

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 144

Серия механико-математическая

ПЯТАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА,
посвященная 350-летию города Томска

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И АСТРОНОМИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Томск — 1959

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 144

Серия механико-математическая

ПЯТАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА,

посвященная 350-летию города Томска

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И АСТРОНОМИИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Т о м с к — 1959

Отв. редактор проф. А. П. Бунтин

Редактор тома проф. П. П. Куфарев

РЕДАКЦИОННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ СОВЕТ

Проф. А. П. Бунтин (председатель, ректор университета), проф. В. А. Пегель (зам. председателя), доц. Ю. В. Чистяков (зам. председателя), проф. Б. Г. Иоганзен (ученый секретарь), доц. Н. Ф. Бабушкин, проф. Г. Г. Григор, доц. Н. А. Гуляев, директор издательства М. С. Змазнев, проф. В. Н. Кессених, доц. А. И. Ким, действ. член АН СССР В. Д. Кузнецов, проф. П. П. Куфарев, проф. М. М. Окунцов, доц. Т. Н. Петрова, ст. и. с. Н. В. Прикладов, проф. Н. А. Прилежаева, проф. И. М. Разгон, доц. В. В. Серебренников, доц. П. И. Скороспелова, проф. М. В. Тронов, секретарь парткома Л. С. Фирюлина, проф. В. А. Хахлов, проф. К. П. Ярошевский.

ОТ РЕДАКТОРА

В данном сборнике публикуется часть докладов, сделанных на секции математики, механики и астрономии пятой научной конференции Томского университета, посвященной 350-летию города Томска. В конференции принимали участие не только сотрудники механико-математического факультета Томского университета, но и некоторые научные работники других вузов Томска, а также вузов других городов Сибири, из докладов которых в данный сборник вошли статья доцента Омского пединститута А. И. Кочеткова и статья старшего преподавателя Томского пединститута Н. Н. Круликовского.

Сборник печатается по решению конференции.

Е. Н. АРАВИЙСКАЯ

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ С ЗАДАНЫМ МНОЖЕСТВОМ ОСОБЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ С ЗАДАННОЙ ОСОБОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Пусть $f(w, z)$ однозначная аналитическая функция двух комплексных переменных w и z в однолистной конечной области регулярности D пространства двух комплексных переменных w и z . Пусть $f(w, z)$ регулярна везде в D за исключением точек аналитической поверхности [1]

$$\varphi(w, z) = 0, \quad \varphi(w, z) - \text{неприводима.} \quad (1)$$

Область D , как всякую однолистную конечную область регулярности, можно аппроксимировать изнутри последовательностью аналитических многогранников [2]. Таким образом, всякая область D_1 , лежащая строго внутри D , находится также строго внутри одного из аналитических многогранников

$$\bar{\Delta} \{ |w| \leq r_1, \quad |z| \leq r_2, \quad |f_k(w, z)| \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, \nu \}, \quad (2)$$

где $f_k(w, z)$, $k = 1, 2, \dots, \nu$, регулярные в D функции от w и z .

Функцию $\varphi(w, z)$ в (1) будем считать регулярной функцией от w и z в области D .

Всякая область D_2 , лежащая строго внутри области, полученной из D удалением из нее точек множества (1), будет находиться строго внутри области Δ_* $\{ \Delta \cap \{ \varphi(w, z) \geq \varepsilon \} \}$ (пересечение множеств $\bar{\Delta}$ и $\varphi(w, z) \geq \varepsilon$) при достаточно малом ε .

Предполагаем, что $\bar{\Delta}_*$ является аналитическим многогранником. В частности, предполагаем, что

$$\frac{\partial (f_k(w, z), \varphi(w, z))}{\partial (w, z)} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, \nu.$$

Функция $f(w, z)$ будет регулярной функцией от w и z в Δ_* .

Введем обозначение:

$$\varphi(w, z) \equiv f_{\nu+1}(w, z).$$

Для всякой точки (w, z) внутри Δ_* имеем, по интегральной формуле Вейля,

$$f(w, z) = (2\pi i)^{-2} \sum_{\substack{\kappa, s=1 \\ \kappa < s}}^{\nu+1} \int \int_{\sigma_{\kappa s}^{(s)}} f(w, \zeta) \varphi_{\kappa s}(w, z; w, \zeta) d\omega d\zeta, \quad (3)$$

$$\varphi_{\kappa s}(\omega, z; \omega, \zeta) = \frac{P_{\kappa} Q_s - P_s Q_{\kappa}}{[f_{\kappa}(\omega, \zeta) - f_{\kappa}(\omega, z)] [f_s(\omega, \zeta) - f_s(\omega, z)]}.$$

$\sigma_{\kappa s}^{(e)}$ — „ребра“ многогранника Δ ; $P_{\kappa} \equiv P_{\kappa}(\omega, z; \omega, \zeta)$, $Q_l \equiv Q_l(\omega, z; \omega, \zeta)$, $k = 1, 2, \dots, \nu + 1$, регулярные функции от ω, z, ω, ζ , когда точки (ω, z) и (ω, ζ) принадлежат Δ [3]. Если $\sigma_{\kappa s}^{(e)}$ пусто, то соответствующий интеграл принимается равным нулю.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ $f(\omega, z)$

Множество точек пересечения поверхности (1) с границей области Δ может различным образом располагаться относительно опорной поверхности области Δ (множества точек $\{|f_{\kappa}(\omega, z)| = 1, |f_s(\omega, z)| = 1\}$, принадлежащих „ребру“ $\sigma_{\kappa s}$, $k, s = 1, 2, \dots, \nu$).

Рассмотрим тот случай, когда поверхность (1) и опорная поверхность области Δ не имеют общих точек.

Заметим, что к этому случаю приводится и тот случай, когда поверхность (1) и опорная поверхность области Δ имеют общую кривую. Действительно, если „ребро“ $\sigma_{\kappa s}$ многогранника Δ пересекается с поверхностью (1) по кривой, то в системе уравнений

$$\begin{cases} f_{\kappa}(\omega, z) = e^{\lambda_{\kappa} i}, \\ f_s(\omega, z) = e^{\lambda_s i}, \\ \varphi(\omega, z) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

одно из первых двух уравнений является следствием остальных.

Пусть первое уравнение является следствием второго и третьего. Тогда система

$$\begin{cases} f_{\kappa}(\omega, z) = (1 + \gamma_l) e^{\lambda_{\kappa} i} \\ f_s(\omega, z) = e^{\lambda_s i}, \\ \varphi(\omega, z) = 0, \quad \gamma_l \neq 0, \end{cases}$$

не будет совместной. Следовательно, заменив область Δ близкой ей областью

$$\Delta_1 \{|\omega| \leq r_1, |z| \leq r_2, |f_{\kappa}(\omega, z)| \leq 1 + \gamma_l, |f_s(\omega, z)| \leq 1, s \neq k\},$$

приходим к первому случаю.

Итак, пусть опорная поверхность области Δ не имеет общих точек с особой поверхностью (1). В этом случае формула (3) примет вид:

$$\begin{aligned} f(\omega, z) = & (2\pi i)^{-2} \sum_{\substack{\kappa, s=1 \\ \kappa < s}}^{\nu} \iint_{\sigma_{\kappa s}} f(\omega, \zeta) \varphi_{\kappa s}(\omega, \zeta; \omega, z) d\omega d\zeta + \\ & + (2\pi i)^{-2} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \iint_{\sigma_{\kappa, \nu+1}} f(\omega, \zeta) \varphi_{\kappa, \nu+1}(\omega, \zeta; \omega, z) d\omega d\zeta = \Phi(\omega, z) + \Psi(\omega, z). \end{aligned} \quad (5)$$

Функция

$$\Phi(w, z) = (2\pi i)^{-2} \sum_{\substack{\kappa, s=1 \\ \kappa < s}}^v \int_{\sigma_{\kappa s}} \int f(w, \zeta) \varphi_{\kappa s}(w, \zeta; w, z) d\omega d\zeta$$

является аналитической функцией от w и z в многограннике Δ за исключением поверхностей $\sigma_{\kappa s}$.

Так как для всякой внутренней точки (w, z) области Δ и (ω, ζ) — на $\sigma_{\kappa, v+1}$

$$\frac{1}{[f_{\kappa}(\omega, \zeta) - f_{\kappa}(w, z)] [\varphi(\omega, \zeta) - \varphi(w, z)]} = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{f_{\kappa}^m(w, z)}{f_{\kappa}^{m+1}(\omega, \zeta)} \frac{\varphi^n(\omega, \zeta)}{\varphi^{n+1}(w, z)}$$

и последний ряд сходится равномерно, когда $(\omega, \zeta) \in \sigma_{\kappa, v+1}$, то

$$\Psi(w, z) = (2\pi i)^{-2} \sum_{l=1}^v \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn}(w, z) \frac{f_l^m(w, z)}{\varphi^{n+1}(w, z)},$$

где

$$a_{mn}(w, z) = \int_{\sigma_{l, v+1}} \int \frac{f(\omega, \zeta) [P_{\kappa} Q_{v+1} - P_{v+1} Q_{\kappa}] \varphi^n(\omega, \zeta)}{f_l^{m+1}(\omega, \zeta)} d\omega d\zeta;$$

$a_{mn}(w, z)$ — регулярная функция от w и z внутри Δ .

Таким образом, функцию $\Phi(w, z)$ можно считать правильной частью разложения (5), а $\Psi(w, z)$ — его главной частью.

Оценим сверху по модулю

$$\Psi_l(w, z) = (2\pi i)^{-2} \int \int_{\sigma_{l, v+1}} f(\omega, \zeta) \varphi_{l, v+1}(w, \zeta; w, z) d\omega d\zeta.$$

Пусть $|f(w, z)| \leq \frac{A}{|\varphi(w, z)|^{\alpha}}$, α, A , — постоянное. Так как функции

$P_l, Q_l, l=1, 2, \dots, v+1$ аналитические, когда $(w, z) \in \Delta$ в пространстве w, z и $(\omega, \zeta) \in \Delta$ в пространстве ω, ζ , а $|f_l(\omega, \zeta) - f_l(w, z)| > d$, d — положительное число, то найдется такое число M , что

$$|\varphi_{l, v+1}(w, z; \omega, \zeta)| < M \text{ в } \Delta_{wz} \times \Delta_{\omega\zeta}.$$

Тогда $|\Psi_l(w, z)| < M\sigma$, где σ — площадь поверхности $\sigma_{l, v+1}$.

$$\sigma \leq \int_H \int \left| \frac{\partial(\omega, \zeta)}{\partial(u, v)} \right| du dv,$$

где

$$f_l(w, z) = u,$$

$$\varphi(w, z) = v,$$

а H — опорная поверхность бицилиндра $\{u = e^{\lambda_l i}, v = e^{\mu_l i}\}$, $0 \leq \lambda_l \leq 2\pi, 0 \leq \mu_l \leq 2\pi$.

Так как

$$\frac{\partial(\omega, \zeta)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(f_l, \varphi)}{\partial(w, z)}} \quad \text{ограничен сверху по модулю, т. е.}$$

$$\left| \frac{\partial(\omega, \zeta)}{\partial(u, v)} \right| < P, \quad P - \text{число, а } \frac{\partial(u, v)}{\partial(\lambda_l, \mu)} = \varepsilon e^{(\lambda_l + \mu) i},$$

то $\sigma \leq 4\pi^2 P\varepsilon$.

Следовательно,

$$|\Psi_l(w, z)| < \frac{A}{\varepsilon^\alpha} P\varepsilon = A P \varepsilon^{1-\alpha},$$

$$|\Psi(w, z)| < \nu A P \varepsilon^{1-\alpha}. \quad (6)$$

Так как в рассматриваемом случае $\Psi(w, z)$ не зависит от ε , то при $\alpha < 1$ $\Psi(w, z) = 0$. Тогда $f(w, z)$ представляется в Δ интегралом

$$\Phi(w, z) = (2\pi i)^{-2} \sum_{\substack{\kappa, s=1 \\ \kappa < s}}^{\nu} \int \int f(\omega, \zeta) \varphi_{\kappa s}(\omega, \zeta; w, z) d\omega d\zeta,$$

где $\Phi(w, z)$, как уже было указано, регулярна в любой области, находящейся внутри Δ , и совпадает с $f(w, z)$ в Δ . Таким образом, если $f(w, z)$ регулярна всюду в Δ за исключением особой аналитической поверхности (1) и удовлетворяет условию

$$|f(w, z)| < \frac{A}{|\varphi(w, z)|^\alpha}, \quad \alpha < 1,$$

то $f(z)$ аналитически продолжаема на всю область Δ .

3. СЛУЧАЙ БЕСКОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА ОСОБЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть $f(w, z)$ регулярна в аналитическом многограннике $\bar{\Delta} : \{|f_\kappa(w, z)| \leq 1, \kappa = 1, 2, \dots, \nu\}$ за исключением последовательности изолированных аналитических поверхностей, неприводимые уравнения которых имеют вид:

$$\varphi_\kappa(w, z) = 0, \quad \kappa = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Под изолированными поверхностями понимаем такие поверхности, что для всякого n существует $\varepsilon_n > 0$ такое, что гиперповерхности $|\varphi_n(w, z)| = \varepsilon_n, n = 1, 2, \dots$, не имеют общих точек.

Последовательность (7) не имеет точек накопления в $\Delta : \{|f_\kappa(w, z)| < 1, \kappa = 1, 2, \dots, \nu\}$ и не пересекает ребра $\sigma_{\kappa s}$ многогранника $\bar{\Delta}$. Пусть $\{\delta_\kappa\}$ последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю. Многогранник $\bar{\Delta}$ исчерпывается изнутри многогранниками $\bar{\Delta}_n : \{|f_\kappa(w, z)| \leq 1 - \delta_\kappa, \kappa = 1, 2, \dots, \nu\}$; причем $\{\delta_\kappa\}$ выбирается так, чтобы $\Delta_n \ll \Delta_{n+1} \ll \Delta$ ¹⁾.

Всякий Δ_n пересекается лишь конечным числом L_n поверхностей (7), и для любого замкнутого множества $D \ll \Delta$ можно указать номер

¹⁾ $A \ll B$ обозначает, что область A содержится строго внутри области B .

N , начиная с которого $D \subset \Delta_n (n > N)$.

Введем обозначение:

$$P_\kappa q_s - p_s Q_\kappa = \Psi_{\kappa s},$$

$$\varphi_s(w, z) - \varphi_s(w, \zeta) = p_s(w - w) + q_s(z - \zeta), \quad s = 1, 2, \dots$$

p_s, q_s функции от w, z, w, ζ регулярные в $\bar{\Delta}_{wz} \times \bar{\Delta}_{w\zeta}$. Будем называть „главной частью“ соответствующей поверхности $\varphi_n(w, z) = 0$ следующую функцию от w, z :

$$G_n(w, z) = (2\pi i)^{-2} \sum_{\kappa} \int_{\sigma_{\kappa}^n} \int f(w, \zeta) \Psi_{\kappa n} d\omega d\zeta, \quad (8)$$

$$\sigma_{\kappa}^n : \{|f_{\kappa}(w, z)| = 1, |\varphi_n(w, z)| = \varepsilon_n\}.$$

Пусть все поверхности из (7), пересекающие $\bar{\Delta}_n z$, будут $\varphi_{\kappa}(w, z) = 0$ $\kappa = 1, 2, \dots, L_n$. Образует функцию

$$\Phi_1(w, z) = (2\pi i)^{-2} \sum_{s=1}^{L_n} \sum_{\kappa=1}^s \int_{\sigma_{\kappa}^s} \int f(w, \zeta) \Psi_{\kappa s} d\omega d\zeta. \quad (9)$$

Очевидно $\Phi_1(w, z)$ будет регулярной функцией от w и z в $\bar{\Delta}$ за исключением гиперповерхностей $|\varphi_{\kappa}(w, z)| = \varepsilon_{\kappa}$, $\kappa = 1, 2, \dots, L_n$, с главными частями соответственно $G_1, \dots, G_{L_n}$.

Возьмем сходящийся ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$ и будем строить функции $\Phi_n(w, z)$, $n = 2, 3, \dots$, следующим образом. Если $L_{n+1} = L_n$, то $\Phi_{n+1}(w, z) \equiv \Phi_n(w, z)$.

Рассмотрим случай $L_{n+1} > L_n$. Функции $G_s(w, z)$, $s = L_n + 1, \dots, L_{n+1}$ будут регулярными в $\bar{\Delta}_n$ и, по теореме об аппроксимации Ока-Вейля, аппроксимируются равномерно внутри Δ полиномами относительно $w, z, f_1(w, z), f_2(w, z), \dots, f_v(w, z)$. То есть, для всякого η_n можно найти такой полином $P_n(w, z, f_1(w, z), \dots, f_v(w, z))$, что

$$|G_n(w, z) - P_n(w, z, f_1(w, z), \dots, f_v(w, z))| < \frac{\eta_n}{L_{n+1} - L_n}.$$

Теперь определим функцию $\Phi_{n+1}(w, z)$ равенством: $\Phi_{n+1}(w, z) = \Phi_n(w, z) + \sum_{s=L_n+1}^{L_{n+1}} [G_s(w, z) - P_s(w, z, f_1(w, z), \dots, f_v(w, z))]$. Очевидно,

все особые гиперповерхности функции $\Phi_{n+1}(w, z)$ будут совпадать с теми из гиперповерхностей $|\varphi_{\kappa}(w, z)| = \varepsilon_{\kappa}$, которые пересекают $\bar{\Delta}_{n+1}$, причем „главные части“ будут соответственно $G_{\kappa}(w, z)$. Кроме того, функция $\Phi_{n+1}(w, z) - \Phi_n(w, z)$ не имеет особых точек в $\bar{\Delta}_n$, и во всех точках Δ_n выполняется неравенство $|\Phi_{n+1}(w, z) - \Phi_n(w, z)| < \varepsilon_n$. Отсюда следует, что ряд

$$\begin{aligned} & \Phi_1(w, z) + [\Phi_2(w, z) - \Phi_1(w, z)] + \dots \\ & + [\Phi_{n+1}(w, z) - \Phi_n(w, z)] + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

равномерно сходится на каждом Δ_n , если отбросить $n+1$ первых членов. Сумма ряда (10), $F(w, z)$, имеет своими особыми гиперповерхностями $|\varphi_k(w, z)| = \varepsilon_k$, $k = 1, 2, \dots$, с главными частями $G_n(w, z)$.

Возьмем любую область $D \ll \Delta$. Области D будет соответствовать Δ_n , $D \ll \Delta_n \ll \Delta$. Функция $f(w, z)$ будет аналитической в

$$\Delta_\varepsilon : \{|f_k(w, z)| \leq 1 - \delta_n, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad |\varphi_s(w, z)| \geq \varepsilon_s, \quad s = 1, 2, \dots, L_n\},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} f(w, z) = & (2\pi i)^{-2} \sum_{\substack{\kappa, s=1 \\ \kappa < s}}^v \iint_{\sigma_{\kappa s}} f(w, \zeta) \varphi_{\kappa s}(w, \zeta; w, z) d\omega d\zeta + \\ & + (2\pi i)^{-2} \sum_{l, s} \iint_{\sigma_l^s} f(w, \zeta) \Psi_{ls}(w, \zeta; w, z) d\omega d\zeta, \quad w, z. \end{aligned} \quad (11)$$

Очевидно $f(w, z) - F(w, z)$ является аналитической функцией в D .

4. О «ГЛАВНОЙ ЧАСТИ», СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ $\varphi(w, z) = 0$

Рассмотрим, следуя методу Ока [2], поведение интеграла

$$J(w_0, z_0) = (2\pi i)^{-2} \sum_{\kappa=1}^v \iint_{\sigma_\kappa} \chi(w, z) \Psi_\kappa dw dz. \quad (12)$$

$$\sigma_\kappa : \{|f_\kappa(w, z)| = 1, \quad |\varphi(w, z)| = \varepsilon, \quad (w, z) \in \bar{\Delta}\},$$

$$\Psi_\kappa = \frac{Q_\kappa p - q P_\kappa}{[f_\kappa(w, z) - f_\kappa(w_0, z_0)] [\varphi(w, z) - \varphi(w_0, z_0)]},$$

$$\varphi(w, z) - \varphi(w_0, z_0) = p(w - w_0) + q(z - z_0). \quad (13)$$

$\chi(w, z)$ регулярная в $\bar{\Delta}$ функция за исключением поверхности $\varphi(w, z) = 0$, когда точка $(w_0, z_0) \in \Delta$ приближается к точке (ξ, η) , лежащей на гиперповерхности $|\varphi(w, z)| = \varepsilon$, $(w, z) \in \Delta$, $\frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial w} \neq 0$.

Возьмем некоторую окрестность K точки (ξ, η) , $K \ll \Delta$, $(w_0, z_0) \in K$. Обозначим через σ'_κ пересечение σ_κ . K и рассмотрим интеграл

$$J_1(w_0, z_0) = (2\pi i)^{-2} \sum_{\kappa=1}^v \iint_{\sigma'_\kappa} \chi(w, z) \Psi_\kappa dw dz.$$

Так как $J(w_0, z_0) - J_1(w_0, z_0)$ будет функцией от w_0, z_0 , регулярной в K , то в дальнейшем ограничимся рассмотрением $J_1(w_0, z_0)$. Выберем окрестность K настолько малой, чтобы уравнения

$$\begin{cases} \varphi(w, z) = w_1 \\ z = z_1 \end{cases} \quad (14)$$

давали псевдоконформное отображение окрестности K на область K_1 , в пространстве двух комплексных переменных w_1, z_1 . Отображение σ'_κ будет представлять собою множество σ''_κ . Делаем замену переменных (14) в $J_1(w_0, z_0)$:

$$J_1(w_0, z_0) = (2\pi i)^{-2} \sum_{\kappa} \int_{\sigma''_\kappa} \frac{\chi(w, z) \Psi_\kappa dw_1 dz_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial w}}. \quad (15)$$

Введем обозначение

$$\Phi_\kappa(w, z; w_0, z_0) = \chi(w, z) \frac{p_\kappa q - p q_\kappa}{\frac{\partial \varphi}{\partial w} [f_\kappa(w, z) - f_\kappa(w_0, z_0)]}.$$

Пусть (w_1^0, z_1^0) есть отображение точки (w_0, z_0) , т. е.,

$$\varphi(w_0, z_0) = w_1^0$$

$$z_0 = z_1^0$$

Очевидно, $(w_1^0, z_1^0) \in K_1$. Если K_1 достаточно мало, то $\Phi_\kappa(w_1^0, z_1^0; w_0, z_0)$ будет регулярной функцией от w_1, z_1 в K_1 . Тогда $\Phi_\kappa(w_1, z_1; w_0, z_0) - \Phi_\kappa(w_1^0, z_1^0; w_0, z_0) = [w_1 - \varphi(w_0, z_0)] \Psi(w_1, z_1; w_0, z_0)$, где $\Psi(w_1, z_1; w_0, z_0)$ регулярна в K_1 . Пусть

$$J_2(w_0, z_0) = (2\pi i)^{-2} \sum_{\kappa} \int_{\sigma'_\kappa} \frac{\Phi_\kappa(w_1^0, z_1^0; w_0, z_0) dw_1 dz_1}{w_1 - \varphi(w_0, z_0)}.$$

Тогда $J_1(w_0, z_0) - J_2(w_0, z_0) = (2\pi i)^{-2} \sum_{\kappa} \int_{\sigma''_\kappa} \Psi(w_1, z_1; w_0, z_0) dw, dz,$

будет регулярна в K_1 . Поэтому в дальнейшем будем рассматривать $J_2(w_0, z_0)$. Представим $J_2(w_0, z_0)$ в виде повторного интеграла. Пусть (ξ_1, η_1) есть отображение точки (ξ, η) ; $(\xi_1, \eta_1) \in \sigma''_\kappa$. В плоскости комплексного переменного w_1 возьмем круг с центром в ξ_1 радиуса ρ (впоследствии будем его выбирать достаточно малым). Точке $w_1 = w_1'$ в круге γ соответствует в пространстве комплексных переменных w_1, z_1 , кривая: $\{|f_\kappa(w, z)| = 1, \varphi(w, z) = w_1', (w_1, z_1) \in K_1\}$. Проекцию этой кривой на плоскость z_1 обозначим через $\Gamma_{w_1'} = \sum_k \Gamma_{w_1'}^\kappa$. Обозначим через l дугу окружности $|w_1| = \epsilon$, соответствующую $\sum_{\kappa} \sigma''_\kappa$.

Тогда

$$J_2(w_0, z_0) = (2\pi i)^{-2} \sum_{\kappa} \int_{l_\kappa} \frac{dw_1}{w_1 - \varphi(w_0, z_0)} \int_{\Gamma_{w_1}^\kappa} \Phi_\kappa(w_1^0, z_1^0; w_0, z_0) dz.$$

Заметим, что

$$[p(w - w_0) + q(z - z_0)]_{w_1=w_1^0} = 0$$

Следовательно,

$$[P_K q - p Q_K]_{w_1=w_1^0} = \left[\frac{p [f_K(w, z) - f_K(w_0, z_0)]}{z - z_0} \right]_{w_1=w_1^0},$$

$$\Phi_K(w_1^0, z_1; w_0, z_0) = \left[\chi(w, z) \frac{\frac{p}{\partial \varphi}}{\partial w} \right]_{w_1=w_1^0} \frac{1}{z - z_0}.$$

Но $\sum \Gamma_{w_i}^K$ есть замкнутая кривая [2], следовательно

$$(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_{w^1}} \Phi_K(w_1^0, z_1; w_0, z_0) = \left[\frac{\chi(w, z) p}{\frac{\partial \varphi}{\partial w}} \right]_{\substack{w_1=w_1^0 \\ z_1=z_1^0}}$$

$$\text{Но } [p]_{\substack{w_1=w_1^0 \\ z_1=z_1^0}} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial w} \right]_{\substack{w=w_0 \\ z=z_0}}.$$

Таким образом,

$$J_2(w_0, z_0) = \chi(w_0, z_0) (2\pi i)^{-1} \int \frac{dw_1}{w_1 - \varphi(w_0, z_0)}. \quad (16)$$

Так как при достаточно малом $\varepsilon > 0$ гиперповерхность $\{|\varphi(w, z)| = \varepsilon, \Delta\}$ находится в произвольно малой окрестности поверхности $\{|\varphi(w, z)| = 0, \Delta\}$, то из (16) следует, что $J_2(w_0, z_0)$ ведет себя в окрестности $\{\varphi(w, z) = 0, \Delta\}$ как $\frac{1}{2} \chi(w_0, z_0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1948.
2. K. Oka. Sur les fonctions analytiques des plusieurs variables complexes. Japan J. of. Math. 17, 1940 г; The Tôhoku math. J. 49, 1942 г.
3. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, М., 1950.

Кафедра общей математики
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

З. И. КЛЕМЕНТЬЕВ

**ОБ УСЛОВИЯХ ПРЕДСТАВИМОСТИ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА
ФУРЬЕ-СТИЛЬТЪЕСА НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ СО
ЗНАЧЕНИЯМИ В АБСТРАКТНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ
ПРОСТРАНСТВЕ**

§ 1. Нам понадобятся следующие сведения из функционального анализа в полуупорядоченных пространствах.

1. Пусть Y и X полуупорядоченные пространства.
Элемент

$$|U| = \sup_{\|x\| \leq 1} |U(x)| \in Y,$$

или, что все равно, наименьший из элементов $y \in Y$ таких, что

$$|U(x)| \leq y \|x\|$$

при любом $x \in X$, называется абстрактной нормой операции U класса H_b^o , то есть линейной операции, переводящей всякую (o) -сходящуюся, (сходящуюся по норме), последовательность в нормированном пространстве X в (o) -сходящуюся последовательность в K -пространстве Y (см. [1], стр. 258).

2. Если X нормированное пространство, $X_1 \subset X$ его линейное подмножество, Y есть K -пространство, и $y = U(x)$ операция класса H_b^o из X_1 в Y , имеющая конечную абстрактную норму $|U|$, то она может быть продолжена на все пространство X с сохранением аддитивности, однородности и абстрактной нормы ([1],—стр. 337).

3. Если $\omega(t)$ абстрактная функция вещественной переменной t , заданная, например, на сегменте $a \leq t \leq b$ с значениями в K -пространстве Y счетного типа, то

$$y^* = \sup \sum_{i=0}^{n-1} |\omega(t_{i+1}) - \omega(t_i)|,$$

где supremum берется по всем разбиениям $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ и

точки $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ являются точками непрерывности функции $\omega(t)$, называется существенной вариацией функции $\omega(t)$. Сама функция, $\omega(t)$ называется функцией ограниченной вариации, ([1], стр. 314), если y^* конечный элемент.

4. Имеет место

Теорема 1.

Общий вид операции $y = U(x)$ класса H_b^o , отображающей пространство $C_{[a, b]} = \{x(t)\}$ непрерывных функций в K^+ пространство Y счетного типа, дается интегралом Стильтьеса

$$U(x) = \int_a^b x(t) d\omega(t),$$

при этом абстрактная норма $|U|$ равна существенной вариации $\omega(t)$. (Интеграл понимается как предел интегральных сумм в смысле (o) — сходимости).

5. Пусть C_π означает пространство всех непрерывных вещественных функций $V(t)$ с периодом 2π .

Через C_∞ будем обозначать нормированное (с обычной для непрерывных функций нормой, т. е. $\|f\| = \max |f(x)|$, $[-\infty < x < +\infty]$) пространство всех непрерывных вещественных функций $f(x)$, заданных на $[-\infty, +\infty]$, в которое переходит пространство C_π после замены $x = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$. При этом считается $f(-\infty) = f(+\infty) = V(\pi) = V(-\pi)$, где $V(t)$ функция, которая переходит в $f(x)$ после замены $x = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, $(f(x) = V[2 \operatorname{arctg} x], -\pi \leq t \leq +\pi)$.

Можно сформулировать такую теорему:

Теорема 2.

Всякая линейная операция $U(f)$, переводящая пространство $X = C_\infty$ в Y и принадлежащая классу H_b^o , имеет вид:

$$U(f) = f(\infty) \{ |\omega(+\infty) - \omega(+\infty - 0)| + \\ + [\omega(-\infty + 0) - \omega(-\infty)] \} + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\omega(x);$$

при этом

$$|U| = (|\omega(+\infty) - \omega(+\infty - 0)| + |\omega(-\infty + 0) - \omega(-\infty)|) + \\ + \text{сущ. var } \omega(x), -\infty < x < +\infty.$$

Здесь имеется в виду, что функция ограниченной вариации $\omega(x)$ задана на замкнутой прямой $[-\infty, +\infty]$, то есть, что существует функция $W(t)$ ограниченной вариации на $[-\pi, +\pi]$ такая, что

$$\omega(x) = W(2 \operatorname{arctg} x)$$

для $-\infty < x < +\infty$ и

$$\omega(+\infty) = W\left(+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\omega(-\infty) = W\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\omega(+\infty - 0) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} W(t),$$

$$\omega(-\infty + 0) = \lim_{t \rightarrow -\frac{\pi}{2}} W(t).$$

Пространство Y предполагается пространством типа, указанного в пунктах 3 и 4.

Доказательство.

Достаточно доказать, что всякий линейный оператор $U(V)$ типа H_b^o , переводящий пространство C_π в Y , имеет вид

$$U(V) = V(\pi) \left\{ [W(\pi) - W(\pi - 0)] + \right. \\ \left. + [W(-\pi + 0) - W(-\pi)] \right\} + \int_{-\pi+0}^{+\pi-0} f(t) d\omega(t),$$

$$\text{и что при этом } |U| = |W(\pi) - W(\pi - 0)| + \\ + |W(-\pi + 0) - W(-\pi)| + \text{сущ. var } W(t) \\ - \frac{\pi}{2} < t < + \frac{\pi}{2}.$$

Но последнее доказывается немедленно, если воспользоваться теоремой 1 пункта 4.

В связи с этой теоремой сделаем следующее замечание. Будем рассматривать линейное многообразие $\tilde{Y}$, построенное на пространстве Y над полем комплексных чисел, то есть совокупность всех элементов $\tilde{y}$ вида

$$\tilde{y} = y' + i y'', \text{ где } i = \sqrt{-1}, \quad y' \in Y, \quad y'' \in Y,$$

при этом умножение на комплексное число и сложение производится по обычным правилам.

Будем также рассматривать совокупность $\{\tilde{U}\}$ всех аддитивных и однородных операций на $\tilde{C}$, переводящих пространство $\tilde{C}_{[a, b]} = \{f(t) + i\varphi(t)\} = \{\psi\}$ комплексно-значных функций, заданных на промежутке $t \in [a, b]$, в пространство Y . Легко видеть, что всякая операция $\tilde{U}$ представляется в виде

$$\tilde{U} = U' + iU'',$$

где U' и U'' аддитивные и однородные операции, переводящие пространство $C_{[a, b]} = \{f\}$ вещественных функций, в Y . Действительно, пусть $f(x)$ вещественная функция и пусть

$$\tilde{U}(f) = y' + i y'', \quad \text{где } y' \in Y, \quad y'' \in Y.$$

Определим U' и U'' , полагая

$$U'(f) = y', \quad U''(f) = y''.$$

Легко видеть, что U' — аддитивная и однородная операция из $C_{[a, b]}$ в Y . Действительно, если

$$f = f_1 + if_2,$$

то

$$\begin{aligned} \tilde{U}(f_1 + f_2) &= \tilde{U}(f_1) + \tilde{U}(f_2) = y'_1 + iy''_1 + y'_2 + iy''_2 = \\ &= (y'_1 + y'_2) + i(y''_1 + y''_2), \end{aligned}$$

то есть

$$U'(f_1 + f_2) = y'_1 + y'_2 = U'(f_1) + U'(f_2)$$

и аналогично

$$U''(f_1 + f_2) = U''(f_1) + U''(f_2).$$

Очевидно также, что

$$U'(af) = aU'(f), \quad U''(af) = aU''(f),$$

(a — вещественное число).

Будем далее рассматривать совокупность всех непрерывных операций, то есть таких операций

$$\tilde{U} = U' + iU'',$$

где U' и U'' являются непрерывными операциями, переводящими $C_{[a, b]}$ в Y .

Тогда формула

$$\tilde{U}(\psi) = \int_a^b \psi(t) d\omega(t)$$

будет являться общим видом непрерывной операции, где

$$\omega(t) = \omega_1(t) + i\omega_2(t)$$

и $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ — суть функции ограниченной вариации со значениями в пространстве Y .

Действительно

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\psi) &= \tilde{U}(f + i\varphi) = \tilde{U}(f) + i\tilde{U}(\varphi) = \\ &= U'(f) + iU''(f) + i[U'(\varphi) + iU''(\varphi)]. \end{aligned}$$

Но согласно теореме 1,

$$U'(f) = \int_a^b f(t) d\omega_1(t),$$

$$U''(f) = \int_a^b f(t) d\omega_2(t),$$

$$U'(\varphi) = \int_a^b \varphi(t) d\omega_1(t),$$

$$U''(\varphi) = \int_a^b \varphi(t) d\omega_2(t).$$

Очевидно, поэтому,

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\psi) &= \int_a^b (f + i\varphi) d\omega_1(t) - i \int_a^b (f + i\varphi) d\omega_2(t) = \\ &= \int_a^b \psi(t) (d\omega_1(t) + id\omega_2(t)) = \int_a^b \psi(t) d\omega(t). \end{aligned}$$

После этого нетрудно убедиться, что утверждение теоремы 2 остается справедливым, если в её формулировке заменить $\tilde{U}$ на U , вещественную функцию $f(t)$ на комплексную функцию $\psi(t)$ и $\omega(t)$ на $\omega_1(t) + i\omega_2(t)$.

Мы будем иметь дело, далее, с абстрактным интегралом Римана

$$\int_{-T}^{+T} \lambda(t) \varphi(t) dt, \quad (1)$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная вещественная функция и $\lambda(t)$ абстрактная, ограниченная, (o) — непрерывная функция со значениями в пространстве Y , $-T \leq t \leq +T$; при этом интеграл (1) понимается как (o) — предел интегральных сумм

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda(\xi_k) \varphi(\xi_k) \Delta t_k, \quad \xi_k \in \Delta t_k,$$

при условии стремления к нулю l , если l есть наибольшая из длин промежутков $\Delta t_k = [t_k, t_{k+1}]$ при разбиении промежутка $[-T, +T]$ точками $-T = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, (o) — непрерывность функции $\lambda(t)$ означает, что $(o) - \lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) = \lambda(t_0)$, если $t \rightarrow t_0$ и ограниченность означает, что существует элемент $y_0 \in Y$ такой, что $|\lambda(t)| \leq y_0$ при всех $t \in [-T, +T]$. Убедиться в существовании указанного предела (интеграла) можно при помощи тех же рассуждений, что и в случае вещественных непрерывных функций.

Действительно, пусть $\{D_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, последовательность разбиений отрезка $[-T, +T]$ такая, что $D_n \subset D_{n+1}$, то есть точки следующего разбиения содержат точки предыдущего, и пусть $l_n \rightarrow 0$, (l_n — длина наибольшего промежутка n -го разбиения D_n).

Рассмотрим суммы

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \underline{y}_k \Delta t_k,$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \bar{y}_k \Delta t_k,$$

где $m_k, \underline{y}_k, M_k, \bar{y}_k$ — суть соответственно наименьшие и наибольшие значения функций $\varphi(t)$ и $\lambda(t)$ в промежутке Δt_k . Очевидно, последовательность $\{s_n\}$ является не убывающей и последовательность $\{S_n\}$ — не возрастающей. Следовательно, существуют элементы

$$\underline{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

и

$$\bar{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

при этом легко видеть, что $\underline{y} = \bar{y} = y^*$ (y^* — общее значение $\underline{y}$ и $\bar{y}$).

Действительно

$$\begin{aligned} S_n - s_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k \bar{y}_k - m_k \underline{y}_k) \Delta t_k \leq \\ &\leq [\sup \lambda(t) - \inf \lambda(t)] \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta t_k \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Столь же просто убеждаемся, что y^* не зависит от выбора последовательности подразделений $\{D_n\}$ и что последовательность

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(\xi_k) \varphi(\xi_k) \Delta t_k$$

имеет предел, равный y^* .

§ 2. Сформулируем теперь теорему, которую мы имели в виду доказать.

Теорема 3.

Для того, чтобы непрерывная функция $\lambda(t)$ допускала представление в виде интеграла Стильтьеса

$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} d\omega(u), \quad t \in [-T, +T] \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы при любом n , любых $t_k \in [-T, +T]$ и любых вещественных числах C_k имело бы место неравенство

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} C_k \lambda(t_k) \right| \leq y_0 \sup_{-\infty < x < +\infty} \left| \sum_{k=0}^{n-1} C_k e^{it_k x} \right| \quad (2)$$

Здесь имеется в виду, что $\lambda(t)$ и $\omega(t)$ суть абстрактные функции, указанные в предыдущих пунктах и $\omega(t)$, вообще, предполагается комплексно-значной функцией, то есть

$$\omega(t) = \omega_1(t) + i\omega_2(t).$$

Соответствующий интеграл в (1) понимается как сумма двух интегралов.

Доказательство.

Пусть имеет место представление (1). Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} C_k \lambda(t_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it_k u} d\omega(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k e^{it_k u} \right) d\omega(u) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k e^{it_k u} \right) d\omega_1(u) + i \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k e^{it_k u} \right) d\omega_2(u), \end{aligned}$$

откуда легко видеть справедливость неравенства (2), если полагать

$$y_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |d\omega_1(u)| + \int_{-\infty}^{+\infty} |d\omega_2(u)|.$$

Пусть теперь выполнено условие (2).

Рассмотрим подпространство $B_T \subset C_\infty$ всех функций вида

$$f(x) = \int_{-T}^T e^{itx} \varphi(t) dt, \quad (3)$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная вещественная функция на отрезке $[-T, +T]$.

Рассмотрим далее оператор

$$U_\lambda(f) = \int_{-T}^T \lambda(t) \varphi(t) dt, \quad (4)$$

где имеется в виду соответствие между f и φ , устанавливаемое равенством (3).

Очевидно, $U_\lambda(f)$ однородный и аддитивный оператор со значениями в Y . Убедимся в его ограниченности в том смысле, что существует элемент $y_0 \in Y$ такой, что

$$|U_\lambda(f)| \leq y_0 \|f\|$$

для любой функции $f \in B_T$.

На основании условия (2) будем иметь

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(t_k) \varphi(t_k) \Delta t_k \right| \leq y_0 \cdot \sup \left| \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t_k) \Delta t_k e^{it_k x} \right|,$$

если полагать $C_k = \varphi(t_k) \Delta t_k$.

Полагая для краткости

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t_k) \Delta t_k e^{it_k x}$$

можем написать, очевидно,

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(t_k) \varphi(t_k) \Delta t_k \right| \leq y_0 \|f_n(x)\|.$$

(Имеется в виду, что выбрана определенная последовательность разбиений $\{D_n\}$ отрезка $[-T, +T]$, при условии $\Delta t_k \rightarrow 0$, ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$), когда $n \rightarrow \infty$).

Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена, равномерно непрерывна и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

для каждого $x \in (-\infty, +\infty)$, то можно считать, не нарушая общности, что

$$\|f_n(x) - f(x)\| \rightarrow 0.$$

Следовательно

$$\|f_n\| \leq \|f\| + \varepsilon \text{ при } n \geq N(\varepsilon).$$

Таким образом

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(t_k) \varphi(t_k) \Delta t_k \right| < y_0 (\|f\| + \varepsilon), \quad n \geq N(\varepsilon).$$

Переходя к пределу и учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, получим

$$|U_\lambda(f)| \leq y_0 \|f\|.$$

Согласно пункта 2 существует продолжение оператора U_λ на все пространство $X = C_\infty$, причем согласно теореме 2 пункта 5 и замечанию, сделанного к ней, это распространение будет иметь вид

$$U_\lambda(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\omega(x) + f(\infty) \{ [\omega(+\infty) - \omega(+\infty - 0)] + \\ + [\omega(-\infty + 0) - \omega(-\infty)] \}.$$

В частности при $f \in B_T$ будем иметь

$$U_\lambda(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\omega(x),$$

так как в этом случае

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = f(\pm \infty) = 0.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \lambda(t) \varphi(t) dt &= U_\lambda(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-T}^{+T} e^{itu} \varphi(u) du \right\} d\omega(t) = \\ &= \int_{-T}^T \varphi(u) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} d\omega(t) \right\} du \end{aligned}$$

Так как $\varphi(u)$ — произвольная непрерывная функция в $[-T, +T]$, то убеждаемся (как и в случае вещественных функций), что

$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} d\omega(u)$$

и теорема, таким образом, доказана.

З а м е ч а н и е. Законность перемены порядка интегрирования в рассматриваемом случае также нетрудно показать.

Рассмотренный выше вопрос о представлении абстрактной функции $\lambda(t)$ может найти приложение в некоторых вопросах теории вероятностей. Согласно общепринятой концепции А. Н. Колмогорова, вероятность есть мера $\mu(e)$ на вполне аддитивном классе $T = \{e\}$ множеств, являющихся подмножествами множества $E \in T$, $\mu E = 1$.

Понятия измеримой функции, точки, интеграла, суммируемости понимаются обычным для теории меры образом.

В качестве $Y = \{y\}$ возьмем пространство суммируемых (относительно $\mu(e)$) с квадратом функций. Будем вместе с тем рассматривать Y как полуупорядоченное K -пространство, аналогично тому, как обычное пространство L_2 (то есть пространство суммируемых с квадратом функций относительно обычной меры Лебега в евклидовых пространствах) рассматривается как полуупорядоченное K -пространство, то есть считается $y > 0$, если $y(t) > 0$ почти везде и $y(t)$ отлично от нулевого элемента относительно меры $\mu(e)$. Если теперь под абстрактной функцией $\lambda(t)$ понимать стационарную случайную функцию (стационарный процесс), то сформулированная выше теорема может рассматриваться как теорема о спектральном разложении этого процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, М., 1950.

Кафедра математического анализа
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

Г. Д. СУВОРОВ

К ТЕОРИИ ПРОСТЫХ КОНЦОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ, СХОДЯЩЕЙСЯ К ЯДРУ

Пусть $\{B_n\} = B(B_0)$ — последовательность плоских, однолистных, односвязных, ограниченных в совокупности областей B_n , $n = 1, 2, \dots$, сходящаяся относительно начала координат к невырожденному ядру B_0 ([1], стр. 380).

В работе [2] результаты известных исследований К. Каратеодори по теории простых концов односвязной области переносятся на случай последовательности $B(B_0)$. В основе определения конца (и простого конца) этой последовательности лежат понятия: жорданова сечения области, сечения последовательности областей и, определяемое через них, понятие „цепи элементов“ последовательности $B(B_0)$. В настоящей заметке приводится новое определение простого конца последовательности областей без использования понятия сечения. Устанавливается также, что если от $B(B_0)$ перейти к топологическому пространству B точек всех областей последовательности $B(B_0)$, то понятие простого конца пространства B в новом смысле совпадает с понятием простого конца этого пространства в старом смысле. Проще всего равносильность этих двух понятий доказывается с использованием аналогичного построения для случая одной области ([3], стр. 228—230).

п°1. Пусть G — односвязная ограниченная область плоскости. Односвязную ее подобласть g мы называем правильной подобластью области G , если ее относительная (в G) граница γ связна, отстоит от Γ_G (границы G) на нулевое расстояние, и если абсолютная граница области g и еще по крайней мере одной из компонент связности множества $(G \setminus \gamma) \setminus g$ содержат точки Γ_G , не являющиеся предельными для точек γ . Каждую из таких компонент связности мы, для краткости, также будем называть правильной компонентой множества $(G \setminus \gamma) \setminus g$.

Заметим, что в общем случае множество $(G \setminus \gamma) \setminus g$ может состоять из счетного множества правильных компонент и счетного множества областей, не являющихся правильными компонентами.

Пусть ϑ_0 — правильная подобласть ядра B_0 , β_0 — ее относительная (в B_0) граница. Последовательность $\{\vartheta_n\} = \vartheta(\vartheta_0)$ правильных подобластей областей из $B(B_0)$ (ϑ_n — правильная подобласть области $B_n \in B(B_0)$) (будем называть обобщенным элементом (о. элементом) последовательности $B(B_0)$) (в отличие от элемента $B(B_0)$, см. [2], стр. 80), если эта последовательность имеет следующие свойства:

1°. Относительные (в B_n) границы β_n областей ϑ_n топологически сходятся к β_0 : $\beta_0 = \lim \beta_n$.

2°. В области ϑ_0 и в каждой из правильных компонент ϑ_i множества

$(B_0 \setminus \beta_0) \setminus \sigma_0$ найдется точка P_0 , соответственно, P_i такие, что, начиная с некоторого n , $P_0 \in \sigma_n$ и P_i принадлежат каким-либо правильным компонентам множества $(B_n \setminus \beta_n) \setminus \sigma_n$.

Элемент $B(B_0)$ в старом смысле является, как легко видеть, о. элементом $B(B_0)$, следовательно, множество о. элементов $B(B_0)$ не пусто.

Лемма 1: Последовательность $\sigma(\sigma_0)$ (—о. элемент $B(B_0)$) сходится к области σ_0 как к ядру.

Доказательство. Нужно показать, что ядро $\tilde{\sigma}_0$ всякой подпоследовательности $\{\sigma_n\} \subset \sigma(\sigma_0)$ относительно точки P_0 совпадает с σ_0 . Обозначим через K любой континуум, содержащий точку P_0 и принадлежащий σ_0 . Выберем окрестности $U_1(\beta_0)$ и $U_2(K)$ континуумов β_0 (β_0 —замыкание β_0) и K так, чтобы было: $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ¹⁾ и значение $n_0 > N(U_1, U_2, P_0)$ такое, чтобы при $n^1 > n_0$ было: $\beta_{n^1} \subset U_1$, $P_0 \in \sigma_{n^1}$ и $U_2 \subset B_{n^1}$.

Всякая точка $q \in K$ принадлежит σ_{n^1} при $n^1 > n_0$. Действительно, точку q можно соединить ломаной в U_2 с точкой P_0 . При $n^1 > n_0$ эта ломаная не пересечет β_{n^1} и не встретит точек границы B_{n^1} , следовательно, она вся вместе с концами принадлежит σ_{n^1} . В силу произвола

в выборе $K \subset \sigma_0$ и $q \in K$ мы получаем, что $\tilde{\sigma}_0 \supset \sigma_0$. Докажем теперь что $\tilde{\sigma}_0 \subset \sigma_0$. Положим, что найдется точка $q \in \tilde{\sigma}_0$, но $q \notin \sigma_0$. Легко видеть,

что $q \in B_0$. Соединим точки P_0 и q ломаной S внутри σ_0 . На этой ломаной должна найтись точка $q_1 \in \beta_0$. Выберем подпоследовательность $\{\sigma_{n^1}\} \subset \sigma(\sigma_0)$ и окрестность ломаной $U(S)$ такие, чтобы было: $U(S) \cap \beta_{n^1} = \emptyset$ при всех n^1 . Следовательно, можно построить окрестность $U(q_1) \subset U(S)$, не содержащую точек β_{n^1} , что противоречит топологической сходимости множеств β_n к β_0 .

Лемма доказана.

п°2. Если $\sigma(\sigma_0) = \{\sigma_n\}$ и $\sigma(\sigma_0^1) = \{\sigma_{n^1}\}$ —два о. элемента $B(B_0)$, причем $\sigma_n \supset \sigma_{n^1}$, начиная с некоторого значения n , то пишем: $\sigma(\sigma_0) > \sigma(\sigma_0^1)$.

Лемма 2. Для того, чтобы было $\sigma(\sigma_0) > \sigma(\sigma_0^1)$, достаточны условия $\sigma_0 \supset \sigma_0^1$ и $\beta_0 \cap \beta_0^1 = \emptyset$.

Доказательство. Нужно показать, что при условиях леммы будет $\sigma_n \supset \sigma_{n^1}$ при $n > N$. Для этого достаточно убедиться, что, начиная с некоторого n , будет: $\sigma_n \supset \beta_{n^1}$ и $\sigma_{n^1} \cap \beta_n = \emptyset$.

Действительно, если это так, но $\sigma_{n^1} \not\subset \sigma_n$, то выбирая точку $P \in \sigma_{n^1}$, но $P \notin \sigma_n$, мы сможем соединить ее ломаной в области σ_{n^1} с какой-либо точкой β_{n^1} , не пересекая абсолютной границы области σ_n , следовательно, эта ломаная вместе с концами лежит вне σ_n , что противоречит предположению о включении $\sigma_n \supset \beta_{n^1}$.

Покажем, что $\sigma_n \supset \beta_{n^1}$ при $n > N_1$. Из условий леммы следует, что можно выбрать точку m , $m \in \beta_0^1$, непересекающиеся окрестности $U(\beta_0)$, $U(\beta_0^1)$, окрестность $U(m)$, $U(m) \subset U(\beta_0^1)$, $U(m) \subset \sigma_0$ и число N_1 такие, чтобы при $n > N_1$ было:

$$\beta_n \subset U(\beta_0), \quad \beta_{n^1} \subset U(\beta_0^1), \quad U(m) \subset \sigma_n$$

и кроме того, чтобы при $n > N_1$ окрестность $U(m)$ содержала точки β_{n^1} . При таких значениях n σ_n содержит точки β_{n^1} и так как β_n и β_{n^1} не пересекаются, то из проведенного построения следует, что при $n > N_1$ будет: $\sigma_n \supset \beta_{n^1}$.

¹⁾ т. е. пересечение U_1 и U_2 —пусто.

Покажем, что $\vartheta_n^1 \cap \beta_n = 0$, при $n > N_2 \geq N_1$. Если ϑ_n^1 содержит точки β_n , то должно быть: $\vartheta_n^1 \supset \beta_n$, так как при $n > N_1$ β_n и $\tilde{\beta}_n^1$ не пересекаются. Итак, пусть $\vartheta_n^1 \supset \beta_n$ для бесконечного множества $\{n'\}$ значений $n > N_1$. Для таких n' область $\vartheta_{n'}^1$ содержит все правильные компоненты множества $(B_{n'} \setminus \beta_{n'}^1) \setminus \vartheta_{n'}^1$. Действительно, пусть $\tilde{\vartheta}_{n'}$ — любая такая компонента. Соединим любую ее точку ломаной S , проходящей внутри $\tilde{\vartheta}_{n'}^1$, с какой-нибудь точкой $\beta_{n'}$, принадлежащей границе области $\tilde{\vartheta}_{n'}^1$. Эта ломаная не может пересечь абсолютной границы области $\vartheta_{n'}^1$, т. к. она проходит в $B_{n'}$ и вне области $\vartheta_{n'}^1 \supset \beta_{n'}^1$. Следовательно, $S \in \vartheta_{n'}^1$ и $\vartheta_{n'}^1 \supset \vartheta_{n'}^1$. Но, по условию, $\vartheta(\vartheta_0)$ — о. элемент $B(B_0)$, поэтому найдется точка P_i , принадлежащая правильной компоненте $\tilde{\vartheta}_{0i}$ множества $(B_0 \setminus \beta_0) \setminus \vartheta_0$ и, начиная с некоторого $n' > N_2 \geq N_1$ — правильной компоненте множества $(B_{n'} \setminus \beta_{n'}^1) \setminus \vartheta_{n'}^1$. По доказанному выше, $P_i \in \vartheta_{n'}^1$ для $n' > N_2$, но точка P_i одновременно принадлежит и правильной компоненте множества $(B_0 \setminus \beta_0^1) \setminus \vartheta_0^1$. Действительно, соединим P_i ломаной S_1 , проходящей внутри $\tilde{\vartheta}_{0i}$, с точкой границы Γ_{B_0} . Эта ломаная не пересечет β_0^1 , т. к. она лежит вне области $\vartheta_0 \supset \beta_0^1$. Мы получили тем самым, что для бесчисленного множества значений $n > N_2$ области ϑ_n^1 содержат точку P_i , принадлежащую правильной компоненте множества $(B_0 \setminus \beta_0^1) \setminus \vartheta_0^1$, что противоречит определению о. элемента $\vartheta(\vartheta_0^1)$. Лемма доказана.

л^о 3. Рассмотрим последовательность функций $w = f_n(z)$, $f_n(0) = 0$, $f_n'(0) > 0$, $n = 1, 2, \dots$, осуществляющих конформное однолистное отображение круга $|z| < 1$ на области последовательности $B(B_0)$ плоскости w . Через $f_0(z)$ обозначим предельную функцию этой последовательности. Эти функции можно рассматривать как отображения последовательности совпадающих кругов $\{Q_n\} = Q(Q_0)$ (сходящейся к ядру $Q_0 = \{|z| < 1\}$) на последовательность $B(B_0)$. Обратные отображения осуществляются функциями f_n^{-1}, f_0^{-1} .

Лемма 3. При отображении $B(B_0)$ на $Q(Q_0)$ всякий о. элемент последовательности $B(B_0)$ переходит в о. элемент последовательности $Q(Q_0)$, т. е. если $\vartheta(\vartheta_0) = \{\vartheta_n\}$ — о. элемент $B(B_0)$, $q_0 = f_0^{-1}(\vartheta_0)$, $q_n = f_n^{-1}(\vartheta_n)$, то $\{q_n\} = q(q_0)$ — о. элемент $Q(Q_0)$.

Доказательство. Обозначим: $\gamma_0 = f_0^{-1}(\beta_0)$, $\gamma_n = f_n^{-1}(\beta_n)$. Нужно доказать три утверждения:

I. Области q_n, q_0 — правильные подобласти единичного круга.

II $\gamma_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$.

III. В области q_0 и в каждой из правильных компонент $\tilde{q}_i$ множества $(Q_0 \setminus \gamma_0) \setminus q_0$ найдутся точки r_0, r_i такие, что, начиная с некоторого n , $r_0 \in q_n$ и r_i принадлежат каким-либо из правильных компонент множества $(B_n \setminus \beta_n) \setminus \vartheta_n$.

(а) Утверждение I следует из известных общих свойств конформных отображений.

(б) Утверждение II следует из двух:

1°. γ_n принадлежит любой окрестности γ_0 , начиная с некоторого n .

2°. Любая окрестность всякой точки γ_0 содержит точки всех γ_n , начиная с некоторого n .

Действительно, из 1° следует $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \gamma_n \subset \gamma_0$, из 1° $\gamma_0 \subset \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$, т. е. $\gamma_0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$, что и нужно.

Утверждение 1° доказывается так же, как и в [2], (лемма 4, II, стр.

81—82). Докажем 2°. Предполагая противное, найдем точку $\xi \in \bar{\gamma}_0$, окрестность ее $U(\xi)$ и подпоследовательность $\{\gamma_n'\} \subset \{\gamma_n\}$ такие, что γ_n' и $U(\xi)$ не пересекаются. Компонента связности множества $Q_0 \cup U(\xi)$, содержащая внутри или на своей границе точку ξ , содержит еще точку $\xi' \in \gamma_0$, окрестность которой $U(\xi') \subset U(\xi)$, $\bar{U}(\xi) \subset Q_0$, также не содержит точек γ_n' . Учитывая топологическую сходимость последовательности $\{\beta_n\}$ к β_0 и равномерную сходимость функций f_n^{-1} к f_0^{-1} внутри B_0 , мы легко придем к противоречию.

(в). Чтобы доказать III, возьмем в области ϑ_0 и в каждой из правильных компонент множества $(B_0 \setminus \beta_0) \setminus \vartheta_0$ по точке P_0, P_i и положим: $r_0 = f_0^{-1}(P_0)$, $r_i = f_i^{-1}(P_i)$. Из общих свойств конформного отображения следует, что $r_0 \in \tilde{q}_0$ и $r_i \in \tilde{q}_i$.

При достаточно большом N и $n \geq N$ будет: $r_0 \in q_n$ и $r_i \in \bar{q}_n$, последнее—потому, что прообраз точки r_i при отображении f_n^{-1} , при достаточно большом n , не содержится в области ϑ_n . Этот прообраз не может содержаться и в компоненте множества $(B_n \setminus \beta_n) \setminus \vartheta_n$, не являющейся правильной, следовательно, и r_i может принадлежать только правильной компоненте множества $(Q_n \setminus \gamma_n) \setminus q_n$ при достаточно большом N . Этим доказано III, а следовательно, и лемма 3.

л^о 4. Пусть бесконечная последовательность $\{\vartheta(\vartheta_0^k)\}$, $k=1, 2, \dots$, о. элементов $B(B_0)$ такова, что $\vartheta_0^1 \supset \vartheta_0^2 \supset \dots \supset \vartheta_0^k \supset \dots$ и γ_0^k (γ_0^k —относительная (в B_0) граница ϑ_0^k) попарно без общих точек в $\bar{B}_0$.

По лемме 3 имеем:

$$\vartheta(\vartheta_0^1) > \vartheta(\vartheta_0^2) > \dots > \vartheta(\vartheta_0^k) > \dots$$

Такую последовательность $\{\vartheta(\vartheta_0^k)\}$ называем цепью о. элементов $B(B_0)$. Очевидно, всякая цепь элементов $B(B_0)$ ([2], стр. 83) есть цепь о. элементов $B(B_0)$, так что множество цепей о. элементов $B(B_0)$ не пусто.

Включение одной цепи о. элементов $B(B_0)$ во вторую и эквивалентность цепей определяется так же, как и в работе [2], (стр. 83). Наконец, концом последовательности $B(B_0)$ мы называем всякий класс эквивалентности цепей о. элементов $B(B_0)$. Дальнейшие определения, увязывающие понятие конца с другими понятиями ([2], определения VI₂—VI₅) переносятся и на наш более общий случай без всяких изменений.

Простой конец последовательности $B(B_0)$ и в нашем случае мы определим как конец, не имеющий собственных делителей. Дословно переносятся определения соотнесенной точки, множества B , правильной последовательности точек B и все прочие определения работы [2].

Доказанная лемма 3 позволяет пользоваться и в нашем случае теоремой 3) [2] (стр. 85).

Таким образом, теоремы 1—4 работы [2] переносятся на общий случай без изменений, а, следовательно, без изменений переносится и вся теория простых концов последовательности $B(B_0)$ в том объеме, в котором она построена в работе [2], включая и теорему 12, [2] о соответствии границ при конформном отображении единичного круга на области $B(B_0)$, вопросы классификации простых концов и прочее.

л^о 5. Понятия конца $B(B_0)$ в старом и новом смысле не совпадают, поскольку множество о. элементов $B(B_0)$, очевидно, шире множества элементов $B(B_0)$.

Однако эти два понятия оказываются равносильными, если перейти к топологическому пространству B , образованному множеством всех соотнесенных точек всех областей $B_n \in B(B_0)$, пополненному простыми концами областей B_n ([2], § 3). Чтобы в этом убедить-

ся, цепи $\{\vartheta(\vartheta_0^k)\}$ $k=1, 2, \dots, \infty$ элементов $B(B_0)$ ставим в соответствие цепь $\vartheta^1 \supset \vartheta^2 \supset \dots \supset \vartheta^k \supset \dots$ вложенных открытых множеств пространства B подобно тому, как в [2] это сделано для цепей элементов $B(B_0)$. К каждой такой цепи присоединим все открытые множества пространства B , содержащие хотя бы один элемент цепи. Полученное семейство открытых множеств назовем концом B . Простым концом B называем конец, не содержащийся ни в каком другом конце в качестве собственного подсемейства. Топология в пространстве B , пополненном множеством всех простых концов B , вводится, следуя А. Д. Мышкису, так же, как это сделано в [2]. Описанное построение соотносит каждому простому концу $B(B_0)$ простой конец B , причем соответствие это взаимно однозначно.

Теорема. Определения концов (а потому и простых концов) пространства B в старом ([2], § 3) и новом смыслах равносильны.

Доказательство. Ясно, что всякий конец B в старом смысле будет концом B и в новом смысле. Берем цепь $\vartheta^1 \supset \vartheta^2 \supset \dots \supset \vartheta^k \supset \dots$ подобластей B в новом смысле. Эта цепь определяется, как это указано выше, посредством некоторой цепи ∞ элементов $B(B_0)$:

$$\vartheta(\vartheta_0^1) \supset \vartheta(\vartheta_0^2) \supset \dots \supset \vartheta(\vartheta_0^k) \supset \dots$$

Если мы сможем построить цепь подобластей B в старом смысле:

$$\tilde{\vartheta}^1 \supset \tilde{\vartheta}^2 \supset \dots \supset \tilde{\vartheta}^k \supset \dots,$$

причем такую, чтобы было:

$$\vartheta^1 \supset \tilde{\vartheta}^1 \supset \vartheta^2 \supset \tilde{\vartheta}^2 \supset \dots,$$

то концы B , определяемые цепями $\{\vartheta^k\}$ и $\{\tilde{\vartheta}^k\}$, очевидно, совпадают, что и доказывает теорему.

Итак, нам достаточно построить цепь элементов $B(B_0)$:

$$\tilde{\vartheta}(\tilde{\vartheta}_0^1) \supset \tilde{\vartheta}(\tilde{\vartheta}_0^2) \supset \dots \quad \text{такую, чтобы было:}$$

$$\vartheta(\vartheta_0^1) \supset \tilde{\vartheta}(\tilde{\vartheta}_0^1) \supset \vartheta(\vartheta_0^2) \supset \tilde{\vartheta}(\tilde{\vartheta}_0^2) \supset \dots$$

Согласно определению цепи $\{\vartheta(\vartheta_0^k)\}$ ∞ элементов $B(B_0)$ мы имеем: $\vartheta_0^1 \supset \vartheta_0^2 \supset \dots \supset \vartheta_0^k \supset \dots$ и $\tilde{\vartheta}_0^k$ ($\tilde{\vartheta}_0^k$ — относительная граница ϑ_0^k) попарно без общих точек. Строим цепь $\tilde{\vartheta}_0^1 \supset \tilde{\vartheta}_0^2 \supset \dots \supset \tilde{\vartheta}_0^k \supset \dots$ подобластей B_0 , причем такую, что всякая подобласть $\tilde{\vartheta}_0^k$ цепи определена посредством жорданова сечения $\tilde{\vartheta}_0^k$ области B_0 и такую, что будет:

$$\vartheta_0^1 \supset \tilde{\vartheta}_0^1 \supset \vartheta_0^2 \supset \tilde{\vartheta}_0^2 \supset \dots$$

Возможность построения такой цепи установлена при доказательстве теоремы 1 работы [3] (стр. 229—230). Далее, строим сечение $\tilde{\vartheta}(\tilde{\vartheta}_0^k)$ последовательности $B(B_0)$ над сечением $\tilde{\vartheta}_0^k$ ядра B_0 ([2], лемма 3). Это сечение определяет в $B(B_0)$ два элемента, один из которых есть $\tilde{\vartheta}(\tilde{\vartheta}_0^k)$. Последовательность $\{\tilde{\vartheta}(\tilde{\vartheta}_0^k)\}$, $k=1, 2, \dots$, образует, очевидно, искомую цепь элементов $B(B_0)$, что и доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, ГИТГЛ, 1950.
2. Суворов Г. Д., Простые концы последовательности плоских областей, сходящейся к ядру, „Мат. сб.“, 33 (1953), 73—100.
3. Мышкис А. Д., Об эквивалентности некоторых способов введения границы, „Мат. сб.“, 26 (68) (1950), 228—236.

Кафедра математического анализа
Томского государственного университета имени В. В. Куйбышева

М. Р. КУБАЕВ

ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЛЕВНЕРА ДЛЯ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей статье рассматривается обобщение уравнения типа Левнера для автоморфных функций [1] на случай нескольких разрезов.

1. Рассмотрим функцию

$$z = \Phi(w, t), \quad \Phi(0, t) = 0, \quad \Phi'(0, t) = \exp(-t), \quad 0 < t_0 \leq t \leq t_1, \quad (1)$$

конформно отображающую круг $|w| < 1$ на однопараметрическое семейство областей $B(t)$, получаемых из некоторой начальной $p+1$ -связной области B_0 , ограниченной $\Gamma_0: |z|=1$ и жордановыми кривыми $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p$, лежащими внутри Γ_0 , проведением системы разрезов по кривым Жордана $C_0, C_1, \dots, C_p$, исходящим соответственно из точек кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_p$. Области B_0 и $B(t)$ содержат начало координат.

Функция $w = F(z, t)$, обратная к $z = \Phi(w, t)$, конформно и взаимно однозначно отображает поверхность наложения области $B(\tau)$, $\tau > t$, на область $G(t, \tau)$, получаемую из $|w| < 1$ проведением $p+1$ систем L_j , $j=0, 1, \dots, p$, разрезов по дугам $\{l_{nj}\}$, каждая из которых содержит счетное число дуг l_{nj} , соответствующих в отображении (1) части $C_j(t, \tau)$

$$z = \varphi_j(x), \quad t \leq x < \tau$$

кривой C_j , и переходящих друг в друга при преобразованиях группы A преобразований единичного круга в себя, относительно которой функция $\Phi(w, t)$ автоморфна.

Обозначим через

$$w = f(u, t, \tau), \quad f(0, t, \tau) = 0, \quad f'(0, t, \tau) = \exp(t - \tau)$$

функцию, конформно и однолистно отображающую $|u| < 1$ на область $G(t, \tau)$, а через γ_{nj} — дуги окружности $|u|=1$, соответствующие в этом отображении разрезам l_{nj} . Как и в случае одного разреза, можно показать, что как и при t фиксированном и $\tau \rightarrow t$, так и при τ фиксированном и $t \rightarrow \tau$, все дуги γ_{nj} и разрезы l_{nj} одновременно стягиваются в точки $\mu_{nj}(t)$ или $\mu_{nj}(\tau)$, соответствующие в отображении (1) концам разрезов, а функция $f(u, t, \tau)$ равномерно в круге $|u| < 1$ стремится к u .

Очевидно, что

$$\Phi(u, \tau) = \Phi(f(u, t, \tau), t). \quad (3)$$

2. Введем в рассмотрение $p+1$ вспомогательных функций. Пусть функция

$$w = f_0(u_0, t, \tau), \quad f_0(0, t, \tau) = 0, \quad f'_0(0, t, \tau) > 0. \quad (4)$$

отображает $|u_0| < 1$ на односвязную область $G_0(t, \tau)$, получаемую из $G(t, \tau)$ присоединением к последней всех точек систем $L_1, L_2, \dots, L_p$ разрезов l_{nj} за исключением концов, лежащих на $|w| = 1$.

Функция $f_0(u_0, t, \tau)$ отображает на область $G(t, \tau)$ односвязную область $G_1(t, \tau)$, получаемую из $|u_0| < 1$ проведением p систем $L_{10}, L_{20}, \dots, L_{p0}$ разрезов l_{nj0} , $j = 1, 2, \dots, p$, соответствующих в отображении (4) дугам l_{nj} систем $L_1, L_2, \dots, L_p$.

Аналогично предыдущему рассмотрим функцию

$$u_0 = f_1(u_1, t, \tau), \quad f_1(0, t, \tau) = 0, \quad f'_1(0, t, \tau) > 0, \quad (5)$$

отображающую $|u_2| < 1$ на область $G_{10}(t, \tau)$, получаемую из области G_1 присоединением точек систем $L_{20}, L_{30}, \dots, L_{p0}$ разрезов l_{nj0} , $j = 2, 3, \dots, p$, и так далее.

Функции $f_k(u_k, t, \tau)$ производят отображения типа, рассмотренного во втором и третьем параграфах статьи [1] и поэтому представимы в виде

$$f_k = u_k - (\tau - t) u_k a_k(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{nk}^1 \frac{u_{nk} + u_k}{u_{nk} - u_k} + o(\tau - t), \quad (6)$$

где через $o(t - \tau)$ обозначена бесконечно малая выше первого порядка по отношению к $\tau - t$, через $a_k(t)$, $a_k(t) < 1$, — положительные функции t . Множители $a_k(t)$ появились потому, что функции $f_k(u_k, t, \tau)$ не удовлетворяют условию $f'_k(0, t, \tau) = \exp(t - \tau)$.

3. Переходя в очевидном соотношении

$$\begin{aligned} \frac{f(u, t, \tau) - u}{\tau - t} &= \sum_{k=0}^p \frac{f_k(u_k, t, \tau) - u_k}{\tau - t} = \\ &= \sum_{k=0}^p u_k a_k \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{nk}^1 \frac{u_{nk} + u_k}{u_{nk} - u_k} + o(\tau - t) \end{aligned}$$

к пределу при $\tau - t \rightarrow 0$ и учитывая, что при этом $f_k(u_k, t, \tau)$ равномерно в круге $|u_k| < 1$ стремится к u_k и, следовательно, к u , и полагая

$$\delta_{nk}^1 \cdot a_k = \delta_{nk},$$

находим

$$\lim_{\tau - t \rightarrow 0} \frac{f(u, t, \tau) - u}{\tau - t} = -u \sum_{k=0}^p \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{nk} \frac{u_{nk} + u}{u_{nk} - u}. \quad (7)$$

Вернемся теперь к функции $\Phi(w, t)$. Отношение

$$\frac{\Phi(w, \tau) - \Phi(w, t)}{\tau - t}$$

на основании формулы (3) можно записать в виде

$$\frac{\Phi(w, \tau) - \Phi(w, t)}{\tau - t} = \frac{\Phi(f(w, t, \tau), t) - \Phi(w, t)}{f(w, t, \tau) - w} \cdot \frac{f(w, t, \tau) - w}{\tau - t}.$$

Переходя в нем к пределу при $\tau - t \rightarrow 0$ и учитывая предельное равенство (7), получим искомое дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + w \sum_{\kappa=0}^p \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n\kappa} \frac{\mu_{n\kappa} + w}{\mu_{n\kappa} - w} \frac{\partial \Phi}{\partial w} = 0. \quad (8)$$

Дифференциальное уравнение (8) обладает тем преимуществом, что за начальную область B_0 можно взять круг $|z| < 1$ с p соответствующим образом выколотыми точками.

Дадим выражение функции $z = \psi(w)$, отображающей круг $|w| < 1$ на область B_0 в случае, когда внутренние континуумы ее вырождаются в точки, пусть это будут $a_1, a_2, \dots, a_p, 0 < |a_\kappa| < 1$. Рассмотрим область $D(t)$, получаемую из $|z| < 1$ проведением p разрезов по дугам $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ концентрических с $|z| = 1$ окружностей, исходящих из точек $a_1, a_2, \dots, a_p$ и длины $|a_1|t, |a_2|t, \dots, |a_p|t, 0 \leq t \leq t_1$. Очевидно, что при $t \rightarrow 0$ области $D(t)$ сходятся к B_0 как к ядру.

Известно ([2] стр. 45—63), что функция

$$z = \exp \left\{ -\frac{i}{\pi} \sum_{\kappa=1}^p b_\kappa \sum_n \log \frac{\zeta - \beta_{n\kappa}}{\zeta - \alpha_{n\kappa}} + \sum_n \log \frac{\zeta - \zeta_n}{\zeta - \bar{\zeta}_n} \right\} \quad (9)$$

отображает верхнюю полуплоскость переменного ζ на область $D(t)$ и переводит при этом отрезки $[\alpha_{n\kappa}, \beta_{n\kappa}]$ вещественной оси в разрезы γ_κ , точки ζ_n — в начало координат, а через b_κ обозначены константы, определяемые заданием точек $a_1, a_2, \dots, a_p$. Согласно теореме Каратеодори, функция (9) равномерно сходится к функции $\varphi(\zeta)$, отображающей полуплоскость $\text{Im} \zeta > 0$ на область B_0 , при $t \rightarrow 0$. Производя указанный предельный переход и замечая, что дуги $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ при этом стягиваются в точки $a_1, a_2, \dots, a_p$, и, следовательно, отрезки $[\alpha_{n\kappa}, \beta_{n\kappa}]$ также стягиваются в точки, из (9) находим

$$\varphi(\zeta) = \exp \left(\sum_n \log -\frac{\zeta - \zeta_n}{\zeta - \bar{\zeta}_n} \right) = \prod_n \frac{\zeta - \zeta_n}{\zeta - \bar{\zeta}_n}, \quad (10)$$

Производя дробно-линейное преобразование

$$\zeta = \frac{1+a}{2} - \frac{w-a}{w-a}, \quad \zeta_n = \frac{1+a}{2} \frac{a_n - 1}{a_n - a}$$

переводящее полуплоскость $\text{Im} \zeta > 0$ в единичный круг и бесконечно удаленную точку плоскости ζ в точку $w = a$ окружности $|w| = 1$, от-

личную от точек μ_n и предельных для таких точек, получим из (10) искомое выражение для функции $z = \psi(w)$:

$$\psi(w) = \prod_n \frac{1 - \bar{\alpha}_n a}{a - \alpha_n} \frac{w - \alpha_n}{1 - \bar{\alpha}_n w}.$$

4. Рассмотренный случай распределения разрезов не является единственно возможным. Можно рассматривать любую комбинацию разрезов с любым конечным числом разрезов. Вид уравнения (8) при этом не изменится, изменится лишь число слагаемых в первой сумме, которое, очевидно, совпадает с числом разрезов.

В частности, рассматривая случай одного разреза, исходящего из точки некоторого внутреннего континуума, получим уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + w \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \frac{\mu_n + w}{\mu_n - w} \frac{\partial \Phi}{\partial w} = 0,$$

по виду совпадающее с аналогичным уравнением статьи [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Куваев М. Р. и Куфарев П. П., Об уравнении типа Левнера для многосвязных областей, „Учен. зап. Томского университета“ 25 (1955).
2. Julia G., Les lecons sur la representation conforme des aires multiplement connexes, Cahiers scientifiques, XIV (1934).

Кафедра общей математики
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева.

П. П. КУФАРЕВ

ЗАДАЧА О ВИХРЕ И ИСТОЧНИКЕ ПОД ПОВЕРХНОСТЬЮ ЖИДКОСТИ

§ 1. Постановка задачи. В работе рассматривается вопрос о неустановившемся плоском течении тяжелой несжимаемой жидкости, вызываемом имеющимися внутри жидкости, в точке $z = z_0$, неподвижным вихрем постоянной интенсивности $2\pi q$ и неподвижным источником мощности $2\pi m(t)$, в случае, когда на границе $\Gamma(t)$ меняющейся с течением времени t области $G(t)$, заполненной жидкостью, давление p постоянно: $p = p_0$ („свободная поверхность“). Задача состоит в определении вида области $G(t)$ и характера движения жидкости, если в начальный момент $t=0$ область $G(0)$, а также скорости $v(z)$ и давления $p(z)$ в жидкости заданы.

§ 2. Обозначим через $z = z(w, t)$ функцию, конформно отображающую круг $|w| < 1$ на область $G(t)$ так, что $z(0, t) = z_0$, через $w = w(z, t)$ — обратную функцию, через $\chi(z, t)$ комплексный потенциал течения, и положим;

$$f(w, t) = \chi(z(w, t), t). \quad (1)$$

Функция $\chi(z, t)$ имеет в точке z_0 логарифмическую особенность:

$$\chi(z, t) = (m(t) + iq) \log(z - z_0) + \chi_1(z, t), \quad (2)$$

где $\chi_1(z, t)$ голоморфна по z в $G(t)$. Поэтому функция

$$\varphi(w, t) = f(w, t) - (m(t) + iq) \log w \quad (3)$$

голоморфна по w в $|w| < 1$.

Как известно, условие, что давление на границе $\Gamma(t)$ постоянно, может быть представлено после включения в $\chi(z, t)$ некоторой функции от t , в виде

$$\frac{1}{2} \left| \frac{\partial \chi}{\partial z} \right|^2 + \frac{\partial \operatorname{Re} \chi}{\partial t} + g \operatorname{Im} z = 0, \quad (4)$$

где g — ускорение силы тяжести¹⁾.

Выражая здесь производные от χ через производные от f из соотношений:

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial w}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (5)$$

¹⁾ Считаем, как обычно, что ось $y = \operatorname{Im} z$ плоскости z направлена вертикально вверх.

находим после некоторых преобразований первое граничное условие, которому функции $z(w, t)$ и $f(w, t)$ удовлетворяют на $|w| = 1$:

$$\operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{\bar{\partial z}}{\partial w} - igz \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\bar{\partial z}}{\partial w} \right\} = - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial w} \right|^2. \quad (6)$$

Заметим, что производную $\frac{\partial f}{\partial t}$ в этом соотношении можно заменить на $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, так как, по (3), $\operatorname{Re} \frac{\partial f}{\partial t} = \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ на $|w| = 1$.

Для вывода второго граничного условия воспользуемся формулой для скорости

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dt} = \frac{\partial \chi}{\partial z}. \quad (7)$$

Умножая на $w^{-1} \frac{\partial z}{\partial w}$ и полагая $w = \omega = e^{i\theta}$, находим, что на $|w| = 1$

$$\frac{1}{w} \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\bar{\partial z}}{\partial w} + i \left| \frac{\partial z}{\partial w} \right|^2 \frac{d \arg \omega}{dt} = w \frac{\partial f}{\partial w}, \quad (8)$$

откуда

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{w} \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\bar{\partial z}}{\partial w} \right] = \operatorname{Re} \left[w \frac{\partial f}{\partial w} \right]. \quad (9)$$

Предположим далее, что функции $z(w, t)$, $\varphi(w, t)$ не только голоморфны в $|w| < 1$ на некотором интервале значений t , но голоморфны по совокупности переменных w, t в некотором бицилиндре

$$D(1, t_0): |w| < 1, |t| < t_0. \quad (10)$$

Предположим также, что $m(t)$ голоморфна в $|t| < t_0$. Распространяя граничные условия (6), (9) на комплексные значения t , представим их в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} z_t(\omega, t) \bar{z}_w \left(\frac{1}{\omega}, t \right) + \omega \bar{z}_t \left(\frac{1}{\omega}, t \right) z_w(\omega, t) = \\ = \omega f_w(\omega, t) + \frac{1}{\omega} \bar{f}_w \left(\frac{1}{\omega}, t \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} H(\omega, t) \bar{z}_w \left(\frac{1}{\omega}, t \right) + \bar{H} \left(\frac{1}{\omega}, t \right) z_w(\omega, t) + \\ + ig \left[z(\omega, t) - \bar{z} \left(\frac{1}{\omega}, t \right) \right] z_w(\omega, t) \bar{z}_w \left(\frac{1}{\omega}, t \right) = \end{aligned}$$

¹⁾ Ср. [1], стр. 182.

$$= f_w(\omega, t) \bar{f}_w\left(\frac{1}{\omega}, t\right) \quad (\omega = e^{i\theta}), \quad (12)$$

де

$$H(\omega, t) = \varphi_t z_\omega - f_w z_t. \quad (13)$$

Таким образом, задача сводится к определению голоморфных $D(1, t_0)$ функций $z(\omega, t)$, $\varphi(\omega, t)$, удовлетворяющих при всяком t , $|t| < t_0$, на $|\omega| = 1$ граничным условиям (11), (12), (где $f = \varphi + (m + iq) \log \omega$). При этом функции $z(\omega, 0)$, $\varphi(\omega, 0)$, $m(t) + iq$ предполагаются заданными.

§ 3. Уравнения для функций $v = \frac{\partial w}{\partial z}$, $u = w \frac{\partial \chi}{\partial z}$. Ограничимся далее случаем, когда область $G(0)$, занятая жидкостью в начальный момент, есть нижняя полуплоскость $\text{Im } z < 0^2$. Полагая $\omega = -hi$, можно принять

$$z(\omega, 0) = hi \frac{\omega - i}{\omega + i}. \quad (14)$$

Естественно считать, что в удаленных частях жидкость имеет постоянную горизонтальную скорость $v_\infty = a$, что $\text{Im } z$ ограничена на границе жидкости и что функция $z(\omega, t)$ конечна в $|\omega| \leq 1$ всюду, за исключением одной точки, в которой $z(\omega, t)$ имеет простой полюс. Осуществляя в плоскости w в случае необходимости поворот, можно принять, что такой точкой является $w = -i$.

Для того, чтобы удовлетворить всем этим условиям, мы предположим, что функции $z(\omega, t)$, $f(\omega, t)$ могут быть представлены в виде:

$$z(\omega, t) = \lambda(t) hi \frac{\omega - i}{\omega + i} + z_1(\omega, t), \quad (15)$$

$$f(\omega, t) = (m(t) + iq) \log \omega + a \lambda(t) hi \frac{\omega - i}{\omega + i} + f_1(\omega, t),$$

де $z_1(\omega, t)$, $f_1(\omega, t)$ голоморфны в замкнутом бицилиндре $D(1, t_0)$ ($z_1(\omega, 0) = 0$) и $\lambda(t)$ голоморфна при $|t| \leq t_0$. Пусть разложение $\lambda(t)$ ряд Тейлора в $|t| \leq t_0$ имеет вид:

$$\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n, \quad \lambda_0 = 1. \quad (16)$$

Из предположения, что $\text{Im } z(\omega, t)$ ограничена на $|\omega| = 1$ вблизи $\omega = -i$, следует, что $\lambda(t)$ вещественна при вещественном t и, следовательно, коэффициенты λ_n вещественны.

) Если $z(\omega, t) = \sum a_{mn} \omega^m t^n$, то по определению $\bar{z}(\omega, t) = \sum \bar{a}_{mn} \omega^m t^n$.

Если z, φ удовлетворяют граничным условиям (11), (12), то при вещественных $(-t_0 < t < t_0)$ они удовлетворяют условиям (6), (9). Наоборот, если функции z, φ удовлетворяют условиям (6), (9) при вещественных $t, -t_0 < t < t_0$, то, учитывая голоморфность z, φ в $D(1, t_0)$, можно показать при некоторых естественных дополнительных условиях, что условия (11), (12) удовлетворяются и при любом комплексном $|t| \leq t_0$.

) Для случая ограниченной области $G(t)$ рассуждения лишь упрощаются.

Деля на $z_w(\omega, t) \bar{z}_w\left(\frac{1}{\omega}, t\right)$, перепишем граничные условия (11), (12) в виде:

$$\frac{z_t(\omega, t)}{\omega z_w(\omega, t)} + \omega \frac{\bar{z}_t\left(\frac{1}{\omega}, t\right)}{\bar{z}_w\left(\frac{1}{\omega}, t\right)} = u(\omega, t) \bar{v}\left(\frac{1}{\omega}, t\right) + \bar{u}\left(\frac{1}{\omega}, t\right) v(\omega, t), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{H(\omega, t)}{z_w(\omega, t)} + \frac{\bar{H}\left(\frac{1}{\omega}, t\right)}{\bar{z}_w\left(\frac{1}{\omega}, t\right)} - ig [z(\omega, t) - \lambda(t) z(\omega, 0) + \\ & - \bar{z}\left(\frac{1}{\omega}, t\right) + \lambda(t) \bar{z}\left(\frac{1}{\omega}, 0\right)] = -u(\omega, t) \bar{u}\left(\frac{1}{\omega}, t\right)^{1)} \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$u(w, t) = w \frac{f_w(w, t)}{z_w(w, t)} = w \frac{\partial \chi}{\partial z}. \quad (19)$$

$$v(w, t) = \frac{1}{z_w(w, t)} = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (20)$$

Умножим (17) и (18) на $\frac{1}{2\pi i} \frac{\omega + w}{\omega - w} \frac{1}{\omega}$ и проинтегрируем по

контур γ окружности $|w|=1$. Пользуясь теорией вычетов и учитывая формулы:

$$z(0, t) = z_0, \quad z_t(0, t) = 0, \quad \lim_{w \rightarrow 0} \frac{z_t(w, t)}{w} = \frac{dz_w(0, t)}{dt}, \quad (21)$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} w f_w(w, t) = m(t) + iq,$$

находим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left\{ \frac{H(\omega, t)}{z_w(\omega, t)} - ig [z(\omega, t) - \lambda(t) z(\omega, 0)] \right\} \frac{\omega + w}{\omega - w} \frac{d\omega}{\omega} = \\ & = 2\varphi_t(w, t) - 2 \frac{f_w(w, t) z_t(w, t)}{z_w(w, t)} - 2ig [z(w, t) - \lambda(t) z(w, 0)] + \\ & - \left[\varphi_t(0, t) - (m(t) + iq) \frac{d \log z_w(0, t)}{dt} - ig(1 - \lambda(t)) z_0 \right], \end{aligned} \quad (22)$$

1) $z(\omega, 0) = \bar{z}\left(\frac{1}{\omega}, 0\right)$. Функции $\frac{H(w, t)}{z_w(w, t)}$, $z(w, t) - \lambda(t) z(w, 0)$, в силу (14)

5), ограничены на $|w|=1$.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\bar{H}\left(\frac{1}{\omega}, t\right)}{\bar{z}_w\left(\frac{1}{\omega}, t\right)} + ig \left[\bar{z}\left(\frac{1}{\omega}, t\right) - \lambda(t) \bar{z}\left(\frac{1}{\omega}, 0\right) \right] \frac{\omega + w}{\omega - w} \frac{d\omega}{\omega} \right. \\
& \quad \left. = \bar{\varphi}_t(0, t) - (m(t) - iq) \frac{d \log z_w(0, t)}{dt} + ig(1 - \lambda(t)) \bar{z}_0, \right. \\
& \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z_t(\omega, t)}{\omega z_w(\omega, t)} \frac{\omega + w}{\omega - w} \frac{d\omega}{\omega} = 2 \frac{z_t(w, t)}{w z_w(w, t)} - \frac{d \log z_w(0, t)}{dt}, \\
& \quad \left. \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \omega \frac{\bar{z}_t\left(\frac{1}{\omega}, t\right)}{\bar{z}_w\left(\frac{1}{\omega}, t\right)} \frac{\omega + w}{\omega - w} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{d \log z_w(0, t)}{dt} \right\}. \quad (23)
\end{aligned}$$

Таким образом, получаются уравнения:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = w R \frac{\partial z}{\partial w}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{z_t}{z_w} \frac{\partial f}{\partial w} - ig(z - \lambda(t) z(w, 0)) = -Q(w, t) + C(t), \quad (25)$$

где

$$R = P + \kappa(t), \quad (26)$$

$$P = \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} \left[u(\omega, t) \bar{v}\left(\frac{1}{\omega}, t\right) + \bar{u}\left(\frac{1}{\omega}, t\right) v(\omega, t) \right] \frac{\omega + w}{\omega - w} \frac{d\omega}{\omega}, \quad (27)$$

$$Q = \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} u(\omega, t) \bar{u}\left(\frac{1}{\omega}, t\right) \frac{\omega + w}{\omega - w} \frac{d\omega}{\omega}, \quad (28)$$

$$\kappa(t) = \frac{1}{2} \frac{d \log \frac{\bar{v}(0, t)}{v(0, t)}}{dt}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
C(t) = \frac{1}{2} \left[\varphi_t(0, t) - \bar{\varphi}_t(0, t) + (m + iq) \frac{d \log v(0, t)}{dt} - \right. \\
\left. - (m - iq) \frac{d \log \bar{v}(0, t)}{dt} \right]. \quad (30)
\end{aligned}$$

Как видно из (29) и (30)

$$\bar{\kappa}(t) = -\kappa(t), \quad \bar{C}(t) = -C(t). \quad (31)$$

Отсюда, в частности, следует, что коэффициенты в разложении

$$\kappa(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_n t^n \quad (32)$$

являются чисто мнимыми.

Заменяя в (25) z_t/z_w на wR , имеем:

$$\varphi_t - wRf_w = ig(z - \lambda(t)z(w, 0)) - Q + C(t). \quad (33)$$

Дифференцируя уравнения (24), (33) по w , заменяя в первом уравнении z_w на v^{-1} и имея в виду, что

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial w} = \frac{\partial f_w}{\partial t} - \frac{m'(t)}{w}, \quad (34)$$

находим:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = wR \frac{\partial v}{\partial w} - v \frac{\partial wR}{\partial w}, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_w}{\partial t} = & wR \frac{\partial f_w}{\partial w} + f_w \frac{\partial wR}{\partial w} - \frac{\partial Q}{\partial w} + ig[z_w - \lambda(t)z_w(w, 0)] + \\ & + \frac{m'(t)}{w}. \end{aligned} \quad (36)$$

Умножим уравнение (35) на f_w , уравнение (36) на v и сложим. Затем сделаем замену $u = wvf_w$. Тогда получим окончательно следующую систему интегродифференциальных уравнений для функций u и v :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = wR \frac{\partial v}{\partial w} - v \frac{\partial wR}{\partial w}, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & wR \frac{\partial u}{\partial w} - Ru - v \frac{\partial Q}{\partial w} + m'(t)v + \\ & + igw \left[1 + \lambda(t) \frac{2hv}{(w+i)^2} \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь R и Q определяются формулами (27), (28), (29)¹⁾.

Из формул (15), (19), (20) следует, кроме того, что функции

$$\alpha = 1 + \frac{2h\lambda(t)v}{(w+i)^2}, \quad (39)$$

$$\beta = \frac{u}{w} - a \quad (40)$$

при любом t ($|t| \leq t_0$) имеют в точке $w = -i$ нуль кратности минимум 2;

$$\lim_{w \rightarrow -i} \left[1 + \frac{2h\lambda(t)v}{(w+i)^2} \right] \frac{1}{(w+i)^2} \neq \infty, \quad (41)$$

$$\lim_{w \rightarrow -i} \left(\frac{u}{w} - a \right) \frac{1}{(w+i)^2} \neq \infty. \quad (42)$$

¹⁾ Уравнения для u и v в случае ограниченной области $G(t)$ получаются из (37) (38) при $\lambda(t) \equiv 0$.

Наоборот, пусть функции u , v , голоморфные в $\overline{D(1, t_0)}$ и удовлетворяющие условиям (41), (42), являются решением уравнений (37), (38) причем $v(w, t) \neq 0$ при $|w| < 1$ и

$$v(w, 0) = \frac{1}{z_w(w, 0)}, \quad u(w, 0) = \frac{m(0) + iq + w \varphi_w(w, 0)}{z_w(w, 0)}$$

(функции $z(w, 0) = h i (w - i)/(w + i)$, $f(w, 0) = (m(0) + iq) \log w + \varphi(w, 0)$ предполагаются заданными). Из (37) и (38) при $w = 0$ имеем:

$$\frac{dv(0, t)}{dt} = -v(0, t) R(0, t), \quad (43)$$

$$\frac{du(0, t)}{dt} = -R(0, t) u(0, t) + m'(t) v(0, t). \quad (44)$$

Следовательно,

$$\frac{d \frac{u(0, t)}{v(0, t)}}{dt} = m'(t), \quad (45)$$

откуда, учитывая, что

$$\frac{u(0, 0)}{v(0, 0)} = m(0) + iq, \quad (46)$$

находим

$$\frac{u(0, t)}{v(0, t)} = m(t) + iq. \quad (47)$$

Выполняя обратные преобразования, устанавливаем, что функции

$$z(w, t) = z_0 + \int_0^w \frac{dw}{v(w, t)}, \quad (48)$$

$$f(w, t) = m(t) + qi + \int_0^w \left[\frac{u(w, t)}{w v(w, t)} - \frac{m(t) + qi}{w} \right] dw + D(t) \quad (49)$$

удовлетворяют уравнениям вида (24), (25), причем функцию $D(t)$ можно подобрать так, что функция $C(t)$, входящая в уравнение (25), будет удовлетворять условию $C(t) + \bar{C}(t) = 0$.

После этого сделаем в равенствах (24), (25) предельный переход $w \rightarrow \omega_0 = e^{i\theta}$, $|w| < 1$, пользуясь формулами Племели — Сохоцкого¹⁾; сделаем также в равенствах, получаемых из (24), (25) заменой каждой входящей в них функции, например, $\varphi(w, t)$, на $\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\bar{w}}, t\right)$, предельный переход $w \rightarrow \omega_0$, $|w| > 1$; сложим затем попарно полученные равенства. Главные значения интегралов типа Коши, входящие в эти равенства, при этом сократятся, и обнаружится, что $z(w, t)$, $f(w, t)$, (при $\bar{C}(t) + C(t) = 0$) удовлетворяют граничным условиям (11), (12).

¹⁾ Ср. [1], стр. 185.

Далее, если u и v удовлетворяют условиям (41), (42), то функция v^{-1} имеет в точке $w = -i$ полюс кратности 2, причем $\operatorname{Res}_{w=-i} \frac{1}{v} = 0$,

а функция $\frac{u}{wv} - \frac{a}{v}$ голоморфна в точке $w = -i$. Отсюда легко следует, что функции $z(w, t)$, $f(w, t)$, определяемые формулами (48), (49), могут быть представлены в $L(1, t_0)$ формулами (15).

Таким образом, граничная задача (11), (12) при условиях (15) эквивалентна интегродифференциальным уравнениям (37), (38) при условиях (41), (42).

§ 4. Решение задачи. Положим для определенности в (15) $f_1(w, 0) = 0$. Из (15) имеем при $t = 0$:

$$v(w, 0) = v_0(w) = -\frac{(w+i)^2}{2h},$$

$$u(w, 0) = u_0(w) = aw - \frac{m(0) + iq}{2h}(w+i)^2. \quad (50)$$

Пусть в $|t| \leq t_0$

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n t^n. \quad (51)$$

Будем искать решение задачи в виде рядов:

$$v(w, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(w) t^n.$$

$$u(w, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(w) t^n, \quad (52)$$

$$\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n,$$

где λ_n должны быть вещественны (см. выше). Подставляя в (37), (38) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в левых и правых частях получающихся равенств, получаем следующие рекуррентные соотношения для определения $v_n(w)$, $u_n(w)$:

$$(n+1)v_{n+1}(w) = \sum_{m=0}^n \left(w R_m \frac{d v_{n-m}}{d w} - v_{n-m} \frac{d w R_m}{d w} \right), \quad (53)$$

$$(n+1)u_{n+1}(w) = \sum_{m=0}^n \left[w R_m \frac{d u_{n-m}}{d w} - R_m u_{n-m} - w v_{n-m} \frac{d Q_m}{d w} + \right. \\ \left. + (m+1)\mu_{m+1} v_{n-m} + 2ig h \lambda_m v_{n-m} \frac{w}{(w+i)^2} \right] \text{ при } n \geq 1,$$

$$\varphi_1(w) = w R_0 \frac{d u_0}{d w} - R_0 u_0 - w v_0 \frac{d Q_0}{d w} + \mu_1 v_0 + 2 i g h \lambda_0 v_0 \frac{w}{(w+i)^2} +$$

$$+ i g w, \quad (54)$$

де

$$R_m = P_m + \kappa_m, \quad (55)$$

$$P_m = \sum_{s=0}^m \frac{1}{4 \pi i} \int_{\gamma} \left[u_{m-s}(w) \bar{v}_s \left(\frac{1}{w} \right) + \right.$$

$$\left. + \bar{u}_{m-s} \left(\frac{1}{w} \right) v_s(w) \right] \frac{\omega + w}{\omega - w} \frac{d \omega}{\omega}, \quad (56)$$

$$Q_m = \sum_{s=0}^m \frac{1}{4 \pi i} \int_{\gamma} u_{m-s}(w) \bar{u}_s \left(\frac{1}{w} \right) \frac{\omega + w}{\omega - w} \frac{d \omega}{\omega}. \quad (57)$$

Коэффициенты κ_m ряда Тейлора для функции $\kappa(t)$ (см. (29), (32)) связаны с $v_s(0)$. Эти связи можно выразить из соотношения:

$$\frac{d v(0, t)}{d t} = -R(0, t) v(0, t) = -[P(0, t) + \kappa(t)] v(0, t) \quad (58)$$

см. (37)). Подставляя сюда разложения $v(0, t)$, $P(0, t)$, $\kappa(t)$ в ряды Тейлора и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях равенства, получим:

$$(n+1) v_{n+1}(0) = - \sum_{m=0}^n [P_m(0) + \kappa_m] v_{n-m}(0). \quad (59)$$

Так как $P_m(0)$, как видно из (56), вещественны, а κ_m чисто мнимые, то, как легко показать, из этой системы уравнений κ_m , $P_m(0)$ определяются через $v_0(0), v_1(0), \dots, v_{n+1}(0)$. Но формулы (59), естественно, получаются также из (53) при $w=0$. Таким образом, соотношения между κ_m и $v_s(0)$ можно считать следствиями рекуррентных формул (53) и в дальнейшем не рассматривать.

Далее, так как функция

$$\alpha(w, t) = 1 + 2 h \frac{\lambda(t) v}{(w+i)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(w) t^n$$

по условию имеет в точке $w = -i$ нуль кратности не менее двух, то имеют место равенства

$$\alpha_n(-i) = 0, \quad \alpha'_n(-i) = 0 \quad (n=1, 2, \dots), \quad (61)$$

Но

$$\alpha_n(w) = 2 h \sum_{s=0}^n \lambda_s p_{n-s}(w), \quad (62)$$

где
$$p_s(w) = \frac{v_s(w)}{(w+i)^2}. \quad (63)$$

Поэтому, учитывая, что $p_0(w) = -\frac{1}{2h}$, $p'_0(w) = 0$, находим из (61) рекуррентную формулу

$$\lambda_n = 2h \sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s p_{n-s}(-i) \quad (64)$$

и дополнительные соотношения

$$\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s p'_{n-s}(-i) = 0. \quad (65)$$

Так как $\lambda_0 = 1 \neq 0$, соотношения (65) эквивалентны равенствам

$$p'_n(-i) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (66)$$

Заметим еще, что, как следует из (64), для того, чтобы коэффициенты $\lambda_n (n = 1, 2, \dots)$ были вещественны, достаточно, чтобы были вещественны числа $p_n(-i)$ (и λ_0).
Наконец мы положим:

$$\kappa_m = -P_m(-i). \quad (67)$$

Докажем теперь следующую теорему.

Пусть функции $v_m(w)$, $u_m(w)$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) и числа λ_m ($m = 0, 1, \dots, n+1$), κ_m ($m = 0, 1, \dots, n$) удовлетворяющие соотношениям (53), (54), (55), (56), (57), (64), (67) таковы, что

1) $v_m(w)$, $u_m(w)$ ($m \neq 0$), $u_0(w) - aw$ имеют в точке $w = -i$ полюс кратности не менее двух;

2) λ_m , κ_m , $p_m(-i)$ вещественны;

3) дополнительные соотношения (66) удовлетворяются.

Тогда функции $v_{n+1}(w)$, $u_{n+1}(w)$ и числа λ_{n+2} , κ_{n+1} , определяемые этими рекуррентными соотношениями, также удовлетворяют этим условиям.

Доказательство. Формулу (54) можно написать в виде:

$$\begin{aligned} (n+1)u_{n+1}(w) &= \sum_{m=0}^{n-1} \left[w R_m \frac{d u_{n-m}}{d w} - R_m u_{n-m} \right] + \\ &+ R_n \left[w \frac{d(u_0 - aw)}{d w} - (u_0 - aw) \right] + \\ &+ \sum_{m=0}^n \left[(m+1) \mu_{m+1} v_{n-m} - w v_{n-m} \frac{d Q_m}{d w} \right]. \end{aligned} \quad (68)$$

Так как, по (55), (67) и (64) (или (61₁), $R_m(-i)=0$, $\alpha_n(-i)=0$ и, по предположению, $u_m(-i)=0$, $u'_m(-i)=0$ ($m=1, 2, \dots, n$), $u_0(-i)+ai=0$, $u'_0(-i)-a=0$, то каждое слагаемое в (68), следовательно, и функция $u_{n+1}(w)$ имеет в $w=-i$ нуль кратности не менее двух. Аналогично из (53) следует, что $v_{n+1}(w)$ также обладает этим свойством.

Далее, каждый из интегралов, входящих в правую часть формулы (56), есть интеграл Шварца, представляющий аналитическую функцию через граничные значения ее вещественной части. Поэтому при $\omega_0 = e^{i\theta}$, $m=0, 1, \dots, n+1$,

$$P_m(\omega_0) + \overline{P_m(\omega_0)} = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^m [u_{m-s}(\omega_0) \overline{v_s(\omega_0)} + \overline{u_{m-s}(\omega_0)} v_s(\omega_0)]. \quad (69)$$

Это выражение обращается в нуль при $\omega_0 = -i$, так как по предположению $v_s(-i)=0$ ($s=0, 1, \dots, n$) и $v_{n+1}(-i)=0$. Следовательно, $\kappa_{n+1} = -P_{n+1}(-i)$ чисто мнимое.

Для того, чтобы показать, что $p_{n+1}(-i)$, а, следовательно, и λ_{n+2} при предположениях теоремы, чисто мнимое, сделаем в (53) замену $v_s(w) = (w+i)^2 p_s(w)$. Получим:

$$(n+1)p_{n+1}(w) = \sum_{m=0}^n \left[w(R_m p'_{n-m} - p_{n-m} R'_m) - p_{n-m} R_m + \right. \\ \left. + 2 \frac{w R_m p_{n-m}}{w+i} \right]. \quad (70)$$

Подставляя сюда $w = -i$, $p'_m(-i)=0$, $R_m(-i)=0$ и замечая, что, по (55), (67)

$$\lim_{w \rightarrow -i} \frac{R_m(w)}{w+i} = \lim_{w \rightarrow -i} \frac{P_m(w) - P_m(-i)}{w+i} = P'_m(-i), \quad (71)$$

находим:

$$(n+1)p_{n+1}(-i) = -i \sum_{m=0}^n p_{n-m}(-i) P'_m(-i). \quad (72)$$

Но, дифференцируя соотношение (69) по ω_0 и полагая $\omega_0 = -i$, $v_s(-i)=0$, $v'_s(-i)=0$, получим:

$$P'_m(-i) + \overline{P'_m(-i)} = 0. \quad (73)$$

Следовательно, $P'_m(-i)$ ($m=0, 1, \dots, n$) — чисто мнимые, и поэтому, при вещественных $p_m(-i)$ ($m=0, 1, \dots, n$), $p_{n+1}(-i)$ также вещественно.

Наконец, нетрудно показать, что $p'_{n+1}(-i)=0$. Действительно, из (70) получается после дифференцирования и подстановки $w = -i$

$$(n+1)p'_{n+1}(-i) = -i \sum_{m=0}^n p_{n-m}(-i) \left[2 \lim_{w \rightarrow -i} \left(\frac{R_m}{w+i} \right)' - \right. \\ \left. - R'_m(-i) \right] = 0, \quad (74)$$

так как

$$\lim_{w \rightarrow -i} \left(\frac{R_m}{w+i} \right)' = \lim_{w \rightarrow -i} [R'_m(-i) + (w+i) R''_m(-i) + \dots]' = R''_m(-i). \quad (75)$$

Теорема доказана. Так как условия теоремы удовлетворяются при $n=0$, то из нее следует, что функции $u_n(w)$, $v_n(w)$ и числа λ_n, κ_n последовательно определяются из рекуррентных формул (53), (54), (55), (56), (57), (64), (67) и удовлетворяют условиям 1, 2, 3 теоремы.

Доказательство сходимости рядов (52), необходимое для полного обоснования метода, нам пока не удалось выполнить.

Нами было проведено вычисление первых членов рядов (52) для случая $m(t) = 0$ (вихрь).

Ниже приводятся результаты вычислений.

$$\kappa(t) = - \left[\frac{15 q^3}{8 h^6} + \frac{19 q^2 a}{8 h^5} + \frac{3 q a^2}{4 h^4} \right] i t^2 + \dots, \quad (76)$$

$$\lambda(t) = 1 - \frac{1}{4} \left[\frac{q^2}{h^4} + \frac{q a}{h^3} \right] t^2 + \dots, \quad (77)$$

$$\begin{aligned} v(w, t) = & - \frac{(w+i)^2}{2h} + \frac{(w+i)^2}{4h} \left\{ - \frac{3 q^3}{8 h^4} w^4 - \left[\frac{7 q^2}{4 h^4} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{q a}{2 h^3} \right] i w^3 + \left[\frac{3 q^2}{h^4} + \frac{3 a q}{2 h^3} \right] w^2 + \left[\frac{9 q^2}{4 h^4} + \frac{3 q a}{2 h^3} \right] i w - \\ & - \left[\frac{9 q^2}{8 h^4} + \frac{q a}{h^3} \right] \left. \right\} t^2 + \frac{(w+i)^2}{6h} \left\{ \frac{5 q^3}{8 h^6} i w^6 - \left[\frac{9 q^3}{2 h^6} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{3 q^2 a}{2 h^5} \right] w^5 - \left[\frac{27 q^3}{2 h^6} + \frac{33 q^2 a}{4 h^5} + \frac{3 q a^2}{4 h^4} \right] i w^4 + \\ & + \left(\frac{173 q^3}{8 h^6} + \frac{145 q^2 a}{8 h^5} + \frac{3 q a^2}{h^4} \right) w^3 + \left(\frac{39 q^3}{2 h^6} + \frac{159 q^2 a}{8 h^5} + \right. \\ & + \left. \frac{9 q a^2}{2 h^4} \right) i w^2 + \\ & - \left(\frac{75 q^3}{8 h^6} + \frac{87 q^2 a}{8 h^5} + \frac{3 q a^2}{h^4} \right) w - \left(\frac{15 q^3}{8 h^6} + \frac{19 q^2 a}{8 h^5} + \right. \\ & + \left. \frac{3 q a^2}{4 h^4} \right) \left. \right\} t^3 + \dots, \quad (78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(w, t) = & a w - \frac{i q}{2 h} (w+i)^2 - w (w+i)^2 \left\{ \frac{q^2}{4 h^3} w + \frac{q^2}{2 h^3} i + \right. \\ & + \left. \frac{q a}{2 h^2} i \right\} t + \frac{(w+i)^2}{4 h} \left\{ \frac{5 q^3}{8 h^4} i w^4 - \left[\frac{11 q^3}{4 h^4} + \frac{7 a q^2}{4 h^3} \right] w^3 - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[\frac{4q^3}{h^4} + \frac{9aq^2}{2h^3} + \frac{qa^2}{h^2} \right] w^2 i + \left[\frac{7q^3}{4h^4} + \frac{11aq^2}{4h^3} + \frac{qa^2}{h^2} \right] w - \\
 & - \left(\frac{9q^3}{8h^4} + \frac{aq^2}{h^3} \right) i \Big\} t^2 + \frac{(w+i)^2}{4h} \left\{ -\frac{1}{3} ig w (w+i) \left[\frac{q^2}{h^2} (3w + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 5i) + \frac{4qa}{h^2} i \right] + T(w) \right\} t^3 + \dots, \quad (79)
 \end{aligned}$$

где $T(w)$ — полином шестой степени, не зависящий от g ;

$$\begin{aligned}
 z(w, t) = & hi \frac{w-i}{w+i} + \left\{ -\frac{q^2}{8h^3} w (w+3i) \left(w - \frac{w-i}{w+i} + 3i \right) + \right. \\
 & + \frac{qai}{4h^2} w \left(w - \frac{w-i}{w+i} + 4i \right) \Big\} t^2 + \left\{ -\frac{q^3}{24h^6} (-2i w^5 + 13w^4 + \right. \\
 & \left. + 3w^3 i - 45w^2 + 30wi) + \right. \\
 & \left. + \frac{q^2 a}{24h^5} (6w^4 + 28w^3 i - 49w^2 - 38wi) + \frac{qa^2}{6h^4} (w^3 i - 3w^2 - \right. \\
 & \left. - 3wi) \right\} t^3 + \dots, \quad (80)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(w, t) = & iq \log w + az(w, t) + \left[\frac{q^2}{4h^2} (w^2 + 4iw) + \frac{qa}{h} iw \right] t + \\
 & + \left\{ \frac{q^3}{8h^4} (-i w^4 + 6w^3 + 14w^2 i - 16w) + \frac{q^2 a}{8h^3} (3w^2 + 12wi - 7w) + \right. \\
 & \left. + \frac{qa^2}{4h^2} (w^2 i - 2w) \right\} t^2 + \dots \quad (81)
 \end{aligned}$$

Из (80) следует, что граница области $G(t)$ имеет при малых t вид, показанный на рис. 1.

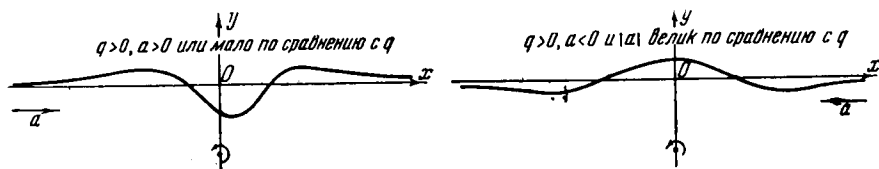


Рис. 1

В заключение заметим, что для решения задачи может быть также применен метод, состоящий в разыскании функций $z(w, t)$, $f(w, t)$ (см. (15) в виде рядов

$$z = hi \frac{w-i}{w+i} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} z_n(w) t^n,$$

$$f = (m(t) + q i) \log w + a h i \frac{w - i}{w + i} - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(w) t^n$$

и определении коэффициентов λ_n , $f_n(w)$, $z_n(w)$ при помощи граничных условий (11), (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. П. Виноградов, П. П. Куфарев, Об одной задаче фильтрации, „Прикл. математика и механика“, т. XII, № 2, 1948.

Кафедра математического анализа
Томского государственного университета
им. В. В. Куйбышева

М. Р. КУБАЕВ

НОВЫЙ ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ТИПА ЛЕВНЕРА ДЛЯ ДВУХСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В настоящей статье дается новый вывод уравнения типа Левнера

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1 + q^{2n+1}kf}{1 - q^{2n+1}kf} - \frac{1 + q^{2n+1}k}{1 - q^{2n+1}k} \right), \quad (1)$$

где $k(t)$, $|k(t)| = 1$, — некоторая функция t , для функции $Z = f(w, t)$, конформно и однолистно отображающей кольцо $1 < |w| < q^{-1}$ на однопараметрическое семейство областей, получаемых из $|Z| > 1$ проведением разреза вдоль некоторой кривой Жордана, уходящей одним концом в бесконечность. Это уравнение было получено У. Комацу [1], а затем другим, более простым, способом Г. М. Голузиным [2]. В основу вывода положено уравнение типа Левнера

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + P(w, t) \frac{\partial \Phi}{\partial w} = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (2)$$

для функции $Z = \Phi(w, t)$, $\Phi(0, t) = 0$, $\Phi'_w(0, t) = \exp(-t)$, конформно, но неоднолистно, отображающей круг $|w| < 1$ на однопараметрическое семейство областей $B(t)$, получаемых из некоторой однолистной двухсвязной области B_0 с внешним контуром $|Z| = 1$ и внутренним граничным континуумом, вырожденным в точку Z_0 , проведением разреза по некоторой кривой Жордана, исходящей из точки Z_0 и непроходящей через начало координат. Коэффициент $P(w, t)$ определяется следующей формулой

$$P(w, t) = w \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \frac{\mu_n + w}{\mu_n - w}, \quad (3)$$

где $\delta_n(t)$ — положительные функции параметра t , $\sum \delta_n(t) \equiv 1$, $\mu_n(t)$ — аффиксы точек окружности $|w| = 1$, соответствующие в отображении $Z = \Phi(w, t)$ концу разреза [3, 4].

§ 1. Другое выражение для $P(w, t)$

1. Пусть преобразование $\omega = Sw$ единичного круга в себя, принадлежащее группе A , имеет вид

$$\frac{\omega - \alpha}{\omega - \beta} = \frac{w - \alpha}{w - \beta} K, \quad (4)$$

где α и β — предельные точки группы, лежащие на $|w| = 1$, а $K(t)$ в рассматриваемом случае вещественно.

Вводя в уравнение (2) новое переменное w и полагая

$$\Phi(w, t) = \psi(w, t),$$

получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + P(w, t) \frac{\partial w}{\partial w} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial w} = 0.$$

Так как в результате такой замены уравнение не изменит своего вида ([3], § 6), то

$$\frac{\partial w}{\partial t} + P(w, t) \frac{\partial w}{\partial w} = P(w, t). \quad (5)$$

Дифференцируя теперь равенство (4), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= K \left(\frac{w - \beta}{w - \beta} \right)^2, \\ \frac{\alpha - \beta}{(w - \beta)^2} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\beta' (w - \alpha) - \alpha' (w - \beta)}{(w - \beta)^2} &= \\ &= K' \frac{w - \alpha}{w - \beta} + K \frac{\beta' (w - \alpha) - \alpha' (w - \beta)}{(w - \beta)^2} \end{aligned}$$

и, используя это, имеем из равенства (5)

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - \beta}{(w - \beta)^2} P(w, t) + \frac{(\beta' - \alpha') w + \alpha' \beta - \beta' \alpha}{(w - \beta)^2} &= \\ = K \left\{ \frac{\alpha - \beta}{(w - \beta)^2} P(w, t) + \frac{(\beta' - \alpha') w + \alpha' \beta - \beta' \alpha}{(w - \beta)^2} \right\} + K' \frac{w - \alpha}{w - \beta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Полагая

$$f(w) = \frac{\alpha - \beta}{(w - \beta)^2} P(w, t) + \frac{(\beta' - \alpha') w + \alpha' \beta - \beta' \alpha}{(w - \beta)^2} \quad (7)$$

из соотношения (6) будем иметь

$$(S w) = K f(w) + K' \frac{w - \alpha}{w - \beta}, \quad (8)$$

или, вводя новые переменные

$$v = \lambda \frac{w - \alpha}{w - \beta}, \quad f(w) = F(v), \quad (9)$$

где $\lambda(t)$ — некоторая функция параметра, находим

$$F(Kv) = K F(v) + \frac{K'}{K} v. \quad (10)$$

Полагая еще

$$y = m \log v, \quad \psi(y) = F(v) : v$$

получим важное для дальнейшего соотношение

$$\psi(y + m \log K) = \psi(y) + \frac{K'}{\lambda K}. \quad (11)$$

Кроме того, очевидно

$$\psi(y + 2m\pi i) = F(v e^{2\pi i}) : (v e^{2\pi i}) = F(v) : v = \psi(y). \quad (12)$$

2. Функция $f(w)$ имеет простые полюсы в точках $w = \mu_n$ и существенно особые точки $w = \alpha$, $w = \beta$, являющиеся точками сгущения для полюсов. Вычеты $f(w)$ относительно этих полюсов легко находятся из формул (3) и (7) и равны

$$\operatorname{Res}_{w=\mu_n} f(w) = - \frac{\alpha - \beta}{(\mu_n - \beta)^2} 2 \mu_n^2 \delta_n, \quad (13)$$

Тогда функция $\psi(y)$ имеет простые полюсы в точках

$$\eta_{nv} = \eta_0 + nm \log K + v 2m \pi i, \quad \eta_0 = m \log \left(\lambda - \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right)$$

с вычетами

$$\operatorname{Res}_{y=\eta_{nv}} \psi(y) = p_n = - 2m \delta_n \mu_n^2 (\alpha - \beta)^2 (\mu_n - \alpha)^{-2} (\mu_n - \beta)^{-2}. \quad (14)$$

Покажем, что $p_n = p_0 = \text{const.}$

Из (14) имеем

$$p_1 : p_0 = \mu_1^2 \mu_0^{-2} \delta_1 \delta_0^{-1} [(\mu_0 - \alpha)(\mu_0 - \beta)(\mu_1 - \alpha)^{-1}(\mu_1 - \beta)^{-1}]^2. \quad (15)$$

Запишем преобразование (4) в ином виде

$$w = \frac{w - c}{1 - cw} e^{i\varphi}. \quad (16)$$

Параметры этих двух записей одного и того же преобразования взаимно связаны, в частности параметры c и φ выражаются через α , β и K следующим образом

$$c = \frac{\alpha\beta(1-K)}{\alpha - K\beta}, \quad (17)$$

$$e^{i\varphi} = \frac{\alpha - K\beta}{K\alpha - \beta}. \quad (18)$$

Из формулы (4) и (16) имеем

$$\frac{\partial w}{\partial w} = K \left(\frac{w - \beta}{w - \alpha} \right)^2 = e^{i\varphi} \frac{1 - c\bar{c}}{(1 - cw)^2}.$$

и на основании (18),

$$K \left(\frac{\mu_1 - \beta}{\mu_0 - \beta} \right)^2 = - \frac{\alpha - K\beta}{K\alpha - \beta} \frac{1 - c\bar{c}}{(1 - \bar{c} \mu_0)^2}. \quad (19)$$

Используя соотношение, найденное в статье [3],

$$\delta_1 = \delta_0 (1 - c\bar{c})^2 |\mu_0 - c|^{-4}$$

и формулы (15), (16), (19), находим

$$p_1 : p_0 = \mu_1^2 \mu_0^{-2} (1 - c\bar{c})^2 |\mu_0 - c|^4 \left[\frac{\alpha - K\beta}{K\alpha - \beta} \frac{1 - c\bar{c}}{(1 - \bar{c} \mu_0)^2} \right]^{-2}.$$

Так как

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial w} \right)_{w=\mu_0} = \left\{ e^{i\varphi} \frac{1 - c\bar{c}}{(1 - c\mu_0)^2} \right\}_{w=\mu_0} = \frac{\alpha - K\beta}{K\alpha - \beta} \frac{1 - c\bar{c}}{(1 - \bar{c} \mu_0)^2},$$

то

$$\left| \frac{\partial \omega}{\partial w} \right|_{w=\mu_0} = \frac{1 - c\bar{c}}{|1 - \bar{c} \mu_0|^2}$$

и, следовательно,

$$p_1 : p_0 = \mu_1^2 \mu_0^{-2} \left[\left| \frac{\partial \omega}{\partial w} \right| : \frac{\partial \omega}{\partial w} \right]_{w=\mu_0}^2. \quad (20)$$

Но

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial w} : \left| \frac{\partial \omega}{\partial w} \right| \right\}_{w=\mu_0} &= \frac{\alpha - K\beta}{K\alpha - \beta} \cdot \frac{(1 - \bar{c} \mu_0) (1 - c \mu_0)}{(1 - \bar{c} \mu_0)^2} = \\ &= e^{i\varphi} \mu_0^{-1} \frac{\mu_0 - c}{1 - \bar{c} \mu_0} = \bar{\mu}_0 \mu_1 = \mu_1 \mu_0^{-1}. \end{aligned}$$

На основании последнего из (20) находим

$$p_1 = p_0.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$p_n = p_{n-1}$$

и, следовательно, выполнение равенства

$$p_n = p_0 = -2m \delta_0 \mu_0^2 (\alpha - \beta)^2 \lambda^{-1} (\mu_0 - \alpha)^{-2} (\mu_0 - \beta)^{-2}. \quad (21)$$

Таким образом, функция $\psi(y)$ является квазипериодической

$$\psi(y + 2m\pi i) = \psi(y), \quad \psi(y + m \log K) = \psi(y) + \frac{K'}{\lambda K}$$

с периодами

$$2\omega_1 = m \log K, \quad 2\omega_2 = 2m\pi i, \quad (22)$$

с простыми полюсами в точках η_n и с одинаковыми вычетами относительно этих полюсов.

3. Рассмотрим квазипериодическую функцию Вейерштрасса $\zeta(y)$

$$\zeta(y + 2\omega_1) = \zeta(y) + 2\eta_1, \quad \zeta(y + 2\omega_2) = \zeta(y) + 2\eta_2,$$

которая имеет в качестве особых точек простые полюсы в точках

$$y = 2n\omega_1 + 2v\omega_2$$

с равными единице вычетами. Тогда функция

$$G(y) = p \left[\zeta\left(y - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta}\right) - \frac{\eta_2}{\omega_2} \left(y - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) \right] \quad (23)$$

также будет квазипериодической с теми же периодами и удовлетворяет условиям

$$G(y + 2\omega_1) = G(y) + p \frac{\pi i}{\omega_2}, \quad G(y + 2\omega_2) = G(y)$$

и имеет простые полюсы в точках

$$m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} + n 2\omega_1 + v 2\omega_2 = \eta_n$$

с равными p вычетами. Если дополнительно потребовать, чтобы

$$p \frac{\pi i}{\omega_2} = -\frac{K'}{\lambda K}$$

или, что то же,

$$\lambda p : m = K' : K, \quad (24)$$

то функции $\psi(y)$ и $G(y)$ имеют одни и те же простые полюсы с одинаковыми вычетами и не имеют других особых точек, и по известному свойству мероморфных функций могут отличаться разве лишь на постоянную

$$\psi(y) = G(y) + \text{const.} \quad (25)$$

Так как выражение $\lambda p : m$ чисто вещественное, то условию (24) можно удовлетворить путем соответствующего выбора параметра t . Для этого достаточно потребовать, чтобы новый параметр $\tau = \tau(t)$ удовлетворял условию

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{m}{p\lambda} \frac{d \log K}{dt}$$

Возвращаясь теперь к функции P и определяя константу в (25) из условия $P(0, t) = 0$, получим искомое выражение для $P(w, t)$

$$P(w, t) = \lambda p \frac{(w - \alpha)(w - \beta)}{\alpha - \beta} \left\{ \left[\zeta \left(m \log \lambda \frac{w - \alpha}{w - \beta} - \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \Big) - \frac{\eta_2}{\omega_2} \left(m \log \lambda \frac{w - \alpha}{w - \beta} - \right. \\
& \left. - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) - \left[\zeta \left(m \log \frac{\alpha(\mu_0 - \beta)}{\beta(\mu_0 - \alpha)} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\eta_2}{\omega_2} m \log \frac{\alpha(\mu_0 - \beta)}{\beta(\mu_0 - \alpha)} \right] + \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\lambda p \alpha \beta} \Big) - \\
& - \frac{(\beta' - \alpha')w + \alpha'\beta - \beta'\alpha}{\alpha - \beta}.
\end{aligned} \quad (26)$$

§ 2. Вывод уравнения

1. Обозначим через $\gamma(t)$ аффикс точки окружности $|w|=1$, которой в отображении $z = \Phi(w, t)$ соответствует фиксированная точка $z=1$. Так как точке $z=1$ не может соответствовать ни точка $w=\mu_n$, ни предельная для таких точек, то уравнение (2) имеет смысл и в точке $w=\gamma$. По определению

$$\Phi(\gamma(t), t) \equiv 1,$$

откуда

$$\Phi'_t(\gamma(t), t) + \Phi'_w(\gamma(t), t) \gamma'(t) = 0.$$

Сравнивая последнее выражение с уравнением (2) при $w=\gamma$, получим дифференциальное уравнение для $\gamma(t)$:

$$\gamma'(t) = P(\gamma(t), t). \quad (27)$$

2. Функция

$$\begin{aligned}
u &= \exp \left(im \log \lambda \frac{w - \alpha}{w - \beta} \right), \\
\exp \left(im \log \lambda \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} \right) &= \exp(-m\pi),
\end{aligned} \quad (28)$$

при соответствующем подборе вещественной постоянной m и комплексной константы λ , осуществляет отображение $|w| < 1$ на круговое кольцо $R: r(t) < |u| < 1$, где

$$r(t) = \exp(-m\pi) \quad (29)$$

Действительно, дробно линейное преобразование

$$v = \lambda \frac{w - \alpha}{w - \beta}$$

при соответствующем подборе аргумента λ , переводит круг $|w| < 1$ в верхнюю полуплоскость переменного v ; функция $\omega = \log v$ отображает последнюю на полосу $0 < \operatorname{Im} \omega < \pi$. Предельные точки α и β группы A перейдут в бесконечно удаленную точку плоскости ω и, следовательно, преобразования группы A в плоскости ω соответст-

ует группа параллельных переносов, оставляющих инвариантной полосу $0 < \operatorname{Im} \omega < \pi$. Далее, функция $x = im \omega$, при соответствующем подборе вещественной постоянной m , отображит данную полосу на $-m\pi < \operatorname{Re} x < 0$ и так, что конгруэнтные точки будут отличаться друг от друга на слагаемое $n \cdot 2\pi i$, и, наконец, функция $u = \exp x$ отображит полосу $-m\pi < \operatorname{Re} x < 0$ на кольцо $r(t) < |u| < 1$, при этом так, что конгруэнтным относительно преобразований группы A точкам круга $|w| < 1$ будет соответствовать одна и та же точка кольца. Находя итоговое преобразование, получим (28). Располаясь еще величиной модуля λ , можно всегда удовлетворить и условию

$$\exp(-m\pi) = \exp\left(im \log \lambda \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta}\right),$$

то есть перевести точку $w = \gamma$ в точку внутренней окружности кольца, лежащую на положительной части вещественной оси. При этом всегда можно перевести точки $w = \mu_n$ в точку окружности $|u| = 1$.

Преобразованию (4) в плоскости w соответствует полный поворот вокруг начала координат в плоскости u .

Тогда

$$\begin{aligned} u &= \exp\left(im \log \lambda \frac{\omega - \alpha}{\omega - \beta}\right) = \exp\left(im \log \lambda K \frac{w - \alpha}{w - \beta}\right) = \\ &= \exp\left(im \log \lambda \frac{w - \alpha}{w - \beta}\right) \cdot \exp im \log K. \end{aligned}$$

Откуда

$$\exp(im \log K) = \exp(2\pi i) = 1$$

и

$$m = 2\pi : \log K, \quad 2\omega_1 = 2m \log K = 2\pi. \quad (30)$$

Дифференцируя последнее соотношение по t и учитывая (24), находим

$$m' = -\lambda m p : 2\pi. \quad (31)$$

3. В уравнении (2) перейдем к переменному u и положим

$$\Phi(w, t) = \psi(u, t)$$

Имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + P(w, t) \frac{\partial u}{\partial w} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0. \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + P(w, t) \frac{\partial u}{\partial w} = B = iu \left\{ m' \log \lambda \frac{w - \alpha}{w - \beta} + m \frac{\lambda'}{\lambda} + \right. \\ \left. + m \frac{(\beta' - \alpha')w + \alpha'\beta - \beta'\alpha}{(w - \alpha)(w - \beta)} + \frac{m(\alpha - \beta)}{(w - \alpha)(w - \beta)} P(w, t) \right\}. \quad (33) \end{aligned}$$

Упростим это выражение. Для этого найдем сначала $(\log \lambda)'$. Из равенства (28) имеем

$$\log \lambda \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} = \pi i,$$

откуда

$$\log \lambda = \log \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha} + \pi i \quad (34)$$

Дифференцируя его по t и используя соотношение (27), (26) и (28), будем иметь

$$\begin{aligned} (\log \lambda)' = & -\lambda p \left[\zeta \left(m \pi i - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) - \right. \\ & - \frac{\eta_2}{\omega_2} m \left(\pi i - \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) \left. \right] + \lambda p \left[\zeta \left(m \log \lambda \frac{\alpha (\mu_0 - \beta)}{\beta (\mu_0 - \alpha)} \right) - \right. \\ & - \frac{\eta_2}{\omega_2} m \log \lambda \frac{\alpha (\mu_0 - \beta)}{\beta (\mu_0 - \alpha)} \left. \right] + \frac{\beta' \alpha - \alpha' \beta}{\alpha \beta}. \end{aligned} \quad (35)$$

Подставляя теперь в (33) найденные значения производных из (31) и (35), используя выражение (26) и почти очевидное равенство

$$m' - m^2 p \lambda \frac{\eta_2}{\omega_2} = - \frac{\lambda p m_2}{m \pi^2 i} \left(\frac{\pi i}{2} + \omega_1 \eta_2 \right) = - \lambda p m^2 \frac{\eta_1}{\omega_1},$$

получим

$$\begin{aligned} B = i u \lambda p m \left\{ \zeta \left(m \log \lambda \frac{w - \alpha}{w - \beta} - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) - \right. \\ - \frac{\eta_1}{\omega_1} m \left(\log \lambda \frac{w - \alpha}{w - \beta} - \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) - \\ - \left[\zeta \left(m \pi i - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) - \frac{\eta_2}{\omega_2} m \left(\pi i - \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) \right] - \\ \left. - \frac{1}{2\pi} \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Используем еще известное разложение функции $\zeta(v)$ ([5], стр. 78)

$$\begin{aligned} \zeta(v) = \frac{\eta_1}{\omega_1} v + \frac{\pi i}{2\omega_1} \left\{ \frac{x+1}{x-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2h^{2n} x^{-1}}{1-h^{2n} x^{-1}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2h^{2n} x}{1-h^{2n} x} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$x = \exp \left(\frac{\pi i}{\omega_2} v \right), \quad (38)$$

$$h = \exp \left(\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1} \right), \quad \text{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0. \quad (39)$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \zeta \left(m \log \lambda \frac{w - \alpha}{w - \beta} - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) - \\ & - \frac{\eta_1}{\omega_1} m \left(\log \lambda \frac{w - \alpha}{w - \beta} - \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) = \\ & = \frac{\pi i}{2\pi} \left\{ \frac{v u + 1}{v u - 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2r^{2n} v^{-1} u^{-1}}{1 - r^{2n} v^{-1} u^{-1}} - \frac{2r^{2n} v u}{1 - r^{2n} v u} \right) \right\} = \\ & = - \frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 + r^{2n} v u}{1 - r^{2n} v u}, \end{aligned} \quad (40)$$

где, согласно формуле (38) и (39),

$$x = \exp \left[\frac{\pi i}{\omega_1} m \left(\log \lambda \frac{w - \alpha}{w - \beta} - \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) \right] = u v$$

и

$$v = \exp \left(i m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right), \quad (41)$$

аффикс точки окружности $|u|=1$, соответствующей в отображении (28) точкам $w = \mu_n$;

$$h = \exp \left(\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) = \exp \left(\pi i \frac{m \pi i}{\pi} \right) = \exp(-m\pi) = r.$$

Далее, вводя в рассмотрение новую пару основных периодов

$$\omega'_1 = \omega_2, \quad \omega'_2 = -\omega_1; \quad \text{Im} \frac{\omega'_2}{\omega'_1} = -\text{Im} \frac{\omega_1}{\omega_2} > 0$$

и учитывая, что

$$\eta'_1 = \zeta(\omega'_1) = \eta_2,$$

получим

$$\begin{aligned} & \zeta \left(m \pi i - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) - \frac{\eta_2}{\omega_2} \left(m \pi i - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) = \\ & = \frac{\pi i}{2m \pi i} \left\{ \frac{x + 1}{x - 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2h^{2n} x^{-1}}{1 - h^{2n} x^{-1}} - \frac{2h^{2n} x}{1 - h^{2n} x} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$h = \exp \left(\pi i \frac{\omega'_2}{\omega'_1} \right) = \exp \left(-\frac{\pi}{m} \right)$$

$$\text{и } x = \exp \left[\frac{\pi i}{m \pi i} \left(m \pi i - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) \right] = - \frac{\mu_0 - \beta}{\lambda (\mu_0 - \alpha)}.$$

Из (41) следует, что

$$\log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta},$$

а следовательно, x и все выражения (42) чисто вещественные.

Возвращаясь к уравнению (32) и используя формулу (40), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} + u \left\{ \frac{\lambda p m}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 + r^{2n} v u}{1 - r^{2n} v u} - i \lambda m p \left[\zeta \left(m \pi i - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) - \frac{\gamma_2}{\omega_2} m \left(\pi i - \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) \right] - \right. \\ \left. - i \frac{\lambda p m}{2\pi} \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0. \end{aligned}$$

Так как два вторых слагаемых коэффициента последнего уравнения принимают чисто мнимые значения, то поворотом около начала координат

$$v = u \exp i \Theta, \quad \psi(u, t) = \chi(v, t),$$

где

$$\begin{aligned} \frac{d \Theta}{d t} = \lambda p m \left[\zeta \left(m \pi i - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\gamma_2}{\omega_2} \left(m \pi i - m \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \log \lambda \frac{\mu_0 - \alpha}{\mu_0 - \beta} \right], \end{aligned}$$

приведем дифференциальное уравнение к виду

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + v \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 + r^{2n} \vartheta v}{1 - r^{2n} \vartheta v} \frac{\partial \chi}{\partial v} = 0, \quad (43)$$

где

$$\vartheta = v \exp(-i \Theta), \quad |\vartheta| = 1.$$

4. Функция

$$\Psi(v, t) = [1 - \bar{z}_0 \chi(v, t)] : [\chi(v, t) - z_0]$$

будет удовлетворять уравнению (43) и отображает кольцо $r < |v| < 1$, на область, получаемую из внешности единичного круга проведением разреза по кривой, уходящей одним концом в бесконечность.

Обозначим через $r \exp i \varphi$ точку внутренней окружности кольца, которой в отображении $z = \Psi(v, t)$ соответствует точка $z = 1$. Произведя еще в уравнении (43) замену переменных

$$u = v : (r \exp i \varphi),$$

$$\Psi(v, t) = g(u, t), \quad g(1, t) = 1$$

и учитывая, что

$$-\frac{d}{dt} \left(r e^{i\varphi} \right) = \frac{mp\lambda}{2} r e^{i\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 + r^{2n+1} \vartheta \exp i\varphi}{1 - r^{2n+1} \vartheta \exp i\varphi},$$

получим

$$\frac{dg}{dt} + u \frac{mp\lambda}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1 + r^{2n+1} k u}{1 - r^{2n+1} k u} - \frac{1 + r^{2n+1} k}{1 - r^{2n+1} k} \right\} \frac{dg}{du} = 0 \quad (44)$$

$$k = \vartheta \exp i \varphi.$$

При этом всегда можно добиться (введением нового параметра), что

$$\left\{ \ln r(t) \right\}' = \frac{\lambda p m}{2} = 1.$$

Переходя, наконец, к функции

$$f(u, t) = g^{-1} \{ g(u, t_1), t \},$$

получим искомое уравнение (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Komatu U., Untersuchungen über konforme Abbildung zweifach zusammenhängender Bereiche, Proc. Phys. — Math. Soc. Japan, 25(1943), 1—42.
2. Голузин Г. М., О параметрическом представлении функций, однолистных в кольце, „Матем. сб.“. 29 (1951), 469—476.
3. Куваев М. Р. и Куфарев П. П., Об уравнении типа Левнера для многосвязных областей. Уч. зап. Томского гос. ун-та 25 (1955), 19—34.
4. Куваев М. Р., Обобщение уравнения типа Левнера для автоморфных функций, Труды Томского гос. ун-та, т. 144, 1959, 27—30.
5. Ахиезер А. И., Элементы теории эллиптических функций, ГТИ, 1948.

Кафедра общей математики
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

Л. Я. МАКАРОВА

ОБ ОБЛАСТЯХ РУНГЕ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Из классической теории известно, что всякая функция одного комплексного переменного, аналитическая в односвязной, ограниченной области, аппроксимируется внутри нее равномерно сходящимся рядом полиномов, т. е. всякая односвязная область является областью Рунге I рода. Всякая функция, аналитическая и однозначная в произвольной плоской области, аппроксимируется внутри этой области равномерно сходящимся рядом рациональных функций, т. е. произвольная плоская область является областью Рунге II рода.

Эти классические положения не переносятся на случай двух комплексных переменных. В 1941 году Ока построил пример ограниченной однолистной области, не являющейся областью Рунге II рода.

В пространстве двух комплексных переменных существуют области, которые не являются областями регулярности (см. [1]).

Областью Рунге I (II) рода будем называть область регулярности, внутри которой возможна равномерная аппроксимация аналитических в этой области функций полиномами (рациональными функциями).

В данной работе рассматривается некоторый класс Σ областей Вейля, определяющими функциями которых являются полиномы, доказывается, что все области данного класса являются областями Рунге II рода и даются достаточные условия, при которых область из данного класса является областью Рунге I рода.

Область Вейля Δ определяется следующим образом: задается система полиномов

$$P_1(w, z), \quad P_2(w, z), \dots, \quad P_n(w, z),$$

в плоскостях $P_1, P_2, \dots, P_n$ задаются области $D_1, D_2, \dots, D_n$ и рассматривается геометрическое место точек, подчиненное условиям:

$$P_j(w, z) \in D_j + C_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где C_j — граница области D_j .

Когда область Δ определена, за области $D_1, D_2, \dots, D_n$ можем брать, не нарушая общности, области значений полиномов $P_1(w, z), P_2(w, z), \dots, P_n(w, z)$ при $(w, z) \in \Delta$, что мы в дальнейшем и делаем.

Пусть область $D_j, j = 1, 2, \dots, n$, ограничена контурами

$$(II) \quad l_{j0}, l_{j1}, l_{j2}, \dots, l_{jk}, \quad 0 \leq k \leq \infty, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где l_{j0} — внешний контур области $D_j, l_{j1}, \dots, l_{jk}$ — внутренние контуры.

Обозначим через S_j геометрическое место точек плоскости P_j , соответствующее ограничивающей гиперповерхности $P_j(w, z) = c_j(t)$.

Может быть два случая:

- 1) $S_1, S_2, \dots, S_n$ лежат на внешних контурах $l_{10}, l_{20}, \dots, l_{n0}$.
- 2) $S_1, S_2, \dots, S_n$ содержат точки как на внешних контурах, так и на внутренних.

Теорема 1. Если имеет место случай 1, то область Δ является областью Рунге I рода

Доказательство. Пусть B_0 — произвольная область, лежащая строго внутри Δ . Для доказательства теоремы достаточно указать существование аналитического многогранника Вейля

$$\tilde{\Delta} \{ |p_j(w, z)| \leq 1, j = 1, 2, \dots, m \},$$

который содержится внутри Δ и содержит область B_0 .

Пусть $B_{01}, B_{02}, \dots, B_{0n}$ — области значений полиномов $P_1(w, z), P_2(w, z), \dots, P_n(w, z)$, когда $(w, z) \in B_0$, $\rho_0 = \min \rho(B_{0j}, D_j)$, где B_{0j}, D_j — границы областей $B_{0j}, D_j, j = 1, 2, \dots, n$. Очевидно, что $\rho_0 > 0$.

Пусть $G_j, j = 1, 2, \dots, n$ — область, ограниченная контуром $l_{0j}, j = 1, 2, \dots, n$, и содержащая область D_j . Существует $\rho_1 < \rho_0$ такое, что при отображении областей $G_1, G_2, \dots, G_n$ на единичный круг, области $B_{01}, B_{02}, \dots, B_{0n}$ отображаются внутрь круга радиуса $r < 1$, а точки, удаленные от $l_{10}, l_{20}, \dots, l_{n0}$ на расстояние меньше ρ_1 — во внешность того же самого круга. В области Δ рассмотрим множество точек (w, z) , удовлетворяющих по крайней мере одному из неравенств

$$|P_j(w, z) - P_j(w, \zeta)| \leq \rho_1, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где (w, ζ) — произвольная граничная точка области Δ . Это множество точек представляет собой некоторый граничный слой области Δ . Пусть G — некоторая область, все граничные точки которой лежат внутри данного слоя и которая содержит область B_0 .

Пусть (ξ, η) — произвольная точка границы области G . Для точки (ξ, η) существует полином $P_m(w, z)$, $1 \leq m \leq n$ и граничная точка (w, ζ) области Δ такие, что

$$|P_m(w, \zeta) - P_m(\xi, \eta)| < \rho_1,$$

полином $P_m(w, z)$ отображает точку (ξ, η) в точку $Q_{\xi, \eta}$ плоскости P_m . $Q_{\xi, \eta}$ удовлетворяет следующему неравенству

$$|F_m(Q_{\xi, \eta})| > \max |F_m(B_{0m})|,$$

где $F_m(P_m)$ — функция, осуществляющая конформное отображение области G_m на единичный круг. Внутри G_m функция $F_m(P_m)$ представима равномерно сходящимся рядом полиномов, в силу этого функция $\Phi_m(w, z) = F_m(P_m(w, z))$ представима равномерно сходящимся рядом полиномов внутри Δ .

Для точки (ξ, η) имеет место неравенство

$$|\Phi_m(\xi, \eta)| > \max |\Phi(B_0)|.$$

Так как $\Phi_m(\xi, \eta)$ аппроксимируется внутри Δ равномерно сходящимся рядом полиномов, то для точки (ξ, η) найдется полином $Q(w, z)$ такой, что

$$|Q(\xi, \eta)| > 1 > \max |Q(B_0)|. \quad (2)$$

Неравенство (2) остается справедливым для некоторой окрестности $U(\xi, \eta)$ точки (ξ, η) .

Граница области G представляет собой замкнутое множество. По лемме Гейне-Бореля она может быть покрыта конечным числом окрестностей $U_1(\xi_1, \eta_1), U_2(\xi_2, \eta_2), \dots, U_N(\xi_N, \eta_N)$, для каждой из которых найдется полином $Q_k(w, z), k=1, 2, \dots, N$, такой, что

$$|Q_k(w, z)| > 1 > \max |Q_k(B_0)|, \quad k=1, 2, \dots, N \\ (w, z) \in U_k(\xi_k, \eta_k).$$

Рассмотрим множество точек (w, z) , удовлетворяющих неравенствам

$$|Q_k(w, z)| \leq 1, \quad k=1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Это множество содержится внутри области Δ и содержит область B_0 . Область, определенная неравенствами (3), является аналитическим многогранником. Таким образом, существование аналитического многогранника $\tilde{\Delta}$, содержащего область B_0 , доказано, тем самым доказана теорема.

Теорема 2. Произвольная область класса Σ является областью Рунге II рода.

Доказательство. Произвольная область Δ класса Σ является пересечением бесконечного числа областей, представляющих собой пространство C^4 с выброшенной полиномиальной поверхностью. Легко видеть, что пространство C^4 с выброшенной полиномиальной поверхностью является областью Рунге II рода. Известно, что пересечение конечного или бесконечного числа областей Рунге II рода является областью Рунге II рода (см. [1] стр. 249), следовательно, область Δ является областью Рунге II рода. Теорема доказана.

Таким образом, нами установлено, что все области класса Σ являются областями Рунге II рода и выделен подкласс Ω областей Рунге I рода. Встает вопрос, содержит ли множество $\Sigma - \Omega$ области Рунге I рода. Этот вопрос решается положительно. При решении данного вопроса пользуемся методом полунепрерывного распространения одной области на другую (см. [2]).

Определение. Пусть G и $\tilde{G}$ — области регулярности в пространстве C^4 ($G \subset \tilde{G}$). Говорят, что G полунепрерывно распространяема на $\tilde{G}$, если существует множество областей регулярности $G(s), 0 \leq s \leq 1$, со следующими свойствами:

1. $G(0) = G, \quad G(1) = \tilde{G}$.
2. Если $s' \leq s''$, то $G(s') \subset G(s'')$.
3. Каждая граничная последовательность точек $\{P_i(s_i)\}$ с $s_i \leq s_0$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = s_0$ имеет точки накопления только на границе области $G(s_0)$.
4. Каждая граничная точка области $G(s_0)$ является предельной для последовательности $\{P_j(s_j)\}$, где $P_j(s_j)$ лежит на границе $G(s_j)$, $s_j > s_0$ и $\lim_{j \rightarrow \infty} s_j = s_0$.

Относительно полунепрерывного распространения доказана следующая теорема: Если область G полунепрерывно распространяема на $\tilde{G}$, то всякая функция, аналитическая в G , равномерно аппроксимиру-

ется внутри нее функциями, аналитическими в $\widetilde{G}$ (см. [2]). Этой теоремой будем в дальнейшем пользоваться.

Рассмотрим область $\Delta \in \Sigma$.

Пусть $P_1(w, z), P_2(w, z), \dots, P_n(w, z)$ — определяющие полиномы области Δ , а $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ — области значений полиномов $P_1(w, z), P_2(w, z), \dots, P_n(w, z)$, когда $(w, z) \in \Delta$. Область Δ_i ограничена системой контуров $l_{i0}, l_{i1}, l_{i2}, \dots, l_{iq_i}$, где l_{i0} — внешний контур, $l_{i1}, l_{i2}, \dots, l_{iq_i}$ — внутренние контуры, $i = 1, 2, \dots, n$.

Область D_i может быть бесконечно связной, в этом случае система контуров $l_{i1}, l_{i2}, \dots$ будет бесконечной.

Обозначим через G_{i0} — внутренность контура l_{i0} , через G_{ik} — внешность контура l_{ik} , $k = 1, 2, \dots, q_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим область D_{ik} пространства C^4 , удовлетворяющую условию

$$P_i(w, z) \in G_{ik}.$$

(Под областью, в данном случае, мы понимаем произвольное открытое множество пространства C^4). Покажем, что область D_{i0} полунепрерывно распространяема на C^4 . Плоская область G_{i0} является односвязной, она полунепрерывно распространяема на плоскость. Существует множество областей $G_{i0}(s)$, $0 \leq s \leq 1$, которое удовлетворяет условиям полунепрерывного распространения области G_{i0} на плоскость. Легко видеть, что множество областей $D_{i0}(s)$, удовлетворяющих условию

$$P_i(w, z) \in G_{i0}(s),$$

осуществляет полунепрерывное распространение области D_{i0} на пространство C^4 . Покажем, что область D_{ik} , $k \neq 0$, полунепрерывно распространяема на пространство C^4 с выброшенной поверхностью $P_i(w, z) = \alpha_{ik}$, где α_{ik} — произвольно фиксированная точка внутри контура l_{ik} . Область G_{ik} полунепрерывно распространяема на плоскость с выброшенной точкой α_{ik} . Следовательно, существует множество областей $G_{ik}(s)$, $0 \leq s \leq 1$, осуществляющих полунепрерывное распространение области G_{ik} на плоскость с выброшенной точкой. Множество областей $D_{ik}(s)$, удовлетворяющих условию $P_i(w, z) \in G_{ik}(s)$, осуществляет полунепрерывное распространение области D_{ik} на пространство C^4 с выброшенной поверхностью $P_i(w, z) = \alpha_{ik}$. Область Δ может быть представлена следующим образом

$$\Delta = \prod_{i=1}^n \prod_{k=0}^{q_i} D_{ik} = \prod_{i=1}^n D_{i0} \prod_{i=1}^n \prod_{k=1}^{q_i} D_{ik} = D_0 \cap D_1, \text{ где}$$

$$D_0 = \prod_{i=1}^n D_{i0}, \quad D_1 = \prod_{i=1}^n \prod_{k=1}^{q_i} D_{ik}.$$

Область D_0 полунепрерывно распространяема на пространство C^4 . Множество областей $D_0(s) = \prod_{i=1}^n D_{i0}(s)$ осуществляет полунепрерывное распространение области D_0 на пространство C^4 . Область D_1 полунепрерывно распространяема на пространство C^4 с выброшенными поверхностями

$$P_i(w, z) = \alpha_{ik} \quad \begin{matrix} k = 1, 2, \dots, q_i \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{matrix} \quad (4)$$

Область Δ полунепрерывно распространяема на пространство C^1 с выброшенными поверхностями

$$P_{i_\nu}(w, z) = a_{i_\nu, k_\mu} \quad \begin{matrix} \mu = 1, 2, \dots, q'_{i_\nu}, q'_{i_\nu} \leq q_{i_\nu} \\ \nu = 1, 2, \dots, n_1, n_1 \leq n. \end{matrix} \quad (5)$$

Поверхности системы (5) содержатся в системе (4), системы (4) и (5) могут не совпадать. В систему (5) не входят поверхности системы (4), не содержащие точек области D_0 .

Из вышеизложенного вытекают следующие теоремы:

Теорема 3. Произвольная функция, аналитическая в области Δ , равномерно аппроксимируется внутри Δ рациональными функциями, имеющими особенности только на поверхностях системы (5). Система (5) может содержать как конечное число поверхностей, так и бесконечное.

Теорема 4. Для того, чтобы область $\Delta \in \Sigma - \Omega$ являлась областью Рунге I рода, достаточно, чтобы внутри контуров l_{ik} нашлись точки α'_{ik} , $k=1, 2, \dots, q_i$, $i=1, 2, \dots, n$, для которых поверхности системы (4) не содержали бы точек области D_0 .

Построим пример, показывающий существование областей, удовлетворяющих условиям теоремы 4.

Пример: Рассмотрим область D , определенную условиями:

$$|wz - 1| < 1/2; \quad 1 < |z| < 2; \quad 1 < |w| < 2.$$

Замечаем, что D полунепрерывно распространяема на $\widetilde{D}$:

$$\widetilde{D}(|wz - 1| < 1/2; \quad |z| < 2; \quad |w| < 2),$$

так как плоскости $z=0$, $w=0$ не содержат точек области $\widetilde{D}$. Область $\widetilde{D}$ является областью Рунге I рода. Отсюда следует, что и D является областью Рунге I рода.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных.
- 2 Behnke und Stein, Approximation analitischen Funktionen in vorgegebenen Bereichen des Raumes von n komplexes veranderlicher. Nachr. Ges. Wiss. Gottingen 1, 15, 1939 год.
3. Herbert will. Zur Funktionen theorie mehrer veranderlichen. Uber den Satz Hammerstein.

Кафедра общей математики
Томского государственного университета
им. В. В. Куйбышева.

П. И. ТРОФИМОВ

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

§ 1. В работе обозначаются:

Символом $\rho(\Gamma)$ число всех различных классов неинвариантных сопряженных подгрупп конечной группы Γ ;

Символом $\tau(g)$ число всех различных простых делителей порядка g этой группы Γ ;

Символом $N_{\Gamma}(\Phi)$ нормализатор подгруппы Φ группы Γ в Γ .

Все типы конечных групп, для которых $\rho(\Gamma) = 1$ и 2, были исследованы академиком О. Ю. Шмидтом [1], [2]. Исследования структуры и свойств конечных групп с $\rho(\Gamma) = k$ ($k > 1$) классами неинвариантных сопряженных подгрупп, проводились американским ученым Д. Т. Сигли в 1940 году, автором настоящей работы с конца 1949 года (и по настоящее время) и японским ученым Нобору Ито в 1954—56 годах. Автор статьи в работах [3] и [4] исследовал конечные нильпотентные группы с $\rho(\Gamma) = 3$ и 4.

§ 2. В силу теоремы 9 работы [5] Трофимова, для конечных не-нильпотентных групп с $\rho(\Gamma) = 3$ и 4 $\tau(g) \leq \rho(\Gamma)$.

Докажем теорему 1. Пусть Γ — конечная ненильпотентная группа порядка g . Если $\tau(g) = \rho(\Gamma) = 3$ и g делится на квадрат простого числа, или если $\tau(g) = \rho(\Gamma) = 4$, то:

1) $g = q^3 p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ ($k = 2$ и 3, $q, p_1, \dots, p_k$ различные простые числа), где $\alpha_i \leq 2$ ($i = 1, \dots, k$);

2) подгруппа Силова Π_i ($i = 1, \dots, k$) порядка $p_i^{\alpha_i}$ группы Γ инвариантна в Γ ;

3) каждая подгруппа Π'_i группы Π_i инвариантна в Γ ;

4) подгруппа Силова Λ порядка q^3 группы Γ является циклической и неинвариантной в Γ ,

5) все истинные подгруппы Λ' группы Λ инвариантны в Γ .

Доказательство. Группа Γ содержит по крайней мере одну инвариантную силовскую подгруппу. В самом деле, пусть $g = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s}$ ($s = 3$ или 4) — порядок Γ и пусть все силовские подгруппы Γ неинвариантны в Γ . Тогда, так как Γ разрешима (теорема 4, работы [5]), то, в силу теоремы Холла о разрешимых группах (см. [6]), она имеет подгруппы Φ_1 и Φ_2 порядков $q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2}$ и $q_2^{\beta_2} q_3^{\beta_3}$. Очевидно, подгруппы Φ_1 и Φ_2 инвариантны в Γ , а поэтому их пересечение, совпадающее с силовской подгруппой порядка $q_2^{\beta_2}$ группы Γ , должно быть инвариантным в Γ , что противоречит предположению о силовских подгруппах Γ . Итак, Γ содержит инвариантные силовские подгруппы.

Докажем теперь, что Γ содержит только один класс неинвариантных силовских подгрупп. Пусть Γ содержит l ($1 < l < s$, $s = 3$ или 4) таких классов.

а) Пусть $\rho(\Gamma) = 3$. Порядок g группы Γ запишем в виде $g = p^a q_1^{a_1} q_2^{a_2}$ (p, q_1, q_2 — различные простые числа). Силоские подгруппы Λ_1 и Λ_2 порядков $q_1^{a_1}$ и $q_2^{a_2}$ группы Γ будем предполагать неизменяемыми в Γ . Единственную инвариантную силоскую подгруппу обозначим через Π . Ее порядок — p^a . По условию доказываемой теоремы, g делится на квадрат простого числа. Так как Γ разрешима, то в силу теоремы Холла (6), она содержит подгруппу Φ порядка $q_1^{a_1} q_2^{a_2}$.

Пусть $q_1^{a_1}$ делится на квадрат q_1 . Обозначим через Λ'_1 подгруппу порядка q_1 . Пусть Λ'_1 инвариантна в Γ . Если подгруппа $\Lambda_1 \Lambda_2$ неизменяюща в Γ , то подгруппы $\Pi \Lambda_2$ и Φ инвариантны в Γ и Λ_2 инвариантна в Γ . Пусть $\Lambda_1 \Lambda_2$ неизменяюща в Γ . Тогда (т. к. Λ_1 неизменяюща в $\Lambda_1 \Lambda_2$), в силу леммы [2], стр. 7), порядок $N_\Gamma(\Lambda_2)$ делится на три различных простых числа. Так как $N_\Gamma(\Lambda_2)$ неизменяюща в Γ (см. следствие из леммы ([2], стр. 7)), то подгруппы $\Pi \Lambda_2$ и Φ инвариантны в Γ и, следовательно, Λ_2 инвариантна в Γ . Пусть Λ'_1 неизменяюща в Γ . Тогда $\Pi \Lambda_2$ и Φ инвариантны в Γ , и подгруппа Λ_2 инвариантна в Γ . Очевидно, мы приходим к заключению, что Λ_1 инвариантна в Γ , если предположим, что $q_1^{a_1}$ делится на квадрат q_1 .

Пусть p^a делится на квадрат p . Обозначим через Π' подгруппу порядка p . Пусть Π' инвариантна в Γ . Если $\Pi' \Lambda_1$ инвариантна в Γ , то (т. к. Λ_1 неизменяюща в $\Pi' \Lambda_1$) порядок $N_\Gamma(\Lambda_1)$ делится на три различных простых числа. $N_\Gamma(\Lambda_1)$ неизменяюща в Γ . Следовательно $\Pi \Lambda_2$ и Φ инвариантны в Γ и поэтому Λ_2 инвариантна в Γ . Пусть $\Pi' \Lambda_1$ неизменяюща в Γ . Тогда $\Pi \Lambda_2$ и Φ инвариантны в Γ и подгруппа Λ_2 должна быть инвариантной в Γ . Предположим теперь, что Π' неизменяюща в Γ . Тогда $\Pi \Lambda_2$ и Φ инвариантны в Γ и, следовательно, Λ_2 инвариантна в Γ .

б) Пусть $\rho(\Gamma) = 4$. Предположим, что Γ содержит три класса неизменяемых силоских подгрупп. Порядок g группы Γ запишем в виде $g = p^a q_1^{a_1} q_2^{a_2} q_3^{a_3}$. Пусть M_1 и M_2 — неизменяемые силоские подгруппы порядков $q_1^{a_1}$ и $q_2^{a_2}$ группы Γ . Обозначим через K инвариантную силоскую подгруппу порядка p^a группы Γ . Так как Γ разрешима, то она содержит подгруппы Z_1 и Z_2 порядков $q_1^{a_1} q_2^{a_2}$ и $q_2^{a_2} q_3^{a_3}$. Если Z_1 инвариантна, то Z_2 неизменяюща в Γ , и, следовательно, подгруппа $K M_1$ инвариантна в Γ . Отсюда следует, что M_1 , равная пересечению $K M_1$ и Z_1 , инвариантна в Γ . Из предположения об неизменяемости в Γ подгруппы Z_1 следует инвариантность в Γ подгрупп Z_2 и $K M_2$, что означает инвариантность в Γ подгруппы M_2 .

Пусть Γ содержит только два класса неизменяемых силоских подгрупп. Порядок g группы Γ теперь запишем в виде $g = p_1^{a_1} p_2^{a_2} q_1^{a_1} q_2^{a_2}$. В силу своей разрешимости, Γ содержит подгруппу Z порядка $q_1^{a_1} q_2^{a_2}$. Пусть K_1 и K_2 инвариантные порядков $p_1^{a_1}$ и $p_2^{a_2}$, а Ω_1 и Ω_2 неизменяемые порядков $q_1^{a_1}$ и $q_2^{a_2}$ силоские подгруппы группы Γ . Если подгруппа $K_1 \Omega_1$ инвариантна в Γ , то порядок $N_\Gamma(\Omega_1)$ делится по крайней мере на три различных простых числа. Так как $N_\Gamma(\Omega_1)$ неизменяюща в Γ , то, по меньшей мере, одна из подгрупп $K_2 \Omega_1$, Z инвариантна в Γ . Отсюда вытекает, что Ω_1 инвариантна в Γ . Предположим, что $K_1 \Omega_1$ неизменяюща в Γ . Тогда, по крайней мере, две подгруппы в совокупности

$$K_1 \Omega_2, Z, K_2 \Omega_2 \quad (1)$$

инвариантны в Γ , т. е. Ω_2 инвариантна в Γ .

Мы доказали, что Γ содержит только один класс неинвариантных силовских подгрупп. Следовательно, Γ содержит $s-1$ ($s=3$ или 4) инвариантных силовских подгрупп и порядок g группы Γ удобно записать в виде:

$$g = q^3 p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \quad (k = s-1),$$

где $q, p_1, \dots, p_k$ — различные простые числа и q^3 — порядок неинвариантных силовских подгрупп, а $p_i^{\alpha_i}$ ($i=1, \dots, k$) порядки инвариантных силовских подгрупп группы Γ . Пусть Λ и Π_i — силовские подгруппы порядков q^3 и $p_i^{\alpha_i}$ группы Γ .

Докажем, что (при $\alpha_i > 1$) любая собственная подгруппа Π_i' группы Π_i инвариантна в Γ . Пусть Π_i' неинвариантна в Γ . Без ограничения общности мы можем считать, что $i=1$. Предположим, что $\rho(\Gamma)=3$. Подгруппа $\Pi_2 \Pi_1'$ неинвариантна в Γ , т. к. в противном случае подгруппа Π_1' , равная пересечению подгрупп Π_1 и $\Pi_2 \Pi_1'$, инвариантна в Γ . Отсюда следует, что подгруппы $\Pi_1 \Lambda$ и $\Pi_2 \Lambda$ инвариантны в Γ , что означает, что Λ инвариантна в Γ . Пусть $\rho(\Gamma)=4$. Как и выше, нетрудно убедиться, что подгруппы $\Pi_1 \Pi_1'$, $\Pi_2 \Pi_1'$ неинвариантны в Γ . Тогда подгруппы $\Pi_1 \Lambda$ и $\Pi_2 \Lambda$ инвариантны в Γ , т. е. Λ инвариантна в Γ . Итак, при $\alpha_i > 1$, любая собственная подгруппа Π_i' группы Π_i инвариантна в Γ .

Докажем теперь, что $\alpha_i \leq 2$. Пусть, например, $\alpha_1 \geq 3$. Тогда подгруппа Π_1 содержит две собственные неинвариантные подгруппы Π_1^* и Π_1^{**} порядков p_1 и p_1^2 и такие что $\Pi_1^{**} \supset \Pi_1^*$. Так как Λ неинвариантна в Γ , то при $\rho(\Gamma)=3$, по крайней мере, две подгруппы в совокупности

$$\Pi_1 \Lambda, \Pi_1^* \Lambda, \Pi_1^{**} \Lambda, \Pi_2 \Lambda, \quad (2)$$

а при $\rho(\Gamma)=4$, по крайней мере, две подгруппы в совокупности

$$\Pi_1 \Lambda, \Pi_1^* \Lambda, \Pi_1^{**} \Lambda, \Pi_2 \Lambda, \Pi_3 \Lambda, \quad (3)$$

инвариантны в Γ . Нетрудно убедиться, что как в случае совокупности (3), так и в случае совокупности (4) необходимо исследовать только три ситуации:

- 1) подгруппы $\Pi_1 \Lambda$ и $\Pi_1^* \Lambda$ инвариантны в Γ ,
- 2) подгруппы $\Pi_1 \Lambda$ и $\Pi_1^{**} \Lambda$ инвариантны в Γ ,
- 3) подгруппы $\Pi_1^* \Lambda$ и $\Pi_1^{**} \Lambda$ инвариантны в Γ .

Пусть $\Pi_1 \Lambda$ и $\Pi_1^* \Lambda$ инвариантны в Γ . Подгруппа $N_{\Pi_1 \Lambda}(\Lambda)$ отлична от подгрупп $\Pi_1 \Lambda$ и $\Pi_1^* \Lambda$. В самом деле, если $N_{\Pi_1 \Lambda}(\Lambda) = \Pi_1 \Lambda$ или $\Pi_1^* \Lambda$, то Λ инвариантна в Γ . Если же $N_{\Pi_1 \Lambda}(\Lambda) = \Lambda$, то $\Pi_1 \Lambda$ неинвариантна в $\Pi_1 \Lambda$ и, следовательно, в Γ . Точно также можно показать, что $N_{\Gamma}(\Lambda)$ отлична от подгрупп $\Pi_1 \Lambda$, $\Pi_1^* \Lambda$, Λ . Далее, подгруппы $N_{\Pi_1 \Lambda}(\Lambda)$ и $N_{\Gamma}(\Lambda)$ не сопряжены в Γ , т. к., в силу леммы ((2), стр. 7), порядок $N_{\Pi_1 \Lambda}(\Lambda)$ делится только на два различных простых числа, тогда как порядок $N_{\Gamma}(\Lambda)$ делится на три (в случае $\rho(\Gamma)=3$) или на четыре (в случае $\rho(\Gamma)=4$) различных простых числа. Подгруппы $N_{\Pi_1 \Lambda}(\Lambda)$, $N_{\Gamma}(\Lambda)$ неинвариантны в Γ . Отсюда, при $\rho(\Gamma)=3$ следует, что $\Pi_2 \Lambda$ инвариантна в Γ и поэтому подгруппа Λ , равная пересечению $\Pi_1 \Lambda$ и $\Pi_2 \Lambda$ инвариантна в Γ . В случае же $\rho(\Gamma)=4$, по крайней мере, две подгруппы в совокупности

$$\Pi_1^{**}\Lambda, \Pi_2\Lambda, \Pi_3\Lambda \quad (4)$$

инвариантны в Γ . Это означает инвариантность в Γ подгруппы Λ . Таким образом ситуация 1) невозможна.

Аналогичными способами нетрудно убедиться, что ситуации 2) и 3) также невозможны. Из всего этого следует, что $\alpha_i \leq 2$.

Докажем, что при $\beta > 1$ всякая собственная подгруппа Λ' группы Λ инвариантна в Γ . Пусть Λ' неинвариантна в Γ . Тогда, в случае $\rho(\Gamma) = 3$, по крайней мере, три подгруппы совокупности

$$\Pi_1\Lambda, \Pi_2\Lambda, \Pi_1\Lambda', \Pi_2\Lambda' \quad (5)$$

инвариантны в Γ . Пересечение этих групп равно Λ' ; следовательно, Λ' инвариантна в Γ . Пусть $\rho(\Gamma) = 4$. Так как Λ и Λ' неинвариантны в Γ , то, по крайней мере, четыре подгруппы в совокупности

$$\Pi_1\Lambda, \Pi_2\Lambda, \Pi_3\Lambda, \Pi_1\Lambda', \Pi_2\Lambda', \Pi_3\Lambda' \quad (6)$$

инвариантны в Γ , а это значит, что Λ' должна быть инвариантной в Γ .

Мы доказали, что Λ' инвариантна в Γ , следовательно, все собственные подгруппы неинвариантной в Γ подгруппы Λ инвариантны в Γ . Отсюда следует, что Λ циклическая группа. В самом деле, пусть все циклические подгруппы группы Λ , образованные всеми элементами этой группы, отличны от Λ . Эти подгруппы инвариантны в Γ , следовательно, и подгруппа ими порожденная, т. е. подгруппа Λ , должна быть инвариантной в Γ , что невозможно.

§ 3. Группа $\Gamma^* = \Gamma_0 \times \Gamma_1$ порядка $g = q^3 p^2 \cdot p_1$, в которой подгруппа Γ_0 порядка $q^3 p^2$ является ненильпотентной группой с двумя классами неинвариантных подгрупп (см. III-й тип группы с двумя классами неинвариантных подгрупп в (2)), а подгруппа Γ_1 — циклическая порядка p_1 , является группой, иллюстрирующей теорему для случая, когда $\tau(g) = \rho(\Gamma) = 3$.

Определяющие равенства группы Γ^* запишутся следующим образом:

$$Q^{q^3} = E, \quad P^{p^2} = E, \quad QPQ^{-1} = P^l, \quad l^q \equiv 1 \pmod{p^2};$$

$$R^{p_1} = E, \quad QR = RQ, \quad PR = RQ.$$

Для иллюстрации случая в теореме, когда $\tau(g) = \rho(\Gamma) = 4$, можно взять группу $\bar{\Gamma} = \Gamma' \times \Gamma'' \times \Gamma'''$, в которой ненильпотентная подгруппа Γ' порядка $q^3 p$ имеет только один класс неинвариантных подгрупп (см. (1)), а подгруппы Γ'' и Γ''' являются циклическими порядков p_1 и p_2 соответственно.

Определяющие равенства группы $\bar{\Gamma}$ имеют вид:

$$Q^{q^3} = E, \quad P^p = E, \quad PQ = QP^a, \quad a^q \equiv 1(p), \quad a \equiv 1(p), \quad p = \kappa q + 1;$$

$$P_1^{p_1} = E, \quad P_2^{p_2} = E, \quad PP_1 = P_1P, \quad QP_1 = P_1Q, \quad PP_2 = P_2P, \quad QP_2 = P_2Q, \quad P_1P_2 = P_2P_1.$$

§ 4. Если $\tau(g) = \rho(\Gamma) = 4$, то теорема 1 уточняется следующим образом:

Теорема 2. Пусть Γ — конечная ненильпотентная группа порядка g . Если $\tau(g) = \rho(\Gamma) = 4$, то;

- 1) $g = q^3 p_1 p_2 p_3$;
- 2) подгруппа Силова Π_i порядка p_i ($i = 1, 2, 3$) группы G инвариантна в G ;
- 3) подгруппа Силова Λ порядка q^3 группы G является циклической и неизменной в G ;
- 4) все истинные подгруппы Λ' группы Λ инвариантны в G .

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмидт О. Ю., Группы, имеющие только один класс неизменяемых подгрупп, Мат. сб., 33 (1926), 161—172.
2. Шмидт О. Ю., Группы с двумя классами неизменяемых подгрупп, Труды семинара по теории групп. М.—Л., 1938.
3. Трофимов П. И., — Об одном типе конечных нильпотентных групп с тремя классами неизменяемых сопряженных подгрупп, Ученые записки Томского государственного университета им. В. В. Куйбышева, № 25 (1955), 43—44.
4. Трофимов П. И., О конечных нильпотентных группах с четырьмя классами неизменяемых сопряженных подгрупп, Ученые записки Томского государственного университета им. В. В. Куйбышева, № 25 (1955), 45—48.
5. Трофимов П. И., О влиянии числа всех классов неизменяемых сопряженных подгрупп на свойства конечной неспециальной группы. „Мат. сб.“, 1953, 33(75), № 1, 45—72.
6. P. Hall, A note on soluble groups, Journ. Lond. Math. Soc. 3 (1928), 98—105

Кафедра алгебры и теории чисел
Томского государственного университета
им. В. В. Куйбышева

Н. Н. КРУЛИКОВСКИЙ

О РАБОТАХ Я. П. КОЗЕЛЬСКОГО ПО МЕХАНИКЕ

До недавнего времени имя Якова Павловича Козельского—выдающегося русского ученого-энциклопедиста XVIII века и видного общественно-политического деятеля—находилось в забвении. В последние годы в советской печати появилось несколько статей, освещающих философские, общественно-политические и экономические воззрения Я. П. Козельского (проф. И. Бак, Ю. Я. Коган, И. Я. Шипанов, С. В. Папаригопуло и др.). Были изданы некоторые философские произведения Я. П. Козельского.

Однако до сего времени остаются неосвещенными его естественно-научные взгляды, в частности, в области механики. Яков Павлович Козельский, как это установлено недавно по архивным документам, родился около 1728 г. в местечке Келеберди Полтавского полка, в семье наказного сотника. Он учился сначала при Киевской духовной академии, а с 1750 г.—в Петербурге в академической гимназии и университете, где слушал лекции М. В. Ломоносова. С 1757 г. находился на военной службе. В 1760 году является преподавателем математики и механики в Артиллерийской и Инженерной школе. В этот период им написаны и изданы оригинальные учебные руководства по математике и механике, переведены на русский язык книги по фортификации и осаде крепостей. С 1766 г. Я. П. Козельский находился на гражданской службе в сенате и Малороссийской коллегии в г. Глухове. В 1788 г., после десятилетнего пребывания в деревне, возвращается в Петербург и поступает вновь на службу. В 1793 г. с окончательно расшатанным здоровьем Я. П. Козельский вновь перебирается в свою деревню, где, спустя год или два, он умер.

В своих основных философских произведениях—„Философические предложения“ (1768) и „Рассуждения двух индийцев Калана и Ибрагима о человеческом познании“ (1788)—Козельский продолжает материалистическую традицию в русской философии. Козельский считает, что при объяснении природы и ее законов надо исходить из ее собственных закономерностей. „Целая физика и все ее частные науки почерпнуты, распространены и возведены до высокой степени и великого приращения из неисчерпаемых источников природы несравненно больше наблюдениями и опытами, нежели умствованиями“. И в другом месте Козельский указывает, что „главный и единственный всех физических наук предмет есть натура, ... которая всех наук умнее и превосходнее“.

В „Философических предложениях“ Козельский отражает характерную черту русской философии XVIII века—служить непосредственным нуждам общества. Критически воспринимая учения Руссо, Монтескье, Гельвеция и др., Козельский излагает свои общественные идеалы и пути их достижения. Предпочитая путь мирных реформ

Козельский вместе с тем считает, что „к долговременному терпению принужденные люди по долгом притворстве, как только найдут случай, то тем больше истощают наружу свою досаду, и такие люди иногда бывают сами и обидчики их, а иногда одни обидчики волнованию сердец их причиною, и в сем другом случае по справедливости почестъ их можно почти за невиновных“. Оправдывая, таким образом, восстание угнетенных, Козельский предстает перед нами как предшественник А. Н. Радищева. Понятно, почему правительство пыталось всячески избавиться от беспокойного мыслителя, а буржуазно-дворянская наука предала имя и труды Я. П. Козельского забвению.

Для характеристики взглядов Я. П. Козельского по механике наибольшее значение имеют вышеуказанные философские сочинения и вышедшая в 1764 г. его книга под названием „Механические предложения для употребления обучающегося при Артиллерийском и Инженерном шляхетном кадетском корпусе благородного юношества, сочиненная Артиллерии капитаном Яковом Козельским. В Санкт-Петербурге при императорской Академии наук 1764 года“. В 1787 г. книга Козельского вышла вторым изданием.

До появления книги Козельского на русском языке были только две книги по механике: „Наука статическая, или механика“ Г. Г. Скорнякова-Писарева, изданная по указанию Петра I в 1722 году, и „Краткое руководство к познанию простых и сложных машин, сочиненное для употребления российского юношества“, написанное академиком Г. Ф. Крафтом и переведенное на русский язык Василием Адодуровым в 1738 году. К 1760 году книги Скорнякова-Писарева и Крафта уже устарели и были недостаточны для обучения инженеров и артиллеристов. Потребовалось составление нового руководства по механике и за это взялся Я. П. Козельский.

„Механические предложения“ Козельского были не только учебным пособием, но и оригинальным научным исследованием. При составлении книги Козельский пользовался сочинениями ряда иностранных авторов. Сам он пишет об этом следующим образом: „собравши из тех авторов нужнейшие правила, и где мог употребительные в человеческой жизни случаи, к коим я и собственных моих предложений несколько прибавил, совокупил их всех в одну книгу, для порядочного обучения по ней юношества“ (посвящение; в дальнейшем все ссылки приводятся по первому изданию книги „Механические предложения“ 1764 г.). В предисловии к читателю автор указывает, что „сей науке ни от кого не учился, а доходил до возможного мне в ней знания собственными моими трудами. ... а отважился я пуститься в сию трудную науку, без руководства, по одному только небольшому моему знанию в математике и вообще в физике; которым одолжен я Санкт-Петербургской ... Академии Наук, чего ради и сочинение предаю я той же Академии, как плод несколько-летнего моего при ней упражнения в науках, на великодушное ея рассмотрение и благорассуждение“. Таким образом, перед нами не компилятивное сочинение, а результат самостоятельного и глубокого изучения предмета.

Сочинение Я. П. Козельского „Механические предложения“ состоит из посвящения, предисловия и восьми глав, которые подразделяются на части. Книга снабжена большим числом чертежей и рисунков (184), помещенных в конце книги. Всего книга содержит 344 страницы основного текста, 28 страниц дополнительных материалов (посвящение, предисловие, оглавление, отзыв Эпинуса на книгу) и 29 листов чертежей.

В предисловии автор рассматривает вопрос о предмете механики. „Предмет механики есть равновесие и движение тел“. До Козельского обычно было рассматривать равновесие тел как предмет статики, а движение тел как предмет механики (или динамики), рассматривая статику и механику как две различные науки. Известные сочинения И. Ньютона, Л. Эйлера, Даламбера и др. содержат только учение о движении тел, а сочинения других авторов содержат только учение о равновесии тел (в частности и вышеуказанные сочинения по механике на русском языке Скорнякова-Писарева и Крафта). Позднее стало обычным рассматривать статику и динамику как составные части механики. В 1774 году академик С. К. Котельников издал труд: „Книга, содержащая в себе учение о равновесии и движении тел“. Лагранж в своем известном произведении „Аналитическая механика“ (1788 г.) также соединяет статику и динамику. Необходимо отметить первенство Я. П. Козельского в этом вопросе.

Из предисловия видно, что Козельский хорошо знаком с литературой по механике. Рассмотрев кратко историю развития механики и указав на труды механиков до начала XVIII века по сочинению Стокгаузена по истории математики, Козельский добавляет, что ему известны еще сочинения по механике Озанама (1690), Камуса—лотарингского дворянина (1724), Белидора (1725), Вольфа (1733), Г. В. Крафта (1738), Камуса—французского профессора (1752), Лакайля (1757) и Бугера. Наиболее положительную оценку Козельский дает сочинениям Лакайля и Бугера. Козельский находит, что в книге Лакайля дана хорошая и краткая теория, а у Бугера дано хорошее истолкование практики теорий.

Говоря о методе механики, Козельский указывает: „что принадлежит до метода или порядка расположения ее предложений, то в том не следовал я другим авторам не от тщеславия, а от подражания лучшему“. Козельский ставит в упрек некоторым авторам, что они излагают механику на подобие математике. Позднее в „Рассуждении двух индийцев о человеческом познании“ (178) Козельский углубляет эту критику, указывая, что, „главный и единственный всех физических наук предмет есть натура, однако вы найдете там не натуру, изъясненную математикою, как бы то надлежало, а математику, налагающую натуре свои законы; но это напрасно и весьма некстати: натура никогда не училась у математики, а, напротив того, математика—у природы, которая всех умнее и превосходнее“. Справедливость такого упрека будет понятной, если вспомнить, что у Л. Эйлера в „Механике“ (1736 г.) задачи с механическими терминами часто являются лишь поводом для математических исследований и развития методов интегрирования дифференциальных уравнений и не имеют практического значения для механики. Козельский в предисловии указывает, что Л. Эйлер „простер сию науку в своем сочинении очень далеко, только при том на трудных алгебраических выкладках“.

Сам Козельский считает, что в механике, как физической науке, должен быть другой способ изложения: „чего ради я, в описании правил сей науки, заблагорассудил приноровлять математические правила к законам природы, нежели склонять ее в согласие математическим правилам; и потому, приняв к тому за предводителя природу, сперва полагаю всякому действию ее опыт, дабы приуготовить чрез то начинающегося учиться к скорейшему понятию тех предложений, которые выводятся, и должны выводиться в механике из опытов“ (предисловие).

Козельский разделяет механику на две части—механику твердых тел и механику жидких тел (гидравлику). Гидравлику он намеревался изложить в другом сочинении. В изложении Козельский считает необходимым соединять теорию с практикой и сопровождать изложение еще и житейскими примерами: „при описании ее правил удалялся от обеих крайностей, то есть от великой сухости теории и от прямой слепоты практики“.

При написании книги Козельский пользовался, как он сам указывает, сочинениями ряда механиков, указанных выше. Неоднократно делаются ссылки на сочинения французского механика и астронома Лакайля, математика и физика П. Бугера и других ученых. Необходимо, однако, еще раз отметить, что некоторые предложения, как и доказательство многих предложений, принадлежат самому Я. П. Козельскому.

Говоря о развитии механики, Козельский горячо выступает против распространенного в то время мнения, что народы, у которых „давно заведены науки ... больше имеют способности, или простее сказать, больше разума к понятию науке“. По его мнению, что поскольку знание наук „приобретается трудами и прилежанием многих лет, так все равно кажется, что во Франции ли, или в Татарии родиться, ежели надобно доходить до хорошего знания наук прилежными трудами многих лет“. Этим Козельский подчеркивает, что Россия имеет возможности для развития науки и русские ученые могут превзойти достижения ученых других стран.

Козельский отмечает значение механики в жизни человека, говоря „о пользе сей науки“ и указывая „строение гражданское, крепостное, корабельное, нападение на неприятелей и поражение их, фабрики, все художества“.

Глава 1 „О равновесии твердых тел вообще“ начинается с определения механики: „Механика есть наука, которая содержит в себе правила, о приведении в равновесие или в движение твердых тел, чрез уменьшение силы или времени“, а в примечании отмечается, что „сия весьма нужная и полезная роду человеческому наука, старанием ученых людей доведена, чрез посредство математики, до такого пространства и великости, что по справедливости тому дивиться должно ...“. Глава содержит три части: 1) „о сыскании точки равновесия или центра тяжести в твердых телах“; 2) „о сыскании количества давления тел, утвержденных на своем основании неподвижно“; 3) „о действии продолговатых и тонких тел, полагаемых на острых подставках“. В главе дано описание простейших опытов, приводящих к понятию центра тяжести тел, указан способ опытного отыскания центра тяжести и доказаны теоремы о нахождении центра тяжести в простейших случаях. Во второй и третьей частях первой главы рассмотрены простейшие случаи равновесия систем и определения давления тел на опоры. Применение доказываемых теорем указывается в „следствиях“ и задачах.

Во второй главе „О движении твердых тел вообще“ излагаются основные понятия динамики. Это наиболее обширная глава в сочинении Козельского. Здесь после введения основных понятий рассматривается равномерное движение, равноускоренное и равнозамедленное движение, относительное движение, движение, происходящее под действием нескольких сил, и криволинейное. Из криволинейных движений рассматриваются круговое и параболическое. Особое внимание обращается на применение рассматриваемых вопросов к задачам баллистики (о бросании бомб), что объясняется вполне самим назначением книги в качестве пособия для будущих артиллеристов.

Отметим некоторые определения Козельского. „Движение тела есть не что иное, как производимая им перемена мест“. „Силою называется всякая та причина, которая действительно приводит, или только старается привести недвижущиеся тела в движение, а движущиеся в спокойство“. При изложении материала дано описание опытов, предложения формулируются в виде аксиом, теорем, следствий и примечаний. В качестве аксиомы принимается, например, предложение: „Ежели какие тела перейдут некоторые пространства одною скоростью и в одно или равные времена, то такие пространства будут равны“. Среди теорем встречается предложение: „Ежели тело А брошено будет по направлению горизонтальному или косому, то описанный им путь будет парабола“. В виде задач рассматривается, например, определение „высоты бросания“ бомбы по дальности и углу бросания.

В третьей главе рассматривается равновесие тел на наклонных плоскостях (наклоненных, по терминологии Козельского). В первой части этой главы разбираются различные случаи равновесия твердого тела на одной гладкой наклонной плоскости, а во второй части изучается равновесие твердых тел, положенных между двумя наклонными плоскостями. Даны условия равновесия и условия движения тела по наклонной плоскости.

Четвертая глава посвящена изучению движения твердых тел на наклонных плоскостях и маятника (отвеса). На основании опыта устанавливается, что движение тела по наклонной плоскости равномерно-ускоренное, а затем применяется общая теория равноускоренного движения. Теория движения маятника рассматривается в стиле работ Галилея и Гюйгенса. Упоминается о циклоидальном маятнике и замечается, что „хотя изобретение господина Гугения... и великой похвалы достойно; однако оно ныне не употребляется, для того что металлические дощечки выгибать точно по дугам циклоиды трудно“, а также потому, что через опыты открыто, что маятники с малой амплитудой „производят шатания равновременные“.

Пятая глава „О действиях, происходящих от сражения твердых тел“ содержит элементарную теорию удара твердых тел. Рассматривается прямой и косой удар тел и применение полученных правил к практике бильярдной игры.

В последних трех главах изложены основы учения о машинах. В шестой главе изучаются принципы простых машин, „состоящих в равновесии“. По определению Козельского „машиною называется всякое такое орудие, которое служит к способному и легкому движению, или поддерживанию в равновесии тел против их тяжести“. Простых машин Козельский различает две: рычаг и наклонную плоскость. Блок и ворот рассматриваются как разновидности рычага.

В седьмой главе говорится „О машинах сложных, состоящих из нескольких простых разного названия“. Такими машинами являются винт, бесконечный винт, водяное колесо. В качестве задач ставится расчет ворота, водяной и ветряной мельницы. Наконец, в восьмой главе рассмотрен вопрос „О приведении машин в движение, и о вычислении трения и других неспособностей при машинах“. Теория трения изложена по состоянию ее до работ Кулона. „Другими неспособностями“ при рычаге принимаются гибкость рычага, толщина и его тяжесть. При этом отмечается, что все эти факторы мало важны и отступления от теории почти не дают. Для расчета блоков следует принимать во внимание жесткость веревок и трение блока об ось.

Таково содержание книги Я. П. Козельского „Механические предложения“.

Во всех главах книги Козельского содержатся примечания исторического характера. Все изложение в книге элементарное, геометрическое. Понятия и аппарат дифференциального и интегрального исчисления не употребляются. Большое внимание уделяется описанию опытов, примеров, решению конкретных задач. Все задачи даны в русских мерах. При написании книги Козельскому пришлось ввести значительное число новых терминов, не имевшихся до того времени в русском языке. Так, Козельский вводит термины для равномерного движения (уравненное), относительного (зависящее), ускоренного, замедленного (укошенное), массы (состав тела), маятника (отвес) и т. д. Хотя большинство этих терминов не удержалось в обиходе, вклад Я. П. Козельского в развитие механической терминологии на русском языке весьма значительный.

Научное наследие замечательного русского ученого заслуживает дальнейшего изучения.

Е. Д. ТОМИЛОВ

ОБ ОДНОМ ВИДЕ ВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В работе [1] нами был указан новый метод изучения так называемых винтовых движений идеальной несжимаемой жидкости, основанный на введении функции тока и двумерного потенциала скорости для этого пространственного движения. Попытаемся применить тот же метод к изучению другого вида установившегося вихревого движения, в котором вектор вихря направлен в каждой точке не по вектору скорости, как в винтовом движении, а перпендикулярно к нему, оставаясь касательным к некоторой поверхности, образованной линиями тока.

1. Основные уравнения. Ограничимся рассмотрением только таких случаев, когда только что упомянутые поверхности могут быть приняты за координатные поверхности $q_3 = \text{const}$ некоторой криволинейной системы ортогональных координат q_1, q_2, q_3 . Обозначая теми же индексами соответствующие проекции векторов скорости V и вихря скорости („удвоенного вихря“) Ω , будем иметь $V_3 = 0, \Omega_3 = 0$. Условие перпендикулярности этих векторов будет

$$\Omega_1 V_1 + \Omega_2 V_2 = 0,$$

откуда

$$-\frac{\Omega_1}{V_2} = -\frac{\Omega_2}{V_1} = \frac{\lambda}{H_3}, \quad (1)$$

где λ — коэффициент пропорциональности, являющийся вообще функцией координат, а H_3 — коэффициент Лямэ, вводимый для удобства дальнейших записей.

Уравнение неразрывности в данном случае будет иметь вид

$$\frac{\partial(H_2 H_3 V_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_3 H_1 V_2)}{\partial q_2} = 0, \quad (2)$$

где H_i — коэффициенты Лямэ.

На основании выражений проекций вихря скорости в криволинейных координатах получаем для неравных нулю проекций

$$\Omega_1 = -\frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial(H_2 V_2)}{\partial q_3}, \quad \Omega_2 = \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial(H_1 V_1)}{\partial q_3}, \quad (3)$$

а из условия $\Omega_3 = 0$ имеем

$$\frac{\partial(H_2 V_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(H_1 V_1)}{\partial q_2} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) говорит, очевидно, о существовании для двумерного течения по поверхности $q_3 = \text{const}$ потенциала скорости $\varphi(q_1, q_2, q_3)$, так что

$$V_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \quad V_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}. \quad (5)$$

Зависимость φ от q_3 является при этом чисто параметрической.

Точно также из уравнения (2) и известных дифференциальных уравнений линий тока следует существование функции тока $\psi(q_1, q_2, q_3)$, связанной с проекциями скоростей формулами:

$$V_1 = \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, \quad V_2 = -\frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1}. \quad (6)$$

Координата q_3 здесь также должна рассматриваться как параметр.

Пусть q_i^0 — орты осей координат в данном месте. Тогда, согласно (1), будем иметь для векторов Ω и V :

$$\Omega \times V = \begin{vmatrix} q_1^0 & q_2^0 & q_3^0 \\ \frac{\lambda}{H_3} V_2 & -\frac{\lambda}{H_3} V_1 & 0 \\ V_1 & V_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\lambda}{H_3} V^2 q_3^0. \quad (7)$$

Пусть массовые силы консервативны и U есть отвечающая им потенциальная энергия; пусть также P будет функцией давления. Тогда, как легко видеть, уравнения Лэмба — Громеки, в силу (7), принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{V^2}{2} + \Phi \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{V^2}{2} + \Phi \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{V^2}{2} + \Phi \right) = -\lambda V^2,$$

где $\Phi = P + U$. Отсюда получаем, что произведение λV^2 является функцией только от q_3 и что в интеграле Бернулли

$$\frac{V^2}{2} + \Phi = G \quad (8)$$

G является также функцией от q_3 . Первое из этих условий оказывается весьма жестким и приводит к тому, что класс рассматриваемых течений, как увидим далее, получается сравнительно узким.

Подставляя (5) в (2) и (6) в (4), находим следующие дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции φ и ψ :

$$-\frac{\partial}{\partial q_1} \left(-\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(-\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) = 0. \quad (10)$$

Из (1) и (3) имеем, что

$$\lambda = -\frac{1}{H_2 V_2} \frac{\partial(H_2 V_2)}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1 V_1} \frac{\partial(H_1 V_1)}{\partial q_3}. \quad (11)$$

Используя (5) или (6), можем еще выражения для λ представить в виде

$$\lambda = -\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_2 \partial q_3} = -\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial q_3} \quad (12)$$

или

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{H_3 H_1}{H_2 \frac{\partial \psi}{\partial q_1}} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) = \\ &= -\frac{H_2 H_3}{H_1 \frac{\partial \psi}{\partial q_2}} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Всякое решение дифференциальных уравнений (9) или (10), дающее такое значение величины скорости V и такое выражение для функции λ , определенной по (12) или (13), что произведение λV^2 оказывается функцией только от q_3 , дает некоторое вихревое течение жидкости рассматриваемого типа.

Замечаем, что уравнения (9) и (10) для функций φ и ψ , а также выражения (3) для проекций вектора вихря скорости имеют тот же вид, что и в случае винтового движения. Отсюда следует, что функция тока имеет указанный в работе [1] смысл; точно также при отыскании различных течений рассматриваемого здесь типа можно применять указанный в той же работе метод наложения потоков, если эти потоки имеют одно и то же λ . Отличие же от винтового течения будет заключаться в ином условии, налагаемом на λ .

2. Определение возможного вида решения. Исследуем возможный вид решения задачи. Считая в общем случае скорость V зависящей от всех трех координат, можем записать, что

$$\lambda = \frac{f(q_3)}{V^2(q_1, q_2, q_3)}, \quad (14)$$

где $f(q_3)$ — некоторая функция от q_3 .

С другой стороны, два выражения (12) для λ приводят к требованию, что отношение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} : \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \quad (15)$$

должно зависеть только от q_1 и q_2 . Поэтому эти производные должны иметь вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = f_1(q_1, q_2) f_3(q_1, q_2, q_3), \quad (16)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} = f_2(q_1, q_2) f_3(q_1, q_2, q_3), \quad (16)$$

где f_1, f_2, f_3 — некоторые функции своих аргументов. Таким образом, требуется найти такое решение уравнения (9), которое давало бы для производных вид (16).

Тогда, согласно (12) и (14), должно выполняться условие

$$\frac{f(q_3)}{V^2(q_1, q_2, q_3)} = - \frac{\partial}{\partial q_3} \ln f_3(q_1, q_2, q_3),$$

что по (16) дает после несложных преобразований

$$\left(-\frac{f_1^2}{H_1^2} + \frac{f_2^2}{H_2^2} \right) - \frac{\partial (f_3^2)}{\partial q_3} = -2f(q_3). \quad (17)$$

Подстановка выражений (16) в (9) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & -\frac{H_2 H_3}{H_1} f_1 \frac{\partial f_3}{\partial q_1} + \frac{H_1 H_3}{H_2} f_2 \frac{\partial f_3}{\partial q_2} + \\ & + f_3 \left\{ -\frac{\partial}{\partial q_1} \left(-\frac{H_2 H_3}{H_1} f_1 \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} f_2 \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Составляя еще равенство выражений смешанной производной второго порядка, получаемых из двух отношений (16), найдем другое уравнение, которому должны удовлетворять искомые функции:

$$f_2 \frac{\partial f_3}{\partial q_1} - f_1 \frac{\partial f_3}{\partial q_2} + f_3 \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \right) = 0. \quad (19)$$

Задавая произвольно функцию $f(q_3)$, мы должны найти три функции f_1, f_2, f_3 , одновременно удовлетворяющие уравнениям (17) — (19).

Покажем как это можно сделать в частном случае, когда все коэффициенты Лямэ оказываются независимыми от q_3 . В этом случае из уравнения (17) следует, что наиболее общий возможный вид функции f_3 будет определяться формулой

$$f_3^2 = \frac{F(q_3) + F_1(q_1, q_2)}{-\frac{f_1^2}{H_1^2} + \frac{f_2^2}{H_2^2}}, \quad (20)$$

где

$$F(q_3) = -2 \int f(q_3) dq_3, \quad (21)$$

а $F_1(q_1, q_2)$ — подлежащая дальнейшему определению функция.

Подставляя f_3 из (20) в (18) и (19), приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{f_1^2}{H_1^2} + \frac{f_2^2}{H_2^2} \right) \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} f_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_1} + \frac{H_1 H_3}{H_2} f_2 \frac{\partial F_1}{\partial q_2} \right) - \\
& - (F + F_1) \left\{ \frac{H_2 H_3}{H_1} f_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{f_1^2}{H_1^2} + \frac{f_2^2}{H_2^2} \right) + \right. \\
& + \frac{H_1 H_3}{H_2} f_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{f_1^2}{H_1^2} + \frac{f_2^2}{H_2^2} \right) - \\
& - 2 \left(\frac{f_1^2}{H_1^2} + \frac{f_2^2}{H_2^2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} f_1 \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} f_2 \right) \right] \Big\} = 0, \\
& \left(\frac{f_1^2}{H_1^2} + \frac{f_2^2}{H_2^2} \right) \left(f_2 \frac{\partial F_1}{\partial q_1} - f_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_2} \right) - \\
& - (F + F_1) \left\{ f_2 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{f_1^2}{H_1^2} + \frac{f_2^2}{H_2^2} \right) - f_1 \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{f_1^2}{H_1^2} + \frac{f_2^2}{H_2^2} \right) - \right. \\
& - 2 \left(\frac{f_1^2}{H_1^2} + \frac{f_2^2}{H_2^2} \right) \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \right) \Big\} = 0.
\end{aligned}$$

Функция F , согласно (21), не может равняться постоянной, ибо иначе движение оказалось бы безвихревым. А так как в полученных уравнениях никакие другие величины не зависят от q_3 , то в силу произвольности $f(q_3)$, а следовательно и $F(q_3)$, мы должны приравнять нулю коэффициенты этих линейных относительно F уравнений. Таким путем приходим к двум системам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{H_2}{H_1} f_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_1} + \frac{H_1}{H_2} f_2 \frac{\partial F_1}{\partial q_2} &= 0, \\ f_2 \frac{\partial F_1}{\partial q_1} - f_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} & f_2 \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial q_1} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \right) - f_1 \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \right) - \\ & - \frac{1}{H_3} \left\{ \frac{H_2}{H_1^2} f_1^2 \left[f_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \right) + f_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1^2 H_3}{H_2} \right) \right] + \right. \\ & + \frac{H_1}{H_2^2} f_2^2 \left[f_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2^2 H_3}{H_1} \right) + f_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \right) \right] \Big\} \\ & + \frac{f_1}{H_1^2} \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial q_1} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \right) + \frac{f_2}{H_2^2} \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \right) + \\ & + \frac{f_1^2}{H_1^3} \left(f_2 \frac{\partial H_1}{\partial q_1} - f_1 \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) + \frac{f_2^2}{H_2^3} \left(f_2 \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - f_1 \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Определитель, составленный из коэффициентов при частных производных в системе (22), отличен от нуля, поэтому

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_1} = \frac{\partial F_1}{\partial q_2} = 0,$$

и система имеет только тривиальное решение $F_1 = \text{const}$. Эту постоянную в дальнейшем включим в функцию F .

Если же каждое из уравнений (23) разделить на f_1^3 и обозначить

$$u = \frac{f_2}{f_1},$$

то система переписется в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial q_1} - \frac{\partial u}{\partial q_2} - P = 0, \quad (24)$$

$$\frac{1}{H_1^2} \frac{\partial u}{\partial q_1} + \frac{u}{H_2^2} \frac{\partial u}{\partial q_2} + Q = 0,$$

где P и Q — многочлены третьей степени относительно u с коэффициентами, зависящими от q_1 и q_2 , имеющие вид:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{H_3} \left\{ \frac{H_2}{H_1^2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3) + u \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1^2 H_3}{H_2} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + u^2 \frac{H_1}{H_2^2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2^2 H_3}{H_1} \right) + u \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 H_3) \right] \right\}, \\ Q &= \frac{1}{H_1^3} \left(u \frac{\partial H_1}{\partial q_1} - \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) + \frac{u^2}{H_2^3} \left(u \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Дальнейшие рассуждения в общем виде становятся затруднительными, и мы продолжим их на примерах. Заметим еще только, что в рассматриваемом случае независимости коэффициентов Лямэ от координаты q_3 квадрат функции f_3 оказался равным

$$f_3^2 = \frac{F(q_3)}{\frac{f_1^2}{H_1^2} + \frac{f_2^2}{H_2^2}}. \quad (26)$$

Но, согласно (5) и (16), для квадрата скорости имеем

$$V^2 = \left(\frac{f_1^2}{H_1^2} + \frac{f_2^2}{H_2^2} \right) f_3^2 = F(q_3),$$

т. е., что в данном случае величина скорости оказывается постоянной на данной поверхности $q_3 = \text{const}$, меняясь при переходе от одной

такой поверхности к другой. При этом параметр λ , который по (14) определится в виде

$$\lambda = -\frac{1}{2} - \frac{d}{dq_3} \ln F(q_3) = -\frac{d \ln V}{dq_3}, \quad (27)$$

будет обладать тем же свойством.

3. П р и м е р ы. Возьмем декартовы координаты, так что поверхностями $q_3 = \text{const}$ будут являться плоскости $z = \text{const}$, а $q_1 = x$, $q_2 = y$. Тогда, поскольку $H_1 = H_2 = H_3 = 1$, уравнения (25) дают $P = Q = 0$, и дифференциальные уравнения (24) принимают вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Определитель из коэффициентов при производных в этих уравнениях равен $u^2 + 1$ и, следовательно, отличен от нуля. Благодаря этому система имеет только тривиальное решение $u = a = \text{const}$, откуда $f_2 = a f_1$. Тогда по (26) имеем

$$f_3^2 = \frac{F(z)}{(1 + a^2)f_1^2},$$

поэтому по (5) и (16) проекции скорости будут

$$V_x = \sqrt{\frac{F(z)}{1 + a^2}}, \quad V_y = a \sqrt{\frac{F(z)}{1 + a^2}}.$$

Для потенциала скорости и функции тока получим

$$\begin{aligned} \varphi &= (x + ay) \sqrt{\frac{F(z)}{1 + a^2}}, \\ \psi &= (y - ax) \sqrt{\frac{F(z)}{1 + a^2}}. \end{aligned} \quad (a)$$

Параметр λ и проекции вихря скорости находятся по (27) и (1). Функцию $F(z)$, равную квадрату величины скорости, можно задавать совершенно произвольно.

В качестве второго примера рассмотрим в плоскостях $z = \text{const}$ эллиптические координаты, так что $q_1 = \xi$, $q_2 = \eta$, причем

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta.$$

Тогда $H_1 = H_2 = c \sqrt{\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta}$, $H_3 = 1$. Выражения (25) дают

$$P = \frac{1 + u^2}{\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta} (\operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi + u \sin \eta \cos \eta),$$

$$Q = -\frac{1+u^2}{\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta} (u \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi - \sin \eta \cos \eta).$$

Внося эти выражения в (24) и разрешая уравнения относительно производных, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\sin \eta \cos \eta}{\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta} (1 + u^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta} (1 + u^2).$$

Дифференцируя первое уравнение по η , второе по ξ , убеждаемся в совместности полученных уравнений. Как легко видеть, общее решение полученной системы уравнений имеет вид

$$u = \operatorname{tg} \left(C - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \eta}{\operatorname{th} \xi} \right),$$

где C — произвольная постоянная. Поэтому

$$f_2 = f_1 \operatorname{tg} \left(C - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \eta}{\operatorname{th} \xi} \right).$$

По формулам (26), (5) и (16) находим

$$f_3^2 = \frac{c^2 F(z) (\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta)}{f_1^2 \left[1 + \operatorname{tg}^2 \left(C - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \eta}{\operatorname{th} \xi} \right) \right]},$$

$$V_z = \sqrt{F(z)} \cos \left(C - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \eta}{\operatorname{th} \xi} \right),$$

$$V_r = \sqrt{F(z)} \sin \left(C - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \eta}{\operatorname{th} \xi} \right).$$

Нетрудно видеть, что полученное течение имеет тот же характер, что и в первом примере. В самом деле, потенциал скорости и функция тока получаются здесь в виде

$$\varphi = c \sqrt{F(z)} (\cos C \operatorname{ch} \xi \cos \eta + \sin C \operatorname{sh} \xi \sin \eta),$$

$$\psi = c \sqrt{F(z)} (\cos C \operatorname{sh} \xi \sin \eta - \sin C \operatorname{ch} \xi \cos \eta),$$

что при переходе к декартовым координатам дает

$$\varphi = \sqrt{F(z)} (x \cos C + y \sin C),$$

$$\psi = \sqrt{F(z)} (y \cos C - x \sin C),$$

что и доказывает наше утверждение.

Если в плоскостях $z = \text{const}$ взять полярные координаты, то опять получается только то же течение. Таким образом, здесь, по-видимому, имеется существенное отличие от винтового движения, при котором переход к новым координатам в плоскостях $z = \text{const}$ давал возможность устанавливать новые винтовые движения (см. [1]).

Допустим далее, что поверхностями $q_3 = \text{const}$ являются концентрические сферы $r = \text{const}$. Вводя сферические координаты, имеем $q_1 = \vartheta$, $q_2 = \chi$, $q_3 = r$, $H_1 = r$, $H_2 = r \sin \vartheta$, $H_3 = 1$. Хотя коэффициенты Лямэ оказались зависящими от r , т. е. от q_3 , предыдущий метод остается применимым. В самом деле, если обе части формулы (17) умножить на r^2 и произвести интегрирование по r , то получим

$$f_3^2 = - \frac{F(r) + F_1(\vartheta, \chi)}{f_1^2 + \frac{f_2^2}{\sin^2 \vartheta}},$$

т. е. формулу, аналогичную (20). Подставляя это выражение в уравнения (18) и (19), убеждаемся, что переменная r входит только в $F(r)$, а все остальные члены ее не содержат. Поэтому снова получим, что $F_1 = \text{const}$, уравнения же типа (24) примут здесь вид

$$u \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{\partial u}{\partial \chi} - \sin \vartheta \cos \vartheta - 2 \operatorname{ctg} \vartheta \cdot u^2 = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{u}{\sin \vartheta} \frac{\partial u}{\partial \chi} + \frac{\cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} u^3 = 0.$$

Однако полученные отсюда значения производных оказались несовместимыми. Таким образом, вихревое течение рассматриваемого типа с поверхностями $q_3 = \text{const}$ в виде сфер оказалось невозможным.

Рассмотрим еще задачу в цилиндрических координатах, когда за поверхности $q_3 = \text{const}$ приняты соосные цилиндры $r = \text{const}$. Тогда $q_1 = \vartheta$, $q_2 = z$, $H_1 = r$, $H_2 = H_3 = 1$. Здесь не удастся избавиться в основных уравнениях от координаты $q_3 = r$, поэтому метод становится неприменимым и приходится исходить из уравнений (17) — (19). Совместное рассмотрение этих уравнений приводит к заключению, что течение рассматриваемого вида возможно в данном случае при условиях

$$f_1 = a = \text{const}, f_2 = b = \text{const}, f_3 = f_3(r).$$

Для скоростей, их потенциала и функции тока получим выражения:

$$V_\vartheta = -\frac{a}{r} f_3(r), \quad V_z = b f_3(r),$$

$$\varphi = (a \vartheta + b z) f_3(r), \quad \psi = \left(a \frac{z}{r} - b r \vartheta\right) f_3(r).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Томилов Е. Д., О винтовых движениях идеальной несжимаемой жидкости. „Ученые записки Томского государственного университета“, 1955, вып. 25.

Кафедра теоретической механики
Томского государственного университета
им. В. В. Куйбышева

Г. И. НАЗАРОВ

МЕТОД ПОДВИЖНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ГАЗОДИНАМИКЕ

Излагается метод подвижной (скользящей) аппроксимации на примере построения замкнутого профиля в газе, движущегося адиабатически. Метод основан на том, что постоянные, входящие в аппроксимирующую функцию, рассматриваются как параметры, которые определяются из требования совпадения функции Чаплыгина $K(\rho)$ и некоторой функции $\sigma(\rho)$, а также и их производных до второго порядка включительно, в каждой точке потока (для всех значений скорости реального и гипотетического газов).

Указывается предельное число M невозмущенного потока, при котором возникает на профиле критическая скорость.

§ 1. Общие уравнения для баротропного газа

Для газа, состояние которого определяется заданным уравнением

$$\rho = f(p), \quad (1.1)$$

плоская задача о безвихревом установившемся движении сведена Л. И. Седовым ([1], стр. 374) к решению дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{d\sigma}{d\rho} \left[\rho^2 K - 1 \right] \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} - \frac{d\sigma}{d\rho} \left[\rho^2 K - 1 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = -K \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (1.2)$$

где $\psi(\sigma, \theta)$ — функция тока, $\varphi(\sigma, \theta)$ — потенциал скорости, $K(\rho)$ — функция Чаплыгина для процесса, определяемого связью (1.1), $\sigma(\rho)$ — произвольная функция от плотности ρ .

Для удобства плотности ρ замеряем в единицах плотности точки остановки (торможения), а скорость v — в единицах критической скорости.

Связь между физической плоскостью течения x и y и плоскостью годографа скорости определяется уравнением

$$dz = \left[d\varphi + \frac{i}{\rho} d\psi \right] \frac{\exp i\theta}{v}, \quad (1.3)$$

где $z = x + iy$, θ — угол наклона скорости к оси ox .

Давление p вычисляется по формуле

$$p = \int \frac{\exp \int \frac{2 d\rho}{\rho(\rho^2 K - 1)}}{\rho^2 K - 1} d\rho. \quad (1.4)$$

Для фиксированной зависимости $K(\rho)$ получаем семейство функций $p(\rho, C_1, C_2)$, в котором постоянные интегрирования C_1, C_2 определяются из каких-нибудь дополнительных условий.

Исключив φ из (1.2), получим известное уравнение Л. И. Седова для функции тока:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} - \frac{d}{d\sigma} \ln \left[-\frac{d\sigma}{d\rho} (\rho^2 K - 1) \right] + \frac{K}{\left[\frac{d\sigma}{d\rho} \right]^2 (\rho^2 K - 1)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (1.5)$$

Применяя метод Фурье, положим

$$\psi = f(\sigma) \cdot \exp 2in\theta, \quad (1.6)$$

где n — постоянная, тогда для $f(\sigma)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$f'' + f' \frac{d}{d\sigma} \ln \left[\frac{d\sigma}{d\rho} (\rho^2 K - 1) \right] - \frac{4n^2 K}{\left[\frac{d\sigma}{d\rho} \right]^2 (\rho^2 K - 1)^2} f = 0, \quad (1.7)$$

Если наряду с произволом $\sigma(\rho)$ распоряжаться также и функцией Чаплыгина, то это равносильно произвольному выбору коэффициентов в уравнении (1.7). Таким путем это уравнение можно свести к любому специальному дифференциальному уравнению второго порядка, решение которого известно.

Если кривая Чаплыгина и уравнение состояния для реального газа хорошо аппроксимируются соответствующими кривыми таким образом вводимого гипотетического газа, то точное решение для приближенного уравнения (для гипотетического газа) можно считать приближенным решением точного уравнения, ибо, как указывает Л. И. Седов, оно должно обладать устойчивостью по отношению к опытно-устанавливаемым закономерностям. С физической точки зрения видоизменение уравнения движения газа за счет выбора функции $K(\rho)$, сводящегося к выбору функции $p(\rho)$, не должно сильно видоизменять искомые решения, если выбранная связь между плотностью и давлением близка к связи, определенной из опытных закономерностей, которые по существу могут быть только приближенными.

У Г. А. Домбровского [2] и Дж. Тирней [3] доказано, что в тех точках потока, в которых кривая Чаплыгина аппроксимируется с определенной точностью, кривая состояния газа аппроксимируется на одну степень выше, кроме точки остановки, где аппроксимация одинакова.

Метод аппроксимации использовал Л. И. Седов [1], С. Томотика и К. Тамада [4], а также С. А. Чаплыгин [5]. Получаемые ими гипотетические газы заменяют реальные более или менее удовлетворительно только в определенных достаточно узких диапазонах скоростей.

Л. И. Седов ([1] стр. 401) отождествил уравнение (1.7) с уравнением Бесселя, получив зависимости

$$K = a(1 - \sigma^2) \quad (1.8)$$

$$\frac{d\sigma}{d\rho} = \frac{A\sigma}{a\rho^2(1 - \sigma^2) - 1}, \quad (1.9)$$

е α , A —некоторые постоянные.

Отсюда определяется семейство функций $K(\rho, A, \alpha, c)$, где c — постоянная интегрирования.

Постоянные A , α и c он определял из условий совпадения K для гипотетического и реального газов с точностью до второй производной и в точке остановки, или в точке перехода через скорость звука.

С учетом (1.8) и (1.9) уравнение (1.5) принимает вид:

$$\sigma^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} + \sigma \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} + \frac{\alpha}{A^2} (1 - \sigma^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0, \quad (1.10)$$

уравнение (1.7),

$$\sigma^2 f'' + \sigma f' - \frac{4\alpha n^2}{A^2} (1 - \sigma^2) f = 0. \quad (1.11)$$

§ 2. Метод подвижной аппроксимации функции Чаплыгина

В дальнейшем рассматриваем реальный газ, движущийся адиабатически. Этот газ заменяем гипотетическим газом Л. И. Седова (1.8)—(1.11). Величины α , A определяем как параметры, являющиеся функциями от ρ из условий совпадения K и σ , а также их производных по ρ до второго порядка включительно, в каждой точке потока (для их значений скорости реального и гипотетического газов).

Такой метод будем называть подвижной (скользящей) аппроксимацией.

В нашем случае функция Чаплыгина имеет вид:

$$K(\rho) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{\rho^{\gamma+1}}. \quad (2.1)$$

можно записать

$$\frac{dK}{d\rho} = \frac{2(\gamma + 1)}{\gamma - 1} \left[\frac{1}{\rho^{\gamma+2}} - \frac{1}{\rho^3} \right] \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2 K}{d\rho^2} = \frac{2(\gamma + 1)}{\gamma - 1} \left[\frac{3}{\rho^4} - \frac{\gamma + 2}{\rho^{\gamma+3}} \right] \quad (2.3)$$

в точке остановки имеем

$$K = 1, \quad \frac{dK}{d\rho} = 0, \quad \frac{d^2 K}{d\rho^2} = -2(\gamma + 1). \quad (2.4)$$

В точке перехода через скорость звука $\rho = \rho_* = \left[\frac{2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$

$$K = 0, \quad \frac{dK}{d\rho} = 2 \left[\frac{\gamma + 1}{2} \right]^{\frac{\gamma+2}{\gamma-1}},$$

$$\frac{d^2 K}{d\rho^2} = -2(\gamma + 4) \left[\frac{\gamma + 1}{2} \right]^{\frac{\gamma+3}{\gamma-1}}. \quad (2.5)$$

Функцию $\sigma(\rho)$, входящую в уравнение (1.10), определяем из соотношения (1.8).

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{K}{a}}, \quad (2.6)$$

где K определяется формулой (2.1) и параметр $a(\rho)$ принимает определенные значения в каждой точке потока.

При таком подходе уравнение (1.9) служит для отыскания плотности $\rho(\sigma)$ гипотетического газа, при этом постоянная интегрирования определяется из того или иного добавочного условия.

Возьмем от (2.6) первую и вторую производную по ρ , получим

$$\sigma' = -\frac{K'}{2a\sigma}, \quad (2.7)$$

$$\sigma'' = -\frac{1}{2a\sigma} \left[K'' + \frac{K'^2}{2(a-K)} \right]. \quad (2.8)$$

Производная по ρ от (1.9) равна

$$\sigma'' = \frac{A [\sigma'(\rho^2 K - 1) - \sigma(2\rho K + \rho^2 K')]}{(\rho^2 K - 1)^2}. \quad (2.9)$$

Приравнявая (1.9) к (2.7), а также (2.8) к (2.9) и используя (2.6), после преобразований найдем:

$$a = \frac{\rho K K' (2K + \rho K') - (1 - \rho^2 K)(K K'' - K'^2)}{\rho K' (2K + \rho K') - K'' (1 - \rho^2 K)} \quad (2.10)$$

$$A = \frac{K' (1 - \rho^2 K)}{2(a - K)},$$

где K, K', K'' определяются формулами (2.1), (2.2), (2.3) при фиксированном ρ . Внося их в (2.10), получим

$$a = \frac{\rho^{\gamma-1} [\gamma(2\gamma-1) + 3] - (\gamma+1)\rho^{2(\gamma-1)} - 2\gamma}{(\gamma-1)(2\gamma+1-3\rho^{\gamma-1})\rho^{\gamma-1}} \quad (2.11)$$

$$A = \frac{2\gamma+1-3\rho^{\gamma-1}}{(\gamma-1)\rho^{\gamma}}.$$

Полагая в этих формулах $\rho = 1$, получим

$$a = 1, \quad A = 2.$$

При $\rho = \rho_*$ найдем

$$a = \frac{2}{2\gamma+5} \left[\frac{\gamma+1}{2} \right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}},$$

$$A = \frac{2\gamma+5}{2} \left[\frac{\gamma+1}{2} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Непосредственно видно из (2.6) с учетом (2.11), что при

$$\rho = 1, \sigma = 0$$

$$\rho = \rho_*, \sigma^2 = 1.$$

Графики функций $\sigma(\rho)$, $a(\rho)$, $A(\rho)$, определяемые по (2.6) и (2.11) несены на рис. 1. Все вычисления проведены при $\gamma = 1,4$.

Предложенный метод подвижной аппроксимации позволяет рассматривать точное решение уравнения (1.10) как огибающую семейства кривых (решений) той совокупности дифференциальных уравнений, на которую как бы распадается (1.10). Для заданного значения параметров a , A имеем решение уравнения (1.10). Решение каждого уравнения берется только для построения тех точек линии тока (профиля), на которых кривые Чаплыгина K для этих газов совпадают до второй производной включительно.

3. Интегрирование дифференциального уравнения (1.10) для гипотетического газа Л. И. Седова

В уравнении (1.11) введем обозначение

$$\kappa^2 = \frac{4 a n^2}{A^2}, \quad (3.1)$$

где

$$\sigma^2 f'' + \sigma f' - \kappa^2 (1 - \sigma^2) = 0. \quad (3.2)$$

Это уравнение имеет решение

$$f = C_1 J_\kappa(\kappa \sigma) + C_2 N_\kappa(\kappa \sigma),$$

где C_1 , C_2 — постоянные интегрирования.

В точке остановки $\sigma = 0$, $N_\kappa(\kappa \sigma) = \infty$. Отыскивая конечные решения, положим $C_2 = 0$. Тогда (1.6) и метод Фурье приводит к решению уравнения (1.10) в виде

$$\psi = \sum_{\kappa=0}^{\infty} C_\kappa J_\kappa(\kappa \sigma) \exp 2 i n \Theta. \quad (3.3)$$

Используем интегральное представление функции Бесселя первого рода для любого порядка в форме Шлефли:

$$J_\kappa(\kappa \sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp \kappa (\sigma \operatorname{sh} t - t) dt,$$

где с учетом (3.1) формулу (3.3) запишем

$$\psi = \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{\kappa=0}^{\infty} C_\kappa \exp \kappa (\sigma \operatorname{sh} t - t + \frac{A \Theta i}{\sqrt{a}}) dt, \quad (3.4)$$

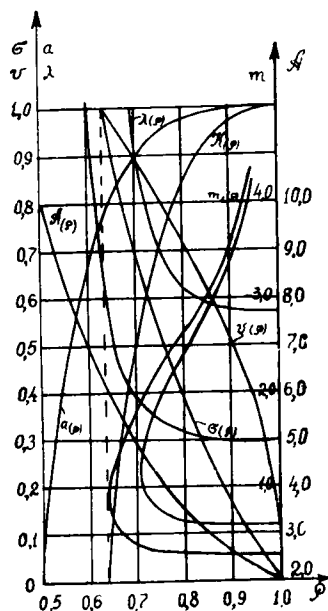


Рис. 1

где контур γ можно подобрать таким образом, чтобы эта функция действительно стала решением уравнения (1.10).

Выберем постоянную C_κ в виде

$$C_\kappa = \exp \kappa (\lambda - i \mu), \quad (3.5)$$

где λ и μ — некоторые постоянные, подлежащие определению.

Тогда, обозначая

$$T = \sigma \operatorname{sh} t - t - \lambda + \left(\frac{A \Theta}{V a} - \mu \right) i, \quad (3.6)$$

запишем (3.4) в виде

$$\psi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \exp \kappa T dt, \quad (3.7)$$

но

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \exp \kappa T = \frac{1}{1 - \exp T},$$

следовательно,

$$\psi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dt}{1 - \exp T}. \quad (3.8)$$

Для определения пути интегрирования γ допустим, что t_0 — корень уравнения (3.6) $T(t_0) = 0$. Тогда в окрестности этой точки подынтегральное выражение (3.8) можно представить в виде разложения

$$\frac{1}{1 - \exp T} = - \frac{1}{(t - t_0) \left(\frac{dT}{dt} \right)_{t=t_0}} + O(1).$$

Как видно, подынтегральная функция имеет полюс первого порядка в точке t_0 , если только

$$\left(\frac{dT}{dt} \right)_{t=t_0} \neq 0.$$

Учитывая это, возьмем в качестве пути интегрирования γ малую замкнутую кривую, внутри которой имеется единственная особая точка. Применяя теорему Коши о вычетах, получим

$$\psi = - \frac{1}{\left(\frac{dT}{dt} \right)_{t=t_0}}. \quad (3.9)$$

Определив из (3.6) производную $\left(\frac{dT}{dt} \right)_{t=t_0}$ и опуская затем

индекс у t_0 , решение (3.9) представим в виде

$$\psi_1 = \frac{1}{1 - \sigma \operatorname{ch} t}, \quad (3.10)$$

где t определяется уравнением

$$\sigma \operatorname{sh} t - t + \lambda + \left(\frac{A \Theta}{\sqrt{a}} - \mu \right) i = 0. \quad (3.11)$$

Исключив t из уравнений (3.10) и (3.11), получим решение

$$\psi = \psi(\sigma, \Theta).$$

Второе независимое частное решение линейного уравнения (1.10) можно найти методом интегрирования по Θ частного решения (3.10)

$$\psi = \int \frac{d\Theta}{1 - \sigma \operatorname{ch} t} = \int \frac{dt}{1 - \sigma \operatorname{ch} t} \cdot \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial \Theta}}.$$

Но из (3.11)

$$\frac{\partial t}{\partial \Theta} = \frac{A i}{\sqrt{a}} \frac{1}{1 - \sigma \operatorname{ch} t},$$

следовательно,

$$\psi = -i \frac{\sqrt{a}}{A} t + \text{const.}$$

Таким образом, переменное $-i \frac{\sqrt{a}}{A} t$ является решением уравнения (1.10). С другой стороны, очевидно, что $\psi = \Theta$ также является решением этого уравнения. Тогда из (3.11) следует, что и

$$\psi_2 = i \frac{\sqrt{a}}{A} \sigma \operatorname{sh} t \quad (3.12)$$

есть решение уравнения (1.10).

Для определения λ и μ используем условие для невозмущенного потока на бесконечности, где $\psi = \infty$. Из (3.10) и (3.11) имеем

$$1 - \sigma_{\infty} \operatorname{ch} t = 0$$

$$\sigma_{\infty} \operatorname{sh} t - t + \lambda + \left(\frac{A \Theta_{\infty}}{\sqrt{a}} - \mu \right) i = 0. \quad (3.13)$$

Исключив t из (3.13), получим

$$\pm \sqrt{1 - \sigma_{\infty}^2} \mp \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\sigma_{\infty}} + \lambda + i \left(\frac{A \Theta_{\infty}}{\sqrt{a}} - \mu \right) = 0. \quad (3.14)$$

Для дозвукового течения на бесконечности $\sigma \leq 1$, следовательно

радикал $\sqrt{1 - \sigma_{\infty}^2}$ и $\operatorname{arcsinh} \frac{1}{\sigma_{\infty}}$ — вещественные.

В силу этого из (3.14) имеем

$$\pm \sqrt{1 - \sigma_\infty^2} \mp \operatorname{arctg} h \frac{1}{\sigma_\infty} + \lambda = 0 \quad (3.15)$$

$$\mu = \frac{A}{\sqrt{a}} \Theta_\infty \quad (3.16)$$

Таким образом, особая точка решения (3.10) в плоскости годографа находится в точке $(\sigma_\infty, \Theta_\infty)$.

С другой стороны, объединяя (2.6) с (2.1) и используя известное соотношение

$$\rho = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \quad (3.17)$$

получим для точек невозмущенного потока

$$\sigma_\infty = \sqrt{1 - \frac{1 - v_\infty^2}{a \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}}}. \quad (3.18)$$

Внося (3.18) в (3.15), имеем

$$\lambda = \pm \operatorname{arctg} h \delta \mp \delta, \quad (3.19)$$

где

$$\delta = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_\infty^2 \right)^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \sqrt{\frac{1 - v_\infty^2}{a}}.$$

Или, используя (3.17), можем записать

$$\delta = \rho_\infty^{\frac{\gamma + 1}{2}} \sqrt{\frac{(\gamma + 1) \rho_\infty^{\gamma - 1} - 2}{a(\gamma - 1)}}.$$

Здесь a — параметр (2.11)

На рис. 1 нанесены кривые $\lambda = \lambda(\rho, \rho_\infty)$, причем λ_1 отвечает $\rho_\infty = 0,79$ ($M_\infty = 0,703$), а λ_2 соответствует $\rho_\infty = 0,735$ ($M_\infty = 0,812$). Здесь же нанесена зависимость $v(\rho)$, согласно формуле (3.17).

Таким образом, для заданной скорости невозмущенного потока v_∞ параметры λ и μ являются функциями от плотности ρ , определяемые для каждой точки аппроксимации.

§ 4. Построение замкнутого профиля методом подвижной аппроксимации

Положим

$$t = m + in. \quad (4.1)$$

Тогда из (3.11) получим

$$\sigma = \frac{m_{\Gamma_1} \lambda}{\operatorname{sh} m \cos n} \quad (4.2)$$

$$\Theta = \frac{\sqrt{a}}{A} [1 + n - (m - \lambda) \operatorname{cth} m \operatorname{tg} n]. \quad (4.3)$$

Вставляя (4.1), (4.2) и (4.3) в формулы (3.10) и (3.12), найдем

$$\psi_1 = \frac{1 - (m - \lambda) \operatorname{cth} m + i(m - \lambda) \operatorname{tg} n}{[1 - (m - \lambda) \operatorname{cth} m]^2 + (m - \lambda)^2 \operatorname{tg}^2 n} \quad (4.4)$$

$$\psi_2 = i \frac{\sqrt{a}}{A} (m - \lambda) [1 + i \operatorname{cth} m \operatorname{tg} n]. \quad (4.5)$$

Будем рассматривать течения, для которых $v_\infty = \text{const}$ и нулевая линия тока $\psi = 0$, подходящая из ∞ к точке остановки, — прямая. Тогда на этой прямой $\Theta = \Theta_\infty = \text{const}$ и, учитывая (3.16), из (4.3) получим

$$(m - \lambda) \operatorname{cth} m \operatorname{tg} n - n = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется при $n = 0$ и любом m (в том числе и при $m = \lambda$, что отвечает точке остановки, как будет показано ниже).

Легко проверить, что на этой линии $\operatorname{Im} \psi_1 = 0$ и $\operatorname{Re} \psi_2 = 0$. Исходя из этого составим линейную комбинацию

$$\psi = \operatorname{Im} \psi_1 + P \operatorname{Re} \psi_2 = \operatorname{Im} \{ \psi_1 + i P \psi_2 \}$$

или в силу (3.10) и (3.12)

$$\psi = \operatorname{Im} \left\{ -\frac{1}{1 - \sigma \operatorname{ch} t} - \frac{\sqrt{a}}{A} P \sigma \operatorname{sh} t \right\}, \quad (4.6)$$

где P — постоянная, подлежащая определению.

Соединяя (4.1), (4.2) и (4.6), получим

$$\psi = (m - \lambda) \operatorname{tg} n \left[\frac{1}{[1 - (m - \lambda) \operatorname{cth} m]^2 + (m - \lambda)^2 \operatorname{tg}^2 n} - \frac{P}{A} \sqrt{a} \operatorname{cth} m \right]. \quad (4.7)$$

Полагая $\psi = \psi^\circ = \text{const}$, найдем из (4.7) зависимость $n = n(m, \psi^\circ)$, а тогда (4.2), (4.3) определят $\sigma = \sigma(m, \psi^\circ)$, $\theta = \theta(m, \psi^\circ)$.

Уравнения (1.2) с учетом (1.8) и (1.9) можно привести к виду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = A \sigma \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = -\frac{a}{A} \left(\frac{1}{\sigma} - \sigma \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \quad (4.8)$$

Взяв частные производные $\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ от (4.6) и, используя

(3.11) для определения $\frac{\partial t}{\partial \sigma}$ и $\frac{\partial t}{\partial \theta}$, легко преобразовать уравнения (4.8) к виду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = -A \sigma \operatorname{Im} \left\{ \frac{P \sqrt{a}}{A} - \frac{\operatorname{sh} t}{1 - \sigma \operatorname{cht}} + \frac{\sigma - \operatorname{cht}}{(1 - \sigma \operatorname{cht})^3} \right\} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \sqrt{a} (1 - \sigma^2) \operatorname{Im} \left\{ \frac{i P \sqrt{a}}{A} - \frac{\operatorname{cht}}{1 - \sigma \operatorname{cht}} - \frac{i \operatorname{sh} t}{(1 - \sigma \operatorname{cht})^3} \right\}.$$

Интегрируя систему (4.9), найдем

$$\varphi = \sqrt{a} \cdot \sigma \operatorname{Im} \left\{ \frac{i P \sqrt{a}}{A} \left(\frac{\sigma}{2} + \operatorname{cht} \right) - \frac{i \operatorname{sh} t}{1 - \sigma \operatorname{cht}} \right\}. \quad (4.10)$$

Или, внося сюда (4.1) и учитывая (4.2), получим

$$\begin{aligned} \varphi = \sqrt{a} \cdot \sigma \left\{ \frac{\sqrt{a} P}{A} \left(\frac{\sigma}{2} + \operatorname{ch} m \cos n \right) + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{sh} m (\sigma \operatorname{ch} m - \cos n)}{[1 - (m - \lambda) \operatorname{cth} m]^2 + (m - \lambda)^2 \operatorname{tg}^2 n} \right\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Для определения P рассмотрим линию $\varphi = 0$ (4.11). На этой линии $\sigma \neq 0$ всюду, кроме единственной точки остановки, где $\sigma = 0$. Тогда, сокращая на σ , а затем полагая $\sigma = 0$, найдем

$$P = \frac{A}{\sqrt{a}} \operatorname{th} m_0. \quad (4.12)$$

Внося $\sigma = 0$ в (3.11) и учитывая (4.1), получим

$$\begin{aligned} m_0 = \lambda \\ n_0 = \frac{A \Theta_0}{\sqrt{a}} - \mu, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где Θ_0 — угол, составляемый касательной к линии тока с осью ox в точке остановки.

Внося (3.16) и (4.13), получим в точке остановки $n_0 = n_\infty = 0$, где $\Theta_0 = \Theta_\infty$, что находится в полном согласии с ранее сказанным о прямой линии.

Формулы (4.12) и (4.13) дают

$$P = \frac{A}{\sqrt{a}} \operatorname{th} \lambda. \quad (4.14)$$

Для нулевой линии тока $\psi = \psi^0 = 0$ из (4.7) найдем

$$n = \pm \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\operatorname{cth} \lambda \operatorname{th} m - [1 - (m - \lambda) \operatorname{cth} m]^2}}{m - \lambda}. \quad (4.15)$$

Вставив (4.15) в (4.11), получим

$$\varphi = \sqrt{a} \cdot \sigma^2 \operatorname{th} \lambda \left(\frac{1}{2} + \operatorname{ch}^2 m \right). \quad (4.16)$$

Раскрывая неопределенность в (4.15) для точки остановки, где $m = m_0 = \lambda$, найдем

$$n = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (4.17)$$

Следовательно, из (4.13) имеем

$$\Theta_0 = \frac{\sqrt{a}}{A} \left(\pm \frac{\pi}{2} + \mu \right). \quad (4.18)$$

Таким образом, точка остановки является точкой разветвления нулевой линии тока. Угол между касательными к этим ветвям, как это видно из (4.18), равен

$$\frac{\pi \sqrt{a}}{A} \quad (4.19)$$

В точке же остановки $a = 1$, $A = 2$, следовательно, угол раствора профиля равен $\frac{\pi}{2}$. Этот профиль симметричный, так как в (4.15)

$$n = \pm n(m).$$

Из (4.15) следует, что $n = 0$, если

$$\operatorname{cth} \lambda \operatorname{th} m - [1 - (m - \lambda) \operatorname{cth} m]^2 = 0. \quad (4.20)$$

Итак, кроме точки остановки ($m = \lambda$), где произошло разветвление линии тока $\psi^0 = 0$, существует еще одна точка $m \neq \lambda$, в которой обе ветви снова сходятся, замыкая профиль. Очевидно, что в этой

точке скорость $v \neq 0$. Из (4.3) следует, что в этой точке $\Theta = \frac{\sqrt{a}}{A} - \mu$.

Эта точка заострения профиля—точка схода потока. Здесь угол профиля равен нулю. Хорда профиля, проходящая через точку разветвления и точку схода потока, параллельна скорости невозмущенного потока (3.16). При $\mu = 0$ эта хорда идет по оси ox .

Соединяя (2.6), (4.2) и (4.15), легко получить соотношение

$$\operatorname{th} \lambda \operatorname{cth} m \{ [1 - (m - \lambda) (\operatorname{cth} m + 1)] [1 - (m - \lambda) (\operatorname{cth} m - 1)] - \sigma^2 \operatorname{sh}^2 m \} = 1, \quad (4.21)$$

где $\sigma(\rho)$ и $\lambda(\rho, \rho_\infty)$ определяются формулами (2.6), (3.19). Это соотношение служит для определения $m = m(\rho, \rho_\infty)$ или, в силу (3.17), позволяет найти закон распределения скоростей по профилю $v = v(m, \rho_\infty)$, где ρ_∞ —фиксированный параметр.

Знание закона $m = m(\rho, \rho_\infty)$ позволяет найти из (4.15) зависимость $n = n(\rho, \rho_\infty)$.

На рис. 1 нанесены кривые $m = m(\rho, \rho_\infty)$, где m_1 соответствует $\rho_\infty = 0,79$, а m_2 отвечает $\rho_\infty = 0,735$.

Формула (1.3), совместно с (4.16), (4.2), (4.3) и (3.17) позволяет построить профиль в физической плоскости $x = x(m, \rho_\infty)$, $y = y(m, \rho_\infty)$. Например, для нулевой линии тока имеем

$$x = \int_0^\varphi \left(-\frac{\cos \Theta}{v} \right)_{\psi=0} d\varphi, \quad y = \int_0^\varphi \left(-\frac{\sin \Theta}{v} \right)_{\psi=0} d\varphi. \quad (4.22)$$

Аналогично строятся и другие линии тока.

Легко показать, что если вставить (4.3) в (4.22) и использовать (3.16), то получим

$$x = x_1 \cos \Theta_\infty - y_1 \sin \Theta_\infty$$

$$y = x_1 \sin \Theta_\infty + y_1 \cos \Theta_\infty,$$

где

$$x_1 = \int_0^\varphi \left(\frac{\cos \Theta_1}{v} \right)_{\psi=0} d\varphi, \quad y_1 = \int_0^\varphi \left(\frac{\sin \Theta}{v} \right)_{\psi=0} d\varphi$$

$$\Theta_1 = \frac{V\bar{a}}{A} \left[n - (m - \lambda) \operatorname{cth} m \operatorname{tg} n \right].$$

Отсюда видно, что роль параметра μ сводится к простому повороту потока вместе с профилем в плоскости xy .

Не нарушая общности, можно положить $\mu = 0$.

Сравнивая с результатами [4], где рассматривается аппроксимация, основанная на переброске гипотетического „мостика“ K из точки остановки в точку перехода через скорость звука с закреплением K в этих точках с точностью до касания, видим, что метод подвижной аппроксимации обладает преимуществом. Он позволяет с большой степенью точности строить картину течения в каждой точке потока.

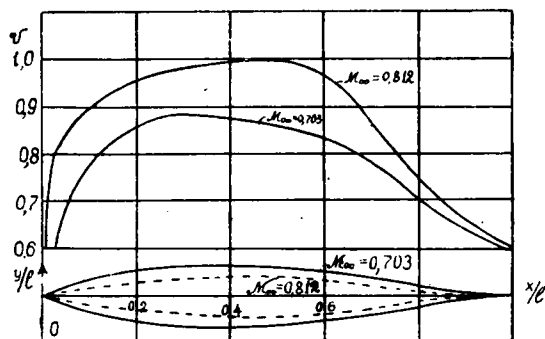


Рис. 2

Этот метод не требует сложных условий сопряжения линий тока, как это имеет место в [6], где проведена многосвязная аппроксимация функции Чаплыгина однотипными кусками кривых.

В отличие от [4], где предельное число Маха на бесконечности, при котором возникает звуковая скорость на профиле, равно 0,717, в методе подвижной аппроксимации это число равно 0,812.

На рис. 2 приведены профили расчетов для $\rho_\infty = 0,79$ и $\rho_\infty = 0,735$ в координатах x/l и y/l , где l — длина хорды. Тут же даны и законы распределения скоростей на этих профилях.

Выбирая коэффициенты C_k , входящие в (3.4) каким-нибудь иным образом, например, полагая четные из них $C_{2k} = \exp 2k\lambda$ и нечетные $C_{2k+1} = \exp(2k+1)\mu i$, можно развить аналогичный метод. Это позволит для одной и той же заданной плотности невозмущенного потока сделать набор профилей и построить около них соответствующие картины течений.

С другой стороны, сводя уравнение (1,7) к каким-нибудь другим обыкновенным уравнениям второго порядка и используя метод подвижной аппроксимации, можно найти новые частные решения, характеризующие новые гипотетические течения, весьма хорошо аппроксимирующие реальные течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.
2. Домбровский Г. А., К исследованию движения газа с дозвуковыми скоростями, „Сборник статей“, № 9 (теоретическая гидромеханика), вып. 2, Оборонгиз, 1952.
3. Тирней Дж., Аппроксимация политропного газа в околосзвуковом потоке. Сборник „Механика“, вып. 2/24, ИИЛ, 1954.
4. Томотика С. и Тамада К., Двумерное смешанное течение сжимаемой жидкости. Сборник „Механика“, вып. 2/12. ИИЛ, 1952.
5. Чаплыгин С. А., О газовых струях, „Собрание сочинений“, т. 11, Гостехиздат, 1948.
6. Назаров Г. И., Решение плоских задач газодинамики с помощью метода многозвенной аппроксимации функции Чаплыгина, „Ученые записки ТГУ“, вып. 25 (математика и механика), Томск, 1955.

Кафедра теоретической механики
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

Ю. С. ЗАВЬЯЛОВ, Г. И КОПЫЛОВ

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Рассматриваются уравнения движения тела переменной массы около неподвижной точки или центра масс в случае, когда абсолютные скорости отделяющихся от тела частиц равны нулю. При этом условии, как известно [1], теорема об изменении кинетического момента $\vec{K}$ относительно неподвижного центра формулируется так же, как и для тела постоянной массы, то есть

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M} \quad (1)$$

где t — время и $\vec{M}$ — момент внешних сил. Если связанные с телом оси координат $Oxyz$ в процессе движения и изменения массы тела остаются главными осями инерции, то обобщенные уравнения типа Эйлера имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dAp}{dt} + (C - B)qr &= M_x, \\ \frac{dBq}{dt} + (A - C)rp &= M_y, \\ \frac{dCr}{dt} + (B - A)pq &= M_z, \end{aligned} \quad (2)$$

где A, B, C — главные моменты инерции, p, q, r , — проекции мгновенной угловой скорости на оси $Oxyz$.

Уравнения (1), (2) описывают и относительное движение тела около центра масс, если считать, что последний не перемещается внутри тела [1].

При таком предположении уравнения, аналогичные (2), были выведены еще в работе Агостинелли [2]. Для 1) $\vec{M} = 0$, то есть $\vec{K} = \text{const}$, и 2) $A = A_0 F(t)$, $B = B_0 F(t)$, $C = C_0 F(t)$, где в начальный момент времени $t = t_0$ $F(t_0) = 1$, они сводились к уравнениям движения тела постоянной массы в случае Эйлера — Пуансо и таким образом интегрировались.

Мы будем рассматривать движение тела переменной массы также при $\vec{M} = 0$ ($\vec{K} = \text{const}$, $\vec{K}^2 = K^2 = \text{const}$), но в качестве второго условия возьмем: $A = B$.

Вводим новые функции p^* , q^* , r^* формулами

$$A_0 p^* = Ap, \quad A_0 q^* = Aq, \quad C_0 r^* = Cr \quad (3)$$

и новую переменную τ

$$d\tau = \frac{A_0 C_0}{A_0 - C_0} \frac{A - C}{AC} dt. \quad (4)$$

При $A = A_0 F(t)$ и $C = C_0 F(t)$ формулы (3), (4) переходят в соответствующие формулы работы [2].

Система уравнений (2) при сделанных нами предположениях запишется в виде:

$$\begin{aligned} A_0 \frac{dp^*}{d\tau} - (A_0 - C_0) q^* r^* &= 0, \\ A_0 \frac{dq^*}{d\tau} + (A_0 - C_0) r^* p^* &= 0, \\ -\frac{dr^*}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями движения тела постоянной массы в случае регулярной прецессии и имеют решение (см., например, [3]):

$$\begin{aligned} p^* &= N \sin nR(\tau - \tau_0), \\ q^* &= N \cos nR(\tau - \tau_0), \end{aligned} \quad (6)$$

$$r^* = R,$$

где

$$R = \text{const}, \quad n = \frac{A_0 - C_0}{A_0}, \quad N^2 = \frac{K^2 - C_0^2 R^2}{A_0^2}.$$

По формулам (3), (4) и (6) находим:

$$\begin{aligned} p &= \frac{A_0}{A} N \sin C_0 R \int_{t_0}^t \frac{A - C}{AC} dt, \\ q &= \frac{A_0}{A} N \cos C_0 R \int_{t_0}^t \frac{A - C}{AC} dt, \\ r &= \frac{C_0}{C} R. \end{aligned} \quad (7)$$

Направляющие конусы углов постоянного вектора $\vec{K}$, принимаемого за ось прецессии, с осями подвижной системы, суть

$$\gamma_1 = \frac{Ap}{K}, \quad \gamma_2 = \frac{Aq}{K}, \quad \gamma_3 = \frac{Cr}{K}. \quad (8)$$

Углы Эйлера: собственного вращения φ , нутации Θ и прецессии ψ найдутся по известным формулам

$$\varphi = \arctg \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad \Theta = \arccos \gamma_3, \quad (9)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\gamma_3} \left(r - \frac{\frac{d\gamma_1}{dt} \gamma_2 - \frac{d\gamma_2}{dt} \gamma_1}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \right).$$

В настоящем случае, согласно формул (7) и (8), получим

$$\begin{aligned} \varphi &= C_0 R \int_{t_0}^t \frac{A - C}{AC} dt \\ \Theta &= \arccos \frac{C_0 R}{K}, \\ \psi &= \psi_0 + K \int_{t_0}^t \frac{1}{A} dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, все характеристики движения найдены, и задача решена.

Легко видеть, что при постоянных моментах инерции $A = A_0$, $C = C_0$ формулы (7), (8), (10) переходят в соответствующие формулы для тела постоянной массы в случае регулярной прецессии.

В обсуждении работы принимал участие А. С. Обухов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Космодемьянский А. А., Лекции по механике тел переменной массы „Ученые записки МГУ“, вып. 154, „Механика“, т. IV, 1951.
2. Agostinelli C. Sui sistemi dinamici di masse variabili. Atti Reale Accad. Sc di Torino, v. 71, t. 1, 1935.
3. Голубев В. В., Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, М., 1953.

Кафедра теоретической механики
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

А. Д. КОЛМАКОВ

К ВОПРОСУ О ТЕОРЕМЕ ЛАНЖЕВЕНА

В работе показывается, что в условиях постоянного давления в камере с соплом невозможен изотермический процесс истечения описываемый теоремой Ланжевена. Теорема Ланжевена появилась в результате неправильного определения стационарного режима истечения, который определяли двумя условиями:

- а) условием постоянства давления,
- в) условием постоянной массы газов в камере.

Последнее условие должно быть отброшено, так как введено в определение стационарного режима истечения без всякого обоснования. Единственно правильным критерием определения стационарного режима является постоянство давления в камере.

§ 1. Введение

1. Основные обозначения

ω — вес заряда,
 w_0 — объем камеры,
 Δ — плотность заряжания,
 δ — плотность пороха,
 P — давление в камере,
 T — абсолютная температура газов в камере,
 T_1 — абсолютная температура горения пороха,
 f — сила пороха,
 α — коволюм пороховых газов,
 κ — показатель адиабаты,
 R — газовая постоянная,
 w — удельный объем газов в камере,
 G — секундный расход газа,

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega} \int_0^t G dt \text{ — относительный расход газа,}$$

ψ — относительная доля сгоревшего заряда,
 $\tau = T/T_1$ — относительная температура газов в камере,
 Π — запас энергии в единице массы пороха,
 E — запас энергии в единице массы газа,
 t — время.

2. Основные допущения

1. Давление и температура газов в камере распределены равномерно.
2. Справедливо уравнение состояния

$$p(w - \alpha) = RT$$

3. Газы, находящиеся в камере, считаем неподвижными.

4. Не учитываем теплообмен от газов к стенкам камеры.

5. Принимаем средние значения теплоемкостей.

6. Пренебрегаем влиянием коволюма в уравнении энергии.

Перечисленные допущения в вопросах баллистики являются общепринятыми.

3. Вывод уравнения энергии.

К моменту времени t в результате горения заряда и истечения части пороховых газов в камере будет находиться масса газа $\omega\psi - \int_0^t Gdt$, обладающая энергией $E(\omega\psi - \int_0^t Gdt)$.

Несгоревшая часть пороха к этому времени имеет массу $(1-\psi)\omega$ и обладает энергией $\Pi(1-\psi)\omega$.

Вытекшие из камеры газы массы $\int_0^t Gdt$ унесли с собой запас внутренней энергии, равный $\int_0^t EGdt$. Кроме того, на их выталкивание через сопло была совершена работа $\int_0^t p\omega Gdt$. Поэтому общий расход энергии вследствие истечения равен

$$\int_0^t (E + p\omega) Gdt.$$

Согласно закону сохранения энергии сумма перечисленных энергий должна быть равна начальному запасу энергии пороха $\Pi\omega$, т. е.

$$\Pi\omega = \Pi(1-\psi)\omega + \int_0^t (E + p\omega) Gdt + E(\omega\psi - \int_0^t Gdt)$$

или

$$\Pi\omega\psi = \int_0^t (E + p\omega) Gdt + E(\omega\psi - \int_0^t Gdt).$$

Записывая это уравнение в дифференциальной форме, получим

$$\Pi\omega d\psi = d[(E + p\omega)G] + d[E(\omega\psi - \int_0^t Gdt)],$$

но

$$\Pi = \frac{f\omega}{k-1}; \quad E = \frac{f\tau}{k-1}; \quad p\omega = f\tau; \quad \eta = \frac{1}{\omega} \int_0^t Gdt.$$

Подставляя эти величины в уравнение, найдем

$$\frac{f\omega}{k-1} d\psi = \frac{f\omega}{k-1} d[\tau(\psi - \eta)] + \frac{f\omega}{k-1} k\tau d\eta, \quad (1.1)$$

где $\frac{f\omega}{k-1} d\psi$ — характеризует приход энергии вследствие горения пороха,

$\frac{f\omega}{k-1} d[\tau(\psi - \eta)]$ — характеризует расход энергии на изменение

внутренней энергии газов, находящихся в данный момент в камере,

$\frac{f\omega}{k-1} k\tau d\eta$ — характеризует расход энергии вследствие истечения.

Сокращая на $\frac{f\omega}{k-1}$, окончательно уравнение энергии запишем в виде

$$d\psi = d[\tau(\psi - \eta)] + k\tau d\eta. \quad (1.2)$$

Если решить это уравнение относительно $d\tau/d\psi$, то получим общепринятую форму записи уравнения энергии

$$\frac{d\tau}{d\psi} = \frac{1 - \tau - (k-1)\tau d\eta/d\psi}{\psi - \eta}. \quad (1.3)$$

Следовательно, наша форма записи уравнения энергии (1.2) не противоречит общепринятой (1.3), однако она в дальнейшем позволит легко провести анализ теоремы Ланжевена, что нельзя сделать, если пользоваться формой записи (1.3).

4. Преобразование уравнения состояния

Исходим из принятого уравнения состояния

$$p(w - \alpha) = RT.$$

В этом уравнении T — температура пороховых газов в рассматриваемый момент времени, которая, очевидно, во все время горения будет оставаться меньше температуры горения пороха. Последнее объясняется тем, что часть энергии образующихся пороховых газов расходуется на работу по проталкиванию вытекающих через сопло газов. Поэтому, если правую часть уравнения умножить и поделить на T_1 и ввести обозначения

$$f = RT_1, \quad \tau = \frac{T}{T_1},$$

то уравнение запишется в виде

$$p(w - \alpha) = f\tau. \quad (1.4)$$

Найдем выражение для w — удельного объема газов.

Если η — относительное количество вытекших газов, а ψ — относительное количество образовавшихся газов, то для нахождения свободного объема камеры W нужно из объема камеры W_0 вычесть объем $\frac{1}{\delta}(1 - \psi)\omega$ — несгоревшей части заряда

$$W = W_0 - \frac{1}{\delta}(1 - \psi)\omega.$$

Но $\omega(\psi - \eta)$ — масса газов, находящихся в рассматриваемый момент в камере; тогда выражение для удельного объема газов запишется в виде

$$w = \frac{W_0 - \frac{1}{\delta}(1 - \psi)\omega}{\omega(\psi - \eta)}.$$

Подставляя w в (1.4) и решая относительно p , найдем

$$p = \frac{f \omega \tau (\psi - \eta)}{W_0 - \alpha \omega (\psi - \eta) - \frac{1}{\delta} (1 - \psi) \omega}. \quad (1.5)$$

Вводя $\Delta = \frac{\omega}{W_0}$ — плотность заряжения, получим

$$p = \frac{f \Delta (\psi - \eta) \tau}{1 - \frac{\Delta}{\delta} (1 - \psi) - \alpha \Delta (\psi - \eta)}. \quad (1.6)$$

5. Вывод условия для максимального давления

Если ввести обозначения

$$a = \tau (\psi - \eta)$$

$$c = 1 - \alpha \Delta (\psi - \eta) - \frac{\Delta}{\delta} (1 - \psi),$$

то уравнение состояния запишется в виде

$$p = f \Delta \frac{a}{c}.$$

Дифференцируя это уравнение по t , найдем

$$\frac{dp}{dt} = f \Delta \left(\frac{da}{dt} - \frac{p}{f \Delta} \frac{dc}{dt} \right).$$

Приравнивая нулю и решая относительно p , получим

$$P_m = f \Delta \left(\frac{da}{dc} \right)_m = f \Delta \frac{\left(\frac{da}{d\psi} \right)_m}{\left(\frac{dc}{d\psi} \right)_m},$$

но из уравнения энергии

$$\frac{da}{d\psi} = \frac{d}{d\psi} [\tau (\psi - \eta)] = 1 - k \tau \frac{d\eta}{d\psi},$$

а дифференцируя выражение c по ψ , получим

$$\frac{dc}{d\psi} = \frac{\Delta}{\delta} - \alpha \Delta \left(1 - \frac{d\eta}{d\psi} \right).$$

Подставляя найденные выражения в P_m и проводя необходимые преобразования, найдем:

$$P_m = f \frac{1 - k \tau_m \left(\frac{d\eta}{d\psi} \right)_m}{\frac{1}{\delta} - \alpha + \alpha \left(\frac{d\eta}{d\psi} \right)_m}. \quad (1,5)$$

Имея уравнения энергии, состояния и условие для максимального давления, переходим к анализу теоремы Ланжевена.

§ 2. Теорема Ланжевена и ее доказательство проф. Я. М. Шапиро

В своей работе (1) известный французский ученый Ланжевен указывает, что при установившемся режиме истечения температура газов в реактивной камере T связана с температурой горения пороха T_1 соотношением

$$\tau = \frac{T}{T_1} = \frac{1}{k},$$

где k — показатель адиабаты. Это соотношение, получившее в дальнейшем название теоремы Ланжевена, дано Ланжевенем без доказательства, как очевидное соотношение из термодинамических зависимостей.

Вопросами доказательства теоремы Ланжевена занимались многие авторы, в частности Я. М. Шапиро, который дал несколько способов доказательства этой теоремы. Не рассматривая всех его способов, остановимся на самом последнем, который проф. Я. М. Шапиро считает наиболее простым и убедительным [2].

Учитывая простоту и сжатость доказательства, приведем его дословно, при этом будем пользоваться принятыми нами обозначениями. Рассмотрим установившееся истечение пороховых газов из камеры.

“Пусть за время dt , — говорит проф. Шапиро, — сгорает некоторое количество пороха $d\omega_{c2}$ и такое же количество газов $d\omega_{c2}$ вытекает из сопла. Выберем $d\omega_{c2}$ достаточно малым так, чтобы можно было пренебречь изменением объема камеры при сгорании элемента $d\omega_{c2}$. При этом равенству прихода и расхода газов будет отвечать постоянство давления.

Рассмотрим некоторое произвольное сечение сопла. Кинетическая энергия весового количества $d\omega_{c2}$ газов равна

$$\frac{U^2}{2} d\omega_{c2} = \frac{k}{k-1} RT(1 - x^{\frac{k-1}{k}}),$$

где $x = \frac{P^1}{P}$, (индекс ¹ относится к некоторому сечению сопла).

Внутренняя энергия тех же газов равна

$$\frac{RT}{k-1} x^{\frac{k-1}{k}} d\omega_{c2}.$$

Сумма кинетической и внутренней энергии равна

$$\frac{k}{k-1} \left[1 - \frac{k-1}{k} x^{\frac{k-1}{k}} \right] RT d\omega_{c2}.$$

Наибольшее значение эта величина принимает при бесконечном расширении в пустоту. В этом случае $x=0$ и наибольшая энергия равна

$$\frac{k}{k-1} RT d\omega_{c2}.$$

Очевидно, что при установившемся процессе эта энергия должна в точности равняться энергии, поступающей за тот же промежуток времени при сгорании $d\omega_{c2}$ пороха, т. е.

$$c_v T_1 d\omega_{c2} = \frac{RT_1}{k-1} d\omega_{c2}.$$

Приравнявая последние два выражения, получаем непосредственно

$$kT = T_1 \quad \text{или} \quad \tau = \frac{1}{k},$$

т. е. доказательство теоремы Ланжевена.

Для дальнейшего необходимо показать, что общий запас энергии элементарного слоя газа при его расширении в пустоту $\frac{k}{k-1} RT d\omega_{c2}$ равен общему расходу энергии из камеры вследствие истечения.

Действительно, из уравнения Бернулли для максимальной скорости истечения газов имеем выражение

$$U_m = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT},$$

но тогда кинетическая энергия газов, истекающих в пустоту, запишется в виде

$$\frac{U_m^2}{2} d\omega_{c2} = \frac{k}{k-1} RT d\omega_{c2} = \frac{fk}{k-1} \tau d\omega_{c2}.$$

При выводе уравнения энергии мы показали, что расход энергии вследствие истечения равен выражению:

$$\frac{f\omega}{k-1} k \tau d\eta = \frac{fk}{k-1} \tau d\omega_{c2},$$

т. е., действительно, общий запас энергии элементарного слоя газа при его расширении в пустоту равен общему расходу энергии на истечение.

После этого дадим математическую запись условий, при которых проф. Я. М. Шапиро провел доказательство теоремы Ланжевена. При этом, в отличие от доказательства автора, будем пользоваться уравнением энергии и состояния.

1. Условие равенства прихода и расхода газов

$$\omega d\eta = \omega d\psi \quad \text{или} \quad \frac{d\eta}{d\psi} = 1.$$

2. Условие неучета изменения свободного объема камеры

$$W_0 - \alpha \omega (\psi - \eta) - \frac{\omega}{\delta} (1 - \psi) = \text{const}$$

3. Условие равенства выделяющейся энергии и энергии, уносимой из камеры

$$\frac{d\eta}{d\psi} = \frac{1}{k\tau}.$$

Действительно, если выделяющаяся энергия равна уносимой, то это означает, что

$$\frac{f\omega}{k-1} d\psi = \frac{f\omega}{k-1} k\tau d\eta,$$

отсюда и получим выше записанное условие.

4. Условие постоянства внутренней энергии газов, находящихся в данный момент в камере, $\tau(\psi - \eta) = \text{const}$.

Это условие является следствием третьего условия и уравнения энергии. Действительно, если условие 3 выполняется, то из уравнения энергии получим, что $\tau(\psi - \eta) = \text{const}$.

5. Условие постоянства давления

$$P = \text{const}.$$

Я. М. Шапиро, как и другие авторы, считает, что если будет выполняться условие $d\eta/d\psi = 1$, то в этом случае давление в камере будет оставаться постоянным, т. е. установившийся режим истечения характеризуется непременным выполнением двух условий

$$P = \text{const},$$

$$\frac{d\eta}{d\psi} = 1.$$

Следует заметить, что приведенное доказательство можно провести при меньшем числе условий, чем это сделано автором. Действительно, если принять, что при $P = \text{const}$ выполняются условия 1 и 3, то из уравнения энергии получим

$$\tau(\psi - \eta) = \text{const},$$

но тогда из уравнения состояния следует, что

$$W = W_0 - \alpha \omega (\psi - \eta) - \frac{\omega}{\delta} (1 - \psi) = \text{const},$$

т. е. отпадает необходимость в условии 2.

Аналогично, если при $P = \text{const}$ потребовать выполнение условий 1 и 2, то из уравнения состояния получим

$$\tau(\psi - \eta) = \text{const},$$

но тогда из уравнения энергии следует, что

$$\frac{d\eta}{d\psi} = \frac{1}{k\tau},$$

т. е. отпадает необходимость в условии 3.

Из приведенного замечания следует, что необходимым условием доказательства теоремы Ланжевена является выполнение соотношения $d\eta/d\psi = 1$. Вторым условием может быть любое из указанных выше. Однако можно показать, что в предельном случае при $\psi \rightarrow \infty$ условие $d\eta/d\psi = 1$ является необязательным.

Действительно, если допустить, что в условиях $P = \text{const}$ выполняется одно из трех условий 2, 3 или 4, то из уравнения энергии получим

$$\tau(\psi - \eta) = \text{const}$$

$$\frac{d\eta}{d\psi} = \frac{1}{k\tau}.$$

Решая совместно эти уравнения, найдем

$$\frac{d\eta}{d\psi} = 1 + ce^{-\psi}$$

$$\tau = \frac{1}{k} \frac{1}{1 + ce^{-\psi}},$$

где c — постоянная интегрирования.

При $\psi \rightarrow \infty$, получим

$$\frac{d\eta}{d\psi} = 1, \quad \tau = \frac{1}{k}.$$

т. е. доказательство теоремы Ланжевена.

Анализируя приведенное доказательство в целом, следует сделать следующие выводы:

1. Доказательство проведено без должного использования уравнения энергии и состояния.

2. Доказательство построено на общепринятом определении стационарного режима, характеризуемого одновременным выполнением условий, при

$$P = \text{const}, \quad \frac{d\eta}{d\psi} = 1.$$

Вместе с этим легко показать, что в действительности при $P = \text{const}$ соотношение $d\eta/d\psi$ не выполняется.

Действительно, постоянство давления в камере устанавливается после достижения максимального давления. Поэтому, если найденное условие для P_m разрешить относительно $d\eta/d\psi$ и опустить индекс „ m “, то получим

$$\frac{d\eta}{d\psi} = \frac{1 + \left(\alpha - \frac{1}{\delta} \right) \frac{P}{f}}{k \left(\tau + \frac{\alpha P}{f} \right)}. \quad (2.1)$$

Для возможности интегрирования этого уравнения исключим из него τ . Решая уравнение состояния относительно τ , будем иметь

$$\tau = \frac{P}{f\Delta} \frac{1 - \alpha \Delta (\psi - \eta) - \frac{\Delta}{\delta} (1 - \psi)}{\psi - \eta}.$$

Подставляя τ в уравнение (2.1), найдем

$$\frac{d\eta}{d\psi} = \frac{\left[1 + \left(\alpha - \frac{1}{\delta} \right) \frac{P}{f} \right] (\psi - \eta)}{\frac{\delta}{\Delta} - 1 + \psi} \cdot \frac{f\delta}{kP}. \quad (2.2)$$

Введем обозначения:

$$a = \frac{f\delta}{kP} \left[1 + \left(\alpha - \frac{1}{\delta} \right) \frac{P}{f} \right]$$

$$\bar{\psi} = \psi + \frac{\delta}{\Delta} - 1$$

$$\bar{\eta} = \eta + \frac{\delta}{\Delta} - 1$$

$$\zeta = \psi - \eta = \bar{\psi} - \bar{\eta},$$

тогда уравнение (2.2) запишется в виде

$$\frac{d\eta}{d\psi} = \frac{a\zeta}{\bar{\psi}}, \quad (2.3)$$

но из выражений для ζ и $\bar{\psi}$ имеем

$$\frac{d\eta}{d\psi} = 1 - \frac{d\zeta}{d\psi}, \quad d\psi = d\bar{\psi}.$$

Тогда уравнение (2.3) преобразуется к виду

$$\frac{d\zeta}{d\bar{\psi}} + \frac{a\zeta}{\bar{\psi}} = 1. \quad (2.4)$$

Общее решение этого уравнения

$$\zeta = \frac{1}{a+1} \bar{\psi} + c \bar{\psi}^{-a}, \quad (2.5)$$

где c — постоянная интегрирования. После этого легко найти выражения для $\bar{\eta}$, τ , $\frac{d\eta}{d\psi}$.

Будем иметь:

$$\bar{\eta} = \frac{a}{a+1} \bar{\psi} - c \bar{\psi}^{-a}$$

$$\bar{\tau} = \tau + \frac{\alpha P}{f} = \frac{s}{k \left(\frac{1}{a+1} + c \bar{\psi}^{-a-1} \right)}, \quad s = \frac{1 + \left(\alpha - \frac{1}{\delta} \right) \frac{P}{f}}{a}$$

$$\frac{d\eta}{d\psi} = a \left(\frac{1}{a+1} + c \bar{\psi}^{-a-1} \right),$$

где постоянная интегрирования c находится из условия:

$$\text{при } \psi = \psi_0, \quad \eta = \eta_0.$$

Подставляя эти значения в $\bar{\eta}$ и решая относительно c , найдем

$$c = \frac{\frac{a}{a+1} \left(\psi_0 + \frac{\delta}{\Delta} - 1 \right) - \left(\eta_0 + \frac{\delta}{\Delta} - 1 \right)}{\left(\psi_0 + \frac{\delta}{\Delta} - 1 \right)^{-a}}.$$

Анализируя полученное решение, можно сделать следующие выводы:

1. В условиях постоянства давления температура газов в камере не остается постоянной, а непрерывно изменяется, т. е. при $P = \text{const}$ изотермический режим истечения невозможен.

2. Между расходом газа и приходом не выполняется условие

$$\frac{d\eta}{d\psi} = 1.$$

Но если при $P = \text{const}$ условие $\frac{d\eta}{d\psi} = 1$ не выполняется, то это означает, что существующее определение стационарного режима истечения является неверным.

Единственно правильным условием определения стационарного режима следует считать условие $P = \text{const}$ — постоянство давления. Следовательно, исходные положения проф. Шапиро Я. М. ($P = \text{const}$, $d\eta/d\psi = 1$), основываясь на которых он доказывал теорему Ланжевена, являются неправильными. Если тем не менее согласиться с ними, а также принять справедливость условия 2 или 3, то получим ряд непреодолимых противоречий.

Рассмотрим эти противоречия:

1. Если выполняется условие 2, то дифференцируя W по ψ , получим

$$\frac{d\eta}{d\psi} = 1 - \frac{1}{\alpha \delta},$$

но, с другой стороны,

$$\frac{d\eta}{d\psi} = \frac{1}{k \tau};$$

приравнявая эти два выражения для $d\eta/d\psi$ и решая относительно τ , найдем

$$\tau = \frac{1}{k \left(1 - \frac{1}{\alpha \delta} \right)}$$

при $k = 1,25$, $\alpha = 1$, $\delta = 1,6$

$$\tau = 2,1.$$

Но τ не может превышать единицы.

Получили противоречие.

Заметим, что аналогичный вывод можно получить, если исходить только из условий 4 и 5. Действительно, при выполнении этих условий из уравнения состояния и энергии получим

$$W = W_0 - \frac{\Delta}{\delta} (1 - \psi) - \alpha \Delta (\psi - \eta) = \text{const},$$

$$\frac{d\eta}{d\psi} = \frac{1}{k\tau}.$$

Из этих двух выражений легко получить прежнее значение для

$$\tau = \frac{1}{k \left(1 - \frac{1}{\alpha \delta} \right)}.$$

Следовательно, гипотеза о постоянстве внутренней энергии газов, находящихся в данный момент в камере, эквивалентна гипотезе постоянства свободного объема камеры. Обе эти гипотезы должны быть отброшены, так как они находятся в противоречии со здравым смыслом.

2. Если $P = \text{const}$ и $\tau = \frac{1}{k}$, то согласно теоремы $d\eta/d\psi = 1$, но в действительности $d\eta/d\psi \neq 1$.

Из условия $P = \text{const}$ имеем

$$\frac{d\eta}{d\psi} = \frac{1 + \left(\alpha - \frac{1}{\delta} \right) \frac{P}{f}}{k\tau + \frac{\alpha P}{f}}.$$

Если $\tau = 1/k$, то

$$\frac{d\eta}{d\psi} = 1 - \frac{P}{\delta(f + \alpha P)},$$

т. е. при $P = \text{const}$ и $\tau = 1/k$ значение $d\eta/d\psi \neq 1$.

Заметим, что чем меньше P , тем меньше $d\eta/d\psi$ будет отличаться от единицы, и, когда $P = 0$, тогда

$$d\eta/d\psi = 1.$$

3. Если $P = \text{const}$ и $W = \text{const}$, то ни τ , ни $d\eta/d\psi$ не остаются постоянными, а являются непрерывно изменяющимися величинами.

В этом случае имеем

$$P = \text{const},$$

$$W = W_0 - \alpha \Delta(\psi - \eta) - \frac{\Delta}{\delta} (1 - \psi) = \text{const},$$

но тогда из уравнения состояния

$$f \Delta(\psi - \eta) \tau = c_1 = \text{const}.$$

Отсюда:

$$\psi - \eta = \frac{c_1}{\Delta f \tau},$$

подставляя в W , получим

$$\tau = \frac{c_1 \alpha}{f \left(W_0 - \frac{\Delta}{\delta} - c_2 + \frac{\Delta}{\delta} \psi \right)};$$

так как ψ непрерывно возрастает, то τ должно непрерывно убывать. Но тогда $d\eta/d\psi$ должно непрерывно возрастать и для малых значений P стремится к величине $1/k\tau$.

4. Если $d\eta/d\psi = 1$ и $\tau = 1/k$, то из условия $P = \text{const}$ следует, что $P = 0$. Следовательно, точное значение $d\eta/d\psi = 1$ и $\tau = 1/k$ возможно лишь в предельном случае, когда $P = 0$.

Кроме указанных противоречий легко показать, что расход газа больше прихода и др. Однако на основе приведенных противоречий можно сделать вывод, что даже в условиях так называемого стационарного режима истечения ($P = \text{const}$, $d\eta/d\psi = 1$), мы не можем говорить о точном значении $\tau = 1/k$, а только о стремлении этой величины к $1/\tau$ при уменьшении P .

Но мы показали, что существующее определение стационарного режима является неправильным (в условиях $P = \text{const}$ значение $d\eta/d\psi$ отлично от единицы), следовательно, при постоянном давлении в камере невозможен изотермический процесс истечения, описываемый соотношением Ланжевена. Однако для получения приближенных решений, в случае малых давлений (большие значения a), соотношением Ланжевена можно пользоваться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ланжевен, Note sur les effets balistiques de la détente des gaz. Memorial de l' Artillerie française, 1923 f. 1.
2. Шапиро Я. М. Об энергетическом уравнении баллистики ракетных снарядов, „Известия Академии“, XLIII, 1944.

Кафедра теоретической механики
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

Г. С. ТЮТЕРЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШИРОТЫ И ДОЛГОТЫ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Широта и долгота обсерватории университета определялись профессором Н. Н. Горячевым более тридцати лет тому назад. Наблюдения выполнялись им на 20-секундном универсальном инструменте. Применялся талькоттовский уровень с ценой деления в $2''24$.

Необходимость в переопределении координат обсерватории университета назрела уже давно. При этом учитывалось, что обсерватория в настоящее время располагает двухсекундным универсальным инструментом с более точными уровнями, что давало возможность повысить точность наблюдений и получить более точные значения ее координат.

Двухсекундный универсальный инструмент Бамберга № 79734, установленный еще до Великой Отечественной войны на столбе, покоящемся на южной стене главного корпуса университета, использовался для учебных целей. Инструмент имеет ломаную трубу с диаметром объектива 70 мм, накладной уровень с ценой деления в $1.''034$ и два уровня Талькотта с ценой деления в $0.''90$ и $1.''10$.

При исследовании уровней оказалось, что их стеклянные трубки свободно перемещались в оправе, так как укрепляющие их пробки от времени сильно усохли. После исправления этого дефекта были проведены необходимые поверки и юстировка инструмента.

Осенью 1954 года наблюдались звезды по способу Певцова. Из большого ряда наблюдений были отобраны 15 пар, которые были использованы для получения широты обсерватории. Анализ ошибок полученной широты показал, что результаты определений не удовлетворяют требованиям астроопределений первого класса. При этом мы пользовались известной формулой, дающей среднюю квадратическую ошибку определения широты m_φ в функции средних квадратических ошибок отсчета уровня m_i , цены деления уровня m_τ , момента прохождения звезды через среднюю нить m_u и хода хронометра m_T . Эта формула имеет следующий вид:

$$m_\varphi = \pm \sqrt{\frac{\sec^2 A}{4} (m_i^2 \tau^2 + m_\tau^2 i^2) + \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 A (m_u^2 + m_T^2)}. \quad (1)$$

На основании проведенных исследований инструмента и выполненных наблюдений были приняты следующие значения постоянных и значения средних квадратических ошибок:

$$\begin{array}{l|l} i = 0^{\circ}.2 \tau'' & m_i = \pm 0.''04 \\ \tau'' = 0.''90 & m_\tau = \pm 0.''02 \\ A = 31^{\circ}12' & m_u = \pm 0.''37 \\ \varphi = 56^{\circ}28' & m_T = \pm 1.''10. \end{array}$$

В вышеприведенной формуле значение азимута A принято как среднее в данном ряду наблюдений. Значение m_u получено из обработки пар Цингера, наблюдавшихся в эти же вечера. Значение m_T получено как суммарное значение средних квадратических ошибок момента прохождения звезды через нити и ошибок регистрации хронометра.

Формула (1) дала значение m_φ , равное $+0''.38$. Между тем для первоклассных определений требуется, чтобы значение m_φ не превышало $\pm 0''.20$.

Анализ погрешностей, входящих в (1), показал, что m_T и m_u имеют небольшие значения. Чтобы уменьшить их влияние на m_φ и тем самым уменьшить также и значение m_φ , было решено увеличить число нитей. Если натянуть 11 нитей вместо имевшихся четырех,

то m_T уменьшится, по крайней мере, в $\sqrt{\frac{11}{4}}$ раза. Уменьшение

m_u можно было достигнуть путем уменьшения хода хронометра. При этих условиях можно из формулы (1) получить для m_φ значение, равное $\pm 0''.18$.

Летом 1955 г. были мною натянуты 14 горизонтальных нитей. Суточный ход хронометра Ericsson № 751 был снижен до $+0''.8$. Его колебания не превышали $\pm 0''.05$.

В сентябре и октябре 1955 г. были проведены наблюдения звезд по методу Певцова для определения широты. Одновременно наблюдались пары Цингера для определения долготы.

Ниже приводится сводная таблица определений широты:

	Пар Певцова	φ	δ	$\delta\delta$	
13, 14 сентября 1955 г.	494	56°28'07".34	-0".03	0".009	$m_\varphi = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n(n-1)}};$ $m_\varphi = \pm \sqrt{\frac{6.5606}{15.14}} =$ $= \pm 0''.176$
	500	8.15	+0.78	0.6064	
	510	8.50	+1.13	0.1469	
	315	7.75	+0.38	0.1444	
	5	7.76	+0.39	0.1521	
	13	7.07	-0.30	0.0900	
	18	6.66	-0.71	0.5041	
	29	7.39	+0.02	0.0004	
	35	6.57	-0.80	0.6400	
9, 10 октября 1955 г.	45	6.20	-1.17	1.3689	$H \text{ обсерватории} =$ $= 0.13 \text{ км}$
	47	7.07	-0.30	0.0930	
	53	7.75	+0.38	0.1444	
	60	6.11	-1.26	1.5876	
	65	8.06	+0.69	0.4761	
	68	8.15	+0.78	0.6084	
		56°28'07".369	+4".55	6".5606	
			-4.57	51.18	
				82.00	

Поправка за приведение широты к уровню моря

$$\Delta \varphi_H = -0.171 H \sin 2\varphi = -0''02$$

$$\varphi = 56^\circ 28' 07'' 35 \pm 0'' 18.$$

Долгота обсерватории выведена из 7 независимых определений в течение 4 вечеров.

При выводе долготы принята следующая система обозначений:

X' и X'' — показания хронометра в средний момент передачи сигналов первой и второй радиостанций;

v — поправка за скорость распространения электромагнитных волн;

T_0 — сводный момент подачи радиосигналов по мировому времени;

ω_{10}^m — десятиминутный ход хронометра.

$$V' = S' - (X' - v'); \quad V'' = S'' - (X'' - v'');$$

$$\omega_{10}^m = \frac{V'' - V'}{\tau};$$

$$\tau_i = (X_0 - T_i)^m;$$

$$X_0 = \frac{1}{2} [(X'' - v'') - (X' - v')].$$

Все другие действия и обозначения усматриваются просто из нижеприведенных определений поправок хронометра и долготы.

1955 г. 11/12 сентября. Радиостанция РБТ Иркутск 12^h.

$X = 17^h 02^m 05^s.650$, $T_0 = 12^h 03^m 30^s.004$, $S = 11^h 22^m 26^s.667$. $v = -4$

№№ пар Певцова и Горячева	T	u	τ_i	$\omega_{10}^m \cdot \tau_i$	u_0	δ	$\delta\delta$
157	19 ^h 11 ^m .6	+8 ^s .07	+5.1	+0 ^s .01	+8 ^s .08	+0 ^s .01	0 ^s .0001
166	20 03.0	.05	0	0	.05	-0.02	0.0004
168	20 22.8	.11	-2.0	0	.11	+0.04	0.0016
170	20 41.1	.11	-3.8	-0.01	.10	+0.03	0.0009
177	21 21.8	.13	-7.9	-0.02	.11	+0.04	0.0016
176	21 38.9	.10	-9.6	-0.02	+8.08	+0.01	0.0001
(Горяч.)							
183	22 08.6	.01	-12.6	-0.03	+7.98	-0.11	0.0121
					+8.073	-0.01	0.0168

$$X_0 = 20^h 02^m.6$$

$$m_u = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n(n-1)}} = \pm 0^s.020$$

11/12 сентября. Радиостанция РПТ Ташкент 18^h.
 $X = 23^h 03^m 04^s.675$, $T_0 = 18^h 03^m 29^s.956$, $S = 17^h 23^m 25^s.765$. $v = -7$

№№ пар Цингера	T	u	τ_i	$\omega_{10}^m \tau_i$	u_0	δ	$\delta\delta$
194	23 ^h 25 ^m .3	+8 ^s .07	+10.1	+0 ^s .07	+8 ^s .14	+0 ^s .04	0 ^s .0016
200	0 00.8	.01	+6.6	+0.04	.05	-0.05	0.0025
4	0 27.9	.10	+3.9	+0.03	.13	+0.03	0.0009
20	2 24.2	.14	-7.7	-0.05	.09	+0.01	0.0001
					+8.102	+0 03	0.0051

$$X_0 = 25^h 06^m.8 \quad m_u = \pm 0^s.021$$

11/12 сентября. Радиостанция РБТ Иркутск 22^h.
 $X = 3^h 03^m 43^s.981$, $T_0 = 22^h 03^m 30^s.006$, $S = 21^h 24^m 05^s.234$. $v = -4$

	РБТ ₁₂	РПТ ₁₈	РБТ ₂₂
S	11 ^h 22 ^m 26 ^s .667	17 ^h 23 ^m 25 ^s .765	21 ^h 24 ^m 05 ^s .234
$X-v$	17 02 05.646	23 03 04.668	3 03 43.977
V	-5 39 38.979	-5 39 38.903	-5 39 38.743
ω_{10}^m	+0 ^s .0021		+0 ^s .0066

13/14 сентября. Радиостанция РВМ Москва 12^h.
 $X = 17^h 09^m 57^s.218$, $T_0 = 12^h 03^m 29^s.983$, $S = 11^h 30^m 19^s.760$ $v = -12$

№№ пар Цингера	T	u	τ_i	$\omega_{10}^m \tau_i$	u_0	δ	$\delta\delta$
144	17 ^h 41 ^m .5	+9 ^s .55	+9.8	+0 ^s .06	+9 ^s .61	+0 ^s .07	0 ^s .0049
147	17 57.9	.60	+8.1	+0.05	.65	+0.11	0.0121
150	18 15.9	.50	+6.3	+0.04	.54	0	0
159	19 26.0	.47	-0.7	0	.47	-0.07	0.0049
161	19 42.8	.51	-2.4	-0 01	.50	-0.04	0.0016
170	20 41.1	.52	-8.2	-0.05	.47	-0.07	0.0049
178	21 32.8	.59	-13.4	-0.08	.51	-0.03	0.0009
					+9.536	-0.03	0.0293

$$X_0 = 19^h 19^m.3 \quad m_u = \pm 0^s.026$$

13/14 сентября. Радиостанция РВМ Москва 16^h
 $X = 21^h 10^m 36^s.494$, $T_0 = 16^h 03^m 29^s.986$, $S = 15^h 30^m 59^s.188$. $v = -12$

	PBM ₁₂	PBM ₁₆
S	$11^h 30^m 19^s.760$	$15^h 30^m 59^s.188$
$X-v$	17 09 57.206	21 10 36.482
V	-5 39 37.446	-5 39 37.294
ω_{10}^m	$+0^s.0062$	

14/15 сентября. Радиостанция РВМ Москва 12^h.
 $X = 17^h 13^m 53^s.004$, $T_0 = 12^h 03^m 29^s.985$, $S = 11^h 34^m 16^s.314$. $v = -12$

№№ пар Цингера	T	u	τ_i	$\omega_{10}^m \tau_i$	u_0	δ	$\delta\delta$
147	$17^h 57^m.9$	$+10^s.16$	$+7.6$	$+0^s.05$	$+10^s.21$	$-0^s.07$	$0^s.0049$
150	18 15.9	.20	$+5.8$	$+0.03$	.23	-0.05	0.0025
152	18 36.8	.27	$+3.7$	$+0.02$	.29	$+0.01$	0.0001
155	18 56.1	.36	$+1.8$	$+0.01$	.37	$+0.09$	0.0081
160	19 30.4	.29	-1.6	-0.01	.28	0	0
163	19 47.2	.29	-3.3	-0.02	.27	-0.01	0.0001
168	20 22.7	.33	-6.8	-0.04	.29	$+0.01$	0.0001
					$+10.277$	-0.02	0.0158

$$X_0 = 19^h 14^m.2 \quad m_u = \pm 0^s.019$$

14/15 сентября. Радиостанция РВМ Москва 16^h.
 $X = 21^h 14^m 32^s.259$, $T_0 = 16^h 03^m 29^s.984$, $S = 15^h 34^m 55^s.738$. $v = -12$

	PBM ₁₂	PBM ₁₆
S	$11^h 34^m 16^s.314$	$15^h 34^m 55^s.738$
$X-v$	17 13 52.992	21 14 32.247
V	-5 39 36.678	-5 39 36.509
ω_{10}^m	$+0^s.0061$	

12/13 сентября. Радиостанция РВМ Москва 12^h.
 $X = 17^h06^m01^s.514$, $T_0 = 12^h03^m29^s.986$, $S = 11^h26^m23^s.207$. $v = -12$

№№ пар Цингера	T	u	τ_i	$\omega_{10}^m \tau_i$	u_0	δ	$\delta\delta$
147	17 ^h 58 ^m .0	+8 ^s .56	+0.8	0	+8 ^s .56	-0 ^s .06	0 ^s .0036
150	18 15.9	.65	-1.0	-0.01	.64	+0.02	0.0004
154	18 48.2	.67	-4.2	-0.02	.65	+0.03	0.0009
					+8.617	-0.01	0.0049
$X_0 = 18^h06^m.2$				$m_u = \pm 0^s.028$			

Радиостанция РВМ Москва 14^h.
 $X = 19^h06^m21^s.163$, $T_0 = 14^h03^m29^s.987$, $S = 13^h26^m42^s.919$. $v = -12$

№№ пар Цингера	T	u	τ_i	$\omega_{10}^m \tau_i$	u_0	δ	$\delta\delta$
160	19 ^h 30 ^m .4	+8 ^s .89	+9.6	+0 ^s .05	+8 ^s .94	0	0
164	19 52.8	+8.91	+7.4	+0.04	.95	+0.01	0.0001
170	20 41.1	+8.94	+2.6	+0.01	.95	+0.01	0.0001
178	21 32.8	+9.00	-2.6	-0.01	.99	+0.05	0.0025
183	22 08.5	+8.98	-6.2	-0.03	.95	-0.01	0.0001
186	22 35.1	+8.93	-8.8	-0.04	.89	-0.05	0.0025
					+8.945	+0.03	0.0053
$X_0 = 21^h06^m.7$				$m_u = \pm 0^s.013$			

Радиостанция РПТ Ташкент 18^h.
 $X = 23^h07^m00^s.468$, $T_0 = 18^h03^m29^s.982$, $S = 17^h27^m 22^s.345$. $v = -7$

№№ пар Цингера и Горячева	T	u	τ_i	$\omega_{10}^m \tau_i$	u_0	δ	$\delta\delta$
194	23 ^h 25 ^m .3	+8 ^s .84	+10.2	+0 ^s .05	+8 ^s .89	-0 ^s .02	0 ^s .0004
1	0 05.9	+8.88	+6.1	+0.03	+8.91	0	0
4	0 27.9	+9.00	+3.9	+0.02	+9.02	+0.11	0.0121
7	0 51.1	+8.87	+1.6	+0.01	+8.88	-0.03	0.0009
14	1 33.2	+8.82	-2.6	-0.01	+8.81	-0.10	0.0100
20 (Горяч.)	1 54.7	+8.83	-4.7	-0.02	+8.81	-0.10	0.0100
19	2 10.2	+9.05	-6.3	-0.03	+9.02	+0.11	0.0121
$X_0 = 1^h07^m.3$					+8.906	-0.03	0.0446
				$m_u = \pm 0^s.033$			

12/13 сентября. Радиостанция РВМ Москва 22^h.
 $X = 3^h07^m39^s.772$, $T_0 = 22^h03^m29^s.984$, $S = 21^h28^m01^s.770$. $v = -12$

	РВМ ₁₃			РВМ ₁₄			РПТ ₁₈			РВМ ₂₃		
S	11	26	23.207	13	26	42.919	17	27	22.345	21	28	01.770
$X-v$	17	06	01.502	19	06	21.151	23	07	00.461	3	07	39.760
V	-5	39	38.295	-5	39	38.232	-5	39	38.116	-5	39	37.990
ω_{10}^m				+0 ^s .0052			+0 ^s .0048			+0 ^s .0053		

Долгота определялась по формуле

$$\lambda = X_0 + u_0 + nut - S,$$

где: S — Гринвичское звездное время,

X_0 — показания хронометра в средний момент передач радиосигналов,

u_0 — поправка хронометра,

nut — поправка за короткопериодический член нутации.

За единицу веса принята долгота, выведенная независимо из определений поправок хронометра по 6 парам звезд Цингера, замкнутых приемами ритмических сигналов времени.

X_0	S	$X_0 - S$	$u_0 + nut$	λ	Дата
20 ^h 02 ^m 35 ^s .157	14 ^h 22 ^m 56 ^s .216	5 ^h 39 ^m 38 ^s .941	+8 ^s .073+0 ^s .007	5 ^h 39 ^m 47 ^s .021	11/12 сентября
1 03 24.322	19 23 45.500	38.882	+8.102+0.008	46.932	"
18 06 11.326	12 26 33.063	38.263	+8.617+0.011	46.891	12/13 сентября
21 06 40.806	15 27 02.632	38 134	+8.945+0.012	47.091	"
1 07 20.110	19 27 42.058	38.052	+8.906+0.013	46.971	"
19 10 16.844	13 30 39.474	37.370	+9.536+0.014	46.920	13/14 сентября
19 14 12.620	13 34 36.026	36.594	+10.277+0.013	46.884	14/15 сентября
				5 ^h 39 ^m 46 ^s .9634	

Дата	λ	p	δ	$\delta\delta$	
11/12 сентября	$5^h 39^m 47^s .021$	1.2	-0.058	0.003364	$m_\lambda = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n(n-1)}}$
"	46.932	0.7	+0.031	0.000961	
12/13 сентября	46.891	0.5	+0.072	0.005184	$m_\lambda = \pm \sqrt{\frac{0.034047}{42}} =$ $\pm 0^s .028$
"	47.091	1.0	-0.128	0.016384	
"	46.971	1.2	-0.008	0.000064	
13/14 сентября	46.920	1.2	+0.043	0.001849	
14/15 сентября	46.884	1.2	+0.079	0.006241	
	$5^h 39^m 46^s .9634$	7.0		0.034047	

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\Delta \lambda_1 \cdot p_1 + \Delta \lambda_2 \cdot p_2 + \dots}{p_1 + p_2 + \dots} = 5^h 39^m 46^s + \frac{1 \cdot 1441}{7} = 5^h 39^m 46^s .963$$

$$\lambda = 5^h 39^m 46^s .963 \pm 0.028$$

Полученные результаты широты, отнесенные к среднему моменту наблюдения, а также долготы (после введения поправки за личную разность) следует считать наиболее вероятными и по точности удовлетворяющими требованиям 1-го класса современных астроопределений. Точность полученных результатов характеризует как метод наблюдений, так и точность инструмента.

Кафедра астрономии и геодезии
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

Б. Г. КУЗНЕЦОВ

К ВОПРОСУ О ВТОРОМ ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ БЕЙТМАНА

В работе Гиза [1] дано подтверждение второго вариационного принципа Бейтмана для установившихся потоков совершенного газа в заданной конечной области τ трехмерного пространства без скачков уплотнения. Ниже дано подтверждение аналогичного предложения для установившихся потоков произвольного невязкого газа в n -мерном пространстве. При этом предполагается, что область τ может зависеть от решения (задачи о струе, о потоке за поверхностью разрыва), а также содержать поверхность разрыва внутри себя. Возникающие при этом краевые задачи обладают некоторыми особенностями по сравнению с обычно рассматриваемыми задачами. Переход к безразмерным величинам позволяет обобщить предложение Ю. В. Руднева [3] на пространственные потоки и доказать аналогичные предложения для течений с переменным давлением торможения.

§ 1. Вариация интеграла с переменной областью интегрирования

Необходимо найти первую вариацию функционала

$$J = \int_{\tau} F\left(x_e, u_i, \frac{\partial u_k}{\partial x_e}\right) d\tau - \int_{\Sigma} f_1(x_e, u_i) d\Sigma, \quad (1)$$

если граница σ n -мерной области τ варьирует и, кроме того, в τ имеется заранее неизвестная поверхность разрыва производных $\frac{\partial u_i}{\partial x_e}$

(функции u_i непрерывны в τ). Поверхность разрыва Σ делит область τ на две изменяющиеся части τ_j ; в области τ_j за подынтегральную функцию берем функцию F_j . Подобная задача для плоского случая, без поверхности разрыва, рассмотрена Курантом [2].

Для дальнейшего удобно ввести следующие символы:

$$\begin{aligned} a_{kl} &= \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \\ \frac{D(u)}{D(x)} &= \frac{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \\ \frac{D_k(u)}{D_l(x)} &= \frac{\partial}{\partial a_{kl}} \frac{D(u)}{D(x)}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\frac{D_{ks}(u)}{D_{em}(x)} = \frac{\partial}{\partial a_{sm}} \frac{D_k(u)}{D_e(x)},$$

для которых справедливы очевидные тождества:

$$\frac{\dot{D}_k(u)}{D_e(x)} \frac{\partial u_r}{\partial x_e} = \frac{D_e(u)}{D_k(x)} \frac{\partial u_e}{\partial x_r} = \frac{D(u)}{D(x)} \delta_{kr},$$

$$\frac{D_{ks}(u)}{D_{em}(x)} = -\frac{D_{\kappa s}(u)}{D_{me}(x)} = \frac{D_{s\kappa}(u)}{D_{me}(x)}, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_e} \left[\Phi \frac{D_\kappa(u)}{D_e(x)} \right] = \frac{D(u)}{D(x)} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\kappa},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_e} \left[\Phi \frac{D_{\kappa s}(u)}{D_{em}(x)} \right] = \frac{D_s(u)}{D_m(x)} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\kappa} - \frac{D_\kappa(u)}{D_m(x)} \frac{\partial \Phi}{\partial u_s}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_e} = \frac{D(\xi)}{D(x)} \frac{D_e(x)}{D_s(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi_s},$$

$$\frac{D_\kappa(u)}{D_s(x)} \frac{D_s(x)}{D_e(\xi)} = \frac{D_\kappa(u)}{D_e(\xi)}. \quad (1.5)$$

Здесь δ_{kr} — символ Кронекера, $\Phi(u_1, u_2, \dots, u_n)$ — произвольная дифференцируемая функция; повторение индекса в одном члене или в произведении означает суммирование по всем значениям индекса.

Представим себе, что меняющаяся область τ может быть отображена посредством взаимно однозначного непрерывно дифференцируемого преобразования

$$x_e = \varphi_e(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (e = 1, 2, \dots, n) \quad (1.6)$$

на некоторую неизменную область t , причем каждая из частей τ_j отображается на неизменную часть t_j области t . Тогда n -мерный интеграл из (1.1) преобразуется в интеграл:

$$J_1 = \int_t F(x_e, u_i, a_{\kappa l}) \frac{D(\varphi)}{D(\xi)} dt$$

по неизменной области t , вариация которого

$$\begin{aligned} \int_{t_j} \left\{ \left[\frac{\partial F_j}{\partial x_e} \delta \varphi_e + \frac{\partial F_j}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial F_j}{\partial a_{\kappa l}} \frac{\partial}{\partial x_l} \delta u_\kappa \right] \frac{D(\varphi)}{D(\xi)} + \right. \\ \left. + F_j \frac{D_\kappa(\varphi)}{D_e(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi_e} \delta \varphi_\kappa \right\} dt \end{aligned}$$

с помощью тождеств (1.3) — (1.5) принимает вид:

$$\delta J_1 = \int_{\tau_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_e} (F_j \delta \Phi_e) + \frac{\partial F_j}{\partial u_\kappa} \delta \bar{u}_\kappa + \frac{\partial F_j}{\partial a_{\kappa l}} \frac{\partial}{\partial x_l} \delta \bar{u}_\kappa \right\} d\tau, \quad (1.7)$$

где $\frac{\partial}{\partial x_e}$ — субстанциональная производная,

$$\delta \bar{u}_\kappa = \delta u_\kappa - \frac{\partial u_\kappa}{\partial x_e} \delta z_e. \quad (1.8)$$

Варьируя функционал J , подставляя (1.7) и учитывая, что функции u_κ непрерывны, получим окончательно

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{\tau_j} \left\{ \frac{\partial F_j}{\partial u_\kappa} - \frac{\partial}{\partial x_e} \frac{\partial F_j}{\partial a_{\kappa e}} \right\} \delta \bar{u}_\kappa d\tau + \\ & + \int_{\sigma_j} \left\{ \left(F n_e v_e - \frac{\partial F_j}{\partial a_{\kappa s}} \frac{\partial u_\kappa}{\partial x_e} n_s v_e - \frac{\partial f_1}{\partial x_e} v_e \right) \delta v + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial F_j}{\partial a_{\kappa e}} n_e - \frac{\partial f_1}{\partial u_\kappa} \right) \delta u_\kappa \right\} d\sigma + \\ & + \int_{\Sigma} \left\{ \left[F n_e v_e - \frac{\partial F}{\partial a_{\kappa s}} \frac{\partial u_\kappa}{\partial x_e} n_s v_e \right] \delta v + \left[\frac{\partial F}{\partial a_{\kappa e}} n_e \right] \delta u_\kappa \right\} d\sigma. \quad (1.9) \end{aligned}$$

Здесь $v_e \delta v = \delta \varphi_e$, n_e — направляющие косинусы внешней нормали к Σ (для Σ по отношению к τ_1), символом $[\dots]$ обозначен разрыв соответствующих функций на поверхности Σ , т. е. $[A] = (A_1)_\Sigma - (A_2)_\Sigma$; направление $\vec{v} = v_e \vec{i}_e$ совершенно произвольно.

§ 2. Второй вариационный принцип Бейтмана

Принцип Бейтмана (1) утверждает, что вариационное уравнение

$$\delta \int_{\tau} (p + \rho u^2) d\tau = 0 \quad (2.1)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_e} (\rho u_e) &= 0, \quad u_e \frac{\partial S}{\partial x_e} = 0, \\ \frac{u^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} &= 0, \quad \rho = \rho(p, S), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$p_0 = p_0(\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n), \quad u_e \frac{\partial \psi_k}{\partial x_e} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

эквивалентно уравнениям установившегося движения газа в n -мерном пространстве. Здесь p , ρ , S , p_0 , u_κ , u — соответственно давление, плот-

ность, энтропия, давление торможения, компоненты и величина скорости.

В цитированной работе Гиза дано подтверждение этого принципа для потока совершенного газа в заданной конечной области τ трехмерного пространства без скачков уплотнения. Ниже дается распространение принципа на случай потока произвольного невязкого газа, движущегося в варьируемой области τ n -мерного пространства, внутри которой может проходить скачок уплотнения.

Из тождества (1.4) следует, что уравнение неразрывности удовлетворится, если положить

$$\rho u_k = \Phi(\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n) \frac{D_1(\psi)}{D_k(x)} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.2)$$

Вместо уравнения (2.1) рассмотрим более общее уравнение

$$\delta \int_{\tau} (p + \rho u^2 - f) d\tau - \delta \int_{\sigma} f_1 d\sigma = 0, \quad (2.4)$$

в котором $f(x_e)$ и $f_1(x_e, \psi_i, S)$ — заданные функции, σ — граница области τ . Удобно далее перейти к вариационному уравнению для безусловного экстремума, заменяя сразу те множители Лагранжа, которые выражаются через гидродинамические элементы в конечном виде. В результате получим:

$$\delta \int_{\tau} \left\{ \left(u_k - \lambda \frac{\partial S}{\partial x_k} \right) \Phi \frac{D_1(\psi)}{D_k(x)} - \rho \left(\frac{u^2}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + E + V \right) - f \right\} d\tau - \delta \int_{\sigma} f_1 d\sigma = 0. \quad (2.5)$$

Здесь $E(S, \rho, p_0)$ — внутренняя энергия точки, отнесенная к единице массы, и $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — потенциал внешних сил, являются заданными (не варьируемыми) функциями; λ — множитель Лагранжа, не выражаемый в конечном виде. В отличие от обычных формул, здесь удобно положить

$$dE = TdS + \frac{p}{\rho^2} d\rho - \frac{1}{\rho_0} dp_0. \quad (2.6)$$

Понятно, что вместо независимых переменных S, ρ, p_0 могут быть взяты такие, например, группы переменных: $T_0, \rho, p_0; T, \rho_0, p_0; T_0, \rho_0, p$ и т. п. Для вычисления вариаций функционала (2.5) воспользуемся формулой (1.9), причем, не нарушая общности, можем считать, что величина δS одинакова с обеих сторон поверхности разрыва. Прежде всего покажем, что уравнения Эйлера для (2.5) эквивалентны уравнениям движения газа. Из (1.9) и (2.5) следует, что в τ справедливы соотношения:

$$\rho u_k = \Phi \frac{D_1(\psi)}{D_k(x)} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ u_l \frac{\partial S}{\partial x_l} = 0, \quad T = \frac{\partial E}{\partial S} = u_k \frac{\partial \lambda}{\partial x_k}. \quad (2.7)$$

$$-\frac{u^2}{2} + E + V + \frac{p}{\rho} = 0, \quad (2.8)$$

$$\Phi \cdot \frac{D_{1\kappa}(\psi)}{D_{se}(x)} \frac{\partial u_s}{\partial x_e} = -\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial \psi_\kappa} - \rho T \frac{\partial S}{\partial \psi_\kappa} \quad (\kappa = 2, 3, \dots, n). \quad (2.9)$$

Соотношение (2.8) представляет не что иное, как интеграл Бернулли, а уравнения (2.9) — преобразованные уравнения движения. Действительно, умножая k -тое уравнение (2.9) на $\frac{\partial \psi_\kappa}{\partial x_r}$ и суммируя по k , будем иметь:

$$u_s \frac{\partial u_s}{\partial x_r} = u_e \frac{\partial u_r}{\partial x_e} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x_r} - T \frac{\partial S}{\partial x_r}. \quad (2.10)$$

Дифференцирование по x_r интеграла Бернулли и подстановка в (2.10) дает

$$u_e \frac{\partial u_\kappa}{\partial x_e} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left[-\frac{p}{\rho} \right] + \frac{\partial V}{\partial x_\kappa} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

т. е. уравнения движения.

§3. Краевые условия

Из (1.9) следует, что в силу (2.5) и (2.7) — (2.9)

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_j} \left\{ \left(n_e v_e (p - f) + \rho u_n u_v - \frac{\partial f_1}{\partial x_e} v_e \right) \delta v - \right. \\ \left. - \left(\rho u_n \lambda + \frac{\partial f_1}{\partial S} \right) \delta S + \left(\rho u_n \lambda \frac{\partial S}{\partial \psi_k} + \right. \right. \\ \left. \left. + u_s \Phi \frac{D_{1\kappa}(\psi)}{D_{se}(x)} n_e - \frac{\partial f_1}{\partial \psi_k} \right) \delta \psi_k \right\} d\tau = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если область τ не варьируется ($\delta v = 0$), то краевые условия могут быть заданы тремя способами:

1) На поверхности σ заданы значения всех функций тока ψ_k ($k = 2, 3, \dots, n$). Так как энтропию можно считать заданной функцией от ψ_k , то и $(\delta S)_\sigma = 0$. Следует отметить, что если некоторая $(n-1)$ -мерная область σ_1 — часть границы — является твердой стенкой, то на ней достаточно принять $f_1 \equiv 0$ и положить, что уравнение этой части σ может быть записано в виде $\varphi(\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n) = 0$. Подобная задача может быть поставлена для эллиптических уравнений (2.9).

2) На части границы σ_1 (например, где газ входит в область τ) заданы значения функций ψ_k , на остальной части σ_2 значения функций тока, а следовательно, и S не заданы. Тогда на σ_2 должны выполняться условия

$$\rho u_n \lambda = -\frac{\partial f_1}{\partial S},$$

$$\Phi u_s \frac{D_{1\kappa}(\psi)}{D_{se}(x)} n_e = \frac{\partial f_1}{\partial \psi_k} + \frac{\partial f_1}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \psi_k} \quad (k = 2, 3, \dots, n). \quad (3.2)$$

Краевые условия такого типа должны задаваться, например, в области, где уравнения (2.9) будут гиперболическими.

3) Возможны краевые условия типа (3.2) на всей поверхности Σ (задача Неймана). Область τ может зависеть от решения, если часть границы является поверхностью тока (задача о струе) или поверхностью разрыва (задача о потоке за скачком уплотнения). В первом случае скорость ортогональна нормали $\vec{n}$, поэтому при $f_1 \equiv 0$ уравнение (3.1) будет удовлетворено, если

$$f = p. \quad (3.3)$$

Во втором случае на неизвестной поверхности разрыва должны быть заданы соотношения (3.2) и, кроме того,

$$n_e v_e p = f n_e v_e + \rho u_n u_v - \frac{\partial f_1}{\partial x_e} v_e, \quad (3.4)$$

при любом $\vec{v}$. Соотношения (3.2), (3.4) обеспечивают непрерывность потока импульса при переходе через ударную волну. Вопросы существования и единственности здесь не рассматриваем.

§ 4. Условия динамической совместности

Исследуем условия на поверхности разрыва Σ . Из (2.5) по формулам (1.9) получаем, что на Σ должны выполняться условия:

$$[\rho n_e v_e + \rho u_n u_v] = 0, \quad (4.1)$$

$$[\rho u_n \lambda] = 0, \quad (4.2)$$

$$\left[\Phi u_s \frac{D_{1k}(\psi)}{D_{se}(x)} n_e \right] = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, n). \quad (4.3)$$

Квадратные скобки означают разрыв соответствующих элементов. Последняя группа условий динамической совместности эквивалентна векторному условию

$$[\vec{u}_\Sigma] = 0, \quad (4.4)$$

где $\vec{u}$ — касательная составляющая скорости на поверхности разрыва.

Условия (4.1) должны быть выполнены при любом направлении $\vec{v}$, в частности при $n_e v_e = 0$. В этом случае, с учетом (4.4), получим, что

$$[\rho u_n] = 0, \quad (4.5)$$

а условие (4.2) дает

$$[\lambda] = 0. \quad (4.6)$$

Соотношения (4.1), (4.4) и (4.5) составляют часть известных условий динамической совместности. Условие динамической совместности, получаемое из энергетических соображений, здесь отсутствует, так как вид функций $E_j(S, \rho, p_0)$ задается нами произвольно или из физических соображений. По известным причинам, мы можем здесь рассматривать только краевые условия типа (б). При этом могут возникнуть интересные особенности: 1) если поверхность разрыва Σ задать

заранее ($\delta v = 0$), то при этом условии (4.1), вообще говоря, не будет выполнено; 2) если задать поток до (после) поверхности Σ , то не будут выполнены, вообще говоря, условия (4.3) и (4.2). Для того, чтобы обеспечить их выполнение, мы должны специальным образом подбирать функции E , p_0 , S после (до) поверхности разрыва.

С другой стороны, если какое-нибудь из условий динамической совместности не выполнено, то задача допускает, по-видимому, бесчисленное множество решений.

§ 5. Принцип Бейтмана в безразмерном виде

Выше указывалось, что функцией $\Phi(\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n)$ мы можем располагаться произвольно. Пусть $p_0 \neq 0$ и $v_0 \neq 0$; положим $\Phi^2 = p_0 \rho_0$ и будем считать координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ безразмерными. Перейдем к безразмерным гидродинамическим элементам

$$\bar{p} = p/p_0, \quad \bar{\rho} = \rho/\rho_0, \quad \bar{u}_k = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} \bar{u}_k, \quad \bar{T} = T/T_0. \quad (5.1)$$

Пусть внутренняя энергия E может быть записана в виде

$$\rho_0 E = p_0 \bar{E}(\bar{\rho}). \quad (5.2)$$

(Например, для адиабатического процесса совершенного газа имеем $\bar{E} = c_v \bar{T} - \frac{\gamma}{\gamma-1} = c_v \bar{\rho}^{\gamma-1} - \frac{\gamma}{\gamma-1}$).

Подставляя эти соотношения в вариационное уравнение (2.5), при отсутствии массовых сил, получим:

$$\delta \int \left\{ p_0 \left[\left(\bar{u}_k - \bar{\lambda} \frac{\partial S}{\partial x_k} \right) \frac{D_1(\psi)}{D_k(x)} - \bar{\rho} \left(\frac{\bar{u}^2}{2} + \bar{E} \right) \right] - f \right\} d\tau - \delta \int f_1 d\tau = 0. \quad (5.3)$$

Функция $\bar{\lambda}$ здесь имеет очевидное решение $\bar{\lambda} = 0$, т. е. решение задачи не зависит от вида функции S . Иными словами, если внутренняя энергия может быть представлена в виде (5.2), то, зная решение при некоторой $S(\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n)$, мы можем получить класс решений с теми же линиями тока при любом S . Вид функции p_0 при этом остается неизменным. В частности, при $p_0 = \text{const}$ уравнениями типа (2.7), (2.9), для (5.3) будут:

$$\begin{aligned} \frac{D_{1k}(\psi)}{D_{se}(x)} \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x_e} &= 0 \quad (k = 2, 3, \dots, n), \\ \bar{\rho} \bar{u}_e &= \frac{D_1(\psi)}{D_e(x)} \quad (l = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (5.4)$$

В плоском случае эти уравнения описывают потенциальное, а в пространственном ($n = 3$) — винтовое движение некоторого газа. Таким

образом, если внутренняя энергия при $p_0 = \text{const}$ может быть представлена в виде (5.2), то задача при любом S может быть сведена в плоском случае к задаче о потенциальном, а в пространственном — к задаче о винтовом движении газа.

Этот результат является обобщением известного предложения Ю. В. Руднева (3,4) на n -мерные потоки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Гиз, Функции тока для трехмерных потоков, „Механика“ (сборник переводов), № 1, 1953.
2. Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 1 стр. 224 — 226, ГИТТЛ, (1951).
3. Руднев Ю. В., О некоторых движениях газа с переменной энтропией и полной энергией, ДАН СССР, т. LIX, № 5, 1948.
4. Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, ГИТТЛ, (1953).

Кафедра теоретической механики
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

А. И. КОЧЕТКОВ

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОБОБЩЕНИЯ ФОРМУЛ СФЕРИЧЕСКОЙ И ПРАКТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

В настоящей работе автором предложены некоторые теоретические обобщения отдельных формул и способов сферической и практической астрономии. Здесь рассматриваются следующие вопросы:

1. Общие формулы связи географической широты места, склонения и зенитного расстояния светила.
2. Способ Певцова в меридиональных координатах и общая формула широты, определяемой из меридиональных наблюдений.
3. О структурном единстве теории определения широты по Певцову и времени по Цингеру.
4. Основная формула широты Талькотта—частный случай основной формулы широты Певцова.
5. Общая формула широты, определяемой основными современными способами из астрономических наблюдений.

В этом списке большинство общих выводов касается одной из основных задач астрономии — определения географической широты места.

Обобщенные формулы выведены на основе разработанной автором новой, меридиональной системы сферических координат.

1. О меридиональной системе сферических координат

С точки зрения меридиональной координатной системы, в которой основной плоскостью является плоскость меридиана места, положение светила в данный момент рассматривается как положение на некоторой меридионали — малом круге сферы, параллельном меридиану; удаление этой меридионали от меридиана выражается координатой u новой системы.

Подобно тому, как экватор есть наибольшая суточная параллель и горизонт — наибольший альмукантарат, так и в меридиональной системе меридиан рассматривается как наибольшая меридиональ, как частный случай меридионали.

Эта новая точка зрения имеет непосредственное и прямое отношение к решению практических задач полевой астрономии. Так, например, как известно, наивыгоднейшим условием определения широты по способу Певцова является наблюдение двух звезд (южной и северной) на равном удалении от меридиана. Геометрически это означает, что звезды пары должны наблюдаться на одной общей меридионали.

Меридиональная система координат опирается в своих применениях на решение только прямоугольных сферических треугольников ($u \perp k$ меридиану).

Основной плоскостью меридиональной системы является плоскость небесного меридиана; главной точкой системы — точка Запада и вспо-

могательным кругом, аналогичным, например, кругу склонений,—большой круг сферы, проходящий через точку Запада и центр этого светила; „круг наклонения“ светила (рис. 1).

Координаты системы „отклонение светила“—есть угол, составленный с плоскостью меридиана лучем зрения от наблюдателя, глаз которого находится в центре небесной сферы, на светило.

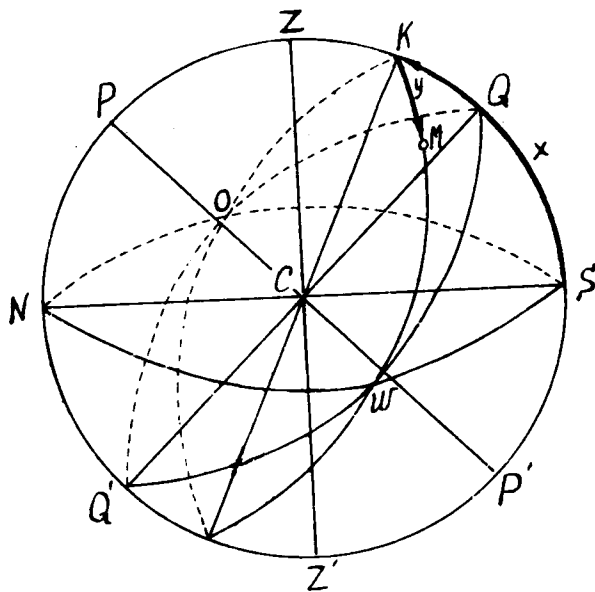


Рис. 1

Эта координата измеряется дугой от меридиана по кругу наклонения до светила и изменяется от 0° до $\pm 90^\circ$ в обе стороны от меридиана (к т. Запада $+y$ и к т. Востока $-y$). Геометрически меридиональная координата y выражает сферическое расстояние от меридиана малого круга, параллельного меридиану, на котором в данный момент находится звезда.

Вторая меридиональная координата x — „наклонение светила“—есть двугранный угол, составленный плоскостью круга наклонения светила с плоскостью горизонта. Этот угол измеряется дугой SK меридиана от точки юга S горизонта до круга наклонения. Координата x определяет положение на небесной сфере круга наклонения светила и координата y —положение светила на этом круге наклонения в момент наблюдения. Меридиональная координата x геометрически выражает сферическое расстояние точки K пересечения круга наклонения светила с меридианом от точки юга горизонта, по меридиану. Аналогичная координате x дуга k меридиана от небесного экватора до точки K выражает сферическое расстояние круга наклонения от экватора и связана с x формулой:

$$x - k = 90 - \varphi. \quad (1)$$

Обе координаты x и y зависят от суточного вращения небесной сферы и в течение суток непрерывно изменяются.

Меридиональная система сферических координат есть система местного характера подобно, например, горизонтальной системе и первой экваториальной системе (в отношении часового угла t).

Координату y можно заменить координатой q , связанной с первой соотношением

$$q = 90 - y, \quad (2)$$

где q — „западное расстояние“ светила, изменяющееся от 0° (*West*) до 180° (*East*).

Координату x по формуле (1) можно заменить величиной k . Кроме того, обозначая дугу ZK символом z_p , отметим соотношение

$$z_p = 90 - x. \quad (3)$$

Координата y изменяется в пределах от 0° (светило в меридиане) до z — в момент, когда светило проходит первый вертикал.

Координата x изменяется в пределах дуги меридиана, опирающейся на диаметр суточной параллели данного светила.

Выведем некоторые используемые в дальнейшем изложении формулы связи меридиональных координат с общепринятыми координатами — экваториальными и горизонтальной, пользуясь решением сферических прямоугольных треугольников PKM и ZKM (рис. 2 и 3), где M — южная или северная звезда.

Первый из них образован на небесной сфере меридианом, кругом склонений светила и его кругом наклоения.

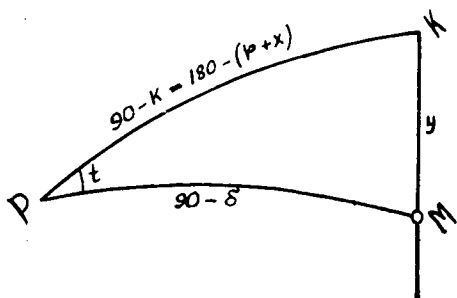


Рис. 2

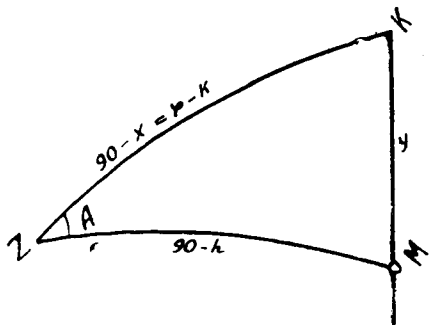


Рис. 3

Значения его сторон и углов даны на чертеже. Из этого треугольника по правилу Непера-Модью просто получаем:

$$\sin y = \cos \delta \cdot \sin t, \quad (4)$$

$$\cos y \cdot \sin k = \sin \delta. \quad (5)$$

Из формулы (1) и (3):

$$x = k + 90 - q, \quad (6)$$

и

$$z_p = 90 - x = q - k. \quad (7)$$

Далее:

$$\operatorname{tg} y = \cos k \cdot \operatorname{tg} t, \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} k = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos t}. \quad (9)$$

Разделив почленно формулу (4) на (8), будем иметь:

$$\cos k \cdot \cos y = \cos \delta \cdot \cos t. \quad (9)^1$$

Второй сферический треугольник ZKM (рис. 3) образован на небесной сфере меридианом, кругом высот светила и его кругом на-

клонения. Значения его сторон и углов показаны на чертеже. Из решения этого треугольника получаем

$$\sin h = \cos y \cdot \sin x \quad (10)$$

или:

$$\cos z = \cos y \cdot \sin x, \quad (10')$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} y}{\cos x} \quad (11)$$

или:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} y}{\sin(\varphi - k)} \quad (11')$$

и, наконец,

$$\sin y = \cos h \cdot \sin A. \quad (12)$$

Все приведенные формулы связи отличаются очевидной простотой, логарифмическим видом, удобством для использования, например, арифмометра.

2. Общие формулы связи географической широты места, склонения и зенитного расстояния светила (φ , δ , z)

В астрономических определениях большую роль играют и имеют широкое применение известные формулы, связывающие широту, склонение и зенитное расстояние светила в момент прохождения его через меридиан данного места.

Эти классические формулы имеют вид: для верхней кульминации южной звезды

$$\varphi = \delta + \zeta, \quad (13)$$

для верхней кульминации северной звезды

$$\varphi = \delta - \zeta \quad (14)$$

и для нижней кульминации

$$\varphi = 180 - (\delta + \zeta). \quad (15)$$

Эти формулы справедливы только для наблюдений светила в меридиане.

Ниже дается обобщение этих формул на все положения светила, т. е. на любые внемеридианные наблюдения — с помощью меридиональной системы сферических координат. Обобщенные формулы выведем геометрическим путем.

Первый случай: звезда в южном полушарии неба и кульминирует к югу от зенита. Для вывода общей формулы в этом случае пользуемся рис. 4. Его обозначения: M —светило,

δ , t , z — склонение, часовой угол и зенитное расстояние звезды, y — координата меридиональной системы, $k = \cup QK$ — элемент (вторая координата) меридиональной системы; в условиях данной задачи геометрически k есть сферическая проекция склонения δ на меридиан в мо-

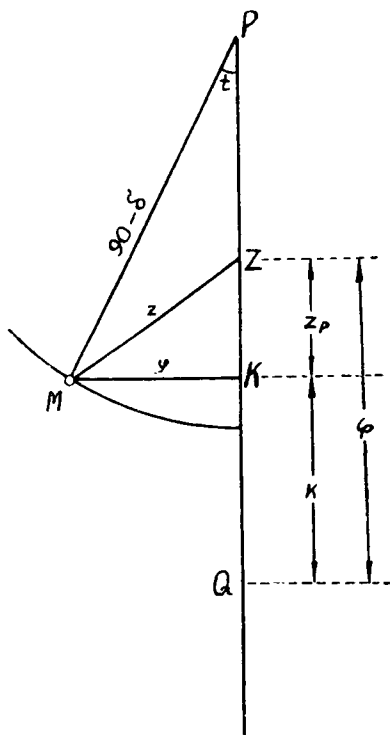


Рис. 4

мент наблюдения; $z_p = \cup KZ$ есть дуга меридиана и геометрически представляет собой сферическую проекцию измеренного зенитного расстояния z на тот же меридиан.

Непосредственно на рис. 4 имеем:

$$\varphi = k + z_p. \quad (16)$$

Здесь k вычисляется по формуле (9): $\operatorname{tg} k = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos t}$.

Величина z_p легко определяется из прямоугольного сферического треугольника MKZ

$$\cos z_p = \frac{\cos z}{\cos y}. \quad (17)$$

или, принимая во внимание формулу (5):

$$\cos z_p = \frac{\cos z \cdot \sin k}{\sin \delta}. \quad (18)$$

Таким образом, для полного определения в формуле (16) k и z_p надо знать t — часовой угол и z — зенитное расстояние светила. Величины k и z_p суть функции, соответственно, склонения и зенитного расстояния светила.

Формула (16) и есть общая формула связи φ , δ , z для всех положений светила на сфере в рассматриваемом случае, в том числе и для частного положения светила в меридиане. Действительно, в момент верхней кульминации часовой угол $t = 0$; из формулы (9), принимая во внимание пределы изменения δ и k в данном случае, получаем $k = \delta$, т. е. величина k переходит в δ , сферическая проекция склонения на меридиан переходит в самое склонение. Из формулы (18) одновременно в этом случае получаем $\cos z_p = \cos z$ и, т. к. для реальных наблюдений должно быть $z < 90^\circ$ и, следовательно, $z_p < 90^\circ$, имеем $z_p = z$, т. е. величина z_p переходит в z , сферическая проекция зенитного расстояния светила на меридиан переходит в самое меридианное зенитное расстояние светила.

Итак, общая формула $\varphi = k + z_p$ выразится для $t = 0$ классической формулой (13) $\varphi = \delta + z$, что в строгой форме и подтверждает общий характер выведенной формулы (16).

Второй случай: звезда в северном полушарии неба ($t < 90^\circ$) и кульминирует между зенитом и полюсом. Общую формулу в этом случае получим непосредственно из рис. 5, где обозначения даны те же, что и в предыдущем рисунке:

$$\varphi = k - z_p. \quad (19)$$

В этом случае $k > \varphi$ и для получения связи между φ , k и z_p надо взять разность $k - z_p$. Величину k определим по (9) и z_p по (18).

Для частного случая наблюдений светила в меридиане, когда $t = 0$, мы снова из формулы (19) получим классическую формулу (14) для случая верхней кульминации к северу от зенита: $\varphi = \delta - z$, чем подтверждается общий характер выведенной формулы (19). Обе общие формулы (16) и (19), относящиеся к положению южной и северной звезд, когда они ближе к верхней кульминации, чем к нижней, можно объединить в одну:

$$\varphi = k \pm z_p. \quad (20)$$

При этом $+$ относится к южной и $-$ к северной звезде.

Третий случай: звезда в северном полушарии неба и ближе к нижней кульминации. Для вывода общей формулы в этом случае воспользуемся рис. 6 с теми же обозначениями.

В этом случае ($90^\circ < t < 270^\circ$) сферической проекцией склонения δ на меридиан является

$$\cup KQ' = k', \text{ где } k' = 180 - k \quad (21)$$

и общая формула получается в виде

$$\varphi = 180^\circ - (k' + z_p). \quad (22)$$

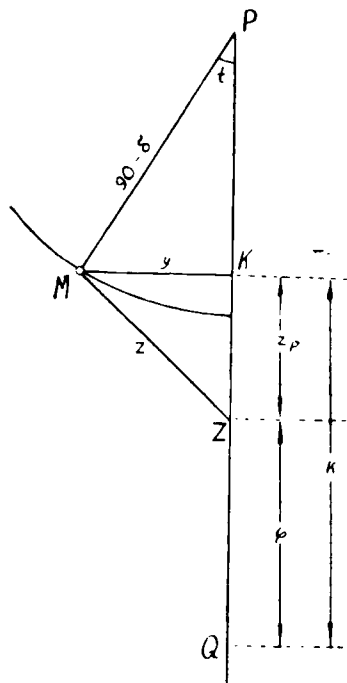


Рис. 5

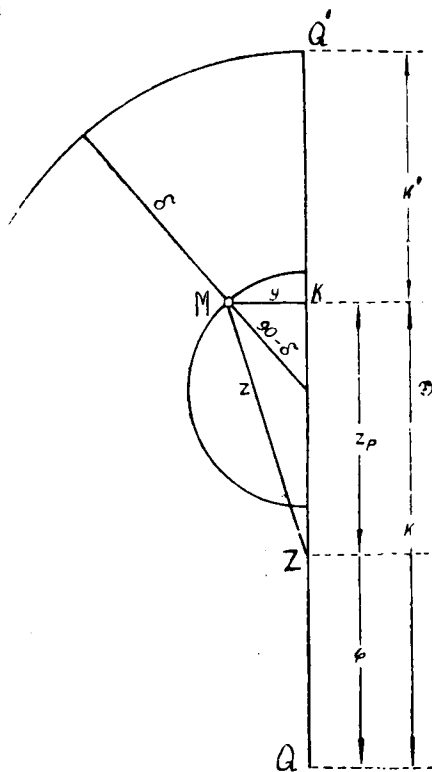


Рис. 6

Для частного случая, когда звезда проходит нижнюю кульминацию ($t=180^\circ$), в формуле (22) k' и z_p соответственно переходят в δ и ζ — склонение и меридианное зенитное расстояние, т. е. мы опять получаем классическую формулу (15) для этого случая:

$$\varphi = 180 - (\delta + \zeta).$$

Для вычисления формулы (22), как и для случая верхней кульминации, применяются те же формулы (9) и (18).

Форма общей связи $\varphi = 180 - (k' + z_p)$ получена лишь для обобщения меридианной формулы $\varphi = 180 - (\delta + \zeta)$. Если общая формула (22) применяется для определения широты φ по измеренному зенитному расстоянию z и отсчету T по хронометру при известной его поправке u , то эта общая формула имеет более простой вид.

Действительно, учитывая формулу (21), имеем $\varphi = 180 - (k' + z_p) = (180 - k') - z_p = k - z_p$, т. е. формула имеет тот же вид, как и в случае верхней кульминации северной звезды — формула (19).

Таким образом, можно считать установленным, что общими формулами связи между широтой, склонением и зенитным расстоянием светила при любом его положении на небесной сфере являются предложенные здесь формулы:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= k + z_p, \\ \varphi &= k - z_p, \\ \varphi &= 180 - (k' + z_p) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Эти формулы по своему внешнему виду совершенно подобны соответствующим частным формулам для меридианных наблюдений. Различие между этими общими формулами и меридианными, частными, состоит в том, что если в последних участвуют сами склонение и зенитное расстояние светила, то в общих формулах участвуют сферические проекции этих координат на меридиан. Например, первая из частных меридианных формул $\varphi = \delta + \zeta$ читается так: географическая широта равна сумме склонения и зенитного расстояния светила в меридиане. Соответствующая ей общая формула $\varphi = k + z_p$ читается в такой форме: географическая широта места равна сумме сферических проекций на меридиан склонения и зенитного расстояния светила.

Из предложенных общих формул вытекают некоторые следствия практического характера.

Первое следствие. В вычислительной обработке наблюдений абсолютных зенитных расстояний, предназначенных для определения широты, достаточно вычислить—для получения широты—сферические проекции на меридиан склонения, надлежащим образом выбранного из астрономического ежегодника, и зенитного расстояния звезды, измеренного вертикальным кругом и исправленного за инструментальные погрешности, за наклон уровня и за рефракцию. В общем случае строгими формулами для вычисления этих проекций служат равенства (9) и (18).

Второе следствие. Этот метод вычисления широты по зенитным расстояниям делает, вообще говоря, излишним вычисление редукции для приведения измеренных внемеридианных зенитных расстояний на меридиан. Широта в этом случае будет получена по строгим формулам (16) и (19): $\varphi = k \pm z_p$, и метод редукции, принятый в существующей практике и обременительный в некоторых случаях, естественно, полностью отпадает.

Однако вопрос о теории и применении редукции на меридиан возникает и при использовании общих формул для некоторых частных случаев, например, когда разности $k - \delta$ и $z - z_p$ будут иметь малую величину, и поэтому допускают для их определения применение упрощенных формул.

3. Способ Певцова в меридиональных координатах и общая формула широты

Одним из лучших способов определения широты в экспедиционных условиях с помощью переносных угломерных инструментов по праву считается способ выдающегося русского астронома и геодезиста конца XIX века Михаила Васильевича Певцова.

Достоинства этого замечательного отечественного способа (простота наблюдений и точность результата) вызвали за последние десятилетия целый ряд исследований русских и советских ученых, посвященных дальнейшему развитию теории этого способа, дальнейшему совершенствованию и упрощению вычислительной техники. Теоретическую разработку способа Певцова нельзя еще считать законченной, г. к. возможности способа далеко не исчерпаны—особенно в отношении дальнейшего повышения точности результата.

Представляет определенный интерес рассмотрение способа Певцова в новых, меридиональных координатах.

Применение меридиональной координатной системы приводит к новой интерпретации сущности и структуры способа Певцова—это способ определения широты по наблюдениям двух звезд на равных высотах и на одной общей меридионали, или более кратко—по наблюдениям двух звезд на одном альмукантарате и на одной меридионали. При этом, если положение альмукантарата на сфере определяется высотой светила (или зенитным расстоянием)—горизонтальной координатой, то положение меридионали на сфере определяется отклонением у светила—меридиональной координатой.

Вывод основной формулы

На основании формулы (6) для южной и северной звезд напомним:

$$\varphi = 90 + k_s - x_s,$$

$$\varphi = 90 + k_n - x_n.$$

Складывая левые и правые части почленно, получаем в итоге:

$$\varphi = \frac{k_n + k_s}{2} + \left(90 - \frac{x_n + x_s}{2}\right) \quad (24)$$

Как легко понять, полусумма $\frac{k_n + k_s}{2}$ близка к искомой широте φ ; принимаем ее за приближенную широту φ_0 , т. е.

$$\varphi_0 = \frac{k_n + k_s}{2}. \quad (a)$$

Выясним значение разности $\left(90 - \frac{x_n + x_s}{2}\right)$. Напишем для каждой звезды пары равенство (10):

$$\sin h_s = \cos y_s \cdot \sin x_s.$$

$$\sin h_n = \cos y_n \cdot \sin x_n.$$

Учитывая равенство высот $h_s = h_n$, имеем

$$\cos y_s \sin x_s = \cos y_n \sin x_n. \quad (б)$$

Если, кроме равенства высот, при этих наблюдениях осуществить еще и второе условие—наблюдение обеих звезд на одной и той же меридионали ($y_s = y_n$), то (б) превращается в равенство $\sin x_s = \sin x_n$, что, учитывая невозможность для южной и северной звезд равенства

$$x_s = x_n, \text{ дает } x_s + x_n = 180^\circ, \quad (в)$$

т. е. меридиональные координаты x обеих звезд взаимно дополняют друг друга до 180° . В этом случае интересующая нас разность равна

$$\text{нулю, т. е. } 90 - \frac{x_n + x_s}{2} = 0.$$

В действительных наблюдениях по способу Певцова выполняется и обеспечивается лишь первое условие $h_s = h_n$, т. е. равенство высот (с помощью специального уровня). Второе же условие $y_s = y_n$, т. е. равенство удаления звезд от меридиана, не выполняется, хотя и в не-

большой степени; из анализа практических наблюдений этого рода видно, что разность $y_s - y_n$ достигает максимум нескольких минут дуги за весь период наблюдений. Но тем не менее нет и равенства

в), т. е. $x_n + x_s \neq 180^\circ$. Эта разность $90 - \frac{x_n + x_s}{2}$ достаточно мала,

как правило, от нескольких секунд до 2—3 минут дуги.

Назовем ее поправкой за различие расстояний звезд пары от меридиана, т. е. за неравенство $y_s \neq y_n$, или „за различие меридионалей звезд пары“ в моменты наблюдений и обозначим символом $\Delta\varphi$, т. е.

$$\Delta\varphi = 90 - \frac{x_n + x_s}{2}. \quad (г)$$

Теперь формулу (24) по (а) и (г) получаем в виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi. \quad (25)$$

Чтобы получить действительную широту φ , надо добавить еще поправку δ_φ за уровень, вычисляемую по обычным формулам.

Итак, основную формулу широты, определяемой по способу Левцова, в меридиональных координатах получим в окончательном виде

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi + \delta_\varphi. \quad (26)$$

Для получения по равенству (а) надо вычислить k_n и k_s по формуле 9) или (5); координаты y_n и y_s вычисляются по (4). Для вычисления поправки $\Delta\varphi$ надо вывести особую формулу. Из равенства (б) найдем

$$\frac{\sin x_s}{\sin x_n} = \frac{\cos y_n}{\cos y_s}. \quad (д)$$

Заменяем левое отношение по формуле (6):

$$\frac{\cos(\varphi - k_s)}{\cos(\varphi - k_n)} = \frac{\cos y_n}{\cos y_s}. \quad (27)$$

Составив из (27) производную пропорцию

$$\frac{\cos(\varphi - k_s) - \cos(\varphi - k_n)}{\cos(\varphi - k_s) + \cos(\varphi - k_n)} = \frac{\cos y_n - \cos y_s}{\cos y_n + \cos y_s},$$

после упрощений получаем

$$\operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{k_n + k_s}{2}\right) = \operatorname{ctg} \frac{k_n - k_s}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{y_n + y_s}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{y_n - y_s}{2},$$

где по (а) и (25) $\varphi - \frac{k_n + k_s}{2} = \Delta\varphi$.

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_n - k_s}{2} &= k_0 \\ \frac{y_n + y_s}{2} &= y \\ \frac{y_n - y_s}{2} &= y_0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

и для получения $\Delta \varphi$ имеем точную формулу:

$$\operatorname{tg} \Delta \varphi = \operatorname{ctg} k_0 \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} y_0. \quad (29)$$

Принимая во внимание малость величины $\Delta \varphi$ и y_0 , последнюю формулу, практически без понижения точности, представим в более удобном для вычислений виде:

$$\Delta \varphi'' = \operatorname{ctg} k_0 \cdot \operatorname{tg} y \cdot y_0''. \quad (30)$$

Для вычисления $\Delta \varphi$ по этой формуле, в случае применения логарифмических таблиц достаточно пятизначных, а большей частью — и четырехзначных логарифмов.

Анализируя формулу (30), рассмотрим подробнее вопрос о природе поправки $\Delta \varphi$. В этой формуле $\operatorname{ctg} k_0$ не может равняться нулю,

т. к. $k_0 = \frac{k_n - k_s}{2}$, а разность $k_n - k_s$ не может быть равной 180° ;

в противном случае одна из звезд пары находилась бы под горизонтом и ее наблюдение не было бы возможным. И второй множитель

$\operatorname{tg} y$, равный $\operatorname{tg} \frac{y_n + y_s}{2}$, не может равняться нулю, так как все на-

блюдения по способу Певцова производятся безусловно вне меридиана, и, следовательно, y_s и y_n не равны нулю и среднее удаление звезд от меридиана y также не равно нулю. Величина этого y практически может колебаться от $3^\circ - 7^\circ$ до $14^\circ - 19^\circ$ (для $z = 30^\circ$).

И, наконец, третий множитель $y_0 = \frac{y_n - y_s}{2}$ может иметь нулевое

значение; это случай, когда $y_n - y_s = 0$, или $y_n = y_s$, иначе, когда обе звезды наблюдались на одной, общей меридионали (и при $h_s = h_n$).

Итак, формула (30) показывает, что поправка $\Delta \varphi$ становится равной нулю, если в наблюдениях по способу Певцова выполнено и второе условие: $y_s = y_n$, т. е. равное удаление звезд пары от меридиана. Фактическая величина поправки $\Delta \varphi$ целиком зависит от величины разности $y_n - y_s$. При этом чем больше расхождение меридионалей северной и южной звезд, тем значительнее абсолютная величина поправки $\Delta \varphi$.

Таким образом, причиной появления поправки $\Delta \varphi$ является неравенство в меридиональных координат $y_n \neq y_s$ звезд пары в моменты их наблюдений. С этой точки зрения „идеальным“ случаем наблюдений Певцова надо считать тот случай, когда звезды пары наблюдаются на одной высоте и при одинаковых координатах отклонений ($y_n = y_s$) иначе, как ранее указано, когда звезды пары наблюдаются на одном альмукантарате и на одной меридионали. Условие равенства $y_n = y_s$ выразим еще через азимуты. Из формулы (12) $\sin y = \cos h \cdot \sin A$, написанной для каждой звезды пары, при условии $h_s = h_n$ и $y_s = y_n$, вытекает равенство $\sin A_s = \sin A_n$, или $A_s + A_n = 180^\circ$ для западного полушария и $A_s + A_n = 540^\circ$ — для восточного полушария неба.

Изложенное позволяет сделать вывод о значении и природе поправки $\Delta \varphi$ в новой форме. Вычисление широты в обычном случае наблюдений Певцова выполняется по формуле

$$\varphi = \frac{k_n + k_s}{2} + \Delta \varphi. \quad (к)$$

В случае же проведения наблюдений на общей „равновысотной“ меридионали ($y_n = y_s$ и $h_n = h_s$) или отнесения наблюдений к ней, как выше, показано, $\Delta\varphi = 0$ и формула для вычисления широты упрощается, получая вид:

$$\varphi = \frac{k_n' + k_s'}{2}, \quad (л)$$

где k_n' и k_s' соответствуют согласно формуле (9) часовым углам звезд пары для этого „идеального“ случая.

Из сравнения (к) и (л) имеем:

$$\frac{k_n + k_s}{2} + \Delta\varphi = \frac{k_n' + k_s'}{2},$$

откуда

$$\Delta\varphi = \frac{k_n' + k_s'}{2} - \frac{k_n + k_s}{2} = \frac{(k_n' - k_n) + (k_s' - k_s)}{2},$$

Обозначив: $k_n' - k_n = \delta k_n$,
 $k_s' - k_s = \delta k_s$, из последнего равенства получаем

$$\Delta\varphi = \frac{\delta k_n + \delta k_s}{2}, \quad (31)$$

где δk_n и δk_s суть поправки для перехода от наблюдаемых k_n и k_s к тем значениям k_n' и k_s' , которые соответствуют общей равновысотной меридионали.

Следовательно, поправка $\Delta\varphi$ есть поправка за приведение наблюдений к общей равновысотной меридионали (или к „идеальному“ случаю), к равенству $y_n = y_s$.

В связи с использованием эфемерид Селиверстова наблюдения Певцова производятся вблизи к идеальному положению звезд (12), как правило, по обе стороны общей равновысотной меридионали, хотя и несимметрично относительно ее.

Контрольные формулы

Широта в меридиональных координатах вычисляется по формуле

$$(25) \quad \varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi, \quad \text{где} \quad \varphi_0 = \frac{k_n + k_s}{2}, \quad \Delta\varphi'' = \text{ctg } k_0 \cdot \text{tg } y \cdot y_0'' \quad \text{и значения}$$

k_0 , y и y_0 — по (28). Из этой совокупности формул видно, что ошибки, допущенные в вычислении k_n и k_s , целиком и непосредственно входят в определяемую широту; ошибки в y_n и y_s входят в нее через поправку $\Delta\varphi$. Следовательно, существенно важно проверить правильность вычисления именно величин k_n , k_s , с одной стороны, и $\Delta\varphi$, т. е. y_n и y_s , с другой.

В целях экономии в контрольных вычислениях находим одну контрольную формулу для проверки k_n и k_s , y_n и y_s .

Такой формулой может служить выведенная выше формула (5): $\cos y \cdot \sin k = \sin \delta$, где склонение δ светила на протяжении короткого периода наблюдений (несколько минут) можно считать величиной постоянной. В связи с этим формула будет достаточно чувствительна к неточностям вычисленных величин k и y и всегда укажет на необходимость проведения повторных вычислений и отыскания вкрадшейся ошибки.

Итак, первая контрольная формула для южной и северной звезд имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \cos y_s \cdot \sin k_s &= \sin \delta_s \\ \cos y_n \cdot \sin k_n &= \sin \delta_n \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Выше выведена формула (6):

$$\cos y_s \cdot \sin x_s = \cos y_n \cdot \sin x_n, \quad (33)$$

где y определяется по (4) и x по (6):

$$x = 90 + k - \varphi \quad \text{или} \quad x = 90 + k - \varphi_0 - \Delta \varphi.$$

Из последнего выражения видно, что ошибка, допущенная в вычислении $\Delta \varphi$, целиком войдет в величину x (для обеих звезд) и неизбежно внесет искажение в равенство (33) и повлечет неравенство левой и правой частей контрольной формулы. Последняя весьма чувствительна к ошибкам в x_n и x_s , полученным из ошибки $\Delta \varphi$.

Формула (33) и есть вторая контрольная формула для проверки вычисленной величины $\Delta \varphi$. Можно дать другой вариант этой второй формулы, если в ней заменить $\sin x$ по (6):

$$\cos y_s \cdot \cos (\varphi' - k_s) = \cos y_n \cdot \cos (k_n - \varphi'), \quad (34)$$

где φ' — широта, неисправленная за уровень. Практическое применение этих контрольных формул показало их вполне реальное значение для надежного контроля вычисления широты.

Контроль можно сделать и более коротким, опустив применением первой контрольной формулы и ограничившись проверкой только конечного результата (φ').

Весь цикл вычислений применяется к обработке наблюдений на каждой нити, с последующим получением, по уклонениям отдельных результатов, средних квадратических ошибок одного наблюдения и вероятнейшего значения широты.

Развивая дальше использование разработанной выше теории получения широты из наблюдений соответственных высот двух звезд на основе меридиональной системы сферических координат, можно найти и построить два способа сокращенного вычисления широты по средним значениям часовых углов. Первый способ дает результат по наблюдениям на каждой нити и второй дает непосредственно среднее значение широты (без вычисления частных значений широты по наблюдениям на отдельных нитях). По точности результата и экономичности вычислений эти способы могут получить производственное значение.

Теория упомянутых сокращенных способов в данной статье не излагается.

Новая логарифмическая формула

Рассмотренная выше теория позволяет вывести новую логарифмическую формулу для вычисления широты по наблюдениям Певцова. Обычная основная формула Певцова имеет вид:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos \delta_s \cdot \cos t_s - \cos \delta_n \cdot \cos t_n}{\sin \delta_n - \sin \delta_s},$$

где числитель не связывается с какими-либо геометрическими образами. Геометрическое истолкование этого числителя, однако, возможно с помощью меридиональных координат.

Из рис. 7, где $r_n = \cup QN$ и $r_s = \cup QM$ суть сферические расстояния северной и южной звезд пары Певцова от южной точки Q небесного экватора, образующие прямоугольные сферические треуголь-

ики QNK_n и QMK_s , опуская индексы, для любого из этих треугольников получим:

$$\cos r = \cos y \cdot \cos k. \quad (35)$$

то по (9)¹ $\cos y \cdot \cos k = \cos \delta \cdot \cos t$, поэтому

$$\cos r = \cos \delta \cdot \cos t, \quad (36)$$

е. произведение косинусов склонения и часового угла светила момент наблюдения есть косинус сферического расстояния светила от южной точки небесного экватора в этот момент. Следовательно,

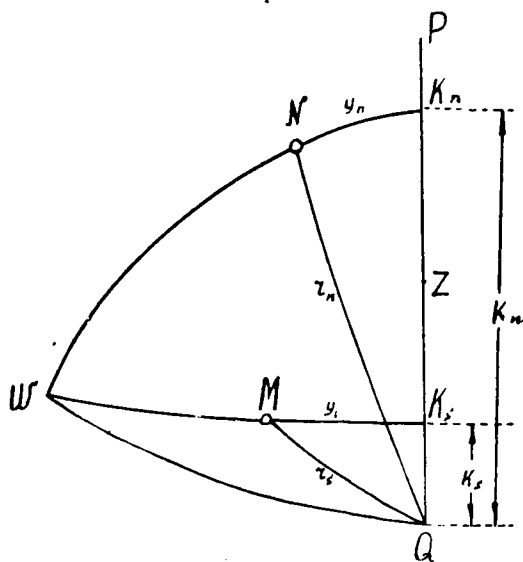


Рис. 7

числитель основной формулы Певцова $\cos \delta_s \cdot \cos t_s - \cos \delta_n \cdot \cos t_n$ геометрически представляет собой разность косинусов сферических расстояний звезд пары от южной точки небесного экватора. Пользуясь введенным понятием сферического расстояния r , можно получить логарифмическую формулу нового вида. Из формулы (27) получаем:

$$\cos y_s \cdot \cos (\varphi - k_s) = \cos y_n \cdot \cos (\varphi - k_n). \quad (p)$$

После раскрытия косинусов и группировки членов имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos y_s \cdot \cos K_s - \cos y_n \cdot \cos K_n}{\cos y_n \cdot \sin K_n - \cos y_s \cdot \sin K_s}, \quad (c)$$

или, упрощая числитель по (35) и знаменатель по (5), получаем из (c)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos r_s - \cos r_n}{\sin \delta_n - \sin \delta_s},$$

$$\text{то приводит к виду: } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \frac{r_n + r_s}{2} \cdot \sin \frac{r_n - r_s}{2}}{\cos \frac{\delta_n + \delta_s}{2} \cdot \sin \frac{\delta_n - \delta_s}{2}}. \quad (r)$$

Для краткости вводим обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_n + r_s}{2} &= r; & \frac{r_n - r_s}{2} &= r_0; \\ \frac{\delta_n + \delta_s}{2} &= \delta; & \frac{\delta_n - \delta_s}{2} &= \delta_0; \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

и (т) переписется в новых обозначениях:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin r \cdot \sin r_0}{\cos \delta \cdot \sin \delta_0}. \quad (38)$$

Соответствующая поправка за уровень δ_φ вычисляется обычным способом. Практическое применение новой логарифмической формулы показало ее безупречную точность, удобство и достаточную экономичность.

На основе этой формулы разработаны также два частных способа сокращенного вычисления широты со средними значениями часовых углов. Первый способ имеет целью получение широты из наблюдений на каждой нити. Второй способ дает новую формулу для получения непосредственно среднего вывода широты, минуя вычисление значений широты для отдельных нитей.

Этот способ весьма сокращенной обработки наблюдений может иметь и некоторый практический интерес. Теория этих способов здесь не излагается.

Таким образом, общая формула (25) обеспечивает нам возможность, оставаясь на одной и той же теоретической основе, представить в новой и геометрически рациональной форме все существующие в настоящее время способы и приемы обработки наблюдений Певцова, предложенные разными авторами для упрощения вычислений за последние десятилетия.

Формула (25) является общей и относительно собственно меридианных наблюдений (способ Талькотта), о чем будет сказано ниже.

4. О структурном единстве теории определения широты по Певцову и времени по Цингеру

В отношении некоторой структурной общности способов определения широты по Певцову и времени по Цингеру приводим следующие краткие замечания.

Первая и основная структурная аналогия наблюдений в способах Цингера и Певцова общеизвестна: оба способа основаны на наблюдении равных (соответственных) высот двух звезд—восточной и западной у Цингера, северной и южной у Певцова.

Этот тип наблюдений, общий для обоих способов, обеспечивает наибольшую простоту наблюдений, которые в основном ограничиваются возможно точным отсчитыванием показаний хронометра в надлежащие моменты. Для вычисления из наблюдений результата—широты или поправки часов—не требуется совершенно отсчетов по горизонтальному или вертикальному кругам угломерного инструмента, чем исключается влияние на результат погрешностей, связанных с использованием этих кругов, и что обеспечивает повышение точности определения времени и широты рассматриваемыми способами при одно-временном упрощении самой техники наблюдений.

Вторая структурная аналогия устанавливается с помощью меридиональных координат и состоит в том, что в теории того и другого способа одинаково используется вычисление некоторой поправки, или так называемого приведения наблюдений к „идеальному“ случаю. Под идеальным случаем подразумевается выполнение в обоих способах условия наивыгоднейших наблюдений, гарантирующих наиболее высокую точность результата.

Для способа Певцова это условие, как уже выведено, состоит в наблюдении звезд пары на равном удалении их от меридиана, т. е. при сохранении равенства меридиональных координат: $y_s = y_n$.

Для способа Цингера это условие, как известно, состоит в наблюдении звезд пары на равном удалении их от экватора, т. е. при сохранении равенства склонений, экваториальных координат: $\delta_s = \delta_n$.

В новых, меридиональных координатах, как выше показано, широта, определяемая по способу Певцова, получается по формуле (25)

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi, \quad (A)$$

причем φ_0 пусть содержит в себе и поправку за уровень δ_φ .

Таким образом, точная широта φ вычисляется путем алгебраического суммирования некоторой, вычисленной из тех же наблюдений, приближенной широты φ_0 с поправкой $\Delta\varphi$, которая, как установлено в формуле (31), есть поправка за приведение результата к общей равновысотной меридионали, т. е. к „идеальному“ случаю, когда имеет место равенство $y_s = y_n$, когда звезды наблюдаемой пары находятся на равном удалении от меридиана, находятся на общей меридионали—малом круге, параллельном меридиану.

Но тот же самый прием имеет место и в теории способа Цингера. Действительно, конечная формула получения искомой поправки u часов по Цингеру обычно имеет вид

$$u = \alpha - \frac{T_w + T_s}{2} + r, \quad (39)$$

где α —полусумма прямых восхождений восточной и западной звезд пары; $1/2 (T_w + T_s)$ —полусумма отсчетов хронометра в моменты наблюдений и r —поправка за приведение.

Приняв в формуле (39) первые два члена правой части (оба известные) за приближенное значение искомой поправки, т. е.

$$\alpha - 1/2(T_w + T_s) = u_0,$$

формулу (39) перепишем:

$$u = u_0 + r. \quad (40)$$

Теперь мы получили основную формулу искомой поправки часов в виде, совершенно аналогичном формуле (A) для искомой широты.

Из формулы (40) видно, что точная поправка часов u вычисляется путем алгебраического суммирования некоторой, вычисленной из тех же наблюдений, приближенной поправки u_0 с поправкой r , которая по Цингеру, как известно, есть поправка за приведение результата к общей суточной параллели, т. е. к „идеальному“ случаю, когда имеет место равенство $\delta_w = \delta_s$, когда звезды наблюдаемой пары находятся на равном удалении от небесного экватора, находятся на общей суточной параллели—малом круге, параллельном экватору.

Таким образом, структурное единство в теории, способах

Цингера и Певцова, раскрываются математически из рассмотрения аналогичных формул (А) и (40).

5. Формула широты Талькотта — частный случай формулы широты Певцова

Основная формула широты, определяемой по способу Талькотта, имеет общепринятый вид

$$\varphi = \frac{\delta_n + \delta_s}{2} + \frac{\zeta_s - \zeta_n}{2}, \quad (41)$$

где δ_n и δ_s — склонения северной и южной звезд;
 ζ_s, ζ_n — зенитные расстояния этих звезд в меридиане.

Выше были получены общие формулы (16) и (19) связи φ , δ , z для любых внемеридианных положений светила:

$$\text{для южной звезды} \quad \varphi = k + z_p, \quad (a)$$

$$\text{для северной звезды} \quad \varphi = k - z_p. \quad (б)$$

Применяя эти формулы к обработке наблюдений, произведенных по способу Певцова, можем написать:

$$\text{для южной звезды} \quad \varphi = k_s + z_{ps}.$$

$$\text{для северной звезды} \quad \varphi = k_n - z_{pn}.$$

Складывая почленно оба эти уравнения и деля обе части на два, получаем новую формулу в меридиональных координатах для вычисления широты, определяемой по способу Певцова:

$$\varphi = \frac{k_n + k_s}{2} + \frac{z_{ps} - z_{pn}}{2}. \quad (42)$$

В этой формуле по-прежнему k_n и k_s — дуги меридиана от южной точки Q экватора до точки пересечения кругов наклона обоих светил с меридианом, а геометрически — это сферические проекции склонений звезд пары на меридиан и вычисляются по формуле (9); z_{ps} и z_{pn} — дополнения меридиональных координат x_s и x_n до 90° по (3) и геометрически-сферические проекции равных зенитных расстояний этих звезд на меридиан. Для вычисления z_{ps} и z_{pn} имеем формулы (17)

$$\cos z_p = \frac{\cos z}{\cos y} \quad (в)$$

и формулы (18):

$$\cos z_p = \frac{\cos z \cdot \sin k}{\sin \delta}. \quad (г)$$

Выведем формулу для непосредственного получения полуразности $\frac{z_{ps} - z_{pn}}{2}$ в меридиональных координатах.

По уравнению (в) можем для обеих звезд написать

$$\cos z_{ps} = \frac{\cos z}{\cos y_s} \quad (д)$$

$$\cos z_{pn} = \frac{\cos z}{\cos y_n}, \quad (е)$$

где y_s и y_n — меридиональные координаты (отклонение) звезд пары.

Деля почленно второе равенство (е) на первое (д), получаем:

$$\frac{\cos z_{pn}}{\cos z_{ps}} = \frac{\cos y_s}{\cos y_n}. \quad (43)$$

Взяв из последнего равенства производную пропорцию

$$\frac{\cos z_{pn} - \cos z_{ps}}{\cos z_{pn} + \cos z_{ps}} = \frac{\cos y_s - \cos y_n}{\cos y_s + \cos y_n},$$

после преобразований имеем:

$$\operatorname{tg} \frac{z_{ps} - z_{pn}}{2} \operatorname{tg} \frac{z_{pn} + z_{ps}}{2} = \operatorname{tg} \frac{y_n + y_s}{2} \operatorname{tg} \frac{y_n - y_s}{2}. \quad (ж)$$

Из формулы (7) вытекает, что

$$\begin{aligned} z_{ps} + z_{pn} &= k_n - k_s \\ \frac{z_{ps} + z_{pn}}{2} &= \frac{k_n - k_s}{2}. \end{aligned} \quad (з)$$

Теперь из равенства (ж) по (з) получаем:

$$\operatorname{tg} \frac{z_{ps} - z_{pn}}{2} = \operatorname{ctg} \frac{k_n - k_s}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{y_n + y_s}{2} \operatorname{tg} \frac{y_n - y_s}{2}. \quad (и)$$

Или по принятым выше обозначениям по (28) будем иметь в окончательном виде:

$$\operatorname{tg} \frac{z_{ps} - z_{pn}}{2} = \operatorname{ctg} k_0 \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} y_0 \quad (44)$$

и по малости искомой полуразности и y_0 :

$$\left(\frac{z_{ps} - z_{pn}}{2} \right)'' = \operatorname{ctg} k_0 \cdot \operatorname{tg} y \cdot y_0''. \quad (45)$$

Сравнивая формулу (29) с (44) или (30) с (45), легко видеть, что выведенная ранее поправка $\Delta \varphi$ и есть полуразность

$$\frac{z_{ps} - z_{pn}}{2}, \text{ т. е. } \Delta \varphi = \frac{z_{ps} - z_{pn}}{2}. \quad (46)$$

Это означает, что поправка $\Delta \varphi$, входящая в основную формулу широты (25) и истолкованная как поправка за приведение наблюдений

Певцова к общей равновысотной меридионали, по своей величине может получить новую интерпретацию, а именно: поправка по величине есть полуразность сферических проекций на меридиан равных зенитных расстояний обеих звезд пары Певцова.

Таким образом, формулы (25) и (44) для вычисления широты в меридиональных координатах совершенно идентичны.

Теперь можно также констатировать, что новые общие формулы связи φ , δ , z находят полное применение к теории способа Певцова и дают точное решение задачи получения широты в меридиональных координатах в этом случае.

Рабочие формулы имеют вид:

$$\operatorname{tg} \kappa_{ns} = \operatorname{tg} \delta_{n's} \cdot \sec t_{n's} \quad (\text{A})$$

$$\sin y_{n's} = \cos \delta_{ns} \cdot \sin t_{n's} \quad (\text{B})$$

$$\left(\frac{z_{ps} - z_{pn}}{2} \right)'' = \operatorname{ctg} \kappa_0 \cdot \operatorname{tg} y \cdot y_0 \quad (\text{B})$$

$$\varphi = \frac{\kappa_n + \kappa_s}{2} + \frac{z_{ps} - z_{pn}}{2} \quad (\text{Г})$$

Этот список рабочих формул можно несколько упростить, если избавиться от вычисления величин y_n и y_s , выразив искомую полуразность в зависимости только от κ_n и κ_s . Выведем соответствующую формулу.

Принимая во внимание (17) и (18), напомним:

$$\frac{\cos z_{ps}}{\cos z_{pn}} \cdot \frac{\cos y_n}{\cos y_s} = \frac{\sin \delta_n \cdot \sin \kappa_s}{\sin \delta_s \cdot \sin \kappa_n} \quad (\text{д})$$

Приравняв $\frac{\sin \delta_n}{\sin \delta_s} \cdot \frac{\sin \kappa_s}{\sin \kappa_n} = m$, (47)

получаем $\frac{\cos z_{pn} - \cos z_{ps}}{\cos z_{pn} + \cos z_{ps}} = \frac{1 - m}{1 + m}$, и после упрощений с заменой

по (4) и (28) $\frac{z_{pn} + z_{ps}}{2} = \kappa_0$

имеем искомую формулу:

$$\operatorname{tg} \frac{z_{ps} - z_{pn}}{2} = \frac{1 - m}{1 + m} \operatorname{ctg} \kappa_0 \quad (\text{ж})$$

По малости поправочного члена $\frac{z_{ps} - z_{pn}}{2}$ можем последнюю формулу

написать в виде: $\left(\frac{z_{ps} - z_{pn}}{2} \right)'' = \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{1 - m}{1 + m} \cdot \operatorname{ctg} \kappa_0$,

или, применяя логарифмический множитель:

$$\left(\frac{z_{ps}-z_{pn}}{2}\right)'' = [5,31442] \cdot \frac{1-m}{1+m} \cdot \operatorname{ctg} \kappa_0. \quad (49)$$

Теперь совокупность формул для вычисления широты по второму варианту будет представлена списком:

$$\operatorname{tg} \kappa_{ns} = \operatorname{tg} \delta_{n,s} \cdot \sec t_{n,s} \quad (a)$$

$$\left(\frac{z_{ps}-z_{pn}}{2}\right)'' = [5,31442] \cdot \frac{1-m}{1+m} \operatorname{ctg} \kappa_0 \quad (б)$$

$$\varphi = \frac{\kappa_n + \kappa_s}{2} + \frac{z_{ps}-z_{pn}}{2}. \quad (в)$$

Итак, основная формула широты, определяемой по способу Певцова, в меридиональной координатной системе имеет вид по (42)

$$\varphi = \frac{\kappa_n + \kappa_s}{2} + \frac{z_{ps}-z_{pn}}{2}.$$

Основная формула широты, определяемой по способу Талькотта, как упомянуто, имеет общеизвестный вид по (41):

$$\varphi = \frac{\delta_n + \delta_s}{2} + \frac{\zeta_s - \zeta_n}{2}.$$

Сравнивая эти формулы, видим их полную аналогию.

Более того, из анализа этих формул вытекает ясное представление о взаимном соотношении способов определения широты по Певцову и по Талькотту. Формула Талькотта является частным случаем формулы Певцова.

Действительно, формула широты в меридиональных координатах (42) справедлива для всех положений двух звезд, наблюдаемых на равных высотах как вне меридиана, так и на самом меридиане. Как уже указано, меридиан рассматривается лишь как частный случай меридионали, как наибольшая меридиональ. Меридианные наблюдения, в том числе и наблюдения по способу Таллкотта, характеризуются частным значением часового угла $t=0$. При этом же нулевом значении t , как выше показано при рассмотрении формул (16) и (18), для меридианного положения светила величина κ переходит в склонение δ , т. е. в геометрическом смысле сферическая проекция склонения переходит в самое склонение; также и величина z_p переходит в меридианное зенитное расстояние ζ , или сферическая проекция внемеридианного зенитного расстояния на меридиан переходит в самое меридианное зенитное расстояние.

Это означает, что в формуле (42) κ_n переходит в δ_n ; κ_s — в δ_s ; также z_{ps} — в ζ_s и z_{pn} — в ζ_n , т. е. меридиональная формула широты Певцова $\varphi = \frac{\kappa_n + \kappa_s}{2} + \frac{z_{ps}-z_{pn}}{2}$ естественно и безусловно переходит

в основную формулу Талькотта $\varphi = \frac{\delta_n + \delta_s}{2} + \frac{\zeta_s - \zeta_n}{2}$ для частного значения $t = 0$.

Таким образом, из общей меридиональной формулы легко выводится частная формула Талькотта, что и свидетельствует, иначе говоря, о том, что способ определения широты Талькотта по существу есть частный случай способа Певцова.

6. Общие формулы широты, определяемой основными современными способами из астрономических наблюдений

Из числа основных современных и наиболее употребительных способов определения широты в разных условиях ниже рассмотрены следующие способы: определение широты по абсолютным зенитным расстояниям; определение широты места по азимуту звезд; определение широты по наблюдениям двух звезд на соответственных высотах по способу Певцова; определение широты по способу Талькотта.

В первом способе определения широты (по измеренным зенитным расстояниям) в общепринятой теории рабочие формулы выводятся на основе применения метода редукции, т. е. наблюдения, выполненные вне меридиана, хотя и вблизи его, приводятся к меридиану с последующим применением частных меридианных формул

$$\varphi = \delta \pm \zeta \quad \text{и} \quad \varphi = 180 - (\delta + \zeta). \quad (\text{а})$$

При определении широты по наблюдениям Полярной звезды без помощи редукции рабочие формулы выводятся из обычного параллактического треугольника „Полюс—Зенит—Звезда“ с дополнительным проведением из центра светила дуги, перпендикулярной к меридиану, и с получением двух сферических треугольников, из рассмотрения которых с некоторыми допущениями и получается окончательная формула для вычисления широты:

$$\varphi = 90 - z - \Delta \cos t + \frac{\Delta^2}{2} \sin 1'' \sin^2 t \operatorname{ctg} z - \frac{\Delta^3}{3} \sin^2 1'' \cos t \sin^2 t. \quad (\text{б})$$

Во втором случае определения широты (по азимутальным наблюдениям) в общепринятой теории также из рассмотрения параллактического треугольника с некоторыми особыми дополнительными построениями выводится система рабочих формул с участием азимута звезды

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} \Psi &= \operatorname{ctg} \delta \cdot \cos t; & \sin \zeta &= \cos \delta \cdot \sin t; \\ \sin x &= \operatorname{tg} \zeta \cdot \operatorname{ctg} a; & \varphi &= \Psi + x. \end{aligned} \right\} \quad (\text{в})$$

В третьем случае определения широты (по способу Певцова) основная формула обычно выводится путем применения к зенитному расстоянию для обеих звезд пары формулы косинуса стороны. После ряда преобразований рабочая формула получает вид:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos \delta_s \cdot \cos t_s - \cos \delta_n \cdot \cos t_n}{\sin \delta_n - \sin \delta_s}. \quad (\text{г})$$

В четвертом случае определения широты (по способу Талькотта) используются меридианные формулы связи φ , δ , ζ ($\varphi = \delta \pm \zeta$ и $\varphi =$

$= 180 - (\delta + \zeta)$, что дает основную формулу в виде (для в. кульм. северной звезды):

$$\varphi = \frac{\delta_n + \delta_s}{2} + \frac{\zeta_s - \zeta_n}{2}. \quad (д)$$

Поскольку, однако, в действительности часть наблюдений производится до кульминации и часть—после кульминации светила, к основной формуле добавляется поправка, называемая поправкой за кривизну параллели и вычисляемая, например, по формуле

$$\kappa = \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{\sin 1''} \cdot \sin 2 \delta. \quad (е)$$

Сравнение общепринятых методов вывода основных формул и конечного вида этих формул от (а) до (е) позволяет сделать заключение о том, что во всех указанных способах определения широты характерной чертой приемов вывода этих формул является их характер частного решения вопроса в каждом случае: теория каждого способа развивается совершенно самостоятельно, независимо и без какой-либо связи с другими способами. Все эти основные способы широтных определений явно не имеют общей и единой теоретической основы.

Обобщением, полученным с помощью новой, меридиональной системы небесных координат, является установление и обоснование общей теоретической основы указанных выше главнейших современных способов определения широты из астрономических наблюдений.

Возможность получить эту общую теоретическую основу возникла после вывода общей формулы связи φ , δ , z , имеющей по (20) вид: $\varphi = \kappa \pm z_p$.

Эти формулы и являются единой теоретической основой рассмотренных главнейших широтных способов.

Как видно по ходу ее применения, различие в вычислении широты во всех этих основных способах состоит лишь в различии способа получения второго члена z_p общей формулы, т. е. сферической проекции зенитного расстояния звезды на меридиан.

Первый член κ в формуле (20) для всех способов вычисляется одинаково—по формуле (9):

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos t}.$$

В этом общем порядке получения первого члена κ основной формулы заключается сходство всех способов.

Второй член z_p общей формулы (20) вычисляется различно в каждом из указанных способов в зависимости от той величины, которая фактически, в натуре измеряется в данном способе и, следовательно, которая может быть положена в основу вычисления этого члена.

Рассмотрим порядок получения этого члена z_p в разных способах.

При определении широты по измеренным зенитным расстоя-

ниям член z_p вычисляется по формуле (18), выведенной выше:

$$\cos z_p = \frac{\cos z \cdot \sin \kappa}{\sin \delta}, \text{ где:}$$

z —измеренное зенитное расстояние;

κ —первый член общей формулы (20);

δ —склонение наблюдаемой звезды.

Все эти величины уже известны, величина κ вычислена по (9). При малых значениях z_p его величина может быть вычислена по формуле

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \frac{z_p}{2} &= \frac{1-n}{2}, \\ n &= \frac{\cos z \cdot \sin \kappa}{\sin \delta}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

где

При определении широты из азимутальных наблюдений второй член z_p общей формулы вычисляется по особой формуле, которую надо вывести.

Из формулы (11) имеем $\cos x = \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{ctg} A$, или $\sin(90 - x) = \operatorname{tg} y \times \operatorname{ctg} A$. Но по формуле (7) $90 - x = z_p$, поэтому $\sin z_p = \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{ctg} A$.

Заменив в последнем равенстве $\operatorname{tg} y$ по (8), получаем искомую формулу в окончательном виде:

$$\sin z_p = \cos \kappa \cdot \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} A, \quad (51)$$

где κ —первый член общей формулы широты;

t —часовой угол светила;

A —азимут светила, полученный из наблюдений.

В случае определения широты по способу Певцова в связи с наблюдением двух звезд на соответственных высотах, требуется вычислить полуразность членов z_p обеих звезд. Выше для этой цели уже получена формула (44) или (45):

$$\operatorname{tg} \frac{z_{ps} - z_{pn}}{2} = \operatorname{ctg} \kappa_0 \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} y_0,$$

или

$$\left(\frac{z_{ps} - z_{pn}}{2} \right)'' = \operatorname{ctg} \kappa_0 \cdot \operatorname{tg} y \cdot y_0''.$$

Для вычисления той же полуразности в зависимости только от κ_n и κ_s выше выведены формулы (48) и (49).

Широта же получается по формуле (42): $\varphi = \frac{\kappa_n + \kappa_s}{2} + \frac{z_{ps} - z_{pn}}{2}$,

где κ_n и κ_s вычисляются по той же формуле (9), как и в других способах.

И, наконец, в случае определения широты из меридианных наблюдений по способу Талькотта соответствующая полуразность $\frac{\zeta_s - \zeta_n}{2}$, в качестве второго члена, получается из непосредственных измерений с помощью окулярного микрометра.

Сама основная формула способа Талькотта $\varphi = \frac{\delta_n + \delta_s}{2} + \frac{\zeta_s - \zeta_n}{2}$,

как выше показано, является частным случаем меридиональной формулы широты, определяемой по способу Певцова.

Таким образом, можно считать установленными единство и общность основной структуры главнейших употребительных в настоящее время, и на первый взгляд весьма различных, способов точного определения географической широты из астрономических определений.

Математическим выражением этой общей основы служит, как только что показано, общая формула широты: $\varphi = \kappa \pm z_p$. Приписав знак „минус“ самой величине z_p , последнюю формулу получим в виде алгебраической суммы

$$\varphi = \kappa + z_p. \quad (55)$$

Эта предложенная здесь общая формула для определения широты имеет не только определенный теоретический интерес, но также и практическое значение, состоящее в том, что, во-первых, упрощается теория различных способов определения широты, во-вторых, упрощается изложение теории этих способов, чем методически облегчается их усвоение и, в-третьих, упрощается вычислительная обработка материалов наблюдений по определению широты в производственных условиях.

Целесообразность разработки и применения новой меридиональной системы сферических координат основывается на возможности получения указанной общей формулы определения широты. Этот результат позволяет надеяться выполнить такую же работу и по отношению к различным способам определения поправки времени.

В нашей работе содержится ряд важных результатов, как-то: новая интерпретация сущности способа Певцова; общая формула для меридиональных наблюдений, включая и собственно меридианное как частный случай; вывод о том, что способ Талькотта является в сущности частным случаем способа Певцова; структурное единство способа Певцова со способом Цингера и некоторые другие.

Все это дает основание полагать, что развитие теории способа Певцова еще не закончено и что для дальнейшего повышения точности получаемой широты нужна некоторая новая точка зрения на теорию этого способа. Попыткой дать новую точку зрения и является предложенная здесь меридиональная система небесных координат с описанными выше ее применениями.

ПАВЕЛ ПАРФЕНЬЕВИЧ КУФАРЕВ¹⁾

(К пятидесятилетию со дня рождения)

18 марта 1959 года исполнилось 50 лет со дня рождения видного советского ученого - математика, заведующего кафедрой математического анализа Томского государственного университета, профессора доктора Павла Парфеньевича Куфарева.

П. П. Куфарев родился в г. Томске. В 1931 г. окончил Томский университет. С 1932 по 1935 г. работал ассистентом в Томском университете, с 1936 г. по 1938 г. исполнял обязанности доцента кафедры математического анализа, с 1938 по 1940 г. — доцент, заведующий кафедрой механики и с 1940 г. по сей день — заведующий кафедрой математического анализа. В 1943 г. защитил диссертацию на степень доктора физико-математических наук. В 1944 г. утвержден в звании профессора. Таким образом вся 27-летняя плодотворная научная, педагогическая и общественная деятельность Павла Парфеньевича протекала в городе Томске, в стенах Томского университета.

Основным направлением научной деятельности П. П. Куфарева является теория однолистных функций и ее приложения к теории упругости и гидромеханике. Результаты, полученные им в этих направлениях, получили широкую известность и признание в кругах специалистов нашей страны и за ее пределами.

Предметом теории однолистных функций, как известно, является изучение внутренних свойств конформных отображений. Едва ли не главным современным направлением исследований в этой теории является изучение задач об экстремумах различных вещественных функционалов, определенных на тех или иных классах однолистных аналитических функций.

Одним из сильных методов решения такого рода задач является так называемый метод параметрических представлений, предложенный Лёвнером с целью оценки тейлоровских коэффициентов аналитических функций класса S (функций, однолистных в единичном круге и нормированных там условиями $f(0)=0$, $f'(0)=1$) и развитый Г. М. Голузиным, И. Е. Базилевичем и другими учеными именно как метод, позволяющий решать большое количество различных экстремальных задач.



¹⁾ Статья печатается по решению Редакционно-издательского совета Томского университета. Редактирована доцентом Е. Д. Томиловым.

Сущность метода в применении, например, к функциям класса S состоит в следующем. Всякую функцию этого класса можно равномерно внутри круга $|Z| < 1$ аппроксимировать функциями того же класса, отображающими круг на плоскость с разрезом по кривой Жордана. Следовательно, любая оценка для внутренних задач, которая установлена для функций этого специального класса, может быть перенесена путем предельного перехода на функции всего класса S .

Функции же специального класса оказываются решениями уравнения Лёвнера:

$$\frac{df(z, t)}{dt} = -f(z, t) \frac{\lambda(t) + f(z, t)}{\lambda(t) - f(z, t)}, \quad (1)$$

что и дает в руки исследователя определенный арсенал средств для решения подобного рода задач.

В связи с развитием и уточнением метода параметрических представлений Павлом Парфеньевичем было проведено ряд тонких исследований свойств интегралов уравнения (1). Им указаны простые условия для того, чтобы интеграл $W = f(z, t)$, $f(z, t_0) = z$ этого уравнения отображал круг на такой же круг с разрезом а) по кривой Жордана, б) по гладкой дуге и т. д. [10] *).

Эти результаты были дополнены построениями примера уравнения (1), для которого отображение, осуществляемое его интегралом, не обладает указанным выше свойством (а) [17]. Была исследована и решена (путем сведения к интегральным уравнениям) задача о построении уравнения Лёвнера для функции, отображающей круг на плоскость с переменным разрезом по части заданной кривой с ограниченной кривизной [19]. Сюда же относится ряд результатов, полученных в работах учеников П. П. Куфарева (В. С. Федоровой, Н. В. Поповой), выполненных под его руководством.

В результате изучения конформных отображений семейства вложенных друг в друга полигональных областей Павлом Парфеньевичем была получена система дифференциальных уравнений для параметров, характеризующих отображающую функцию. На основе этой системы им был предложен метод численного определения параметров в интеграле Шварца-Кристоффеля [16]. В дальнейшем этот метод уточнялся в работе Ю. В. Чистякова, сотрудника кафедры П. П. Куфарева.

Следует отметить, что предложенный метод может быть с достаточной эффективностью применен к решению практических задач, в особенности, если учесть открывшиеся теперь большие возможности применения машинной вычислительной техники.

В работах [9] и [18] Павел Парфеньевич исследовал дифференциальные уравнения, более общие, чем уравнения Лёвнера и связанные с ними задачи о семействах аналитических функций, зависящих от одного действительного параметра.

В этих работах выясняются геометрические условия, при которых существует $\frac{\partial \varphi(w, t)}{\partial t}$, $w \in D^*(t)$, $a \leq t \leq b$ ($\varphi(w, t)$ — функция, регулярная в области $D(t)$, зависящей от параметра t , а $D^*(t)$ — ядро семейства областей $\{D(\tau)\}$, при $\tau \rightarrow t$). Если функция $z = \varphi(w, t)$ конформно отображает область $D(t)$ на круг $|z| < 1$, $\varphi(0, t) = 0$, $\varphi'(0, t) > 0$, функция $f(z, t)$ — обратная $\varphi(w, t)$ и $D(t_2) \supset D(t_1)$, при

*) См. прилагаемый список печатных работ П. П. Куфарева.

$t_2 > t_1$, то $\frac{\partial f(z, t)}{\partial t}$ существует, регулярна в круге $|z| < 1$ и удовлетворяет обобщенному уравнению Лёвнера

$$-\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} + z P(z, t) \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

где $P(z, t)$ — регулярная в $|z| < 1$ функция, причем $\operatorname{Re} P(z, t) > 0$ в этом круге. Установлена также теорема, в известном смысле обратная вышеприведенной.

В случае, когда граница областей $D(t)$ является жордановой кривой, а граница начальной области $D(t_0)$ — аналитической, функция $P(z, t)$ в (2) может быть представлена формулой

$$P(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \left[\frac{\partial \log |f^{-1}(\Omega(\lambda, \tau), t)|}{\partial \tau} \right]_{\tau=t} \frac{\xi + z}{\xi - z} \frac{d\xi}{\xi}, \quad (3)$$

где $z = \Omega(\lambda, t)$ — уравнения граничных кривых и $\xi = f^{-1}[\Omega(\lambda, t), t]$.

Другим важнейшим методом исследования экстремальных задач в теории однолистных функций является вариационный метод Г. М. Голузина.

Долгое время оставалось незамеченным, что основная формула метода Г. М. Голузина может быть выведена из формул (2) и (3) Павла Парфеньевича. Это было установлено только в его недавних работах ([32], [35]). При этом вариационная формула Г. М. Голузина получила другое, интегральное представление.

В работе [36] (совместно с Н. В. Семухиной) получена вариационная формула для функций, однолистных в кольце, аналогичная формуле Г. М. Голузина для функций, однолистных в круге, что дает возможность решать экстремальные задачи для функций, однолистных в кольце.

Несмотря на ряд замечательных результатов, полученных в многочисленных исследованиях различными вариационными методами, многие задачи, поставленные в теории однолистных функций, еще не получили точного решения. В связи с этим в кругах специалистов существует мнение, что больших успехов следует ожидать от методов, в каком-либо смысле объединяющих уже известные.

В упомянутых выше работах ([32], [35]) Павел Парфеньевич предложил такой метод, объединяющий вариационный метод Г. М. Голузина и метод параметрических представлений, и позволяющий свести обычную экстремальную задачу к своеобразной граничной задаче для некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Этим методом им и его аспирантами (И. А. Александровым, М. И. Редьковым, В. В. Черниковым) был исследован ряд экстремальных задач для различных классов однолистных функций: для функций класса S , для функций того же класса, обладающих симметрией вращения, для функций с вещественными коэффициентами их ряда Тейлора, для функций, ограниченных и однолистных в круге, и для функций, отображающих круг на области, принадлежащие заданной Римановой поверхности, а также ряд задач на относительный экстремум.

В работе [34] (совместно с М. Р. Куваевым) Павлом Парфеньевичем выведено уравнение типа Лёвнера для функции, отображающей круг на однопараметрическое семейство областей, получаемых

из заданной n — связной области проведением переменного разреза, что дает возможность приступить к исследованию этим методом экстремальных задач для конформных отображений многосвязных областей.

Итоги многолетней успешной научной деятельности П. П. Куфарева и его учеников в теории однолистных функций были недавно подведены в соответствующем разделе обзорного доклада „Некоторые методы и результаты теории однолистных функций“, прочитанном Павлом Парфеньевичем на III Всесоюзном математическом съезде [37].

В ряде работ П. П. Куфаревым решались другие задачи теории однолистных функций (экстремальная задача, возникающая при изучении конформного отображения дополнительных в круге областей, один из вопросов граничного поведения аналитической в круге функции, вопрос, поставленный Н. Н. Лузиным и полностью решенный впоследствии американским математиком Ловатором и др.).

Мы не останавливаемся также на описании интересных результатов, полученных Павлом Парфеньевичем, касающихся граничного поведения аналитических функций, результатов, относящихся к поведению ядровой функции области и т. д.

В научном творчестве Павла Парфеньевича счастливо сочетается плодотворная работа над важной тематикой теоретического характера с успешной работой над не менее важными и значительными прикладными вопросами гидромеханики и теории упругости. Отметим его большие успехи в вопросе изучения важной задачи теории фильтрации — задачи о перемещении контура нефтеносности.

Эта задача, поставленная Л. Е. Лейбензоном, была сведена П. Я. Полубариновой-Кочиной к определенной граничной задаче теории аналитических функций. Ею был предложен для решения метод рядов и дано решение этой задачи для некоторых частных случаев. Этой же задачей занимался Л. А. Галин и другие ученые.

Для случая невесомой жидкости и одной скважины задача сводится к определению функции $z(w, t)$, аналитической в $|w| < 1$ для некоторого интервала значений t , удовлетворяющей на $|w| = 1$ граничному условию

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{w} \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial w} \right) = -1$$

и начальному условию вида $z(w, t_0) = \varphi(w)$.

Существенным успехом в решении этой задачи явилась работа [22] (совместно с Ю. П. Виноградовым) Павла Парфеньевича, в которой решение указанной выше задачи было сведено к разысканию решения системы интегральных уравнений. Здесь же показано существование и единственность правильных (в некотором смысле) решений этой системы. Таким образом был предложен метод решения этой задачи и дано обоснование этого метода.

Кроме того, в других работах Павла Парфеньевича и его учеников был получен ряд точных решений этой задачи, при различных граничных условиях.

Аналогичным методом исследовалась также задача о движении тяжелой, заполняющей в начальный момент полуплоскость, жидкости, внутри которой находится вихрь и источник [38].

Отметим еще интересную работу [30], содержащую новое решение задачи о струйном обтекании дуги окружности.

Павел Парфеньевич выполнил также ряд работ по вопросам плоской задачи теории упругости. Им исследован вопрос о кручении

и изгибе стержней полигонального сечения [4], а также ряд задач для анизотропной среды (решение основной задачи теории упругости для эллиптической области, для бесконечной полосы, для бесконечного клина).

Под руководством Павла Парфеньевича его аспиранты и сотрудники выполнили ряд интересных работ по теории пластичности, теории упругости и т. д.

Даже этот беглый перечень результатов научной деятельности Павла Парфеньевича говорит многое.

Павел Парфеньевич является ведущим научным работником механико-математического факультета Томского университета и по обилию полученных научных результатов, и по линии воспитания молодых научных работников, и по многим другим разделам. Павел Парфеньевич руководил работой 15 аспирантов, 10 из них успешно защитили диссертации, четверо заканчивают сейчас работу над своими темами. Много лет на факультете не проходит почти ни одной защиты кандидатской диссертации, по которой Павел Парфеньевич не выступал бы оппонентом или не был бы руководителем диссертанта. Много квалифицированного труда вложено им в тщательное корректирование этих работ, результатом которого является высокое, как правило, их качество. Во многих городах страны, особенно в городах Сибири, успешно работают многочисленные ученики Павла Парфеньевича, кандидаты физико-математических наук, прошедшие школу Павла Парфеньевича.

Много энергии отдаст П. П. Куфарев и работе в реферативных журналах „Математика“ и „Механика“ института информации АН СССР. Для этих журналов за последние годы им написано около 110 рефератов!

Павлу Парфеньевичу, главным образом, обязан Томский университет высоким качеством „Ученых записок“ (серия математики и механики).

За 27 лет работы в университете Павел Парфеньевич читал лекции по целому ряду общих дисциплин (теория аналитических функций, уравнения математической физики, теория упругости, гидромеханика, теория обыкновенных дифференциальных уравнений) и по специальным курсам (конформные отображения, вариационные методы конформных отображений, плоская задача теории упругости и многие другие).

Павел Парфеньевич любит лекционную работу, и его лекции всегда пользуются большим успехом у слушателей (студентов и преподавателей). Никогда не жертвуя строгостью и полнотой в изложении курса, Павел Парфеньевич умеет сделать доступными слушателям самые трудные идеи и построения. Его лекции лишены внешних эффектов, однако они успешно служат делу формирования научного мышления, рождают любовь к науке и открывают радость научного творчества. И многие из выпускников Томского университета, математики и механики, тематика научной работы которых явная, чем направление Павла Парфеньевича, с благодарностью причисляют себя (как это делает и автор этих строк) к числу его учеников, именно благодаря его лекциям.

П. П. Куфарев любит Сибирь, свой родной город. Этим объясняется, в частности, его отказ баллотироваться в члены Белорусской и Казахской Академий наук, ибо его согласие на это означало бы согласие на выезд из Томска.

Коммунистическая партия и Советское правительство высоко оценили деятельность Павла Парфеньевича, наградив его медалью „За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941—1945 гг.“ и орденом „Трудовое Красное Знамя“.

В целом следует сказать, что Павел Парфеньевич является крупным ученым, отличным педагогом, замечательным товарищем—настоящим советским ученым. Таким он широко известен коллективу студентов и преподавателей Томского университета, в городе Томске и далеко за его пределами.

Г. Д. Суворов

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ П. П. КУФАРЕВА

1935

1. Расчет электросварочного шва в изогнутой балке, „Изв. НИИММ при ТГУ“, I, 2.

1936

2. Определение давлений между частями многопластинчатой балки, „Изв. НИИММ при ТГУ“, I, 2.

1937

3. О минимальной области для двухсвязных областей, „Изв. НИИММ при ТГУ“, I, 3.
4. К вопросу о кручении и изгибе стержней полигонального сечения, „Прикл. матем. и мех.“, I, 1.

1938

5. Изгиб стержня равностороннего треугольного сечения, „Изв. НИИММ при ТГУ“, II, 2.

1939

6. Определение напряжений в эллиптической анизотропной пластинке, ДАН, XXXIII, 3.

1941

7. Определение напряжений в анизотропном клине, ДАН, XXXII, 8.
8. Определение напряжений в анизотропной полосе (совместно со В. А. Свекло), ДАН, XXXII, 9.

1943

9. Об однопараметрических семействах аналитических функций, „Матем. сб.“, 13 (55), 1.

1945

10. Об интегралах простейшего дифференциального уравнения с подвижной полярной особенностью правой части, „Уч. зап. ТГУ“, 1.
11. Об одной системе дифференциальных уравнений, „Уч. зап. ТГУ“, 1.

1946

12. Об одном свойстве ядровой функции области, „Изв. НИИММ при ТГУ“, III, 1.
13. К вопросу о поведении отображающей функции на границе, „Изв. НИИММ при ТГУ“, III, 1.

1947

14. О некоторых частных решениях задачи фильтрации (совместно с Ю. П. Виноградовым), ДАН LVII, 4.
15. К теории однолистных функций, ДАН, LVII, 6.
16. Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца-Кристоффеля, ДАН, LVII, 6.
17. Одно замечание об уравнении Лёвнера, ДАН, LVII, 7.
18. Теорема о решениях одного дифференциального уравнения, „Уч. зап. ТГУ“, 5.
19. Об одном специальном семействе однолистных областей, „Уч. зап. ТГУ“, 5.

1948

20. Об одном частном случае колебаний винтовой пружины со сталкиванием витков, „Прикл. матем. и мех.“, XII, 2.

21. Решение задачи о контуре нефтеносности для круга, ДАН, LX, 8.

22. Об одной задаче фильтрации (совместно с Ю. П. Виноградовым), „Прикл. матем. и мех.“, XII, 2.

1950

23. К вопросу о конформных отображениях дополнительных областей, ДАН, LXXIII, 5.

24. Решение задачи о контуре нефтеносности для полосы с цепочкой скважин, ДАН, LXXV, 3.

25. Задача о контуре нефтеносности для круга при любом числе скважин, ДАН, LXXV, 4.

1951

26. Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей (совместно с А. Э. Фалес), ДАН, XXXI, 6.

27. Одно замечание об экстремальных задачах теории однолистных функций, „Уч. зап. ТГУ“, 14.

1952

28. Решение некоторых задач о перемещении контура нефтеносности (совместно с П. П. Астафьевым и К. О. Болецким), „Уч. зап. ТГУ“, 17.

29. Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей (совместно с А. Э. Фалес), „Уч. зап. ТГУ“, 17.

30. О струйном обтекании дуги окружности, „Прикл. матем. и мех.“, XVI, 5.

1954

31. Об одной задаче Н. Н. Лузина (совместно с Н. В. Семухиной), „Успехи матем. наук“, IX, 4 (62).

32. Об одном свойстве экстремальных областей задачи коэффициентов, ДАН, XCVII, 3.

1955

33. Одно замечание к задаче коэффициентов, „Уч. зап. ТГУ“, 25.

34. Об уравнении типа Лёвнера для многосвязных областей (совместно с М. Р. Куваевым), „Уч. зап. ТГУ“, 25.

1956

35. Об одном методе исследования экстремальных задач теории однолистных функций, ДАН, 107, 5.

36. О распространении вариационного метода Г. М. Голузина на двухсвязные области (совместно с Н. В. Семухиной), ДАН, 107, 4.

1958

37. Некоторые методы и результаты теории однолистных функций, „Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда“, III.

1959

38. О вихре и источнике под поверхностью жидкости (см. настоящий том „Трудов ТГУ“).

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора	3
Аравийская Е. Н.—Об аналитических функциях с заданным множеством особых поверхностей	5
Клементьев З. И.—Об условиях представимости в виде интеграла Фурье-Стилтьеса непрерывной функции со значениями в абстрактном функциональном пространстве	13
Суворов Г. Д.—К теории простых концов последовательности плоских областей, сходящейся к ядру	22
Куваев М. Р.—Обобщение уравнения типа Левнера для автоморфных функций	27
Куфарев П. П.—Задача о вихре и источнике под поверхностью жидкости	31
Куваев М. Р.—Новый вывод уравнения типа Левнера для двухсвязных областей	45
Макарова Л. Я.—Об областях Рунге первого и второго рода	56
Трофимов П. И.—О конечных группах	61
Круликовский Н. Н.—О работах Я. П. Козельского по механике	66
Томилов Е. Д.—Об одном виде вихревого движения несжимаемой жидкости	72
Назаров Г. И.—Метод подвижной аппроксимации в газодинамике	81
Завьялов Ю. С., Копылов Г. И.—Частный случай движения тела переменной массы	94
Колмаков А. Д.—К вопросу о теореме Ланжевена	97
Тютюрев Г. С.—Определение широты и долготы астрономической обсерватории Томского университета	109
Кузнецов Б. Г.—К вопросу о втором вариационном принципе Бейтмана	117
Кочетков А. И.—Некоторые теоретические обобщения формул сферической и практической астрономии	125
Суворов Г. Д.—Павел Парфеньевич Куфарев	149

Технический редактор А. Т. Осовский.

Корректоры: М. А. Рябичкая и М. И. Сваровская

К300538. Сдано в набор 10/X-56. Подписано к печати 17/IV-59.
 Бумага 70×108¹/₁₆. Объем: 9,75 печ. л.; 4,88 бум. л.; 13,36 уч.-изд. л.
 Заказ 6659-56. Тираж 500 экз. Цена 8 руб. 30 коп.

Томск, типогр. № 1. Полиграфиздата, Советская, 47.

Цена 8 руб. 30 коп.

665345

Томский госуниверситет 1878



Печная библиотека 00758122