ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

Научный журнал

2008 **№1(2)**

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС 77-29497
от 27 сентября 2007 г.

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Адрес редакции: 634050, г. Томск, проспект Ленина, д. 36

E- mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Ново-Соборная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортес*

К-ОКП ОК-005-93, код продукции 952000

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 10.04.2008.
Формат 70 × 100 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 9,35. Уч.-изд. л. 10,48. Тираж 500 экз. Заказ № 7.

Отпечатано в типографии «М-Принт», г. Томск, ул. Пролетарская, 38/1

СОДЕРЖАНИЕ

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

CONTENTS

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

MATHEMATICAL MODELING

INFORMATION HANDLING

INFORMATICS AND PROGRAMMING

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2008 Управление, вычислительная техника и информатика № 1(2)

УДК 519.2

Н.В. Степанова, А.Ф. Терпугов

ОБ ОДНОМ ЗАКОНЕ УПРАВЛЕНИЯ ЦЕНОЙ ПРИ ПРОДАЖЕ СКОРОПОРТЯЩЕЙСЯ ПРОДУКЦИИ

Рассматривается управление ценой продажи продукции, гарантирующее продажу товара в течение торговой сессии и максимальную прибыль от этой продажи.

Ключевые слова: *управление ценой, максимизация прибыли, длительность продаж.*

Постановка проблемы и математическая модель

Пусть имеется некоторая скоропортящаяся продукция (например молоко, сметана, свежая рыба, овощи и т.д.), которая должна быть продана в течение торговой сессии (например дня). В противном случае товар снимается с реализации и пропадает.

Продавец покупает партию товара объема Q_0 по оптовой цене d и продает ее по розничной цене c. Ставится задача нахождения значений Q_0 и c, при которых средняя прибыль продавца будет максимальной.

Будем считать, что торговая сессия начинается в момент времени 0 и кончается в момент времени T, то есть она занимает интервал времени $[0, T]$. Обозначим через $Q(t)$ количество товара в момент времени t. Будем также считать, что $Q(0) = Q_0$ фиксировано. Предположим, что поток покупателей является пуассоновским потоком интенсивности $\lambda(c(t))$, зависящей от розничной цены $c(t)$.

Будем считать, что покупатели приобретают товар независимо друг от друга, и объем покупки ξ есть случайная величина с $M\{\xi\} = a_1$ и $M\{\xi^2\} = a_2$.

В одном очень частном случае эта задача уже исследовалась в работе Е.В. Новицкой [1], где закон управления ценой $c(t)$ продажи товара брался из соотношения

$$a_1\lambda(c(t)) = \frac{Q(t)}{T-t}.$$

В настоящей статье рассматривается случай, когда закон управления ценой $c(t)$ продажи товара имеет вид

$$a_1\lambda(c(t)) = \frac{Q(t)}{T(1-t/T)^{\gamma}}, \quad \gamma \neq 1. \tag{1}$$

Основные характеристики количества товара

Найдем характеристики величины количества товара в диффузионном приближении. Процесс $Q(t)$ может быть приближенно описан следующим стохастическим дифференциальным уравнением [1]

$$dQ(t) = -a_1\lambda(c)dt + \sqrt{a_2\lambda(c)}dw(t).$$

В рассматриваемом случае это уравнение принимает вид

$$dQ(t) = -\frac{Q(t)}{T(1-t/T)^{\gamma}}dt + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{Q(t)}{T(1-t/T)^{\gamma}}}dw(t)\,. \qquad (2)$$

Найдем основные вероятностные характеристики процесса $Q(t)$. Обозначим $M\{Q(t)\} = \bar{Q}(t)$. Усредняя уравнение (2) с учетом того, что приращения винеровского случайного процесса независимы и имеют нулевое математическое ожидание, получим следующее уравнение для $\bar{Q}(t)$:

$$d\bar{Q}(t) = -\frac{\bar{Q}(t)}{T(1-t/T)^{\gamma}}dt\,,$$

которое надо решить при начальном условии $\bar{Q}(0) = Q_0$. Решая его стандартным методом разделения переменных, получим

$$\bar{Q}(t) = Q_0 \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1\right]\right\}. \qquad (3)$$

В частности, $\bar{Q}(T) = Q_0 \exp\left(-\frac{1}{1-\gamma}\right)$, $\bar{Q}(T) = 0$ при $\gamma > 1$.

Для нахождения дисперсии процесса $Q(t)$ рассмотрим процесс $Q^2(t)$. Тогда, используя формулу Ито, получаем, что этот процесс удовлетворяет следующему уравнению:

$$d(Q^2(t)) = \left(-\frac{2Q^2(t)}{T(1-t/T)^{\gamma}} + \frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{Q(t)}{T(1-t/T)^{\gamma}}\right)dt + 2Q(t)\sqrt{\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{Q(t)}{T(1-t/T)^{\gamma}}}dw(t)\,. \qquad (4)$$

Обозначим $M\{Q^2(t)\} = Q_2(t)$. Тогда, усредняя (4), получим

$$dQ_2(t) = \left(-\frac{2Q_2(t)}{T(1-t/T)^{\gamma}} + \frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{\bar{Q}(t)}{T(1-t/T)^{\gamma}}\right)dt\,,$$

или, с учетом (3),

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = -2\frac{Q_2(t)}{T(1-t/T)^{\gamma}} + \frac{a_2 Q_0 \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1\right]\right\}}{a_1 T(1-t/T)^{\gamma}}\,, \qquad (5)$$

которое надо решить при начальном условии $Q_2(0) = Q_0^2$.

Это уравнение решается стандартным методом вариации произвольных постоянных. Само решение имеет вид

$$Q_2(t) = Q_0^2 \exp\left\{\frac{2}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1\right]\right\} +$$
$$+\frac{a_2 Q_0}{a_1}\cdot\exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1\right]\right\}\left[1 - \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1\right]\right\}\right]. \qquad (6)$$

Отсюда

$$D\{Q(t)\} = D_Q(t) = Q_2(t) - \bar{Q}^2(t) =$$

$$= \frac{a_2 Q_0}{a_1} \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1\right]\right\}\left[1 - \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1\right]\right\}\right]. \qquad (7)$$

В частности, $D_Q(0) = 0$, $D_Q(T) = \frac{a_2}{a_1} Q_0 \exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right]$, $D_Q(T) = 0$ при $\gamma > 1$. Вместе с результатом $\bar{Q}(T) = 0$ это говорит о том, что с вероятностью 1 $Q(T) = 0$, то есть с вероятностью 1 к концу торговой сессии весь товар будет продан при $\gamma > 1$.

Плотность вероятностей процесса *Q*(*t*)

Таким образом, процесс $Q(t)$ начинается с Q_0 и заканчивается в 0. Рассмотрим $f(Q,t) = e^{-pQ}$. Тогда, используя формулу Ито, получим следующее уравнение:

$$d\left(e^{-pQ}\right) = \left(\frac{Q}{T(1-t/T)^{\gamma}} p e^{-pQ} + \frac{a_2}{2a_1} \frac{Q}{T(1-t/T)^{\gamma}} p^2 e^{-pQ}\right) dt -$$

$$- p e^{-pQ} \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \frac{Q}{T(1-t/T)^{\gamma}}} dw(t).$$

Рассмотрим функцию $\Phi(p,t) = M\{e^{-pQ}\}$, которая является преобразованием Лапласа от плотности вероятностей $p(Q,t)$ значений процесса $Q(t)$ в момент времени t. Тогда $\frac{\partial \Phi(p,t)}{\partial p} = -M\{Q e^{-pQ}\}$ и, усредняя (1.7), получим

$$d_t \Phi(p,t) = -\frac{1}{T(1-t/T)^{\gamma}}\left(p \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{a_2}{2a_1} p^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) dt,$$

или, в явном виде,

$$T(1-t/T)^{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p\left(1 + \frac{a_2}{2a_1} p\right) \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0. \qquad (8)$$

В дальнейшем будем использовать обозначение $\beta = 2a_1/a_2$.

Уравнение (8) является линейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. Оно решается методом характеристик. Решение имеет вид

$$\Phi(p,t) = \exp\left(-\frac{\beta \cdot p \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1\right]\right\}}{p + \beta - p \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1\right]\right\}} Q_0\right).$$

Находя обратное преобразование Лапласа, получим явный вид $p(Q, t)$:

$$p(Q,t)=\exp\left(-\frac{\exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma}-1\right]\right\}}{1-\exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma}-1\right]\right\}}\beta Q_0\right)\times$$

$$\times\left[\delta(Q)+\beta\exp\left(-\frac{\beta\cdot Q_0}{1-\exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma}-1\right]\right\}}\right)\sqrt{\frac{\exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma}-1\right]\right\}Q_0}{(1-\exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma}-1\right]\right\})^2 Q}}\times\right.$$

$$\left.\times I_1\left(2\sqrt{\frac{\exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma}-1\right]\right\}}{(1-\exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma}-1\right]\right\})^2}\beta^2 Q_0 Q}\right)\right].$$

Отметим особую роль слагаемого

$$\exp\left(-\frac{\exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma}-1\right]\right\}}{1-\exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma}-1\right]\right\}}\beta Q_0\right)\delta(Q),$$

содержащего δ-функцию. Оно возникает потому, что величина покупки является случайной и, в принципе, может прийти покупатель и купить весь оставшийся товар, и тогда торговая сессия для продавца закончится. Математически это происходит потому, что в точке, где $Q(t_0)=0$, у процесса $Q(t)$ равны нулю и коэффициент сноса, и коэффициент диффузии, и поэтому при $t>t_0$ $Q(t)=0$.

Средняя длительность продаж

Полученный выше результат позволяет вычислить и некоторые другие характеристики процесса продаж. Обозначим через τ величину промежутка времени от начала торговой сессии до того момента, когда будет продан весь товар, то есть длительность продаж. Тогда из вида рассматриваемого слагаемого следует, что

$$P(\tau\le t)=F_\tau(t)=\exp\left(-\frac{\exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma}-1\right]\right\}}{1-\exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[(1-t/T)^{1-\gamma}-1\right]\right\}}\beta\cdot Q_0\right), \tag{9}$$

где $F_\tau(t)$ есть функция распределения величины τ.

Это позволяет вычислить, например, среднюю длительность продаж. Имеем

$$M\{\tau\}=\int_0^T(1-F_\tau(t))dt=T\left(1-e^{\beta Q_0}\int_0^{1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}}e^{-\beta Q_0/x}\left[(1-\gamma)\ln(1-x)+1\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\frac{dx}{1-x}\right). \tag{10}$$

Входящий сюда интеграл через элементарные функции не выражается.

Найдем асимптотику $M\{\tau\}$ при $\beta Q_0 >> 1$, то есть при большой величине партии товара Q_0. Тогда величина $B = 1/\beta Q_0 << 1$. Делая в интеграле замену переменных $x/\beta Q_0 = Bx = z$, получим

$$e^{\beta Q_0}\int_0^{1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}} e^{-\beta Q_0/x}\left[(1-\gamma)\ln(1-x)+1\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\frac{dx}{1-x} =$$

$$=\frac{1}{B}e^{1/B}\int_0^{B\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right)} e^{-1/z}\left[(1-\gamma)\ln(1-z/B)+1\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\frac{dz}{1-z/B}.$$

Найдем по правилу Лопиталя следующий предел:

$$\lim_{B\to 0}\frac{1}{B^2}e^{1/B}\int_0^{B\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right)} e^{-1/z}\left[(1-\gamma)\ln(1-z/B)+1\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\frac{dz}{1-z/B} =$$

$$=\lim_{B\to 0}\frac{\int_0^{B\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right)} e^{-1/z}\left[(1-\gamma)\ln(1-z/B)+1\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\frac{dz}{1-z/B}}{B^2e^{-1/B}} =$$

$$=\lim_{B\to 0}\frac{\exp\left\{-\frac{1}{B(1-\exp\{-1/(1-\gamma)\})}\right\}\left[(1-\gamma)\ln\left(1-1+\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right)+1\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}{2Be^{-1/B}+e^{-1/B}} = 0.$$

Отсюда следует, что при $B = 1/\beta Q_0 << 1$

$$e^{\beta Q_0}\int_0^{1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}} e^{-\beta Q_0/x}\left[(1-\gamma)\ln(1-x)+1\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\frac{dx}{1-x} =$$

$$=\frac{1}{B}e^{1/B}\int_0^{B\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right)} e^{-1/z}\left[(1-\gamma)\ln(1-z/B)+1\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\frac{dz}{1-z/B} = O(B)$$

и поэтому

$$M\{\tau\} = T\left(1+O\left(\frac{1}{\beta Q_0}\right)\right). \qquad (11)$$

Оптимизация по значению параметра γ

Рассмотрим теперь проблему выбора оптимального значения параметра γ при условии $\gamma \ge 1$, то есть при дополнительном требовании, что товар должен быть продан весь до конца торговой сессии.

Рассмотрим случай, когда зависимость $\lambda(c)$ может быть аппроксимирована прямой линией:

$$\lambda(c) = \lambda_0 - \lambda_1\frac{c-c_0}{c_0}. \qquad (12)$$

Здесь c_0 имеет смысл некоторой «стандартной» цены, так что $\lambda(c_0)=c_0$. Такая аппроксимация возможна, если отклонения цены c от c_0 незначительны.

В этом случае уравнение (1) приобретает вид

$$a_1\lambda(c)=a_1\left(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_1\frac{c}{c_0}\right)=\frac{Q}{T\varphi(t/T)},$$

где $\varphi(z)=(1-z)^{\gamma}$. Отсюда

$$c=c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}-\frac{Q}{a_1\lambda_1 T\varphi(t/T)}\right). \tag{13}$$

Так как в единицу времени в среднем совершается $\lambda(c)$ покупок, средний размер которых равен a_1, по цене c, то среднее значение выручки в единицу времени

$$ca_1\lambda(c)=c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}-\frac{1}{a_1\lambda_1}\frac{Q}{T\varphi(t/T)}\right)\frac{Q}{T\varphi(t/T)}. \tag{14}$$

Усредняя по объему партии товара $Q(t)$, имеющегося в наличии в момент времени t, получим

$$M\{ca_1\lambda(c)\}=c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)\frac{\bar{Q}}{T\varphi(t/T)}-c_0\frac{1}{a_1\lambda_1}\frac{\overline{Q^2}}{T^2\varphi^2(t/T)}=$$

$$=c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)\frac{\bar{Q}}{T\varphi(t/T)}-\frac{c_0}{a_1\lambda_1}\frac{Q_2}{T^2\varphi^2(t/T)}. \tag{15}$$

Отсюда средняя выручка за весь период торговой сессии равна

$$S=\int_0^T M\{ca_1\lambda(c)\}dt. \tag{16}$$

Подставляя сюда явные выражения для $\bar{Q}$ и Q_2, после громоздких преобразований получим

$$S=\frac{c_0Q_0}{\lambda_1}\left[(\lambda_0+\lambda_1)-\frac{1}{a_1T}\left(Q_0-\frac{a_2}{a_1}\right)\int_0^1\left(e^{\frac{2}{\gamma-1}(1-z^{\gamma})}+qe^{\frac{1}{\gamma-1}(1-z^{\gamma})}\right)\frac{dz}{z^{2\gamma}}\right], \tag{17}$$

где $q=a_2/(a_1Q_0-a_2)$. Заметим, что в реальности объём партии товара, выставляемой на продажу, обычно велик, так что параметр $q \ll 1$.

Естественное желание максимизировать выручку от продажи товара $S\Rightarrow\max$ приводит к условию

$$\int_0^1\left(e^{\frac{2}{\gamma-1}(1-z^{\gamma})}+qe^{\frac{1}{\gamma-1}(1-z^{\gamma})}\right)\frac{dz}{z^{2\gamma}}\Rightarrow\min_{\gamma}. \tag{18}$$

Проблема нахождения оптимального значения параметра γ решалась численно с помощью программы Mathcad 2001i Professional. Некоторые оптимальные значения γ приведены ниже в таблице.

q	0	0,01	0,1
γ	1	1,06	1,27

Отсюда видно, что оптимальное значение γ мало отличается от 1 и, по-видимому, для практики можно рекомендовать значение $\gamma = 1$.

Можно поставит также задачу о нахождении оптимального объёма партии товара Q_0, выставляемой на продажу. Пусть товар приобретается по оптовой цене d. Тогда прибыль от продажи нашей партии товара

$$\mathrm{P} = S - dQ_0 = \frac{c_0 Q_0}{\lambda_1}\left[(\lambda_0+\lambda_1) - \frac{1}{a_1 T}\left(Q_0 - \frac{a_2}{a_1}\right)\int_0^1\left(e^{\frac{2}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} + qe^{\frac{1}{\gamma-1}(1-z^\gamma)}\right)\frac{dz}{z^{2\gamma}}\right] - dQ_0 =$$

$$= \frac{c_0 Q_0}{\lambda_1}\left[(\lambda_0+\lambda_1) - \frac{1}{a_1 T}\left(Q_0 - \frac{a_2}{a_1}\right)\int_0^1 e^{\frac{2}{\gamma-1}(1-z^\gamma)}\frac{dz}{z^{2\gamma}} - \frac{a_2}{a_1^2 T}\int_0^1 e^{\frac{1}{\gamma-1}(1-z^\gamma)}\frac{dz}{z^{2\gamma}}\right] - dQ_0. \quad (19)$$

Находя максимум P по Q_0, получаем

$$Q_{0\mathrm{opt}} = \frac{2\lambda_1 a_1 T}{c_0 I_2}\left[\frac{c_0}{\lambda_1}\left(\lambda_0 + \lambda_1 + \frac{a_2}{a_1^2 T}(I_2 - I_1)\right) - d\right], \quad (20)$$

где
$$I_2 = \int_0^1 e^{\frac{2}{\gamma-1}(1-z^\gamma)}\frac{dz}{z^{2\gamma}}, \qquad I_1 = \int_0^1 e^{\frac{1}{\gamma-1}(1-z^\gamma)}\frac{dz}{z^{2\gamma}}.$$

Максимальное значение прибыли при этом равно

$$\mathrm{P}_{\max} = \frac{4\lambda_1 a_1 T}{c_0 I_2}\left[\frac{c_0}{\lambda_1}\left(\lambda_0 + \lambda_1 + \frac{a_2}{a_1^2 T}(I_2 - I_1)\right) - d\right]^2. \quad (21)$$

Используя численные методы поиска экстремума, можно найти и оптимальное значение параметра γ, которое обеспечивает $\max_\gamma \mathrm{P}_{\max}$. Оно также мало отличается от 1, и поэтому можно приближенно брать $\gamma = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новицкая Е.В., Терпугов А.Ф.* Оптимизация розничной продажи скоропортящейся продукции Томск: Изд-во Том. ун-та. 2004. 94 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 26 ноября 2007 г.