1 m_2 \lambda - 1)$;
 $d_7 = -a_3 d\beta$; $d_8 = a_4 \lambda (m_2 - m_1) - a_3$; $d_9 = \lambda (a_1 - a_2)$; $d_{10} = -a_2 m_1 \lambda$;

$$d_{11} = -a_3 m_1 d\beta; \quad d_{12} = a_4((m_2 - m_1)\lambda - 1); \quad d_{13} = a_4(m_2 - m_1)d\beta;$$

$$M_{\theta}(d, \beta, \lambda) = \int_0^{\theta} u(\lambda + d\beta u^{d-1}) e^{-(\lambda u + \beta u^d)} du; \quad K_{\theta}(d, \beta, \lambda) = \int_0^{\theta} \lambda \cdot e^{-(\lambda u + \beta u^d)} du.$$

Если корней уравнения (8) на допустимом множестве стратегий ШР несколько, то найдем оптимальный в смысле критерия $\min_{\theta \in \Phi} \rho(\theta)$.

Аналогично получаем для блоков θ и ζ (рис.2), используя наиболее вероятный вид функции распределения времени жизни

$$F(t) = 1 - e^{-\beta t^d}, \quad \text{следующее уравнение:}$$

$$(9) \quad d_1 + \theta^{d-1} [d_2 + d_3 \cdot \Gamma(1 + \frac{1}{d}) \cdot T(\beta \theta^d; 1 + \frac{1}{d})] + e^{-\beta \theta^d} [d_4 + d_5 \cdot \theta^{d-1} + d_6 \cdot \theta^d] = 0,$$

где $d_1 = a_1(m_2 - m_1)d\beta; \quad d_2 = -a_2 d\beta m_1; \quad d_3 = a_2 \cdot d \cdot \beta^{1-\frac{1}{d}}; \quad d_4 = a_2(m_2 - m_1)d\beta - a_2;$
 $d_5 = -a_2(m_2 - m_1)d\beta; \quad d_6 = a_2 d\beta; \quad \Gamma(\rho) = \int_0^{\rho} u^{\rho-1} e^{-u} du; \quad I(x; \rho) = \frac{x}{\Gamma(\rho)} \int_0^x u^{\rho-1} e^{-u} du,$

причем $m_1 = M[\tau], \quad m_2 = M[\zeta]$ - математические ожидания соответственно случайных величин времени аварийного и профилактического ремонта.

4. Построение имитационной модели НПС в процессе эксплуатации

На основании описания объекта, данного в п.3, можно НПС представить в виде функционирования управляемой замкнутой многолинейной системы массового обслуживания:

$$\langle \vec{G} / \vec{G} / 3, \infty \rangle.$$

В этой системе потоки поступающих требований на каждый обслуживающий канал будут зависеть друг от друга в том смысле, что поступление некоторых требований на обслуживающий канал влечет за собой величину периода времени восстановления прекращения поступления заявок от других групп оборудования.

Опишем принципиальную схему функционирования системы

$$\langle \vec{G} / \vec{G} / 3, \infty \rangle, \quad \text{представляющую процесс эксплуатации НПС.}$$

На основании этой схемы построена имитационная модель НПС, внедряемая в настоящее время в УМНПС (г.Томск).

1. Блок формирования стратегий ШП \mathcal{F}_0 ;
2. Формирование поступления заявок по каждому обслуживаемому каналу $K: \mathcal{F}_i^k, i \in I_k, k = \overline{1, 3}$;
3. Определение ближайшего поступившего требования для каждого k -го канала. Определение номера этого элемента и номера канала: i^*, K_0 ;
4. Формирование системного времени t^* ;
5. Если назначена профилактика к моменту t^* на K_0 канале для i^* элемента, то идти к 6 иначе к 12 ;
6. Формирование $\mathcal{Z}_i^{K_0}, P := \mathcal{Z}_i^{K_0}$;
7. Если к моменту t^* обслуживающий канал занят, то заявки становятся в очередь на обслуживание и формируется t^* - момент освобождения канала от предыдущего требования ;
8. Определение последствий для системы при проведении восстановления для i^* элемента на интервале $[t^*; t^* + P]$;
9. Если поступление заявки от i^* элемента влечет из отказ всей системы, то моменты поступления заявок на других каналах задерживаются на время $t = P$;
10. Формирование $K_{\mathcal{F}_0}(t^*)$;
11. Если $t^* \geq T$, где T - плановый период для стратегии ШП \mathcal{F}_0 , то выдача значенки $K_{\mathcal{F}_0}(t^*)$ и остановка, иначе формирование $t^* = t^* + P$ идти к 2 ;
12. Формирование $\mathcal{Y}_i^{K_0}, P := \mathcal{Y}_i^{K_0}$ идти к 7 .

Л и т е р а т у р а

1. Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н. Лекции по теории сложных систем.-М.: Сов.радио, 1973.
2. Рыков В.В. Определение оптимального времени между профилактиками. Тр. ЦНИИКА, Вып.12.-М., 1965.
3. Ливанов Ю.З., Буков В.М. и др. Модели обслуживания в АСУ ТП трубопроводного транспорта. ТИТО, ЗНИИОЗНГ.-М., 1980.
4. Методика оценки ущерба от отказов объектов магистральных нефтепроводов. Уфа: ВНИИСПУ нефть, 1979.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ЗАДАЧЕ О ВІРОЖДЕННОМ
СЛУЧАЙНОМ БЛУДАНІИ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

С.Н. Пятков

I. Введение и постановка задачи. Для случайных блужданий на полупрягой, в полуплоскости, в четверти плоскости уже известны методы, которые позволяют найти производящую функцию стационарных вероятностей [1].

Если случайное блуждание является однородным дискретным марковским процессом с непрерывным временем и множеством состояний $Z_{++}^2 = \{(i, j) : i, j > 0, \text{ целые}\}$, то задача может быть сведена к одному уравнению в производящих функциях.

Если же существует некоторое множество состояний $Z' \neq \emptyset$, $Z' \subset Z_{++}^2$ (например, $Z' = \{(i, j) : i \geq 0, j > n > 0\}$) такое, что вероятности переходов на множестве Z' однородны, но отличаются от соответствующих вероятностей переходов на состояниях из $Z_{++}^2 \setminus Z'$, то задача сводится уже к системе уравнений в производящих функциях, решать которую достаточно сложно.

В предлагаемой работе на примере конкретного случайного блуждания показан один подход к задаче такого типа. Решение записывается в виде рекуррентных формул и может быть использовано при численных расчетах. Рассмотрим дискретный марковский процесс с непрерывным временем, множество состояний которого есть $Z_{mn} = \{(i, j) : i = \overline{0, m}, j = \overline{0, n}, \text{ целые}\}$. Пусть $p(k', \ell' / k, \ell)$ - вероятность перехода из состояния (k, ℓ) в состояние (k', ℓ') за время Δt , где Δt - достаточно малый интервал времени. Предполагаем, что для вероятностей $p(k', \ell' / k, \ell)$ справедливы, с точностью до линейных членов относительно Δt , следующие формулы (обозначим $s = k' - k, t = \ell' - \ell$):

- а) если $k = \overline{1, m-1}, \ell = \overline{0, n-1}$, то $p(k', \ell' / k, \ell) = P_{st}^0$, причем $P_{10}^0 = \lambda_1 \Delta t$, $P_{01}^0 = \lambda_2 \Delta t$, $P_{-1,0}^0 = (\mu_1 + \mu_2) \Delta t$,
 $P_{0,0}^0 = 1 - P_{10}^0 - P_{01}^0 - P_{-1,0}^0$;

б) если $k=0, \ell = \overline{1, N-1}$, то $\rho(k', \ell' / k, \ell) = P_{st}^1$, причем $P_{1,0}^1 = \lambda_1 \Delta t$, $P_{0,1}^1 = \lambda_2 \Delta t$, $P_{0,0}^1 = (\mu_1 + \mu_2) \Delta t$, $P_{0,0}^1 = 1 - P_{1,0}^1 - P_{0,1}^1 - P_{0,0}^1$.

Если $\ell=0$, то $\rho(0, 0 / 0, 0) = 1 - P_{1,0}^1 - P_{0,1}^1$, если $\ell = N$, то $\rho(1, N / 0, N) = (\lambda_1 + \lambda_2) \Delta t$, $\rho(0, N-1 / 0, N) = (\mu_1 + \mu_2) \Delta t$, $\rho(0, N / 0, N) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) \Delta t$;

в) если $k = m, \ell = \overline{0, n-1}$, то $\rho(k', \ell' / k, \ell) = P_{st}^2$, где $P_{0,1}^2 = (\lambda_1 + \lambda_2) \Delta t$, $P_{1,0}^2 = (\mu_1 + \mu_2) \Delta t$, $P_{0,0}^2 = 1 - P_{0,1}^2 - P_{1,0}^2$,

г) если $k = \overline{1, m-1}, \ell = \overline{n+1, N}$, то $\rho(k', \ell' / k, \ell) = P_{st}^3$, где $P_{1,0}^3 = (\lambda_1 + \lambda_2) \Delta t$, $P_{1,0}^3 = \mu_1 \Delta t$, $P_{0,1}^3 = \mu_2 \Delta t$, $P_{0,0}^3 = 1 - P_{1,0}^3 - P_{1,0}^3 - P_{0,1}^3$;

д) если $k = \overline{1, m-1}, \ell = n$, то $\rho(k', \ell' / k, \ell) = P_{st}^4$, где $P_{1,0}^4 = (\lambda_1 + \lambda_2) \Delta t$, $P_{1,0}^4 = (\mu_1 + \mu_2) \Delta t$, $P_{0,0}^4 = 1 - P_{1,0}^4 - P_{1,0}^4$;

в) если $k = m, \ell = \overline{n+1, N}$, то $\rho(k', \ell' / k, \ell) = P_{st}^5$, где $P_{1,0}^5 = \mu_1 \Delta t$, $P_{0,1}^5 = \mu_2 \Delta t$, $P_{0,0}^5 = 1 - (\mu_1 + \mu_2) \Delta t$, $\rho(m-1, n / m, n) = (\mu_1 + \mu_2) \Delta t$, $\rho(m, n' / m, n) = P_{0,0}^5$.

В данном случае множество состояний $Z' = \{(i, j), i = \overline{0, m}, j = \overline{n+1, N}\}$. Следует заметить, что зависимость между вероятностями P_{st}^l ($l = \overline{0, 5}$) в предлагаемой задаче все P_{st}^l выражены через $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ не принципиальна. Процедура решения задачи не изменится, если вероятности P_{st}^l будут принимать независимые значения для каждого l . На параметры $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ наложены естественные ограничения: параметры $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ - положительны. Рассматриваемое случайное блуждание вырождено. Все состояния существенны. Для описанной системы будем определять условие существования стационарного распределения и выражение для финального распределения вероятностей состояний (ФРВС). Если данную систему рассмотреть как некоторую систему массового обслуживания (СМО), то λ_1 и λ_2 могут трактоваться как параметры пуассоновских входящих потоков заявок, а μ_1 и μ_2 - как параметры экспоненциальных функций распределения времени обслуживания заявок приборами.

2. Основные результаты. Пусть N, n - конечные целые числа, удовлетворяющие условию $N > n > 0$, и $m \leq \infty$.

Обозначим $P_{ij}(t)$ - вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии (i, j) .

Имеет место следующая теорема:

Теорема I ФРВС рассматриваемой системы $(P_{ij}, i \geq 0, j = \overline{0, N})$ существует, т.е. существует предел:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = P_{ij} > 0, i \geq 0, j = \overline{0, N}$$

тогда и только тогда, когда параметры $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ удовлетворяют следующим ограничениям: $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ - положительны, $\lambda_1 + \lambda_2 < \mu_1 + \mu_2$. Если стационарное распределение существует, то справедливы формулы:

$$P_{ij} = c \gamma_{ij} \quad (i \geq 0, j = \overline{0, n}) \quad (1)$$

$$P_{ij} = a \xi_{ij} \quad (i \geq 0, j = \overline{n+1, N}), \quad (2)$$

где

$$c = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \gamma_{ij} + \frac{\gamma_{0n}}{\xi_{0n}} \sum_{l=n+1}^N \xi_{il} \right) \right]^{-1}, \quad (3)$$

$$a = \frac{\gamma_{0n}}{\xi_{0n}} c, \quad (4)$$

причём для величин γ_{ij} и ξ_{il} ($i \geq 0, j = \overline{0, n}, l = \overline{n+1, N}$) справедливы следующие рекуррентные соотношения:

1) если $j = \overline{1, n-1}, i \geq 1$, или $j = 0, i \geq 0$, то

$$\gamma_{ij} = S_j \gamma_i + \frac{\lambda_2}{\mu_2(\gamma_2 - \gamma_1)} \left(\sum_{l=0}^{i-1} \beta_2^{i-l} \gamma_{l,j-1} + \sum_{k=i}^{\infty} \beta_2^{i-k} \gamma_{k,j-1} \right), \quad (5)$$

где

$$S_j = \begin{cases} 1 & , \text{ если } j = 0; \\ \gamma_j - \omega_{j-1} & , \text{ если } j \neq 0. \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\omega_{j-1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2(\gamma_2 - \gamma_1)} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_2^{j-l} \rho_{l,j-1};$$

2) если $j = \overline{1, n}, i = 0$, то

$$\gamma_{0j} = \frac{\lambda_1 + \mu_2}{\mu_2} \rho_{0,j-1} - \gamma_{0,j-1} - \frac{\lambda_2}{\mu_2} \gamma_{0,j-2} - \delta_j^1 \gamma_{0,j-1}, \quad (7)$$

где δ_j^1 - символ Кронеккера;

3) если $j = \overline{n+1, N-1}, l = \overline{1, \infty}$, или $j = N, l = \overline{0, \infty}$, то:

$$\xi_{lj} = \alpha_j \alpha_l^i + \frac{\mu_2}{\mu_2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left(\sum_{k=1}^{l-1} \alpha_1^{i-k} \xi_{k,j+1} + \sum_{k=l}^{\infty} \alpha_1^{i-k} \xi_{k,j+1} \right), \quad (8)$$

где

$$\alpha_j \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\lambda_{ii}} \xi_{0j} - \xi_{j+1}, & \text{если } j \neq N; \\ I, & \text{если } j = N, \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\xi_{i,j+1} = \frac{\mu_i}{\mu_i(\alpha_i - \alpha_0)} \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_i^{\ell} \xi_{i,j+1} ;$$

4) если $j = \overline{n, N-1}$, $i=0$, то:

$$\xi_{0j} = \frac{1}{\lambda_i} [(\lambda_{ii} + \mu_{ii}) \xi_{0,j+1} - \mu_i \xi_{1,j+1} - \mu_{ii} \xi_{0,j+2}] ; \quad (10)$$

5) если $j = n$, $i = \overline{1, \infty}$, то:

$$\begin{aligned} \eta_{in} = \beta \alpha^i + \frac{1}{\mu_{ii}(\alpha - \alpha_0)} & \left[\sum_{\ell=1}^{i-1} \alpha_0^{\ell} (\mu_{i\ell} \xi_{e,n+1} + \lambda_{i\ell} \eta_{e,n-1}) + \right. \\ & \left. + \sum_{\ell=i}^{\infty} (\mu_{i\ell} \xi_{e,n+1} + \lambda_{i\ell} \eta_{e,n-1}) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\beta = \frac{\lambda_i}{\lambda_i} \eta_{in} - \frac{1}{\mu_{ii}(\alpha - \alpha_0)} \sum_{\ell=1}^{\infty} (\mu_{i\ell} \xi_{e,n+1} + \lambda_{i\ell} \eta_{e,n-1}). \quad (12)$$

Здесь $\xi_{i,n+1} = \eta_{i-1} = 0$, $i \geq 0$, $\lambda_{ii} = \lambda_i + \lambda_{i2}$, $\mu_{ii} = \mu_i + \mu_{i2}$,

$$\alpha_{i2} = \frac{(\lambda_{i2} + \mu_{i2}) \mp \sqrt{(\lambda_{i2} + \mu_{i2})^2 - 4\lambda_{i2}\mu_{i2}}}{2\mu_{i2}}, \quad \alpha_{ii} = \frac{(\lambda_{ii} + \mu_{ii}) \mp \sqrt{(\lambda_{ii} + \mu_{ii})^2 - 4\lambda_{ii}\mu_{ii}}}{2\mu_{ii}},$$

$$\alpha = \lambda_{i2} / \mu_{i2}.$$

Доказательство теоремы I приведено в приложении.

Саметн, что величины ξ_{ij} определяются (как и в случае $m < \infty$) сначала для больших значений индекса j , т.е., если $j_2 > j_1$, то следует вычислить ξ_{ij_2} , а затем уже ξ_{ij_1} , т.к. ξ_{ij_1} определяется через ξ_{ij_2} (см. (8)).

Пусть N, n, m - конечные целые числа. По-прежнему $N > n > 0$. Считаем, что $m > 1$. Для такой системы ФРВС существует при произвольных положительных параметрах $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, причем $\rho_{ij} > 0$ ($i = \overline{0, m}$, $j = \overline{0, N}$), т.к. все состояния системы существуют.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2 Стационарные вероятности состояний системы определяются по следующим формулам:

$$\rho_{ij} = c \eta_{ij} \quad (i = \overline{0, m}, j = \overline{0, n}),$$

$$P_{ij} = a \xi_{ij} \quad (i = \overline{0, m}, j = \overline{n+1, N}),$$

где

$$C = \left[\sum_{l=0}^m \left(\sum_{j=0}^n \eta_{lj} + \frac{\gamma_{0n}}{\xi_{0n}} \sum_{l=n+1}^N \xi_{le} \right)^{-1} \right],$$

$$a = \frac{\gamma_{0n}}{\xi_{0n}} C,$$

причем величины η_{lj} и ξ_{le} ($l = \overline{0, m}, j = \overline{0, n}, e = \overline{n+1, N}$) определяются по следующим рекуррентным формулам:

1) если $j = \overline{1, n-1}$, $l = \overline{1, m}$; или $j = 0$, $l = \overline{0, m}$, то

$$\eta_{lj} = S_j \left[\gamma_2^i - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)^{m+1} \gamma_2^i \right] + \omega_{j-1} \gamma_2^i - \frac{\lambda_2}{\mu_{12}(\gamma_2 - \gamma_1)} \sum_{l=0}^{i-1} (\gamma_2^{i-l} - \gamma_1^{i-l}) \eta_{e, j-1},$$

где

$$S_j = \begin{cases} I, & \text{если } j = 0; \\ \frac{\eta_{0j} - \omega_{j-1}}{\left[1 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)^{m+1} \right]}, & \text{если } j > 0. \end{cases}$$

где

$$\omega_{j-1} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2^m} \eta_{m, j-1} + \frac{\lambda_2}{\mu_{12}(\gamma_2 - \gamma_1)} \sum_{l=0}^m \left[\gamma_2^{-l} - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)^{m+1} \gamma_2^{-l} \right] \eta_{e, j-1};$$

2) если $j = \overline{1, n}$, $l = 0$, то

$$\eta_{0j} = \frac{\lambda_{12} + \mu_{12}}{\mu_{12}} \eta_{0, j-1} - \eta_{e, j-1} - \frac{\lambda_2}{\mu_{12}} \eta_{0, j-2} - \delta_j^e \eta_{0, j-1},$$

где δ_j^e - символ Кронеккера;

3) если $j = \overline{n+1, N}$, $l = \overline{1, m}$, или $j = N$, $l = \overline{0, m}$, то

$$\xi_{ij} = \alpha_j \left[\alpha_2^i + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{m+1} \frac{(\alpha_2 - 1)}{(1 - \alpha_2)} \alpha_2^i \right] + \beta_{j+1} \alpha_2^i - \frac{\mu_2}{\mu_1(\alpha_2 - \alpha_1)} \sum_{l=1}^{i-1} (\alpha_2^{i-l} - \alpha_1^{i-l}) \xi_{e, j+1},$$

где

$$\alpha_j = \begin{cases} I, & \text{если } j = N; \\ \frac{\lambda_2 \xi_{0j} - \beta_{j+1}}{1 + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{m+1} \frac{(\alpha_2 - 1)}{(1 - \alpha_2)}}, & \text{если } j < N. \end{cases}$$

где

$$\eta_{j+1} = \frac{\mu_2}{\mu_2(\alpha_2 - \alpha_1)} \sum_{l=1}^m [\alpha_2^{-l} + (\frac{\alpha_2}{\alpha_1})^{m+1} \frac{(\alpha_2 - 1)}{(1 - \alpha_1)} \alpha_1^{-l}] \xi_{l,j+1};$$

4) если $j = n, n-1, \dots, 1, 0$, то

$$\xi_{0j} = \frac{1}{\lambda_2} [(\lambda_{22} + \mu_{22}) \xi_{0,j+1} - \mu_{21} \xi_{1,j+1} - \mu_{22} \xi_{0,j+2}];$$

5) если $j = n, \dots, 1, 0$, то

$$\eta_{in} = \beta \tau^i + \beta^i - \frac{1}{\mu_{12}(1-\tau)} \sum_{l=1}^{i-1} (1-\tau^{-l}) (\mu_{12} \frac{\rho_{0n}}{\xi_{0n}} \xi_{l,n+1} + \lambda_2 \eta_{i,n-1}),$$

где

$$\beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_{12}} \eta_{in} - \beta^i,$$

$$\beta^i = \frac{1}{\mu_{12}(1-\tau)} [\lambda_1 \eta_{m,n-1} + \sum_{l=1}^m (\mu_{12} \frac{\rho_{0n}}{\xi_{0n}} \xi_{l,n+1} + \lambda_2 \eta_{i,n-1})].$$

Здесь $\xi_{i,m} \eta_{i-1} = 0, i = \overline{0, m}, \tau \neq 1,$

$\lambda_{12}, \mu_{12}, \tau, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_2, \gamma_1$ - определяются также, как и в теореме I.

Доказательство аналогично доказательству теоремы I.

Рекуррентные соотношения, полученные в теореме 2, позволяют численно определить ФРВС рассматриваемой системы. Если случайное блуждание интерпретируется как СМО, то для неё можно определить такие основные характеристики, как среднее число заявок в системе, вероятность отказа в обслуживании и т.д. В параграфе 3, в качестве примера, приведены стационарные вероятности для конкретной системы.

3. Пример. В качестве примера рассмотрено случайное блуждание на прямоугольнике $\mathcal{X}_{mN} = \{(i, j) : i = \overline{0, m}, j = \overline{0, N}\}$ с множеством $\mathcal{X}' = \{(i, j) : i = \overline{0, m}, j = \overline{n+1, N}\}$ при $\lambda_1 = 0, 1$. $\lambda_2 = 0, 3, \mu_1 = 0, 2, \mu_2 = 0, 4, m = 5, N = 14, n = 1$

По формулам, приведенным в теореме 2, на ЭВМ было посчитано ФРВС системы. Время работы программы на ЕС-1022 I секунда. Результаты приведены в табл. I, где на пересечении i -го столбца и j -й отроки находится стационарная вероятность состояния (i, j) .

Таблица I

$j \setminus i$	0	1	2	3	4	5
14	$0,501 \cdot 10^3$	$0,219 \cdot 10^3$	$0,963 \cdot 10^6$	$0,424 \cdot 10^3$	$0,196 \cdot 10^6$	$0,131 \cdot 10^6$
13	$0,152 \cdot 10^3$	$0,273 \cdot 10^3$	$0,167 \cdot 10^3$	$0,947 \cdot 10^6$	$0,547 \cdot 10^6$	$0,451 \cdot 10^6$
12	$0,389 \cdot 10^3$	$0,564 \cdot 10^3$	$0,332 \cdot 10^3$	$0,195 \cdot 10^3$	$0,122 \cdot 10^3$	$0,111 \cdot 10^3$
11	$0,955 \cdot 10^3$	$0,133 \cdot 10^3$	$0,752 \cdot 10^3$	$0,433 \cdot 10^3$	$0,273 \cdot 10^3$	$0,357 \cdot 10^3$
10	$0,231 \cdot 10^3$	$0,321 \cdot 10^3$	$0,179 \cdot 10^3$	$0,101 \cdot 10^3$	$0,634 \cdot 10^3$	$0,594 \cdot 10^3$
9	$0,560 \cdot 10^3$	$0,773 \cdot 10^3$	$0,429 \cdot 10^3$	$0,742 \cdot 10^3$	$0,150 \cdot 10^3$	$0,140 \cdot 10^3$
8	$0,135 \cdot 10^3$	$0,187 \cdot 10^3$	$0,106 \cdot 10^3$	$0,583 \cdot 10^3$	$0,360 \cdot 10^3$	$0,333 \cdot 10^3$
7	$0,326 \cdot 10^3$	$0,451 \cdot 10^3$	$0,249 \cdot 10^3$	$0,141 \cdot 10^3$	$0,886 \cdot 10^3$	$0,799 \cdot 10^3$
6	$0,786 \cdot 10^3$	$0,109 \cdot 10^3$	$0,607 \cdot 10^3$	$0,379 \cdot 10^3$	$0,209 \cdot 10^3$	$0,192 \cdot 10^3$
5	$0,129 \cdot 10^3$	$0,262 \cdot 10^3$	$0,145 \cdot 10^3$	$0,818 \cdot 10^3$	$0,513 \cdot 10^3$	$0,464 \cdot 10^3$
4	$0,457 \cdot 10^3$	$0,216 \cdot 10^3$	$0,185 \cdot 10^3$	$0,139 \cdot 10^3$	$0,997 \cdot 10^3$	$0,696 \cdot 10^3$
3	$0,713 \cdot 10^3$	$0,162 \cdot 10^3$	$0,324 \cdot 10^3$	$0,587 \cdot 10^3$	$0,978 \cdot 10^3$	$0,149 \cdot 10^3$
2	$0,114$	$0,273 \cdot 10^3$	$0,423 \cdot 10^3$	$0,680 \cdot 10^3$	$0,100 \cdot 10^3$	$0,126 \cdot 10^3$
1	$0,129$	$0,327 \cdot 10^3$	$0,482 \cdot 10^3$	$0,656 \cdot 10^3$	$0,830 \cdot 10^3$	$0,710 \cdot 10^3$
0	$0,338$	$0,362 \cdot 10^3$	$0,386 \cdot 10^3$	$0,413 \cdot 10^3$	$0,439 \cdot 10^3$	$0,439 \cdot 10^3$

Приложение. Доказательство теоремы I

Рассмотрим систему уравнений Колмогорова

$$(\lambda_{i2} + \mu_{i2}) P_{i0} = \mu_{i2} P_{i+1,0} + \lambda_{i2} P_{i-1,0}, \quad (П.1)$$

$$(\lambda_{i2} + \mu_{i2}) P_{ij} = \underbrace{\mu_{i2} P_{i+1,j}}_{j=1, n-1} + \lambda_{i2} P_{i-1,j} + \lambda_{i2} P_{i,j-1}, \quad (П.2)$$

Решая разностное уравнение (П.1), получим, что при $i \geq 0$
 $P_{i0} = C_1 \gamma_1^i + C_2 \gamma_2^i$, где γ_1 и γ_2 - корни характеристического уравнения, соответствующего (П.1). Так как $\gamma_1 < 1$, а $\gamma_2 > 1$, и действительны для произвольных положительных значений параметров $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, то для выполнения условия нормировки необходимо

положить $C_0^i = 0$.

Обозначим $\eta_{ij} = \frac{1}{\epsilon} P_{ij}$, $i = \overline{0, \infty}$, $j = \overline{0, n}$.

Тогда $\eta_{i0} = \delta_i^0$, $i \geq 0$, а уравнения (П.2) примут следующий вид:

$$(\lambda_{i1} + \mu_{i1}) \eta_{ij} = \mu_{i1} \eta_{i+1, j} + \lambda_{i1} \eta_{i-1, j} + \lambda_{i2} \eta_{i, j-1}, \quad (П.3)$$

$$j = \overline{1, n-1}, \quad i \geq 1.$$

Зафиксируем значение индекса j ($j = \overline{1, n-1}$) и рассмотрим j -е уравнение системы (П.3) как разностное уравнение по переменной i относительно функции η_{ij} . Его решение:

$$\eta_{ij} = S_j \delta_i^0 + S_j' \delta_i^1 - \frac{\lambda_{i2}}{\mu_{i1}(\gamma_2 - \gamma_1)} \sum_{\ell=0}^{i-1} (\gamma_2^{i-\ell} - \gamma_1^{i-\ell}) \eta_{e, j-1}, \quad (П.4)$$

где S_j, S_j' - постоянны, $i \geq 0$.

Из равенства $\eta_{0j} = S_j + S_j'$ найдем $S_j = \eta_{0j} - S_j'$, где η_{0j} определяется из уравнения, записанного для состояния $(0, j-1)$:

$$(\lambda_{01} + \mu_{01}) \eta_{0, j-1} = \mu_{01} \eta_{0j} + \mu_{01} \eta_{1, j-1} + \lambda_{02} \eta_{0, j-2} + \mu_{01} \delta_j^1 \eta_{0, j-1},$$

где δ_j^1 - символ Кронеккера; $\eta_{i, -1} = 0$, $i \geq 0$, т.е. для η_{0j} справедлива формула (7). Подставляя выражение для S_j в (П.4), получим

$$\eta_{ij} = \eta_{0j} \delta_i^0 + S_j' (\gamma_2^i - \gamma_1^i) - \frac{\lambda_{i2}}{\mu_{i1}(\gamma_2 - \gamma_1)} \sum_{\ell=0}^{i-1} (\gamma_2^{i-\ell} - \gamma_1^{i-\ell}) \eta_{e, j-1}. \quad (П.5)$$

Считаем, что выражение (П.5) (в силу произвольности значения j) справедливо для всех j ($j = \overline{1, n-1}$).

Так как для всех j ($j = \overline{0, n}$) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_{ij} = 0$ (иначе не будет выполнено условие нормировки) и т.к. все состояния существенны, то

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta_{ij} = 0. \quad (П.6)$$

В формуле (П.5) величина S_j' неизвестна. Для её определения воспользуемся условием (П.6). Предположим, что величины $\eta_{i\ell} > 0$ и справедливо равенство

$$\eta_{i\ell} = \delta_i^1 B_\ell(i), \quad (\ell = \overline{0, j-1}), \quad (П.7)$$

где $B_\ell(i)$ - многочлен степени ℓ по переменной i . В случае $\ell = 0$ предположение (П.7) выполнено (многочлен $B_0(i) = 1$). Учитывая то, что $\ell_1 < 1$, условие (П.6) для $j = \overline{1, n-1}$ можно записать в следующем виде:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[S_j' r_2^i - \frac{\lambda_2}{\mu_{12}(r_2 - r_1)} \sum_{\ell=0}^{i-1} r_2^{i-\ell} \eta_{\ell, j-1} + \frac{\lambda_2}{\mu_{12}(r_2 - r_1)} \sum_{\ell=0}^{i-1} r_2^{i-\ell} \eta_{\ell, j-1} \right] = 0.$$

Заметим, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{i-1} r_2^{i-\ell} \eta_{\ell, j-1} = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{i-1} B_{j-1}(\ell) = 0$, т.к. $r_2 < 1$, а $\sum_{\ell=0}^{i-1} B_{j-1}(\ell)$ - есть некоторый многочлен степени j по переменной i . Таким образом, условие (П.6) можно записать так:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} r_2^i \left[S_j' - \frac{\lambda_2}{\mu_{12}(r_2 - r_1)} \sum_{\ell=0}^{i-1} r_2^{-\ell} \eta_{\ell, j-1} \right] = 0, \quad (\text{П.8})$$

где $j = \bar{1}, n-1$.

Условие (П.8) может быть выполнено лишь в том случае, если

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[S_j' - \frac{\lambda_2}{\mu_{12}(r_2 - r_1)} \sum_{\ell=0}^{i-1} r_2^{-\ell} \eta_{\ell, j-1} \right] = 0.$$

Так как $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{i-1} r_2^{-\ell} \eta_{\ell, j-1} = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{i-1} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^\ell B_{j-1}(\ell) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^\ell B_{j-1}(\ell) < \infty$

(в силу того, что $r_1 < r_2$, а ряд $\sum_{\ell=0}^{\infty} x^\ell B_{j-1}(\ell)$ сходится при $|x| < 1$),

то $S_j' = \frac{\lambda_2}{\mu_{12}(r_2 - r_1)} \sum_{\ell=0}^{\infty} r_2^{-\ell} \eta_{\ell, j-1}$. Определенная таким образом величина S_j' удовлетворяет условию (П.8). Подставим S_j' в (П.5) и, введя обозначения $\omega_{j-1} = S_j'$, получим формулы (5) и (6) теоремы I. Покажем, что предположение (П.7) справедливо и при $\ell = j$. Подставляя в формулу (5) величины $\eta_{\ell, j-1} = r_2^\ell B_{j-1}(\ell)$, получим следующее:

$$\eta_{ij} = r_2^i \left[S_j + \frac{\lambda_2}{\mu_{12}(r_2 - r_1)} \left(\sum_{\ell=0}^{i-1} B_{j-1}(\ell) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^k B_{j-1}(k+i) \right) \right].$$

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^k B_{j-1}(k+i)$ сходится к многочлену $(j-1)$ -го порядка по переменной i с конечными и определенными коэффициентами.

Сумма $\sum_{\ell=0}^{i-1} B_{j-1}(\ell)$ - есть многочлен j -го порядка относительно i .

Обозначая полином в квадратных скобках через $B_j(i)$, получим, что предположение (П.7) справедливо и для $\ell = j$, и, следовательно, оно верно для всех j ($j = \bar{0}, n-1$). Покажем, что $\eta_{ij} > 0$ ($i \geq 0$). Подставляя (6) в (5) и выполняя очевидные преобразования, получим:

$$\eta_{ij} = \eta_{0j} r_2^i + \frac{\lambda_2}{\mu_{12}(r_2 - r_1)} \left[r_2^i \sum_{\ell=0}^{i-1} (r_2^{-\ell} - r_1^{-\ell}) \eta_{\ell, j-1} + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \eta_2^{-k} (\eta_2^i - \eta_2^l) \eta_{e, j-k}] .$$

Так как $\eta_1 < 1$, а $\eta_2 > 1$, то выражение в квадратных скобках положительно. Для величин $\eta_{0,j}$ справедливо

$$\eta_{0,j} = \frac{\lambda_2}{\mu_{12}} \sum_{l=0}^{\infty} \eta_{e, j-l} ,$$

т.е. $\eta_{0,j} > 0$.

Следовательно, $\eta_{ij} > 0$ ($i \geq 0$) и $\lim_{j \rightarrow \infty} \eta_{ij} = 0$ ($j = 0, n-1$).

Рассмотрим систему полн ν уравнений Колмогорова, записанных для множества состояний $\mathcal{X}' = \{ (l, j) : l \geq 0, j = n+1, N \}$

$$(\lambda_{12} + \mu_{12}) P_{ij} = \lambda_{12} P_{i-1, j} + \mu_1 P_{i+1, j} + \mu_2 P_{i, j+1}, \quad j = \overline{n+1, N-1}, \quad (П.9)$$

$$(\lambda_{12} + \mu_{12}) P_{iN} = \mu_1 P_{i+1, N} + \lambda_{12} P_{i-1, N}, \quad (П.10)$$

где $i \geq 0$.

Заметим, что уравнению (П.10) справедливо для $i \geq 1$.

Исходя из него, получим $P_{iN} = \alpha_1 \mathcal{X}_1^i + \alpha_2' \mathcal{X}_2^i$, где \mathcal{X}_1 и \mathcal{X}_2 - корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (П.10). Так как $\mathcal{X}_1 < 1$, а $\mathcal{X}_2 > 1$ для произвольных положительных $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, то необходимо положить $\alpha_2' = 0$.

Введём величины ξ_{ij} по формуле (2). Тогда $\xi_{iN} = \mathcal{X}_1^i$, $i \geq 0$, а уравнения (П.9) примут следующий вид

$$(\lambda_{12} + \mu_{12}) \xi_{ij} = \lambda_{12} \xi_{i-1, j} + \mu_1 \xi_{i+1, j} + \mu_2 \xi_{i, j+1}, \quad (П.11)$$

$$j = \overline{n+1, N-1}.$$

Решая уравнения системы (П.11) последовательно, начиная с уравнения, записанного для $j = N-1$, и кончая уравнением, записанным для $j = n+1$, для величин ξ_{ij} получим

$$\xi_{ij} = a_j \mathcal{X}_1^i + a_j' \mathcal{X}_2^i - \frac{\mu_2}{\mu_1(\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_1)} \sum_{l=1}^{i-1} (\mathcal{X}_2^{i-l} - \mathcal{X}_1^{i-l}) \xi_{e, j+l},$$

где a_j и a_j' неизвестны, $i \geq 1$. Считаем, что j изменяется от N до $n+1$. Записывая правые уравнения Колмогорова для состояния $(0, j+1)$, получим формулу (10) для определения величины ξ_{0j} . Из уравнения, записанного для состояния $(1, j)$, по-

лучим

$$a_j = \frac{\lambda_1}{\lambda_{12}} \xi_{0j} - a'_j.$$

Тогда

$$\xi_{ij} = \frac{\lambda_1}{\lambda_{12}} \xi_{0j} \alpha_1^i + a'_j (\alpha_2^i - \alpha_1^i) - \frac{\mu_2}{\mu_1 (\alpha_2 - \alpha_1)} \sum_{l=1}^{i-1} (\alpha_2^{i-l} - \alpha_1^{i-l}) \xi_{l,j+1}.$$

Проведя для ξ_{ij} рассуждения, аналогичные рассуждениям, проведенным для η_{ij} , получим

$$\xi_{ij} > 0, (i=0, \infty), \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_{ij} = 0, \xi_{ij} = \alpha_1^i R_j(i),$$

где $R_j(i)$ - некоторый многочлен степени $(n-j)$ по переменной i . Обозначая $\prod_{j=1}^n a'_j = \alpha_j$ и вводя α_j по формуле (9), можно получить формулу (8).

Для состояний (i, n) уравнения в финальных вероятностях будут иметь вид

$$(\lambda_{12} + \mu_{12}) P_{in} = \lambda_{12} P_{i-1, n} + \mu_{12} P_{i+1, n} + \mu_2 P_{i, n+1} + \lambda_2 P_{i, n-1}, \quad (11P) \\ i \geq 2.$$

Заметим, что вероятность состояния $(0, n)$ можно определить, используя как формулу (7), так и формулу (10). Таким образом, имеет место равенство: $C \eta_{0n} = a \xi_{0n}$. Определив константу a , получим формулу (4). Считаем, что $P_{0n} = C \eta_{0n}$. Введя в формулу η_{in} по формуле (1), уравнение (11P) можно переписать так

$$(\lambda_{12} + \mu_{12}) \eta_{in} = \lambda_{12} \eta_{i-1, n} + \mu_{12} \eta_{i+1, n} + \lambda_2 \eta_{i, n-1} + \mu_2 \frac{\eta_{0n}}{\xi_{0n}} \xi_{i, n+1}, \\ i \geq 2.$$

Решая это уравнение как разностное относительно η_{in} , получим:

$$\eta_{in} = b_1 + b_2 \tau^i - \frac{1}{\mu_{12} (1-\tau)} \sum_{l=1}^{i-1} (1-\tau^{i-l}) (\mu_2 \frac{\eta_{0n}}{\xi_{0n}} \xi_{l, n+1} + \lambda_2 \eta_{l, n-1}).$$

Из уравнения, записанного для состояния $(1, n)$, найдем константу b_2

$$b_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_{12}} \eta_{0n} - b_1.$$

Тогда

$$\eta_{in} = \frac{\lambda_1}{\lambda_{12}} \eta_{0n} \tau^i + \beta_1 (1 - \tau^i) - \frac{1}{\mu_{12}(1-\tau)} \sum_{\ell=1}^{i-1} (1 - \tau^{i-\ell}) \times \\ \times (\mu_2 \frac{\eta_{0n}}{\xi_{0n}} \xi_{\ell, n+1} + \lambda_2 \eta_{\ell, n-1}).$$

Для величин η_{in} должно быть выполнено условие (П.6)

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_{12}} \eta_{0n} \tau^i + \beta_1 (1 - \tau^i) + \frac{1}{\mu_{12}(1-\tau)} \sum_{\ell=1}^{i-1} \tau^{i-\ell} (\mu_2 \frac{\eta_{0n}}{\xi_{0n}} \times \right. \quad (\text{П.13}) \\ \left. \times \xi_{\ell, n+1} + \lambda_2 \eta_{\ell, n-1}) - \frac{1}{\mu_{12}(1-\tau)} \sum_{\ell=1}^{i-1} (\mu_2 \frac{\eta_{0n}}{\xi_{0n}} \xi_{\ell, n+1} + \lambda_2 \eta_{\ell, n-1}) \right] = 0.$$

Если $\tau < 1$, то (П.13) можно переписать в виде

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[\beta_1 - \frac{1}{\mu_{12}(1-\tau)} \sum_{\ell=1}^{i-1} (\mu_2 \frac{\eta_{0n}}{\xi_{0n}} \xi_{\ell, n+1} + \lambda_2 \eta_{\ell, n-1}) + \frac{1}{\mu_{12}(1-\tau)} \times \right. \\ \left. \times \sum_{\ell=1}^{i-1} \tau^{i-\ell} (\mu_2 \frac{\eta_{0n}}{\xi_{0n}} \xi_{\ell, n+1} + \lambda_2 \eta_{\ell, n-1}) \right] = 0.$$

Учитывая то, что $\xi_{\ell, n+1} = \alpha_1^\ell R_{n+1}(\ell)$, $\eta_{\ell, n-1} = \gamma_1^\ell B_{n-1}(\ell)$,

имеем $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{i-1} \tau^{i-\ell} (\mu_2 \frac{\eta_{0n}}{\xi_{0n}} \xi_{\ell, n+1} + \lambda_2 \eta_{\ell, n-1}) = 0$.
 Действительно, если $\max(\alpha_1, \gamma_1) \leq \tau < 1$, то $\sum_{\ell=1}^{\infty} (\frac{\alpha_1}{\tau})^\ell R_{n+1}(\ell) < \infty$,
 и $\sum_{\ell=1}^{\infty} (\frac{\gamma_1}{\tau})^\ell B_{n-1}(\ell) < \infty$, следовательно

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tau^i \sum_{\ell=1}^{i-1} \left[\mu_2 \frac{\eta_{0n}}{\xi_{0n}} \left(\frac{\alpha_1}{\tau}\right)^\ell R_{n+1}(\ell) + \lambda_2 \left(\frac{\gamma_1}{\tau}\right)^\ell B_{n-1}(\ell) \right] = 0.$$

Если же $\tau < \alpha_1$, то

$$0 < \sum_{\ell=1}^{i-1} \tau^{i-\ell} \alpha_1^\ell R_{n+1}(\ell) < \sum_{\ell=1}^{i-1} \alpha_1^{i-\ell} \alpha_1^\ell R_{n+1}(\ell) = \alpha_1^i \sum_{\ell=1}^{i-1} R_{n+1}(\ell).$$

Т.к. $\alpha_1^i \sum_{\ell=1}^{i-1} R_{n+1}(\ell) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$, то $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^{i-1} \tau^{i-\ell} \xi_{\ell, n+1} = 0$

Остальные возможные случаи: $\beta_1 \leq \tau < \alpha_1$, $\alpha_1 \leq \tau < \beta_1$, $\tau \leq \min(\alpha_1, \beta_1)$ - рассматриваются аналогично. Таким образом, если $\tau < 1$, то условие (П.13) можно записать так

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[\beta_1 - \frac{1}{\mu_{12}(1-\tau)} \sum_{\ell=1}^{i-1} \mu_2 \frac{\eta_{0n}}{\xi_{0n}} \xi_{\ell, n+1} + \lambda_2 \eta_{\ell, n-1} \right] = 0$$

Отсюда определим константу β_1

$$\beta_1 = \frac{1}{\mu_{11}(1-\tau)} \sum_{l=1}^{\infty} (\mu_{11} \frac{\eta_{0n}}{\xi_{0n}} \xi_{l,n+1} + \lambda_2 \eta_{l,n+1}) < \infty$$

То есть в случае $\tau < 1$ постоянная величина β_1 конечна и определяется однозначно.

Если же $\tau \geq 1$, то ни при каком конечном значении константы β_1 условие (П.6) выполнено не будет. Это значит, что при $\tau \geq 1$ ФРВС не существует.

Пусть $\tau < 1$. Подставляя значения констант β_1 и β_2 в выражение для η_{in} , получим формулу (II). Константа β равна β_2 . Определяя постоянную величину C из условия нормировки $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$, получим формулу (3).

Теорема I доказана.

Доказательство теоремы 2 отличается от доказательства теоремы I лишь тем, что постоянные S'_j , a'_j и β_1 определяются не из условия (П.6), а из дополнительных граничных уравнений, записанных для состояния (m, j) , где $j = \overline{0, N}$, $m < \infty$.

Л и т е р а т у р а

- I. Малышев В.А. Случайные блуждания, Уравнения Винера-Хопфа в четверти плоскости. Автоморфизмы Галуа.-М.; Изд-во МГУ, 1970,-201 с.

НЕКОТОРЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

П. Л. Рикон

I. Введение

Настоящая работа имеет целью — получение новых результатов, а постановку и способы решения некоторых задач в направлении исследования, представляющих, по мнению автора, определенный интерес для управляемых систем массового обслуживания.

Дискретные управляемые марковские цепи, марковские и полумарковские процессы прочно вошли в арсенал исследования управляемых систем массового обслуживания [1]. К сожалению, многие задачи анализа и управления системами массового обслуживания выхлбят за рамки дискретных марковских и полумарковских моделей. Для анализа таких систем приходится использовать более сложные конструкции случайных процессов, например, регенерирующие процессы с произвольным множеством состояний, регенерации, взаимочиса регенерирующие процессы [2 - 4]. Исследование вопросов управления такими процессами требует привлечения более сложного математического аппарата, чем для дискретных процессов. Однако, если ограничиться исследованием достаточно широкого с точки зрения приложений класса стратегий управления, изменяющихся лишь в моменты регенерации соответствующего процесса, то задача управления им сводится к исследованию управляемой марковской или полумарковской цепи с произвольным множеством состояний.

Управляемые марковские цепи с произвольным пространством состояний и управления подвергались в последнее время тщательному теоретическому исследованию. Результаты этих исследований вместе с достаточно подробным обзором можно найти, например, в работе [5].

Ниже приводится понятие управляемых марковской цепи в работе

целей о произвольных пространствах состояний в управлении и рассматриваются некоторые представляющие интерес для теории управляемых систем массового обслуживания задачи исследования таких процессов как с произвольными, так и дискретными пространствами состояний в управлении.

2. Управляемые марковские и полумарковские цепи с произвольными пространствами состояний в управлении

Однородная управляемая марковская цепь ξ_t задается набором

$$\xi_t = \{ X, U, P(x, u, dy), r(x, u), f(x), t \in T \},$$

где (X, X) - измеримое пространство состояний, (U, U) - измеримое пространство управлений, $P(x, u, A)$ ($x \in X, u \in U, A \in X$) - семейство переходных вероятностей, $r(x, u)$ ($x \in X, u \in U$) - одношаговая плата /доход или потери/ при выходе из состояния x с управлением u , $f(x)$ ($x \in X$) - финальная плата /в задачах управления с конечным горизонтом планирования/

Если через $z^t = (x_0, u_0, \dots, x_{t-1}, u_{t-1}, x_t)$ обозначить траектории процесса до момента t , то стратегия управления π в общем случае задается последовательностью $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_T, \dots)$ условных распределений на U : $\pi_t = \pi_t(dz^t / \mathbb{P}^t)$.

Стратегия называется марковской, если $\pi_t(dz^t / \mathbb{P}^t) = \pi_t(dz^t / x_t) \forall t$, и нерандомизированной, если распределение $\pi_t \forall t$ вырождено, т.е. сосредоточено в одной точке. Нерандомизированная марковская стратегия называется простой. Простая стратегия задается последовательностью функций $\pi_t = (\pi_0(x), \dots, \pi_t(x), \dots)$. Простая стратегия, для которой $\pi_t(\cdot) = f(\cdot) \forall t$, называется однородной и обозначается f^{∞} .

Суммарная плата за время T определяется функционалом от траектории z^T

$$R_T = R_T(z^T) = \sum_{t=0}^{T-1} r(x_t, u_t) + f(x_T), \quad (1)$$

а средняя суммарная плата - функционалом качества /дохода или потерь/

$$V_T(\pi_0, \pi) = M_{\pi_0}^{\pi} R_T. \quad (2)$$

Остановимся для определенности на оптимизации дохода. Тогда задача управления такой цепью на конечном интервале времени T состоит в построении стратегии π^* , максимизирующей средний доход

$$V_T(\pi_0, \pi) = \sup_{\pi} V_T(\pi_0, \pi) = V_T(\pi_0^*).$$

В задачах с бесконечным горизонтом планирования $T: \infty$ в силу расходимости с вероятностью 1 ряда (1) приходится менять постановку задачи. В этом случае либо ставится задача определения β -оптимальной стратегии, т.е. стратегии, оптимальной относительно функционала

$$V_{\beta}(\bar{x}_0, \pi) = M_{\bar{x}_0}^{\pi} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t), \quad (3)$$

либо решается задача определения оптимальной в среднем стратегии, т.е. стратегии, оптимальной относительно функционала

$$v(\bar{x}_0, \pi) = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} V_T(\bar{x}_0, \pi). \quad (4)$$

Заслуживает внимания также исследование мажорантных стратегий, т.е. стратегий, получающихся предельным переходом из стратегий, оптимальных на конечном интервале времени при $T \rightarrow \infty$ для различных /обычно рассматривает нулеву/ финальных плат.

Однородный полумарковский процесс ξ_t с произвольным фазовым пространством характеризуется своим состоянием, неизменным в течение некоторого времени, и временем пребывания в этом состоянии. Если через S_n обозначить последовательность моментов скачков процесса ξ_t и положить $\bar{x}_n = \xi_{S_n} + 0$, $\theta_n = S_n - S_{n-1}$, то поведение полумарковского процесса ξ_t полностью описывается парой $\eta_n = (\bar{x}_n, \theta_n)$. Последовательность $\eta_n = (\bar{x}_n, \theta_n)$ образует марковскую цепь в фазовом пространстве $(Y, \mathcal{Y}) = (X \times \mathcal{R}_+, X \times \mathcal{R}_+)$, где \mathcal{R}_+ - множество неотрицательных действительных чисел, а \mathcal{R}_+ - σ -алгебра его борелевских подмножеств.

Марковская цепь $\eta_n = (\bar{x}_n, \theta_n)$ обладает тем свойством, что её переходная вероятность не зависит от второй компоненты

$$P\{\eta_n \in C / \eta_{n-1} = \gamma\} = P\{\bar{x}_n \in A, \theta_n \in B / \bar{x}_{n-1} = x, \theta_{n-1} = z\} = P\{\eta_n \in C / \bar{x}_{n-1} = x\}.$$

Такие марковские цепи называются полумарковскими; при этом первая компонента \bar{x}_n цепи η_n сама является марковской цепью.

Таким образом, если ограничиться стратегиями, изменяющимися лишь в моменты скачков, то исследование управляемого полумарковского процесса с произвольным пространством состояний X сводится к исследованию соответствующей управляемой полумарковской /частному случаю марковской/ цепи с пространством состояний $Y: X \times \mathcal{R}_+$. При этом, если для обычной структуры доходов

управляемого полумарковского процесса: $r_1(x, u)$ - доход за единицу времени пребывания в состоянии x при управлении u ;

$r_2(x, u)$ - доход за переход из состояния x при управлении u положить

$$r(x, u) = r_1(x, u) + r_2(x, u)$$

и обозначить через $I(A)$ индикатор события A , то функционал дохода для управляемого полумарковского процесса с конечным горизонтом планирования T можно записать в виде

$$R_T = \sum_{n=0}^{T-1} r(y_n, u_n) I(S_n < T) + r_2(y_{T-1}, u_{T-1}) (T - S_{T-1}) I(S_{T-1} < T < S_n),$$

подобном виду функционала (1) для управляемой марковской цепи. Отсюда в случае бесконечного горизонта планирования для среднего дохода в единицу времени получим выражение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} V_T(\gamma_0, \pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{\gamma_0}^n R S_n}{M_{\gamma_0}^n S_n}.$$

Основные усилия в исследованиях теоретического характера направлены на выяснение условий, при которых в задачах определения оптимальных стратегий управления марковскими и полумарковскими цепями можно ограничиться классом простых марковских стратегий в моделях с конечным горизонтом планирования $T < \infty$ или однородных простых марковских стратегий в моделях с бесконечным горизонтом планирования. Обзор результатов, полученных в этом направлении для цепей с дискретными /конечными или счетными/ пространствами X и U , можно найти в работах [1, 6]. Наиболее доступной для ознакомления с произвольным случаем является, по-видимому, работа [5].

Прикладные исследования направлены на разработку алгоритмов и программного обеспечения поиска оптимальных стратегий управления. Определенные результаты в этом направлении имеются на сегодняшний день лишь для моделей с конечными пространствами состояний и управлением. В этой связи целесообразно отметить некоторые вопросы, требующие решения.

2.1. В большинстве исследований как теоретического, так и алгоритмического характера, в том числе и для конечных X и U , предполагается ограниченность функций $r(x, u)$ и $r(x)$ плат, а

то время как в задачах теории массового обслуживания /в частности, для приоритетной системы $M_r/G/1$ / эти функции зависят от состояний линейно и неограниченно возрастают с ростом очередей. Применение результатов теории управляемых марковских цепей в задачах теории массового обслуживания, таким образом, требует их обобщения на случай неограниченных функций плат. Некоторые результаты в этом направлении получены Липпманом [7] .

2.2. Алгоритмы определения оптимальных стратегий базируются на канонических уравнениях, которым удовлетворяют максимальные доходы и оптимальные стратегии, и сводятся либо к итерационным процедурам, либо к задачам линейного программирования. Реально на ЭВМ эти алгоритмы могут быть реализованы лишь для конечных пространств X и U . Вычислительные аспекты определения оптимальных стратегий в случае бесконечных /в том числе счётных/ пространств X и U требуют детального изучения.

На этом пути возникают и интересные теоретические вопросы, связанные, например, с исследованием сходимости характеристик определенным образом усечённых /по пространствам состояний или управлений/ управляемых марковских цепей к соответствующим характеристикам не усечённых цепей.

2.3. Как было отмечено выше, исследование управляемого полумарковского процесса с общим пространством состояний сводится к исследованию соответствующей управляемой марковской цепи с дробно-линейным функционалом качества. Более пристального внимания заслуживает исследование оптимальных стратегий относительно нелинейных, но реально возникающих, функционалов качества.

3. Некоторые вопросы устойчивости оптимальных стратегий

Ограничимся случаем конечных пространств X и U .

3.1. Оптимальную стратегию управления системой на конечном интервале времени можно найти итерационным методом с помощью уравнения Беллмана

$$V_n(x) = \max_{u \in U} \left[r(x, u) + \sum_{y \in X} p(x, u, y) V_{n-1}(y) \right], \quad V_0(x) = r(x),$$

где компоненты вектора $V_n = \{V_n(x), x \in X\}$ имеют смысл максимального дохода, достижимого за n шагов из состояния x , и называются оценками состояний .

Естественно, вектор V_n зависит от вектора Γ финальных плат. Гораздо меньшее влияние вектор финальных плат Γ оказывает на оптимальную стратегию $S_n = \{f_1^n(x), \dots, f_n^n(x)\}$, где $f_t^n(x)$ управление, принимаемое в состоянии x за t шагов до окончания горизонта планирования. В случае конечных пространств состояний X и управлений U для любого фиксированного горизонта планирования T можно указать области изменения финальной платы Γ , в которых оптимальная стратегия остаётся неизменной.

Исследование областей устойчивости оптимальных стратегий к изменению финальной платы Γ представляет несомненный интерес, т.к. Γ является справедливой ценой системы в результате её эксплуатации в течение заданного времени при фиксированной стратегии. В связи с этим представляет интерес также постановка двойственной задачи: определить значения доходов /или штрафов/ $\Gamma(x, u)$ и финальных плат $\gamma(x)$, при которых заданная стратегия $S = \{f_t(x), x \in X, t = \overline{1, T}\}$ будет оптимальной. Такая постановка вопроса представляет интерес в ряде практических задач, например, в задаче об эксплуатации оборудования.

Пусть X представляет собой множество состояний, в которых может находиться оборудование; U - множество режимов его эксплуатации; вероятности $p(x, u, y)$ описывают процесс изменения состояний оборудования при различных режимах его эксплуатации. Тогда прямая задача /при фиксированных $\Gamma(x, u)$ и $\gamma(x)$ / состоит в построении оптимальной стратегии использования оборудования. Двойственная задача состоит в установлении штрафов $\Gamma(x, u)$ и $\gamma(x)$ при сдаче, скажем, оборудования в прокат с тем, чтобы в процессе его эксплуатации эффективной была заданная разумная /например, бережливая с точки зрения сохранения ги оборудования/ стратегия S . Насколько известно автору, такая постановка задачи в литературе не обсуждалась.

Представляет несомненный интерес также исследование устойчивости оптимальной стратегии к малым изменениям параметров модели $p(x, u, y)$. Некоторые более точные постановки и подходы к решению подобных задач содержатся в работе [8].

3.2. Обратимся теперь к моделям с бесконечным горизонтом планирования. Для таких моделей, как отмечалось в п. 2 в силу расходимости ряда (1), приходится менять постановку задачи.

Один из подходов к определению оптимальной стратегии в этом случае состоит в том, чтобы несмотря на расходимость ряда (1) найти оптимальную стратегию S_T^n для фиксированного конеч-

ного горизонта планирования T и фиксированной финальной платы r и исследовать её поведения при $T \rightarrow \infty$ для различных r /обычно полагают $r = 0$ /. Известно /см. например [6]/, что оптимальными при этом могут оказаться периодические стратегии, причём различные для разных финальных плат r .

Заслуживает внимания исследование вопросов устойчивости оптимальных мажорантных стратегий к изменению финальных плат r .

3.3. Другой способ определения оптимальных стратегий в моделях с бесконечным горизонтом планирования состоит в построении β -оптимальных стратегий, т.е. стратегий, оптимальных относительно функционала (3). Исследование β -оптимальных стратегий представляет как самостоятельный интерес /особенно для функционалов экономического содержания/, так и как способ определения оптимальных в среднем стратегий.

Известно [6], что в случае конечных пространств состояний X и управлений U β -оптимальные стратегии обладают определённой устойчивостью к изменению параметра β , а именно: на отрезке $[0, 1]$ существует лишь конечное число точек β_k ($\beta_{k-1} < \beta_k$), таких что β -оптимальная стратегия остаётся неизменной на интервале (β_{k-1}, β_k) , причём на границах интервалов устойчивости имеется некоторое множество β -оптимальных стратегий. В [6] приведён алгоритм определения концов интервалов устойчивости - критических точек, который реализован на ЭВМ ЕС в МИНХ и ГП им. И.М. Губкина.

Отсюда в частности следует, что если β^* крайняя правая критическая точка, то для $\beta > \beta^*$ β -оптимальная стратегия совпадает с I -оптимальной и, следовательно, с оптимальной в среднем, что позволяет предложить метод расчёта оптимальных в среднем стратегий.

Было бы интересно обобщить эти результаты на модели с бесконечным /счётным/ пространством состояний и управлений и на полумарковские модели, хотя ожидать их простого переноса здесь не приходится.

3.4. Связь между оптимальными в среднем, β -оптимальными, I -оптимальными и оптимальными мажорантными стратегиями для марковских управляемых цепей с бесконечным горизонтом планирования и конечными пространствами состояний X и управлений U достаточно подробно изучена [6]. В случае общих /счётных в том числе/ пространств X и U взаимосвязь между этими стратегиями не изучена и, по-видимому, более сложна.

3.5. Коснёмся ещё одного интересного вопроса устойчивости оптимальных стратегий в задачах теории массового обслуживания. Известно [6], что одним из способов определения оптимальных стратегий управления для управляемых марковских цепей с конечными X и U является метод линейного программирования. Специфика задачи теории массового обслуживания и специальный выбор переменных линейного программирования позволяют в некоторых случаях, с одной стороны, распространить эти идеи на модели с бесконечным числом состояний, с другой - использовать понятия двойственности в задачах линейного программирования для постановки и решения задач определения областей устойчивости оптимальных стратегий.

Например, в работе [9] задача определения оптимальной дисциплины обслуживания требований в системе $M_c/G|1$ с ветвящимся потоком вторичных требований сводится к задаче линейного программирования

$$E' X C \Rightarrow \min$$

при ограничениях

$$X'A + A'X = B,$$

где E, C - векторы, а A, B - матрицы, определяемые переменными модели, а $X = \{x_{ij}\}$, $x_{ij} = M \xi_j / E$ - средняя длина очереди требований типа j в момент принятия управления i - матрица переменных задачи линейного программирования.

Непосредственное решение прямой задачи оказывается довольно трудным. Заметим, однако, что в силу определения $x_{ij} = 0$ тогда и только тогда, когда требования типа j имеют приоритет перед требованиями типа i . Если теперь фиксировать некоторую приоритетную дисциплину обслуживания и воспользоваться соотношениями двойственности линейного программирования, то уравнения двойственной задачи позволяют выразить её переменные через параметры модели, а неравенства двойственной задачи - найти условия на переменные модели, обеспечивающие оптимальность заданной приоритетной стратегии. Оказывается, что различным приоритетным дисциплинам соответствуют различные области в пространстве параметров модели, причём они покрывают всё это пространство, так что для построения оптимальной стратегии достаточно ограничиться классом приоритетных стратегий.

В качестве побочного продукта получаем области устойчивости оптимальных стратегий. Заметим также, что подобный подход представляет значительно больший интерес с практической точки зрения, чем прямой метод определения оптимальной стратегии.

Л и т е р а т у р а

Рыков В.В. Управляемые системы массового обслуживания. Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т.12.-М., ВИНТИ, 1975, с. 43 - 153.

Рыков В.В., Ястребенцкий М.А. О регенерирующих процессах с несколькими типами точек регенерации.-Кибернетика, 1971, № 3, с. 82 - 86.

Рыков В.В. Регенерирующие процессы с зложенными периодами регенерации и их применение при исследовании приоритетных систем массового обслуживания.-Кибернетика, 1975, № 6, с. 105 - 111.

Жолков С.И., Рыков В.В. Разложимые регенерирующие процессы в теории массового обслуживания. Теория массового обслуживания. Труды Всесоюзной школы - семинара.-М.: БНИИСИ, 1981, с.103 - 112.

Динкин Е.Л., Шкевич А.А. Управляемые марковские процессы и их приложения.-М.: Наука, 1975.

Рыков В.В. Управляемые случайные процессы и системы /дискретное время/.-М., МИНХ и ГП им. И.М. Губкина, 1977.

Lippman S.A. Semi-Markov decision processes with unbounded rewards. Management Sciences, 1973, vol 19 p. 717-731.

Шварц Л.Б. Об условиях реализуемости заданных стационарных режимов в приоритетных системах массового обслуживания.-Автоматика и телемеханика, 1975, № 10.

Китаев М.И., Рыков В.В. Система обслуживания с ветвящимися потоками вторичных требований.-Автоматика и телемеханика, 1980, № 9, с. 52 - 61.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ МАССОВОГО
ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ МЕДЛЕННЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ ИНТЕНСИВНОСТИ
ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА

А.Ф. Терпугов

Исследование характеристик систем массового обслуживания в нестационарном случае сводится к решению системы дифференциальных уравнений вида $\frac{dP}{dt} = QP$, где $P(t)$ - вектор-столбец переходных вероятностей, а Q - некоторая матрица, зависящая от времени t . В общем случае решение такой системы очень сложно: в случае, когда характеристики входящего потока меняются со временем достаточно медленно, приближенное решение можно искать следующим образом.

Рассмотрим уравнение вида $QP = 0$. Решение этого уравнения, с учетом того, что матрица Q в системах массового обслуживания вырожденная, имеет вид $Q = RP + P_0$, где P_0 удовлетворяет условиям:

$$QP_0 = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{0i} = 1,$$

где P_{0i} - i -я компонента вектора P_0 . Матрицу $R = \|R_{ij}\|$ можно подобрать так, чтобы $\forall_j \sum_{i=1}^n R_{ij} = 0$, тогда $\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n R_{ij} P_j) = 0$.

Рассмотрим последовательность векторов

$$P_1 = R \frac{dP_0}{dt}, \quad P_2 = R \frac{dP_1}{dt}, \quad \dots, \quad P_{n+1} = R \frac{dP_n}{dt}$$

и вектор

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots = (I + (RD) + (RD)^2 + \dots) P_0,$$

где I - единичная матрица и $D = \frac{d}{dt}$ - оператор дифференцирования. Если норма оператора RD меньше 1, то $(I + (RD) + (RD)^2 + \dots) = (I - RD)^{-1} P_0$ и

$$P = (I - RD)^{-1} P_0, \quad P - R \frac{dP}{dt} = P_0, \quad P = P_0 + R \frac{dP}{dt}$$

Отсюда получаем, что

$$QP = \frac{dP}{dt}, \tag{I}$$

причем автоматически выполняется условие нормировки $\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$. Таким образом, вектор P является решением системы (I). Так как P_0 есть не что иное, как финальное распределение вероятностей при отсутствии флуктуаций, то P можно рассматривать как решение системы (I) в случае, когда до момента времени характеристики входящего потока не менялись и в СМО установилось финальное распределение вероятностей.

При медленных флуктуациях, когда $\frac{dP_0}{dt}$ малы, можно ограничиться лишь первым приближением и брать $P = P_0 + P_1$, что даст приближенное распределение вероятностей по состояниям СМО.

Проиллюстрируем эту методику на простейшем примере однолинейной СМО, на которую поступает нестационарный пуассоновский поток заявок интенсивности $\lambda(t)$, причем $\dot{\lambda} \ll \lambda(t)$. Обслуживание будем предполагать экспоненциальным с интенсивностью μ . Обозначим через $p_i(t)$ - вероятность того, что в момент времени t в системе находится i заявок. Тогда $p_i(t)$ удовлетворит уравнениям [I]:

$$\frac{d p_i(t)}{dt} = \lambda p_{i-1}(t) - (\lambda + \mu) p_i(t) + \mu p_{i+1}(t), \quad i > 0,$$

$$\frac{d p_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t).$$

Для нахождения $p_i^{(n)}(t)$ следует решить систему уравнений:

$$+\lambda p_{i-1}^{(n)}(t) - (\lambda + \mu) p_i^{(n)}(t) + \mu p_{i+1}^{(n)}(t) = 0,$$

$$-\lambda p_0^{(n)}(t) + \mu p_1^{(n)}(t) = 0,$$

с дополнительным условием $\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i^{(n)}(t) = 1$. Решение это имеет вид [1]

$$\rho_i^{(n)}(t) = \left(1 - \frac{\lambda(t)}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda(t)}{\mu}\right)^i.$$

Если известно $\rho_i^{(k-1)}(t)$, то $\rho_i^{(k)}(t)$ найдутся из системы уравнений:

$$\lambda \rho_{i-1}^{(k)}(t) - (\lambda + \mu) \rho_i^{(k)}(t) + \mu \rho_{i+1}^{(k)}(t) = \dot{\rho}_i^{(k-1)}(t) \quad (2)$$

с дополнительным условием: $\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i^{(k)}(t) = 0$.

Так как корни характеристического уравнения $\lambda - (\lambda + \mu)z + \mu z^2 = 0$ равны 1 и λ/μ , то решение системы (2) следует искать в виде

$$\rho_i^{(k)} = A \sum_{s=0}^{i-1} \dot{\rho}_s^{(k-1)} + B \sum_{s=0}^{i-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i-s} \dot{\rho}_s^{(k-1)} + C_1^{(k)} - C_2^{(k)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i.$$

Подставляя это решение в исходную систему (2) и приравнивая коэффициенты при $\dot{\rho}_s^{(k-1)}(t)$ слева и справа, получим

$$A = \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad B = -\frac{\lambda}{\mu} A = -\frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

Собственные уравнения системы (2) получаются при $i = 1$ и $i = 0$

$$\begin{aligned} \lambda \rho_0^{(k)} - (\lambda + \mu) \rho_1^{(k)} + \mu \rho_2^{(k)} &= \dot{\rho}_1^{(k-1)}; \\ -\lambda \rho_0^{(k)} + \mu \rho_1^{(k)} &= \dot{\rho}_0^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Подстановка решения в первое из них даст

$$\rho_0^{(k)} = C_1^{(k)} + C_2^{(k)},$$

а второе уравнение удовлетворяется тождественно. Поэтому при $i = 0$ $\sum_{s=0}^{i-1} \dot{\rho}_s^{(k-1)}$ и $\sum_{s=0}^{i-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i-s} \dot{\rho}_s^{(k-1)}$ следует считать равными нулю.

Так как при $i \rightarrow \infty$ $\rho_i^{(k)} \rightarrow 0$, то $C_1^{(k)} = 0$. Для нахождения константы $C_2^{(k)}$ рассмотрим условие $\sum_{i=0}^{\infty} \dot{\rho}_i^{(k)} = 0$. Так как при этом $\sum_{i=0}^{\infty} \dot{\rho}_i^{(k)} = 0$, то выражение для $\rho_i^{(k)}$ можно переписать в виде

$$\rho_i^{(k)} = C_2^{(k)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i - \frac{1}{\mu - \lambda} \left[\sum_{s=0}^{i-1} \dot{\rho}_s^{(k-1)} + \sum_{s=0}^{i-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i-s} \dot{\rho}_s^{(k-1)} \right].$$

Имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \dot{\rho}_i^{(s-1)} = \sum_{s=0}^{\infty} \dot{A}_s^{(s-1)} \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \sum_{s=0}^{\infty} s \dot{A}_s^{(s-1)},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{i-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i-s} \dot{\rho}_i^{(s-1)} = \sum_{s=0}^{\infty} \dot{A}_s^{(s-1)} \sum_{i=s+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i-s} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \sum_{s=0}^{\infty} \dot{A}_s^{(s-1)} = 0.$$

Поэтому условие $\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i^{(n)} = 0$ переходит в уравнение

$$-\frac{1}{\mu-\lambda} \sum_{s=0}^{\infty} s \dot{\rho}_s^{(s-1)} + C_2^{(n)} \frac{\mu}{\mu-\lambda} = 0,$$

откуда $C_2^{(n)} = \frac{1}{\mu} \sum_{s=0}^{\infty} s \dot{\rho}_s^{(s-1)}$ и окончательно

$$\rho_i^{(n)} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \sum_{s=0}^{\infty} s \dot{\rho}_s^{(s-1)} - \frac{1}{\mu-\lambda} \left[\sum_{s=1}^{\infty} \dot{\rho}_s^{(s-1)} + \sum_{s=0}^{i-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i-s} \dot{\rho}_s^{(s-1)} \right]. \quad (3)$$

Так как $\rho_i^{(n)}(t) = (1 - \frac{\lambda}{\mu}) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$, то, подставляя это выражение в (3), получим

$$\rho_i^{(n)}(t) = \frac{\lambda}{\mu^2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i-1} \left[\frac{\rho}{(1-\rho)^2} - \frac{i(i+1)}{2} \right], \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad i \geq 0.$$

Подставляя выражение для $\rho_i^{(n)}(t)$ в (3), можно было бы вычислить $\rho_i^{(n)}(t)$ и т.д.

Знание $\rho_i^{(n)}(t)$ позволяет найти и другие характеристики системы. Найдем, например, среднее число заявок в системе.

Так как

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \rho_i^{(n)}(t) = \frac{\rho}{1-\rho},$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^2 \rho_i^{(n)}(t) = -\frac{\lambda}{\mu^2} \cdot \frac{1+\rho^2}{(1-\rho)^2},$$

то приближенно

$$M\{i\} = n = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\dot{\lambda}}{\mu^2} \cdot \frac{1+\rho^2}{(1-\rho)^3} + \dots,$$

где отброшенные члены содержат более высокие производные от λ и степени $\dot{\lambda}$, выше первой.

Литература

1. Д.Кениг, Д.Штойян. Методы теории массового обслуживания. -М. Радио и связь, 1981.
2. Б.В.Гнеденко, И.Н.Коваленко. Введение в теорию массового обслуживания. -М.: Наука, 1966.

ПРИМЕНЕНИЕ АВТОМАТОВ С ЛИНЕЙНОЙ ТАКТИКОЙ
В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ НАБЛЮДЕНИЯМИ

Е.М.Тонконогов

Современные информационные системы являются многоканальными, причем на каждом шаге наблюдения анализу подвергается один или в лучшем случае несколько каналов. Время, необходимое для последовательного просмотра всех каналов, оказывается достаточно большим. Между тем большинство каналов являются "густыми", т.е. не содержат сигналов, и затраты на их просмотр являются бесполезными. В связи с этим часто прибегают к управляемому просмотру, стремясь максимально сократить время, затрачиваемое на просмотр пустых каналов. Оптимальные алгоритмы управления просмотром каналов могут быть реализованы в аналоговом варианте. Значительно более простую реализацию этих алгоритмов можно получить, используя дискретные автоматы с линейной тактикой. Вопросам эффективности применения таких автоматов для обнаружения неподвижных сигналов посвящены работы [2, 3]. В данной работе автоматы с линейной тактикой применяются в алгоритмах управления просмотром каналов при обнаружении сигналов, перемещающихся по каналам.

1. Описание системы

Имеется N каналов ($N \gg 1$), по каждому из которых через интервалы времени Δt поступает последовательность независимых случайных величин $\eta_1^{(i)}, \eta_2^{(i)}, \dots, \eta_t^{(i)}$ (i - номер канала, t - время), распределенных с плотностью вероятностей $p(\eta|H_1)$, если в канале есть сигнал, либо с плотностью вероятностей $p(\eta|H_0)$,

если в канале сигнала нет. Считается, что сигнал имеется лишь в одном из каналов, и априори его нахождения в каждом канале равновероятно. Величины $\eta_i^{(a)}$ пересчитываются в логарифмы отношения правдоподобия $\Delta Z = \ln[\rho(\eta_i^{(a)} | H_1) / \rho(\eta_i^{(a)} | H_0)]$. Имеется одно поисковое устройство, которое в каждый момент времени может подсоединиться к выходу одного из каналов. Необходимо при фиксированной частоте ошибок ложной тревоги найти за минимальное время канал с сигналом.

В поисковом устройстве используется автомат с линейной тактикой, представляющий собой систему, которая может находиться в одном из $d+1$ состояний, пронумерованных от 0 до d . Если автомат находится в состоянии j и логарифм отношения правдоподобия будет больше C , то автомат переходит в состояние $j+1$, если $\Delta Z < -C$ - автомат переходит в состояние $j-1$, когда же $-C \leq \Delta Z \leq C$ автомат остается в состоянии j . В начальный момент времени система находится в состоянии i_0 . Достижение состояния 0 означает внесение решения в пользу гипотезы H_0 ; достижение состояния с номером d - внесение решения в пользу гипотезы H_1 . Ниже изучается симметричный случай, когда

$$\begin{aligned} P\{\Delta Z > C | H_1\} &= P\{\Delta Z < -C | H_0\} = p, \\ P\{\Delta Z < -C | H_1\} &= P\{\Delta Z > C | H_0\} = q, \\ P\{-C \leq \Delta Z \leq C | H_0\} &= P\{-C \leq \Delta Z \leq C | H_1\} = z = 1 - (p+q). \end{aligned}$$

Использование автомата с таким поведением позволит достаточно эффективно исследовать и оптимизировать некоторые алгоритмы обнаружения движущегося сигнала в многоканальной системе.

Считаем, что сигнал может переходить из одного канала в другой, и в качестве модели его движения рассмотрим марковскую модель, согласно которой за один такт работы автомата сигнал с вероятностью γ останется в том же канале и с вероятностью $1-\gamma$ уйдет из канала. Величина γ определяет скорость перемещения сигнала по каналам; в частности, при $\gamma = 1$ сигнал неподвижен.

2. Алгоритм последовательного просмотра каналов

Все каналы просматриваются последовательно, один за другим, после окончания просмотра последнего N -го канала начинается новый цикл просмотра с первого канала. Каждый канал исследуется автоматом с линейной тактикой. В качестве ограничения на систему поиска потребуем, чтобы частота ложных тревог α_0 была фиксированной, заранее заданной величиной, определяемой как

$$\alpha_0 = L_d(i_0|H_0) / T(i_0|H_0),$$

где $L_d(i_0|H_0)$ - вероятность достижения автоматом состояния d , при условии, что сигнала в канале нет, $T(i_0|H_0)$ - среднее время изучения канала без сигнала. Отсюда

$$\alpha_0 = (1-\lambda^i)(p-q) \sqrt{[d(1-\lambda^i) + i_0(1-\lambda^d)]}, \quad \lambda = p/q > 1.$$

Величина $\bar{\tau} = \bar{T}/N$, где T - среднее время обнаружения канала с сигналом при $N \rightarrow \infty$. имеет вид [4]

$$\bar{\tau} = (1+\beta)T(i_0|H_0) / 2(1-\beta), \quad (1)$$

β - вероятность пропуска сигнала на одном цикле просмотра. Рассматривая изменение состояния системы за один такт работы автомата, записываем уравнение для определения $W_0(i_0) = 1-\beta$

$$pW_0(i+1) + (\gamma - 1/\gamma)W_0(i) + qW_0(i-1) = 0,$$

Исследствие того, что при $j=0$ и $i=d$ работа автомата заканчивается, можно определить граничные условия:

$$W_0(d) = 1, \quad W_0(0) = 0.$$

Отсюда

$$W_0(i_0) = (\lambda_1^{i_0} - \lambda_2^{i_0}) / (\lambda_1^d - \lambda_2^d), \quad \lambda_{1,2} = [1/\gamma - \gamma \pm \sqrt{(1/\gamma - \gamma)^2 - 4pq}] / 2p.$$

После подстановки в (1) получаем

$$\bar{\tau} = \frac{2(\lambda_1^d - \lambda_2^d) - \lambda_1^{i_0} + \lambda_2^{i_0}}{2(\lambda_1^{i_0} - \lambda_2^{i_0})(p-q)} [d(1-\lambda^{i_0}) + i_0]. \quad (2)$$

В частности, при $\gamma = 1$

$$\bar{\tau} = \frac{d(1-\lambda) + 1-\lambda^d}{(p-q)(1-\lambda^d)} \cdot \frac{2-\lambda^{d-1}-\lambda^d}{2\lambda^{d-1}(1-\lambda)},$$

что совпадает с результатом работы [2].

3. Модификация алгоритма последовательного просмотра каналов

Из (2) видно, что среднее время обнаружения канала с сигналом

сильно растет с уменьшением γ . Модифицируя алгоритм поиска, предложенный в ч.П, можно повысить эффективность процедуры обнаружения движущегося сигнала.

Рассмотрим следующий алгоритм поиска:

а) каналы просматриваются последовательно один за другим, после просмотра последнего N -го канала начинается новый цикл просмотра с первого канала;

б) в автомате выделяется состояние с номером i_1 .

Если в процессе исследования канала автомат достигнет состояния d , то выносится решение в пользу гипотезы H_1 (считается, что сигнал в канале есть). Если будет достигнуто состояние 0, но состояние i_1 при этом достигнуто не было, то выносится решение в пользу гипотезы H_0 (сигнала нет) и система переходит к просмотру следующего по порядку канала. Если же состояние 0 будет достигнуто после того, как автомат находился в состоянии i_1 , то просмотр каналов по порядку номеров прерывается и начинают просматриваться каналы "соседей" к исследуемому (под каналами "соседними" к каналу с номером i понимаются те каналы K , куда возможен переход из канала i с отличной от нуля вероятностью $P_{i,K}$).

Таким образом, достижение промежуточного состояния i_1 сигнализирует о том, что в канале, возможно, был сигнал, который покинул его во время просмотра. Исследование "соседних" каналов является попыткой "догнать" сигнал.

Просмотр "соседних" каналов начинается с некоторого состояния i_2 .

В качестве ограничения на систему поиска будем по-прежнему требовать, чтобы частота ложных тревог была фиксированной, заранее заданной величиной, которая для данного алгоритма определяется как $\zeta_0 = \zeta / T_0$, где

$$\zeta = \zeta_d(i_0|H_0) + L_{i_1,0}(i_0|H_0)[1 - L_0^M(i_2|H_0)] ,$$

$$T_0 = T(i_0|H_0) + M L_{i_1,0}(i_0|H_0) T(i_2|H_0) .$$

Здесь

$\zeta_d(i_0|H_0), T(i_0|H_0)$ определены в 2;

$L_0(i_2|H_0)$ - вероятность достижения автоматом состояния 0, когда просматривается "соседний" канал;

$L_{i_1,0}(i_0|H_0)$ - вероятность выхода на просмотр "соседних" каналов без сигнала от канала без сигнала;

M - число "соседних" каналов. Так как

$$L_{i_1,0}(i_0|H_0) = L_{L_1}(i_0|H_0) \cdot L_0(L_1|H_0),$$

то

$$L_0 = (\rho - q)(d^{i_0} - 1)(d^d - 1)^{-1} \left\{ 1 + (d^d - d^{i_1})(d^{L_1} - 1) \left[1 - \left(\frac{d^d - d^{L_2}}{d^d - 1} \right)^M \right] \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{d(1 - d^{L_0})}{1 - d^d} + i_0 + M \frac{(d^{L_0} - 1)(d^d - d^{L_1})}{(d^{L_1} - 1)(d^d - 1)} \left[\frac{d(1 - d^{L_2})}{1 - d^d} + i_2 \right] \right\}^{-1}.$$

Найдем теперь среднее время обнаружения сигнала. Пусть на n -м цикле просмотра сигнал находится в канале с номером K_n . Если $T_1(T_1')$ - среднее время просмотра основного и, возможно, группы "соседних" каналов при условии, что в них есть сигнал, но гипотеза о наличии сигнала отвергается (принимается), то среднее время обнаружения канала с сигналом равно

$$T_5 = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (1 - \beta) [n(N-1)T_0 + (K_n - 1)T_0 + nT_1 + T_1'].$$

Усредняя по K_n (считаем, что нахождение сигнала во всех каналах равновероятно), имеем

$$T_5 = (N-1)(1 + \beta)T_0 / 2(1 - \beta) + \beta T_1 / (1 - \beta) + T_1'.$$

Для величины $\bar{T} = \lim_{N \rightarrow \infty} T_5 / N$ получим выражение (I).

Перейдем теперь к вычислению вероятности для данного алгоритма.

Определим следующие величины

$W_1(L_0)$ - вероятность того, что за время изучения "основного" канала сигнал из него уйдет, но система поиска перейдет на просмотр "соседних" каналов;

$W_2(L_2)$ - вероятность того, что за время изучения одного из "соседних" каналов сигнал из него не уйдет и будет обнаружен;

$W_3(i_2)$ - вероятность того, что сигнал не уйдет из того "соседнего" канала, в который он перешел, за то время, пока просматривается другой "соседний" канал;

$\beta_{осн}$ - вероятность пропуска сигнала, когда в качестве "основного" просматривается канал с сигналом;

$\beta(K)$ - вероятность пропуска сигнала, когда в качестве "основного" просматривается канал без сигнала, из которого система переходит на просмотр "соседних" каналов, и среди них K -м по счету оказывается канал с сигналом. Тогда

$$\beta_{осн} = 1 - (W_0 + \sum_{k=1}^M W_3^{(k-1)} W_2 W_1 \rho_k),$$

$$\beta_{\text{осн}}^{(k)} = 1 - L_{i,0} W_2 W_3^{(k-1)},$$

и β определяется как

$$\beta = \beta_{\text{осн}} \cdot \prod_{k=1}^n \beta_{\text{осн}}^{(k)}.$$

Находя β (вычисление величин W_1, W_2, W_3 дано в приложении) и подставляя его в (I), получим окончательный вид $\bar{t}_{\text{моп}}$.

4. Оптимизация алгоритмов и численные расчеты

Оптимизация алгоритма проводилась для случая, когда Δz является нормально распределенной случайной величиной со средним μ или $-\mu$ в зависимости от того, есть в канале сигнал или нет, и дисперсией 2μ в обоих случаях.

$$p = P\{x > C | H_1\} = \int_C^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4\mu}} \frac{dx}{\sqrt{4\mu}} = 1 - \Phi(C_0 - a),$$

$$q = P\{x < -C | H_1\} = \int_{-\infty}^{-C} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4\mu}} \frac{dx}{\sqrt{4\mu}} = 1 - \Phi(C_0 + a).$$

Здесь $C_0 = C/\sqrt{2\mu}$, $a = \mu/\sqrt{2\mu}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz$.

Для случая неподвижного сигнала нетрудно показать, что в качестве начального нужно выбирать состояние $i_0 = 1$. Поэтому и в случае, когда сигнал перемещается по каналам в качестве начального, берем $i_0 = 1$.

Оптимизация полученных выражений для средних времен обнаружения канала с сигналом проводилась численно.

На рис. 1 приведен график зависимости порога C_0 от a при различных значениях i_0 для случая, когда сигнал неподвижен, т.е. $\gamma = 1$. Отметим, что в случае обнаружения сигнала, переключающегося по каналам алгоритмом последовательного просмотра, график для C_0 будет аналогичным, т.е. порог C_0 практически не зависит от величины скорости γ .

На рис. 2 показана зависимость порога C_0 от a для различных скоростей перемещения γ и частот ложной тревоги λ_0 в случае, когда используется автомат с выделенным промежуточным состоянием i_1 .

Среднее время обнаружения сильно возрастает с ростом скорости γ . На рис. 3 показана зависимость выигрыша $\Delta = (\bar{t}_0/\bar{t}_n - 1) \cdot 100\%$ от a для различных γ и $\lambda_0 = 10^{-8}$, где \bar{t}_0 - среднее время об-

нарушения движущегося сигнала алгоритмом последовательного просмотра; \bar{t}_n - среднее время обнаружения неподвижного сигнала.

Использование алгоритма с прерыванием на просмотр "соседних" каналов позволит значительно сократить среднее время обнаружения. На рис. 4 показана зависимость выигрыша $A = (\bar{t}_n / \bar{t}_{n, \text{пов}} - 1) \cdot 100\%$, который дает модифицированный алгоритм по сравнению с алгоритмом последовательного просмотра, от α для различных λ_0 и γ .

Приложение

Вероятность W_i может быть представлена в виде

$$W_i = L_{i_1}(i_0) L_o^{\circ}(i_1) + L_{i_1}^{\circ}(i_0) L_o(i_1 | H_0),$$

где $L_{i_1}^{\circ}(i_0)$ - вероятность достижения автоматом состояния i_1 , из состояния i_0 при условии, что сигнал за это время из канала не уйдет; $L_o^{\circ}(i_1)$ - вероятность того, что автомат достигнет состояния 0 из состояния i_1 , и сигнал за это время уйдет из канала; $L_{i_1}(i_0)$ - вероятность того, что автомат достигнет состояния из состояния i_0 и сигнал за это время покинет канал.

Рассматривая состояние системы за один такт работы автомата

$$L_o^{\circ}(i) = \gamma [p L_o^{\circ}(i+1) + z L_o^{\circ}(i) + q L_o^{\circ}(i-1)] + (1-\gamma) L_o(i | H_0),$$

можно получить уравнение для $L_o^{\circ}(i)$

$$p L_o^{\circ}(i+1) + (z - \frac{1}{\gamma}) L_o^{\circ}(i) + q L_o^{\circ}(i-1) = (1-\gamma)(\lambda^i - \lambda^d) / \gamma (\lambda^d - 1).$$

В силу того, что при $j=0$ и при $j=d$ процедура последовательного анализа уже закончена и сигнал за нулевой промежуток времени останется в канале с вероятностью 1, получаем следующие граничные условия

$$L_o^{\circ}(0) = 0, \quad L_o^{\circ}(d) = 0.$$

Аналогичным образом записываем уравнение и граничные условия для $L_{i_1}^{\circ}(i)$

$$p L_{i_1}^{\circ}(i+1) + (z - \frac{1}{\gamma}) L_{i_1}^{\circ}(i) + q L_{i_1}^{\circ}(i-1) = (1-\gamma)(1 - \lambda^i) / \gamma (\lambda^{i_1} - 1),$$

$$L_{i_1}^{\circ}(0) = 0, \quad L_{i_1}^{\circ}(i_1) = 0.$$

Решая стандартными методами полученные разностные уравнения, имеем.

$$L_o^{\circ}(i) = C_1 \lambda_1^i + C_2 \lambda_2^i + \alpha [p \lambda^i - \sigma \lambda^d].$$

Коэффициенты C_1 и C_2 имеют вид

$$C_2 = \alpha [\beta(\lambda_1^d - \lambda_2^d) - \lambda_2^d \sigma (\lambda^d - 1)] / (\lambda_2^d - \lambda_1^d),$$

$$C_1 = -C_2 - \alpha(\beta - \sigma \lambda^d),$$

и использованы следующие обозначения:

$$\alpha = (1-\gamma) / (\lambda^d - 1), \quad \beta = [p\lambda + (\tau - \frac{1}{\gamma}) + q/\lambda]^{-1}, \quad \sigma = [p + (\tau - 1/\gamma) + q]^{-1}.$$

Запишем теперь выражение для $L_{i_1}^0(i_0)$

$$L_{i_1}^0(i_0) = C_1' \lambda_1^{i_0} + C_2' \lambda_2^{i_0} + \alpha^* [\beta \lambda^{i_0} - \sigma],$$

где

$$C_2' = \alpha^* [\beta(\lambda_1^{i_1} - \lambda_2^{i_1}) - \sigma(\lambda_1^{i_1} - 1)],$$

$$C_1' = -C_2' - \alpha^* (\beta - \sigma), \quad \alpha^* = (1-\gamma) / \gamma (1 - \lambda^{i_1}).$$

Из [2] следует, что $L_0(i_1 | H_0) = (\lambda^d - \lambda^{i_1}) / (\lambda^d - 1)$.

При определении $W_3(i_2)$ была верна гипотеза H_0 , поэтому уравнение для вычисления этой вероятности следующее

$$qW_3(i_2+1) + (\tau - 1/\gamma)W_3(i_2) + pW_3(i_2-1) = 0,$$

с граничными условиями

$$W_3(0) = W_3(d) = 1.$$

Откуда

$$W_3(i_2) = [x_1^{i_2}(1-x_2^d) + x_2^{i_2}(x_1^d-1)] / (x_1^d - x_2^d),$$

$$x_{1,2} = [(1/\gamma - \tau) \pm \sqrt{(1/\gamma - \tau)^2 - 4pq}] / 2q.$$

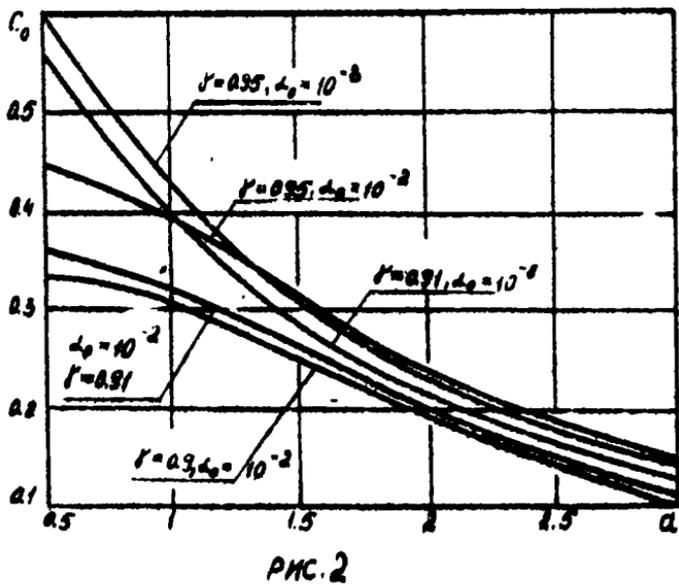
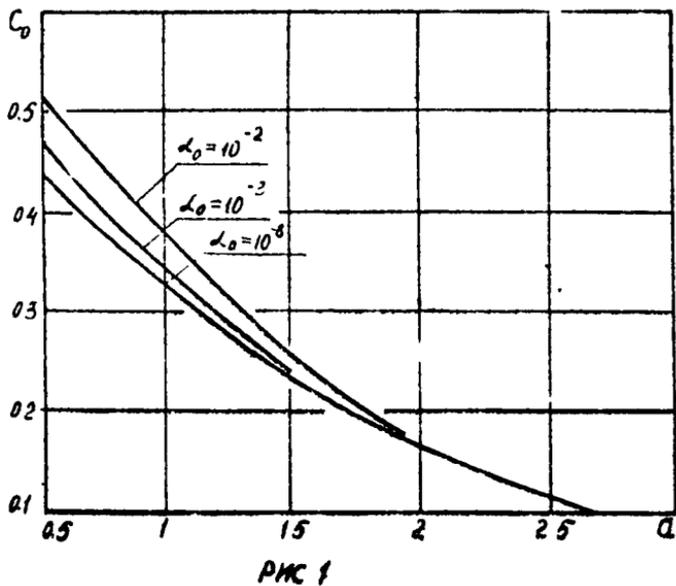
Вероятности $L_{i_1}^*(i_0)$ и $W_2(i_2)$ находятся аналогично тому, как была найдена вероятность W_0 в 2. и имеет следующий вид

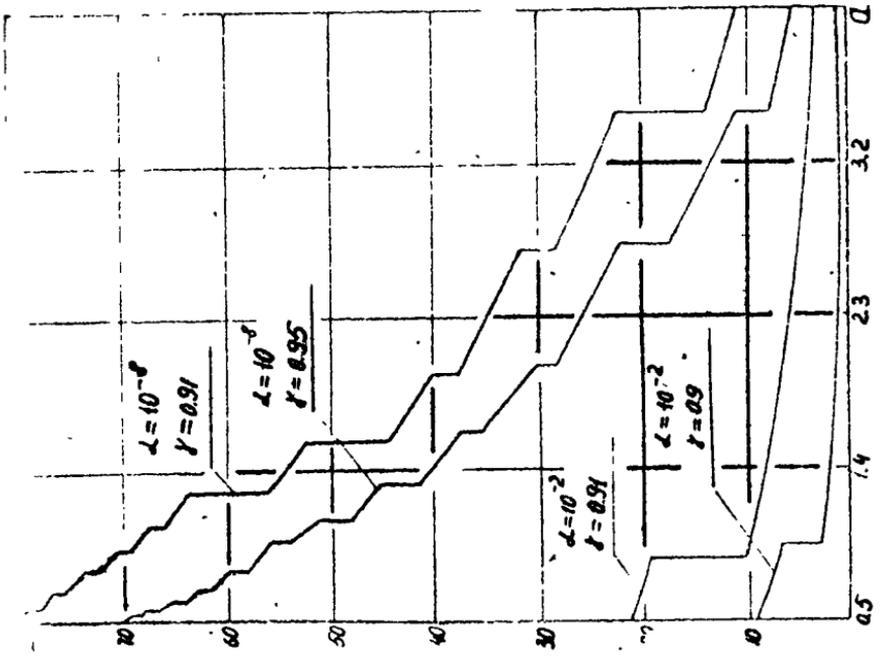
$$L_{i_1}^*(i_0) = (\lambda_1^{i_0} - \lambda_2^{i_0}) / (\lambda_1^{i_1} - \lambda_2^{i_1}), \quad W_2(i_2) = (\lambda_1^{i_2} - \lambda_2^{i_2}) / (\lambda_1^d - \lambda_2^d).$$

Л и т е р а т у р а

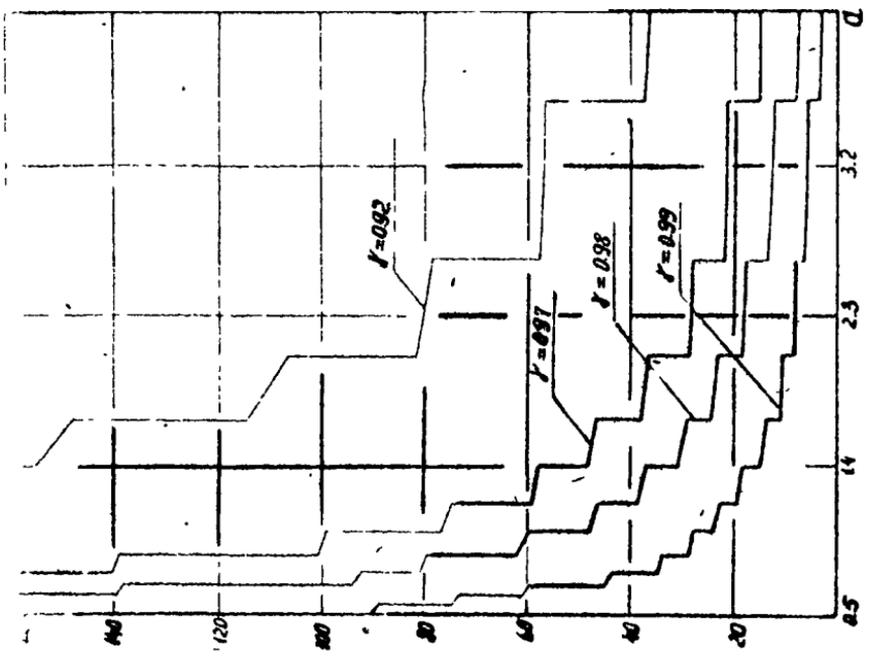
- Г. Этангиров К.И. Об оптимальности поиска в системе с конечным числом позиций. - Радиотехника и электроника, 1963, т.8, №1, с.16-19.

2. Радюк Л.Е., Терпугов А.Ф. Об эффективности применения автоматов с линейной тактикой в системах обнаружения сигналов.-Автоматика и телемеханика, 1971, т.32, № 4.
3. Шаширо Ф.А. Двухэтапный поиск сигнала в многоканальной системе автоматами с линейной тактикой.-В сб.:Прикладная математика и кибернетика. Изд-во Томского университета, 1976, вып.1, с. 222-234.
4. Терпугов А.Ф., Тонконогов Ю.М. Поиск движущегося сигнала в многоканальной системе методом вырожденного последовательного анализа.-Проблемы передачи информации, 1981, № 2, с. 66-71.





P.M.C. 4



P.M.C. 3

Рефераты на опубликованные статьи

УДК 519.872.5

Однолинейная СМО с гистерезисной стратегией обслуживания, формируемой по разности длин очередей. Вайнгауз А.М., Прегер М.Л. Управляемые системы массового обслуживания, вып. I. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

В статье находятся статистические характеристики длин очередей СМО с двумя простейшими входящими потоками и одним обслуживающим прибором с гистерезисной стратегией выбора заявок на обслуживание, зависящей от разности длин очередей.

Библ. 2.

УДК 519.872.5

Адаптивная модель распределения заявок по очередям в двухлинейной системе массового обслуживания автомат-адаптором. Василевская Т.П., Горцов А.М. Управляемые системы массового обслуживания, вып. I. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Рассматривается СМО с двумя приборами и двумя потоками заявок. Интенсивности потоков меняются со временем как скачкообразный марковский процесс с двумя состояниями. Управление направлением заявок в очереди осуществляется автоматом-адаптором. В статье проведена оптимизация параметров автомата-адаптора и цифровое моделирование.

Библ. 3.

УДК 519.872.5

Оптимизация управлений в системах массового обслуживания. Горцов А.М. Управляемые системы массового обслуживания, вып. I. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Дается определение СМО с переменной структурой, рассматриваются частные случаи таких систем. Излагаются методы исследования СМО с переменной структурой, а также предлагается ряд адаптивных подходов к изучению таких систем.

Библ. II.

УДК 519.2

Оптимизация поиска канала с минимальным уровнем шума. Дудрев В.А., Колосова О.А. Управляемые системы массового обслуживания, вып. I. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

В статье рассматривается алгоритм поиска канала с минимальным уровнем шума, находятся его характеристики и проводится оптимизация по характеризующим его параметрам.

Библ. 3.

УДК 519.872

Оптимизация двух систем массового обслуживания с управлением, зависящим от времени ожидания. Зиновьева Л.И. Управляемые системы массового обслуживания, вып. I. Томск; Изда-во Томск.ун-та, 1982.

Рассмотрены две системы массового обслуживания, в одной из которых интенсивность обслуживания, а в другой момент включения и выключения резервного прибора зависят от текущего времени ожидания заявки, находящейся первой в очереди. Проведена оптимизация этих систем.

Библ. 4.

УДК 519.872

Однолинейная система массового обслуживания с гистерезисным управлением интенсивностью обслуживания, зависящим от времени ожидания. Зиновьева Л.И. Управляемые системы массового обслуживания, вып. I. Томск; Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Рассмотрена однолинейная система массового обслуживания с переменной интенсивностью обслуживания, моменты изменения которой зависят от текущего времени ожидания заявки, находящейся в очереди первой. Проведена оптимизация этой системы с учетом потерь на ожидание, на амортизацию и на переключение интенсивности

Библ. 5.

УДК 519.2

О некоторых двумерных распределениях в теории массового обслуживания. Китаева А.В., Терпугов А.Ф. Управляемые системы массового обслуживания, вып. I. Томск; Изд-во Томск.ун-та, 1982.

Для однолинейной системы массового обслуживания с простейшим входящим потоком и рекуррентным обслуживанием находятся двумерные распределения длины очереди и текущего времени обслуживания, а также текущих времен ожидания заявки, стоящей первой в очереди и времени обслуживания.

Библ. 0

УДК 519.872,5

Приближенный расчет средней длины очереди в адаптирующихся системах массового обслуживания с переменной интенсивностью обслуживания. Коротчаев И.А. Управляемые системы массового обслуживания, вып. I. Томск; Изд-во Томск.ун-та, 1982.

В статье найдены приближенные формулы для средней длины очереди в адаптирующейся системе массового обслуживания с переменной интенсивностью обслуживания или с резервными приборами.

Библ. 5.

УДК 519.152

Имитационная модель многоканальной СМО с полной памятью. Левин Л.Л. Управляемые системы массового обслуживания, вып. I. Томск; Изд-во Томск.ун-та, 1982.

В статье рассматривается один способ имитационного моделирования на ЦВМ многоканальных систем массового обслуживания. Приводятся результаты моделирования СМО с Ю приборами и Ю типами заявок.

Библ. I.

УДК 519.872

Приближенное правило диспетчеризации задач при прогнозе потерь на один и два шага вперед. Марголис Н.Ю. Управляемые системы массового обслуживания, вып. I. Томск; Изд-го Томск.ун-та, 1982.

В статье находится правило выбора задач на решение, минимизирующее прогнозируемые потери в единицу времени на один и два шага вперед.

Библ. 4.

УДК 519.872 : 681.324.

Иерархические игры в приоритетных СМО с формированием очередей. Назаров А.А. Управляемые системы массового обслуживания, вып. I. Томск; Изд-во Томск.ун-та, 1982 г.

В статье показана методика управления СМО, функционирующей в конфликтной ситуации, когда один из игроков имеет преимущество перед другими. Методами иерархических игр найдены оптимальные стратегии распределения заявок.

Библ. 4.

УДК 519.972 : 681.324

Нахождение оптимального управления в СМО при больших нагрузках методом пограничного слоя. Назаров А.А., Чекуменев В.А. Управляемые системы массового обслуживания, вып. I. Томск; Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Задача оптимального управления СМО при большой нагрузке сведена к решению эллиптического дифференциального уравнения с резервными коэффициентами и малым параметром при старших производных. Предлагается асимптотический метод решения этого уравнения. Используя полученное решение, вариационными методами решается задача нахождения оптимального управления.

Библ. 7.

УДК 519.2

Быстродействие алгоритмов случайного поиска с покоординатным обучением. Новикова В.А., Рыжиков А.П. Управляемые системы массового обслуживания, вып. I. Томск; Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Рассматривается покоординатная оптимизация статистической процедуры с покоординатным обучением в обстановке помех. Сформулированы условия для выбора оптимальной величины параметра, определяющего скорость обучения.

Библ. 4.

УДК 65.012.122

Вопросы оптимизации и управления в ППР объект в НПС в технологическом процессе транспорта нефти. Поздняков А.П. Управляемые системы массового обслуживания, вып. I. Томск; Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Рассматривается возможность применения идей и методов теории массового обслуживания к вопросам оптимизации и управления процессом транспорта нефти.

Библ. 4.

УДК 65.012.122

Об одном подходе к задаче о вырожденном случайном блуждании в прямоугольнике. Пятков С.Н. Управляемые системы массового обслуживания, вып. I. Томск; Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Г примере конкретного вырожденного неоднородного двумерного случайного блуждания рассматривается простой подход к задачам

такого типа. Для исследуемой системы получены рекуррентные формулы, позволяющие численно определить финальные вероятности состояний.

Библ.1.

УДК 519.872

Некоторые постановки задач в теории управляемых систем массового обслуживания. Рыков В.В. Управляемые системы массового обслуживания, вып.1. Томск; Изд-во Томск.ун-та, 1982.

Рассматриваются постановки задач, возникающих в теории управляемых систем массового обслуживания и возможные методы их решения.

Библ.9.

УДК 519.872

Приближенный расчет характеристик систем массового обслуживания при медленных флуктуациях интенсивности входящего потока.

Терпугов А.Ф. Управляемые системы массового обслуживания, вып.1. Томск; Изд-во Томск.ун-та, 1982.

Предлагается приближенный метод расчета характеристик систем массового обслуживания при медленных флуктуациях входящего потока.

Библ.2.

УДК 519.27 : 621.391.1

Применение автоматов с линейной тактикой в задаче управления наблюдениями. Тонконогов Ю.М. Управляемые системы массового обслуживания, вып. 1. Томск; Изд-во Томск.ун-та, 1982.

В статье предлагается и исследуется алгоритм поиска сигнала в многоканальной системе с использованием для исследования одного канала автомата с линейной тактикой. Учитывается возможность перемещения сигнала по каналам.

Библ. 4.

Управляемые системы массового обслуживания

Выпуск I

Редактор Л.С.Малиновская

ИБ 932 Подписано к печати 3/10-1982КЗ 66141

Формат 60 x 64^I/16. Бумага типографская р 3.

П.л. 12,1; - уч-изд. л. 10,2; усл. п.л. 11,2.

Тираж 500 экз. Заказ 254 Цена 1 руб.

Издательство ТГУ, 630010, Томск, пр. Ленина, 36.

Сетевая лит ТГУ, 630020, Томск, ул. Никитина, 4.

Цена 1 р.