УДК 519.2

ББК 22.17

**Обработка данных и управление в сложных системах**: Сборник статей / Под ред. Глуховой Е.В. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. Вып. 4. 112 с.

ISBN 5-7511-1594-5

Сборник содержит статьи сотрудников и аспирантов факультета информатики, экономики и математики филиала Кемеровского государственного университета в г. Анжеро-Судженске и факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, посвященные статистической обработке временных рядов, актуарной математике, а также вопросам управления в системах массового обслуживания и в измерительных системах.

Для студентов, аспирантов, научных работников, занимающихся вопросами временных рядов и управления в измерительных системах.

УДК 519.2

ББК 22.17

ISBN 5-7511-1594-5

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С ВХОДЯЩИМИ РИСКАМИ В ВИДЕ ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

Д.Д. АХМЕДОВА, О.А. ЗМЕЕВ

## Введение

В настоящее время большой интерес вызывают математические модели, так называемой актуарной математики, изучающей различные аспекты страхового дела. В числе этих проблем находится и вопрос о математической модели страховой компании в целом.

Классическая модель страховой компании, изложенная, например в [1-3], на наш взгляд, не всегда адекватно отражает действительность и не позволяет учесть некоторые факторы, влияющие на работу страховой компании.

В данной работе предлагается и частично исследуется другая модель страховой компании отличная от традиционной.

## Модель системы

Рассмотрим математическую модель страховой компании в следующем виде.

Состояние страховой компании в момент времени $t$ характеризуется двумя величинами: капиталом компании $U(t)$ и числом застрахованных рисков $N(t)$.

В компанию поступает поток новых рисков, который мы будем считать пуассоновским потоком событий переменной интенсивности $\lambda(t)$. Вид этой зависимости мы будем считать известным, например, сезонные колебания страхования транспортных средств и т. д. Будем считать, что каждый приходящий риск увеличивает капитал компании на случайную величину $\xi$ с $M\{\xi\}=m_\xi$ и $M\{\xi^2\}=d_\xi$. Так как величина первого страхового взноса – прерогатива компании, будем считать, что $M\{\xi\}=m_\xi(t)$ и $M\{\xi^2\}=d_\xi(t)$ также зависят от времени и являются величинами, которыми можно управлять.

Далее считаем, что по каждому из застрахованных рисков выплачиваются дополнительные взносы, размер которых определяется случайной величиной $\zeta$ с $M\{\zeta\}=m_\zeta$ и $M\{\zeta^2\}=d_\zeta$. Взносы вносятся независимо друг от друга с интенсивностью $\lambda_1 N(t)$.

Далее, могут наступать страховые случаи. Будем считать, что с каждым застрахованным риском страховой случай может наступить с интенсивностью $\mu_1$ и эти страховые случаи для различных рисков независимы. При наступлении страхового случая компания выплачивает страховое возмещение, размер которого определяется случайной величиной $\eta$ с $M\{\eta\}=m_\eta$ и $M\{\eta^2\}=d_\eta$.

Наконец, с интенсивностью $\mu$ страховое время некоторых рисков заканчивается, и они покидают компанию независимо от поведения других рисков.

Задачей настоящей работы является нахождение статистических характеристик процессов $N(t)$ и $U(t)$, а также задача выбора оптимального в каком-то смысле процесса $M\{\xi\}=m_\xi(t)$ и $M\{\xi^2\}=d_\xi(t)$. Заметим, что, так как $\lambda(t)$ зависит от $t$, то эти характеристики также будут зависеть от времени $t$.

## Нахождение статистических характеристик числа застрахованных рисков

Вообще говоря, величина страхового взноса $m_\xi(t)$ влияет на интенсивность потока входящих рисков, так как уменьшение $m_\xi(t)$ приводит к увеличению $\lambda(t)$, и, наоборот, при увеличении $m_\xi(t)$ число желающих застраховаться уменьшится. Поэтому в общем случае следует считать, что $\lambda(t)$ зависит от $m_\xi(t)$ и $t$, то есть $\lambda = \lambda(m_\xi, t)$. Для конкретизации этих формул, мы будем считать, что

$$\lambda(m_\xi, t) = F(m_\xi(t))\lambda_0(t), \text{ где } F(0)=1,\ F(+\infty)=0 \text{ и } F(m_\xi(t)) \tag{1}$$

монотонно убывает с ростом $m_\xi(t)$. $\lambda_0(t)$ имеет в этом случае смысл максимальной интенсивности потока рисков, которые желают застраховать клиенты компании.

### Среднее число рисков

Рассмотрим два близких момента времени $t$ и $t+\Delta t$. Тогда можно считать, что

$$N(t+\Delta t) = N(t) + \Delta N(t), \tag{2}$$

где, в силу сделанных предположений,

$$\Delta N(t) = \begin{cases} 1, \text{ с вероятностью } \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t); \\ -1, \text{ с вероятностью } \mu N(t)\Delta t + o(\Delta t); \\ 0, \text{ с вероятностью } 1 - (\lambda(t) + \mu N(t))\Delta t + o(\Delta t). \end{cases} \tag{3}$$

Обозначим $M\{N(t)\} = N_1(t)$. Тогда, усредняя (2) по флуктуациям $\Delta N(t)$, получим

$$M\{N(t+\Delta t)\} = M\{N(t)\} + M\{\Delta N(t)\},$$

или с учетом (3)

$$N_1(t+\Delta t) = N_1(t) + (\lambda(t) - \mu N_1(t))\Delta t + o(\Delta t).$$

От последней формулы легко перейти к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} + \mu N(t) = \lambda(t). \tag{4}$$

Будем считать, что число застрахованных рисков в момент времени $t_0$ нам известно и равно $N(t_0)$. Тогда очевидно, что $N_1(t_0) = N(t_0)$. Легко получить, что решение дифференциального уравнения (4) имеет следующий вид:

$$N_1(t) = N(t_0)e^{-\mu(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} \lambda(z)e^{-\mu(t-z)}dz. \tag{5}$$

Рассмотрим случай, когда страховая компания функционирует достаточно долго. Этому соответствует ситуация, когда $t_0 \to -\infty$. После этого предельного перехода формула (5) принимает вид

$$N_1(t) = \int_{-\infty}^{t} \lambda(z)e^{-\mu_1(t-z)}dz = \int_{0}^{\infty} \lambda(t-u)e^{-\mu_1 u}du, \tag{6}$$

где последний интеграл получен после замены переменной $u = t - z$.

### Дисперсия числа рисков

Обозначим $M\{N^2(t)\} = N_2(t)$, тогда $D\{N(t)\} = M\{N^2(t)\} - M^2\{N(t)\} = N_2(t) - N_1^2(t)$.

Из соотношения (2) имеем

$$N^2(t+\Delta t)=N^2(t)+\Delta N^2(t)+2N(t)\Delta N(t). \tag{7}$$

Усредним (7) по флуктуациям $\Delta N(t)$, считая траекторию $N(u)$ известной для $t_0 \le u \le t$. Тогда имеем

$$M\left\{N^2(t+\Delta t)\middle| N(u)\right\}=N^2(t)+(\lambda(t)+\mu N(t))\Delta t+2N(t)(\lambda(t)-\mu N(t))\Delta t+o(\Delta t).$$

Усредним теперь это соотношение по значениям $N(t)$, тогда имеем

$$N_2(t+\Delta t)=N_2(t)+(\lambda(t)+\mu N_1(t))\Delta t+2(\lambda(t)N_1(t)-\mu N_2(t))\Delta t+o(\Delta t).$$

Откуда легко получается дифференциальное уравнение для $N_2(t)$:

$$\frac{dN_2(t)}{dt}+2\mu N_2(t)=\lambda(t)+\mu N_1(t)+2\lambda(t)N_1(t). \tag{8}$$

Можно решить это уравнение в явном виде, но проще сразу вывести уравнение для нахождения дисперсии числа рисков. Так как

$$D\{N(t)\}=M\left\{N^2(t)\right\}-M^2\{N(t)\}=N_2(t)-N_1^2(t),$$

то

$$\frac{dD\{N(t)\}}{dt}=\frac{dN_2(t)}{dt}-2N_1(t)\frac{dN_1(t)}{dt}.$$

С учетом (4) получаем

$$2N_1(t)\frac{dN_1(t)}{dt}=2\lambda(t)N_1(t)-2\mu N_1^2(t). \tag{9}$$

Вычитая это соотношение из (8), получим окончательный вид уравнения для $D\{N(t)\}$:

$$\frac{dD\{N(t)\}}{dt}+2\mu D\{N(t)\}=\lambda(t)+\mu N_1(t). \tag{10}$$

Так как мы предположили, что число застрахованных рисков в момент времени $t_0$ нам известно, естественно считать, что $D\{N(t_0)\}=0$. Тогда решение (10) имеет вид

$$D\{N(t)\}=\int_{t_0}^{t}(\lambda(z)+\mu N_1(z))e^{-2\mu(t-z)}dz.$$

При $t_0 \to -\infty$ получим

$$D\{N(t)\}=\int_{-\infty}^{t}(\lambda(z)+\mu N_1(z))e^{-2\mu(t-z)}dz=\int_0^{\infty}(\lambda(t-u)+\mu N_1(t-u))e^{-2\mu u}du. \tag{11}$$

Упростим это выражение. Имеем

$$I=\int_0^{\infty}N_1(t-u)e^{-2\mu u}du=\int_0^{\infty}e^{-2\mu u}\left(\int_u^{\infty}\lambda(t-u-z)e^{-\mu z}dz\right)du.$$

Заменяем во внутреннем интеграле переменную $v=z+u$. Тогда

$$I=\int_0^{\infty}e^{-2\mu u}\left(\int_u^{\infty}\lambda(t-v)e^{-\mu(v-u)}dv\right)du.$$

Переставляя местами интегралы, получим

$$\int_0^{\infty}\lambda(t-v)\left(\int_0^{u}e^{\mu(v-u)-2\mu u}du\right)dv=\int_0^{\infty}\lambda(t-v)e^{-\mu v}\left(\int_0^{u}e^{-\mu u}du\right)dv=\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}\lambda(t-v)e^{-\mu v}\left(1-e^{-\mu v}\right)dv. \tag{12}$$

Подставляя это выражение в (11) и приводя подобные, окончательно получим, что

$$D\{N(t)\} = \int_0^\infty \lambda(t-v)e^{-\mu v}dv = N_1(t). \tag{13}$$

Это очень простое соотношение будем использовать в дальнейшем.

Функция ковариации числа рисков

Найдем теперь $C_N(t_1,t_2) = M\{N(t_1)N(t_2)\} - N_1(t_1)N_1(t_2)$. Пусть для определенности $t_2 > t_1$. Тогда из (2)

$$N(t_2 + \Delta t_2) = N(t_2) + \Delta N(t_2),$$

а

$$N(t_1)N(t_2 + \Delta t_2) = N(t_1)N(t_2) + N(t_1)\Delta N(t_2).$$

Считая реализацию $N(t)$ фиксированной для $-\infty < t < t_2$ и усредняя по $\Delta N(t_2)$, получим

$$M\{N(t_1)N(t_2+\Delta t_2)|N(u)\} = N(t_1)N(t_2) + N(t_1)(\lambda(t_2) - \mu N(t_2))\Delta t_2 + o(\Delta t_2). \tag{14}$$

Обозначим $\tilde{C}(t_1,t_2) = M\{N(t_1)N(t_2)\}$. Тогда, усредняя (14) по реализациям процесса $N(t)$, получим

$$\tilde{C}(t_1,t_2+\Delta t_2) = \tilde{C}(t_1,t_2) + \left(\lambda(t_2)N_1(t_1) - \mu\tilde{C}(t_1,t_2)\right)\Delta t_2 + o(\Delta t_2),$$

из которого получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial \tilde{C}(t_1,t_2)}{\partial t_2} + \mu\tilde{C}(t_1,t_2) = \lambda(t_2)N_1(t_1). \tag{15}$$

С другой стороны, по стандартным правилам дифференцирования и с учетом (4) имеем

$$\frac{\partial(N_1(t_1)N_1(t_2))}{\partial t_2} = N_1(t_1)\frac{dN_1(t_2)}{dt_2} = N_1(t_1)(\lambda(t_2) - \mu N_1(t_2)). \tag{16}$$

Вычитая (16) из (15), получим

$$\frac{\partial C_N(t_1,t_2)}{\partial t_2} + \mu C_N(t_1,t_2) = 0. \tag{17}$$

Так как $C_N(t_1,t_1) = D\{N(t_1)\} = N_1(t_1)$, то из этого уравнения следует, что при $t_2 > t_1$

$$C_N(t_1,t_2) = N_1(t_1)e^{-\mu(t_2-t_1)}. \tag{18}$$

В общем виде последний результат можно записать в следующем виде

$$C_N(t_1,t_2) = N_1(\min[t_1,t_2])e^{-\mu|t_2-t_1|}. \tag{19}$$

## Нахождение статистических характеристик капитала компании

Процесс $N(t)$ является управляющим процессом для капитала компании, так как все изменения капитала связаны с застрахованными рисками, их приходом и уходом. Поэтому все характеристики процесса $U(t)$, описывающего капитал компании, выражаются через характеристики процесса $N(t)$.

Среднее значение капитала

Рассмотрим бесконечно малый промежуток времени $[t, t+\Delta t]$ и обозначим через $\Delta U(t)$ изменение капитала на этом промежутке. В силу математической модели компании имеем

$$\Delta U(t)=\begin{cases}\xi, \text{ с вероятностью } \lambda(t)\Delta t+o(\Delta t);\\ \zeta, \text{ с вероятностью } \lambda_1 N(t)\Delta t+o(\Delta t);\\ -\eta, \text{ с вероятностью } \mu_1 N(t)\Delta t+o(\Delta t);\\ 0, \text{ с вероятностью } 1-(\lambda(t)+\lambda_1 N(t)+\mu_1 N(t))\Delta t+o(\Delta t).\end{cases} \quad (20)$$

Аналогично (2) основное соотношение для процесса $U(t)$ имеет вид

$$U(t+\Delta t)=U(t)+\Delta U(t). \quad (21)$$

Пусть траектория процесса $N(t)$ фиксирована. Тогда

$$M\{\Delta U(t)|N(t)\}=\lambda(t)M\{\xi\}\Delta t+\lambda_1 M\{\zeta\}N(t)\Delta t-\mu_1 M\{\eta\}N(t)\Delta t+o(\Delta t)=$$
$$=(m_\xi(t)\lambda(t)+(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1)N(t))\Delta t+o(\Delta t),$$

а

$$M\{U(t+\Delta t)|N(t)\}=M\{U(t)|N(t)\}+(m_\xi(t)\lambda(t)+(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1)N(t))\Delta t+o(\Delta t). \quad (22)$$

Обозначим $M\{U(t)\}=U_1(t)$. Тогда, усредняя (22) по реализациям процесса $N(t)$, получим

$$U_1(t+\Delta t)=U_1(t)+(m_\xi(t)\lambda(t)+(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1)N_1(t))\Delta t+o(\Delta t),$$

откуда

$$\frac{dU_1(t)}{dt}=m_\xi(t)\lambda(t)+(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1)N_1(t). \quad (23)$$

Считая, что в момент времени $t=0$ капитал компании равен $U_0$, получаем решение последнего дифференциального уравнения в виде

$$U_1(t)=U_0+\int_0^t m_\xi(u)\lambda(u)du+(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1)\int_0^t N_1(u)du \quad (24)$$

Подставляя в это уравнение явное выражение для $N_1(t)$, после ряда преобразований можно получить следующий результат:

$$U_1(t)=U_0+\int_0^t m_\xi(u)\lambda(u)du+\frac{m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1}{\mu}\left[\int_0^t\lambda(u)\left(1-e^{-\mu(t-u)}\right)du+\left(1-e^{-\mu t}\right)\int_{-\infty}^0\lambda(u)e^{-\mu u}du\right]. \quad (25)$$

### Дисперсия капитала

Возводя (21) в квадрат, получим

$$U^2(t+\Delta t)=U^2(t)+2U(t)\Delta U(t)+\Delta U^2(t). \quad (26)$$

Так как

$$\Delta U^2(t)=\begin{cases}\xi^2, \text{ с вероятностью } \lambda(t)\Delta t+o(\Delta t);\\ \zeta^2, \text{ с вероятностью } \lambda_1 N(t)\Delta t+o(\Delta t);\\ \eta^2, \text{ с вероятностью } \mu_1 N(t)\Delta t+o(\Delta t);\\ 0, \text{ с вероятностью } 1-(\lambda(t)+\lambda_1 N(t)+\mu_1 N(t))\Delta t+o(\Delta t),\end{cases} \quad (27)$$

то при фиксированном $N(t)$

$$M\{\Delta U^2(t)|N(t)\}=(d_\xi(t)\lambda(t)+(d_\zeta\lambda_1+d_\eta\mu_1)N(t))\Delta t+o(\Delta t).$$

Поэтому, усредняя (26) при фиксированной реализации $N(t)$, получим

$$M\{U^2(t+\Delta t)|N(t)\}=M\{U^2(t)|N(t)\}+2M\{U(t)|N(t)\}M\{\Delta U(t)|N(t)\}+M\{\Delta U^2(t)|N(t)\}. \quad (28)$$

где учтено, что при фиксированной траектории $N(t)$ величины $U(t)$ и $\Delta U(t)$ независимы. окончательно имеем

$$M\{U^2(t+\Delta t)|N(t)\}=M\{U^2(t)|N(t)\}+2M\{U(t)|N(t)\}(m_\xi(t)\lambda(t)+(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1)N(t))\Delta t+$$
$$+(d_\xi(t)\lambda(t)+(d_\zeta\lambda_1+d_\eta\mu_1)N(t))\Delta t+o(\Delta t).$$

По аналогии с (24) можно получить

$$M\{U(t)|N(t)\}=\int_0^t m_\xi(u)\lambda(u)du+(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1)\int_0^t N(u)du, \tag{29}$$

так что

$$M\{U^2(t+\Delta t)|N(t)\}=M\{U^2(t)|N(t)\}+(d_\xi(t)\lambda(t)+(d_\zeta\lambda_1+d_\eta\mu_1)N(t))\Delta t+$$
$$+2(m_\xi(t)\lambda(t)+(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1)N(t))\left(\int_0^t m_\xi(u)\lambda(u)du+(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1)\int_0^t N(u)du\right)\Delta t+o(\Delta t).$$

Поэтому

$$\frac{dM\{U^2(t)|N(t)\}}{dt}=d_\xi(t)\lambda(t)+(d_\zeta\lambda_1+d_\eta\mu_1)N(t)+$$
$$+2(m_\xi(t)\lambda(t)+(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1)N(t))\left(\int_0^t m_\xi(u)\lambda(u)du+(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1)\int_0^t N(u)du\right).$$

Обозначим $M\{U^2(t)\}=U_2(t)$. Тогда, усредняя полученное выше дифференциальное уравнение по траекториям $N(t)$, получим

$$\frac{dU_2(t)}{dt}=d_\xi(t)\lambda(t)+(d_\zeta\lambda_1+d_\eta\mu_1)N_1(t)+2\left(m_\xi(t)\lambda(t)\int_0^t m_\xi(u)\lambda(u)du+\right.$$
$$+m_\xi(t)\lambda(t)(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1)\int_0^t N_1(u)du+N_1(t)(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1)\int_0^t m_\xi(u)\lambda(u)du+ \tag{30}$$
$$\left.+(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1)^2\int_0^t \tilde{C}(t,u)du\right).$$

Для нахождения дисперсии капитала будем использовать стандартную формулу, согласно которой в наших обозначениях в момент времени $t$ $D\{U(t)\}=U_2(t)-U_1^2(t)$. Тогда

$$\frac{dD\{U(t)\}}{dt}=\frac{dU_2(t)}{dt}-2U_1(t)\frac{dU_1(t)}{dt}.$$

Принимая во внимание (23) и для простоты рассматривая случай $U(0)=0$, получим

$$2U_1(t)\frac{dU_1(t)}{dt}=2(m_\xi(t)\lambda(t)+(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1)N_1(t))\left(\int_0^t m_\xi(u)\lambda(u)du+(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1)\int_0^t N_1(u)du\right)$$

Вычитая последнее выражение из (30), получим

$$\frac{dD\{U(t)\}}{dt}=d_\xi(t)\lambda(t)+(d_\zeta\lambda_1+d_\eta\mu_1)N_1(t)+2(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1)^2\int_0^t C_N(t,u)du. \tag{31}$$

Подставляя явный вид функции ковариации числа рисков $C_N(t,u)$, окончательно получим

$$\frac{dD\{U(t)\}}{dt}=d_\xi(t)\lambda(t)+\left(d_\zeta\lambda_1+d_\eta\mu_1\right)N_1(t)+2\left(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1\right)^2\int_0^t N_1(u)e^{-\mu(t-u)}du.$$

Так как при $t=0$ капитал считается точно известным, то $D\{U(0)\}=0$. Интегрируя последнее выражение, получаем

$$D\{U(t)\}=\int_0^t d_\xi(u)\lambda(u)du+\left(d_\zeta\lambda_1+d_\eta\mu_1\right)\int_0^t N_1(u)du+$$

$$+2\left(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1\right)^2\int_0^t dz\int_0^z N_1(u)e^{-\mu(z-u)}du. \tag{32}$$

Меняя местами в последнем интеграле переменные интегрирования, имеем

$$\int_0^t dz\int_0^z N_1(z)e^{-\mu(z-u)}du=\int_0^t N_1(u)du\int_u^t e^{-\mu(z-u)}dz=\frac{1}{\mu}\int_0^t N_1(u)\left(1-e^{-\mu(t-u)}\right)du.$$

И поэтому

$$D\{U(t)\}=\int_0^t d_\xi(u)\lambda(u)du+\int_0^t N_1(u)\left(d_\zeta\lambda_1+d_\eta\mu_1+\frac{2\left(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1\right)^2}{\mu}\right)\left(1-e^{-\mu(t-u)}\right)du, \tag{33}$$

где $N_1(u)$ выражается формулой (5).

### Ковариация между капиталом и числом рисков

Найдем еще величину $C_{UN}(t)=M\{U(t)N(t)\}-U_1(t)N_1(t)$, то есть ковариацию между значением капитала и числом застрахованных рисков в один и тот же момент времени. Допустим, что реализация $N(t)$ фиксирована, тогда имеет место соотношение (29). Следовательно,

$$N(t)M\{U(t)|N(t)\}=N(t)\int_0^t m_\xi(u)\lambda(u)du+\left(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1\right)N(t)\int_0^t N(u)du.$$

и, усредняя по реализациям процесса $N(t)$, получим

$$M\{U(t)N(t)\}=N_1(t)\int_0^t m_\xi(u)\lambda(u)du+\left(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1\right)\int_0^t \widetilde{C}_N(t,u)du. \tag{34}$$

С другой стороны,

$$U_1(t)N_1(t)=N_1(t)\left(\int_0^t m_\xi(u)\lambda(u)du+\left(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1\right)\int_0^t N_1(u)du\right). \tag{35}$$

Вычитая (35) из (34) получим

$$C_{UN}(t)=\left(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1\right)\int_0^t C_N(t,u)du.$$

Так как $C_N(t,u)=N_1(t)e^{-\mu(t-u)}$, то

$$C_{UN}(t)=\left(m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1\right)\int_0^t N_1(u)e^{-\mu(t-u)}du, \qquad (36)$$

что и определяет искомую величину.

**Оптимальное управление средней величиной начального взноса**

Как уже указывалось выше, выбор зависимости $m_\xi(t)$ от времени находится во власти менеджмента компании, и, меняя его, можно добиваться оптимальной, в некотором смысле, работы компании.

Напомним начальные предположения, пусть $\lambda(m_\xi,t)=F(m_\xi(t))\lambda_0(t)$, где $F(m_\xi(t))$ обладает всеми свойствами, указанными выше.

Поставим следующую задачу: выбрать на промежутке времени $[0,T]$ вид функции $m_\xi(t)$ так, чтобы $U_1(t)$ было максимальным.

Выражение для $U_1(T)$, полученное в (25), с учетом явного вида $\lambda(m_\xi,t)$, имеет вид:

$$U_1(t)=U_0+\int_0^T\left(m_\xi(u)+\frac{m_\zeta\lambda_1-m_\xi\mu_1}{\mu}\left(1-e^{-\mu(T-u)}\right)\right)F(m_\xi(u))\lambda_0(u)du+$$

$$+\left(1-e^{-\mu T}\right)\int_{-\infty}^0\lambda_0(u)F(m_\xi(u))e^{-\mu u}du. \qquad (37)$$

В первом интеграле перед $\lambda_0(u)$ стоит сомножитель

$$m_\xi(u)F(m_\xi(u))+\frac{m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1}{\mu}F(m_\xi(u))\left(1-e^{-\mu(T-u)}\right). \qquad (38)$$

Очевидно, что чем больше этот сомножитель, тем больше будет соответствующее слагаемое. Становится понятно, что первое слагаемое определяет доход от новых рисков, а второе – от страховых взносов по уже застрахованным рискам.

Поэтому оптимальная зависимость $m_\xi(u)$ должна находиться из условия

$$m_\xi(u)F(m_\xi(u))+\frac{m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1}{\mu}F(m_\xi(u))\left(1-e^{-\mu(T-u)}\right)\Rightarrow\max_{m_\xi(u)}. \qquad (39)$$

Приравнивая к нулю производную от этого выражения по $m_\xi(u)$, получим уравнение

$$F(m_\xi(u))+m_\xi(u)F'(m_\xi(u))+F'(m_\xi(u))\frac{m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1}{\mu}\left(1-e^{-\mu(T-u)}\right)=0.$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$m_\xi(u)+\frac{F(m_\xi(u))}{F'(m_\xi(u))}=-\frac{m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1}{\mu}\left(1-e^{-\mu(T-u)}\right), \qquad (40)$$

который определяет $m_\xi(u)$.

В качестве примера рассмотрим частный случай зависимости $F(m_\xi(t))$, когда

$$F(m_\xi(u))=\frac{1}{1+\gamma m_\xi^2(u)}.$$

Эта зависимость удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к $F(m_\xi(t))$. Для этой функции уравнение (40) приобретает следующий вид:

$$\frac{1-\gamma m_\xi^2(u)}{2\gamma m_\xi(u)}=\frac{m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1}{\mu}\left(1-e^{-\mu(T-u)}\right)$$

и легко решается аналитически.

Обозначая $\sqrt{\gamma}m_\xi(u)=z$, $\sqrt{\gamma}\,\frac{m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1}{\mu}\left(1-e^{-\mu(T-u)}\right)=\delta(u)$, получим уравнение

$$\frac{1-z^2}{2z}=\delta(u).$$

А значит,

$$z=\sqrt{\delta^2(u)+1}-\delta(u),$$

или, в более явном виде,

$$m_\xi(u)=\frac{\sqrt{\delta^2(u)+1}-\delta(u)}{\sqrt{\gamma}}.$$

На рис. 1 приведен графический вид зависимости $\sqrt{\gamma}m_\xi(u)$ от параметров $\mu(T-u)$ и $\sqrt{\gamma}\,\frac{m_\zeta\lambda_1-m_\eta\mu_1}{\mu}=\Delta$. Заметим, что все это – безразмерные величины.

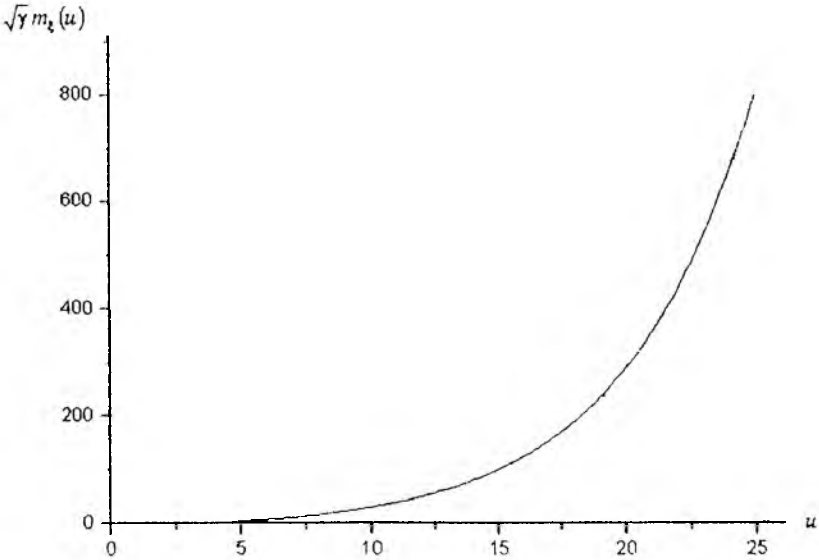


Рис. 1. Зависимость управляющей функции от параметров модели

Вид этой зависимости очевиден. При $m_\zeta\lambda_1 - m_\eta\mu_1 > 0$, когда до наступления момента $T$ достаточно далеко, компании имеет смысл набрать как можно больше застраховавшихся рисков, для этого стоит снижать $m_\xi(u)$. А при приближении к моменту времени $T$ компании необходимо наоборот получать как можно больше прибыли от новых рисков. Правда, при $m_\zeta\lambda_1 - m_\eta\mu_1 < 0$ картина будет обратной.

Заметим еще, что при $T \to \infty$ уравнение (40) приобретает вид:

$$m_\xi(u) + \frac{F(m_\xi(u))}{F'(m_\xi(u))} = -\frac{m_\zeta\lambda_1 - m_\eta\mu_1}{\mu},$$

что дает возможность определить стационарное значение.

ЛИТЕРАТУРА


1. Штрауб Э. Актуарная математика имущественного страхования. Цюрих, 1998. 148 с.
2. Прабху Н.У. Стохастические процессы теории запасов. М.: Мир. 1984. 184 с.
3. Panjer H.H., Willmot G.E. Insurance Risk Models. Society of Actuaries, 1992. 442 p.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988. 447 с.
5. Змеев О.А. Модель функционирования страховой компании при конечном числе возможных клиентов // Изв. вузов. Физика. 1999. №4. С. 34-39.
6. Змеев О.А. Модель функционирования страховой компании при интенсивности входящего потока, зависящего от числа клиентов // Математическое моделирование. Кибернетика. Информатика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. С. 67-72.