

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

Научный журнал

2008

№1(2)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС 77-29497
от 27 сентября 2007 г.



ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

НАУЧНО-РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Майер Г.В., д-р физ.-мат. наук, проф. (председатель); Дунаевский Г.Е., д-р техн. наук, проф. (зам. председателя); Ревушкин А.С., д-р биол. наук, проф. (зам. председателя); Катунин Д.А., канд. филол. наук, доц. (отв. секретарь); Аванесов С.С., д-р филос. наук, проф.; Берцун В.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.; Гага В.А., д-р экон. наук, проф.; Галажинский Э.В., д-р психол. наук, проф.; Глазунов А.А., д-р техн. наук, проф.; Голиков В.И., канд. ист. наук, доц.; Горцев А.М., д-р техн. наук, проф.; Гураль С.К., канд. филол. наук, проф.; Демешкина Т.А., д-р филол. наук, проф.; Демин В.В., канд. физ.-мат. наук, доц.; Ершов Ю.М., канд. филол. наук, доц.; Зиновьев В.П., д-р ист. наук, проф.; Канов В.И., д-р экон. наук, проф.; Кривова Н.А., д-р биол. наук, проф.; Кузнецов В.М., канд. физ.-мат. наук, доц.; Кулижский С.П., д-р биол. наук, проф.; Парначев В.П., д-р геол.-минерал. наук, проф.; Петров Ю.В., д-р филос. наук, проф.; Портнова Т.С., канд. физ.-мат. наук, директор Издательства НТЛ; Потекаев А.И., д-р физ.-мат. наук, проф.; Прокументов Л.М., д-р юрид. наук, проф.; Прокументова Г.Н., д-р пед. наук, проф.; Савицкий В.К., зав. редакционно-издательским отделом; Сахарова З.Е., канд. экон. наук, доц.; Слизов Ю.Г., канд. хим. наук, доц.; Сумарокова В.С., директор Издательства ТГУ; Сущенко С.П., д-р техн. наук, проф.; Тарасенко Ф.П., д-р техн. наук, проф.; Татьянин Г.М., канд. геол.-минерал. наук, доц.; Унгер Ф.Г., д-р хим. наук, проф.; Уткин В.А., д-р юрид. наук, проф.; Шилько В.Г., д-р пед. наук, проф.; Шрагер Э.Р., д-р техн. наук, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА»

Горцев А.М., д-р техн. наук, проф. (председатель); Смагин В.И., д-р техн. наук, проф. (зам. председателя); Терпугов А.Ф., д-р физ.-мат. наук, проф. (зам. председателя); Цой С.А., канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. секретарь); Агибалов Г.П., д-р техн. наук, проф.; Дмитриев Ю.Г., д-р физ.-мат. наук, проф.; Домбровский В.В., д-р техн. наук, проф.; Змеев О.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Конев В.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Костюк Ю.Л., д-р техн. наук, проф.; Кошкин Г.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Матророва А.Ю., д-р техн. наук, проф.; Назаров А.А., д-р техн. наук, проф.; Параев Ю.И., д-р техн. наук, проф.; Поддубный В.В., д-р техн. наук, проф.; Сущенко С.П., д-р техн. наук, проф.; Тарасенко Ф.П., д-р техн. наук, проф.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, проспект Ленина, д. 36

E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Ново-Соборная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортес*

К-ОКП ОК-005-93, код продукции 952000

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 10.04.2008.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 9,35. Уч.-изд. л. 10,48. Тираж 500 экз. Заказ № 7.

Отпечатано в типографии «М-Принт», г. Томск, ул. Пролетарская, 38/1

СОДЕРЖАНИЕ

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Гайнутдинова Г.М., Грекова Т.И. Оптимальное управление налоговыми отчислениями.....	5
Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Динамическая оптимизация инвестиционного портфеля при ограничениях на объемы вложений в финансовые активы	13
Ерохина Е.А. Управление трансформирующейся экономикой.....	18
Перепелкин Е.А. Задача параметрического синтеза многосвязной динамической системы как задача нелинейного программирования.....	23
Смагин С.В. Динамические следящие системы управления выходом объекта при неизвестных возмущениях	28
Степанова Н.В., Терпугов А.Ф. Об одном законе управления ценой при продаже скоропортящейся продукции.....	33

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Горбенко К.А. Немарковская кумулятивная модель имущественного страхования.....	40
Овсянников С.Н., Овсянников М.С. Расчет эквивалентных уровней шумового загрязнения сельтебной территории методом обратной трассировки на растре	50

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Кошкин Г.М., Лаходынов В.С. Полурекуррентная непараметрическая идентификация условных функционалов слабозависимых последовательностей.....	57
Поддубный В.В., Червонная Е.А. Идентификация динамических моделей рынка вальрасовского типа со многими товарами.....	69
Шуленин В.П., Табольжин В.В. Изучение свойств ранговых аналогов F-критерия Фишера при отклонениях от гауссовской модели дисперсионного анализа	87

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Бабанов А.М., Скачкова А.С. Графическая нотация для модели «Сущность – Связь – Отображение»	97
Костюк Ю.Л., Пожидаев М.С. Приближенные алгоритмы решения сбалансированной задачи k коммивояжеров.....	106

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ.....	113
--------------------------	-----

АННОТАЦИИ СТАТЕЙ НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ	115
--	-----

CONTENTS

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Guynoutdinova G.M. and Greckova T.I. Optimal Control of Tax Proceeds	5
Dombrovskii V.V., Dombrovskii D.V., and Lyashenko E.A. Dynamic Investment Portfolio Optimization under Constraints.....	13
Erohina E.A. Control of Transforming Economics	18
Perepelkin E.A. Problem of Parametrical Synthesis of Multivariable Dynamic System as the Problem of Nonlinear Programming.....	23
Smagin S.V. Dynamical Tracking Control System off Object Output with Unknown Disturbances.....	28
Stepanova N.V. and Terpugov A.F. The Control of Retail Price of Perishable Goods.....	33

MATHEMATICAL MODELING

Gorbenko K.A. Non-Markovian Cumulative Property Insurance Model	40
Ovsyannikov S.N. and Ovsyannikov M.S. Computation of Equivalent Sound Levels of Noise Pollution on Residential Areas with the Method of Raster Modeling with Backward Ray Tracing.....	50

INFORMATION HANDLING

Koshkin G.M. and Lakhodynov V.S. Semi-Recursive Identification of Weakly Dependent Follower's Conditional Functional	57
Poddubny V.V. and Chervonnaya E.A. The Identification of Dynamic Market Models of Walrasian Type with Many Goods.....	69
Shulenin V.P. and Tabolzhin V.V. Comparison of the Properties of the Rank Analogues F-test Fisher for Different Models in the Analysis of Variance.....	87

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Babanov A.M. and Skachkova A.S. Graphical Notation for Entity-Relationship- Mapping Model.....	97
Kostyuk Yu.L. and Pozhidaev M.S. Approximate Algorithms for Solution the Balanced Problem of k Travel Salesman.....	106

BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	113
---	-----

PAPER ABSTRACTS.....	115
----------------------	-----

УДК 519.2

Н.В. Степанова, А.Ф. Терпугов

**ОБ ОДНОМ ЗАКОНЕ УПРАВЛЕНИЯ ЦЕНОЙ
ПРИ ПРОДАЖЕ СКОРОПОРТЯЩЕЙСЯ ПРОДУКЦИИ**

Рассматривается управление ценой продажи продукции, гарантирующее продажу товара в течение торговой сессии и максимальную прибыль от этой продажи.

Ключевые слова: управление ценой, максимизация прибыли, длительность продаж.

Постановка проблемы и математическая модель

Пусть имеется некоторая скоропортящаяся продукция (например молоко, сметана, свежая рыба, овощи и т.д.), которая должна быть продана в течение торговой сессии (например дня). В противном случае товар снимается с реализации и пропадает.

Продавец покупает партию товара объема Q_0 по оптовой цене d и продает ее по розничной цене c . Ставится задача нахождения значений Q_0 и c , при которых средняя прибыль продавца будет максимальной.

Будем считать, что торговая сессия начинается в момент времени 0 и кончается в момент времени T , то есть она занимает интервал времени $[0, T]$. Обозначим через $Q(t)$ количество товара в момент времени t . Будем также считать, что $Q(0) = Q_0$ фиксировано. Предположим, что поток покупателей является пуассоновским потоком интенсивности $\lambda(c(t))$, зависящей от розничной цены $c(t)$.

Будем считать, что покупатели приобретают товар независимо друг от друга, и объем покупки ξ есть случайная величина с $M\{\xi\} = a_1$ и $M\{\xi^2\} = a_2$.

В одном очень частном случае эта задача уже исследовалась в работе Е.В. Новицкой [1], где закон управления ценой $c(t)$ продажи товара брался из соотношения

$$a_1\lambda(c(t)) = \frac{Q(t)}{T-t}.$$

В настоящей статье рассматривается случай, когда закон управления ценой $c(t)$ продажи товара имеет вид

$$a_1\lambda(c(t)) = \frac{Q(t)}{T(1-t/T)^\gamma}, \quad \gamma \neq 1. \tag{1}$$

Основные характеристики количества товара

Найдем характеристики величины количества товара в диффузионном приближении. Процесс $Q(t)$ может быть приближенно описан следующим стохастическим дифференциальным уравнением [1]

$$dQ(t) = -a_1\lambda(c)dt + \sqrt{a_2\lambda(c)}dw(t).$$

В рассматриваемом случае это уравнение принимает вид

$$dQ(t) = -\frac{Q(t)}{T(1-t/T)^\gamma} dt + \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{Q(t)}{T(1-t/T)^\gamma}} dw(t). \quad (2)$$

Найдем основные вероятностные характеристики процесса $Q(t)$. Обозначим $M\{Q(t)\} = \bar{Q}(t)$. Усредняя уравнение (2) с учетом того, что приращения винеровского случайного процесса независимы и имеют нулевое математическое ожидание, получим следующее уравнение для $\bar{Q}(t)$:

$$d\bar{Q}(t) = -\frac{\bar{Q}(t)}{T(1-t/T)^\gamma} dt,$$

которое надо решить при начальном условии $\bar{Q}(0) = Q_0$. Решая его стандартным методом разделения переменных, получим

$$\bar{Q}(t) = Q_0 \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma} \left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1\right]\right\}. \quad (3)$$

В частности, $\bar{Q}(T) = Q_0 \exp\left(-\frac{1}{1-\gamma}\right)$, $\bar{Q}(T) = 0$ при $\gamma > 1$.

Для нахождения дисперсии процесса $Q(t)$ рассмотрим процесс $Q^2(t)$. Тогда, используя формулу Ито, получаем, что этот процесс удовлетворяет следующему уравнению:

$$d(Q^2(t)) = \left(-\frac{2Q^2(t)}{T(1-t/T)^\gamma} + \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{Q(t)}{T(1-t/T)^\gamma}\right) dt + 2Q(t) \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{Q(t)}{T(1-t/T)^\gamma}} dw(t). \quad (4)$$

Обозначим $M\{Q^2(t)\} = Q_2(t)$. Тогда, усредняя (4), получим

$$dQ_2(t) = \left(-\frac{2Q_2(t)}{T(1-t/T)^\gamma} + \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{\bar{Q}(t)}{T(1-t/T)^\gamma}\right) dt,$$

или, с учетом (3),

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = -2 \frac{Q_2(t)}{T(1-t/T)^\gamma} + \frac{a_2 Q_0 \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma} \left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1\right]\right\}}{a_1 T(1-t/T)^\gamma}, \quad (5)$$

которое надо решить при начальном условии $Q_2(0) = Q_0^2$.

Это уравнение решается стандартным методом вариации произвольных постоянных. Само решение имеет вид

$$Q_2(t) = Q_0^2 \exp\left\{\frac{2}{1-\gamma} \left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1\right]\right\} + \frac{a_2 Q_0}{a_1} \cdot \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma} \left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1\right]\right\} \left[1 - \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma} \left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1\right]\right\}\right]. \quad (6)$$

Отсюда

$$D\{Q(t)\} = D_Q(t) = Q_2(t) - \bar{Q}^2(t) = \frac{a_2 Q_0}{a_1} \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1]\right\} \left[1 - \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1]\right\}\right]. \quad (7)$$

В частности, $D_Q(0) = 0$, $D_Q(T) = \frac{a_2}{a_1} Q_0 \exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\} \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right]$, $D_Q(T) = 0$ при $\gamma > 1$. Вместе с результатом $\bar{Q}(T) = 0$ это говорит о том, что с вероятностью 1 $Q(T) = 0$, то есть с вероятностью 1 к концу торговой сессии весь товар будет продан при $\gamma > 1$.

Плотность вероятностей процесса $Q(t)$

Таким образом, процесс $Q(t)$ начинается с Q_0 и заканчивается в 0. Рассмотрим $f(Q, t) = e^{-pQ}$. Тогда, используя формулу Ито, получим следующее уравнение:

$$d(e^{-pQ}) = \left(\frac{Q}{T(1-t/T)^\gamma} p e^{-pQ} + \frac{a_2}{2a_1} \frac{Q}{T(1-t/T)^\gamma} p^2 e^{-pQ} \right) dt - p e^{-pQ} \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \frac{Q}{T(1-t/T)^\gamma}} dw(t).$$

Рассмотрим функцию $\Phi(p, t) = M\{e^{-pQ}\}$, которая является преобразованием Лапласа от плотности вероятностей $p(Q, t)$ значений процесса $Q(t)$ в момент времени t . Тогда $\frac{\partial \Phi(p, t)}{\partial p} = -M\{Q e^{-pQ}\}$ и, усредняя (1.7), получим

$$d_t \Phi(p, t) = -\frac{1}{T(1-t/T)^\gamma} \left(p \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{a_2}{2a_1} p^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) dt,$$

или, в явном виде,

$$T(1-t/T)^\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p \left(1 + \frac{a_2}{2a_1} p \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0. \quad (8)$$

В дальнейшем будем использовать обозначение $\beta = 2a_1/a_2$.

Уравнение (8) является линейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. Оно решается методом характеристик. Решение имеет вид

$$\Phi(p, t) = \exp\left(-\frac{\beta \cdot p \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1]\right\}}{p + \beta - p \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1]\right\}} Q_0 \right).$$

Находя обратное преобразование Лапласа, получим явный вид $p(Q, t)$:

$$p(Q, t) = \exp \left(- \frac{\exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\}}{1 - \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\}} \beta Q_0 \right) \times$$

$$\times \left[\delta(Q) + \beta \exp \left(- \frac{\beta \cdot Q_0}{1 - \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\}} \right) \sqrt{\frac{\exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\} Q_0}{(1 - \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\})^2 Q}} \right] \times$$

$$\times I_1 \left[2 \sqrt{\frac{\exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\}}{(1 - \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\})^2}} \beta^2 Q_0 Q \right].$$

Отметим особую роль слагаемого

$$\exp \left(- \frac{\exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\}}{1 - \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\}} \beta Q_0 \right) \delta(Q),$$

содержащего δ -функцию. Оно возникает потому, что величина покупки является случайной и, в принципе, может прийти покупатель и купить весь оставшийся товар, и тогда торговая сессия для продавца закончится. Математически это происходит потому, что в точке, где $Q(t_0) = 0$, у процесса $Q(t)$ равны нулю и коэффициент сноса, и коэффициент диффузии, и поэтому при $t > t_0$ $Q(t) = 0$.

Средняя длительность продаж

Полученный выше результат позволяет вычислить и некоторые другие характеристики процесса продаж. Обозначим через τ величину промежутка времени от начала торговой сессии до того момента, когда будет продан весь товар, то есть длительность продаж. Тогда из вида рассматриваемого слагаемого следует, что

$$P(\tau \leq t) = F_\tau(t) = \exp \left(- \frac{\exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\}}{1 - \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\}} \beta \cdot Q_0 \right), \quad (9)$$

где $F_\tau(t)$ есть функция распределения величины τ .

Это позволяет вычислить, например, среднюю длительность продаж. Имеем

$$M\{\tau\} = \int_0^T (1 - F_\tau(t)) dt = T \left(1 - e^{\beta Q_0} \int_0^{1 - \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} \right\}} e^{-\beta Q_0/x} [(1-\gamma) \ln(1-x) + 1]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{dx}{1-x} \right). \quad (10)$$

Входящий сюда интеграл через элементарные функции не выражается.

Найдем асимптотику $M\{\tau\}$ при $\beta Q_0 \gg 1$, то есть при большой величине партии товара Q_0 . Тогда величина $B = 1/\beta Q_0 \ll 1$. Делая в интеграле замену переменных $x/\beta Q_0 = Bx = z$, получим

$$\begin{aligned} & e^{\beta Q_0} \int_0^{1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}} e^{-\beta Q_0/x} [(1-\gamma)\ln(1-x)+1]_{1-\gamma}^{\gamma} \frac{dx}{1-x} = \\ & = \frac{1}{B} e^{1/B} \int_0^{B\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right)} e^{-1/z} [(1-\gamma)\ln(1-z/B)+1]_{1-\gamma}^{\gamma} \frac{dz}{1-z/B}. \end{aligned}$$

Найдем по правилу Лопиталья следующий предел:

$$\begin{aligned} & \lim_{B \rightarrow 0} \frac{1}{B^2} e^{1/B} \int_0^{B\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right)} e^{-1/z} [(1-\gamma)\ln(1-z/B)+1]_{1-\gamma}^{\gamma} \frac{dz}{1-z/B} = \\ & = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\int_0^{B\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right)} e^{-1/z} [(1-\gamma)\ln(1-z/B)+1]_{1-\gamma}^{\gamma} \frac{dz}{1-z/B}}{B^2 e^{-1/B}} = \\ & = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{B(1-\exp\left\{-1/(1-\gamma)\right\})}\right\} \left[(1-\gamma)\ln\left(1-1+\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right)+1 \right]_{1-\gamma}^{\gamma}}{2B e^{-1/B} + e^{-1/B}} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $B = 1/\beta Q_0 \ll 1$

$$\begin{aligned} & e^{\beta Q_0} \int_0^{1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}} e^{-\beta Q_0/x} [(1-\gamma)\ln(1-x)+1]_{1-\gamma}^{\gamma} \frac{dx}{1-x} = \\ & = \frac{1}{B} e^{1/B} \int_0^{B\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right)} e^{-1/z} [(1-\gamma)\ln(1-z/B)+1]_{1-\gamma}^{\gamma} \frac{dz}{1-z/B} = O(B) \end{aligned}$$

и поэтому

$$M\{\tau\} = T \left(1 + O\left(\frac{1}{\beta Q_0}\right) \right). \quad (11)$$

Оптимизация по значению параметра γ

Рассмотрим теперь проблему выбора оптимального значения параметра γ при условии $\gamma \geq 1$, то есть при дополнительном требовании, что товар должен быть продан весь до конца торговой сессии.

Рассмотрим случай, когда зависимость $\lambda(c)$ может быть аппроксимирована прямой линией:

$$\lambda(c) = \lambda_0 - \lambda_1 \frac{c - c_0}{c_0}. \quad (12)$$

Здесь c_0 имеет смысл некоторой «стандартной» цены, так что $\lambda(c_0) = c_0$. Такая аппроксимация возможна, если отклонения цены c от c_0 незначительны.

В этом случае уравнение (1) приобретает вид

$$a_1 \lambda(c) = a_1 \left(\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_1 \frac{c}{c_0} \right) = \frac{Q}{T \varphi(t/T)},$$

где $\varphi(z) = (1-z)^\gamma$. Отсюда

$$c = c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{Q}{a_1 \lambda_1 T \varphi(t/T)} \right). \quad (13)$$

Так как в единицу времени в среднем совершается $\lambda(c)$ покупок, средний размер которых равен a_1 , по цене c , то среднее значение выручки в единицу времени

$$c a_1 \lambda(c) = c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{1}{a_1 \lambda_1} \frac{Q}{T \varphi(t/T)} \right) \frac{Q}{T \varphi(t/T)}. \quad (14)$$

Усредняя по объему партии товара $Q(t)$, имеющегося в наличии в момент времени t , получим

$$\begin{aligned} M\{c a_1 \lambda(c)\} &= c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) \frac{\bar{Q}}{T \varphi(t/T)} - c_0 \frac{1}{a_1 \lambda_1} \frac{\bar{Q}^2}{T^2 \varphi^2(t/T)} = \\ &= c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) \frac{\bar{Q}}{T \varphi(t/T)} - \frac{c_0}{a_1 \lambda_1} \frac{Q_2}{T^2 \varphi^2(t/T)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда средняя выручка за весь период торговой сессии равна

$$S = \int_0^T M\{c a_1 \lambda(c)\} dt. \quad (16)$$

Подставляя сюда явные выражения для \bar{Q} и Q_2 , после громоздких преобразований получим

$$S = \frac{c_0 Q_0}{\lambda_1} \left[(\lambda_0 + \lambda_1) - \frac{1}{a_1 T} \left(Q_0 - \frac{a_2}{a_1} \right) \int_0^1 \left(e^{\frac{2}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} + q e^{\frac{1}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} \right) \frac{dz}{z^{2\gamma}} \right], \quad (17)$$

где $q = a_2 / (a_1 Q_0 - a_2)$. Заметим, что в реальности объём партии товара, выставленной на продажу, обычно велик, так что параметр $q \ll 1$.

Естественное желание максимизировать выручку от продажи товара $S \Rightarrow \max$ приводит к условию

$$\int_0^1 \left(e^{\frac{2}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} + q e^{\frac{1}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} \right) \frac{dz}{z^{2\gamma}} \Rightarrow \min_{\gamma}. \quad (18)$$

Проблема нахождения оптимального значения параметра γ решалась численно с помощью программы Mathcad 2001i Professional. Некоторые оптимальные значения γ приведены ниже в таблице.

q	0	0,01	0,1
γ	1	1,06	1,27

Отсюда видно, что оптимальное значение γ мало отличается от 1 и, по видимому, для практики можно рекомендовать значение $\gamma = 1$.

Можно поставит также задачу о нахождении оптимального объёма партии товара Q_0 , выставяемой на продажу. Пусть товар приобретается по оптовой цене d . Тогда прибыль от продажи нашей партии товара

$$\begin{aligned} P &= S - dQ_0 = \frac{c_0 Q_0}{\lambda_1} \left[(\lambda_0 + \lambda_1) - \frac{1}{a_1 T} \left(Q_0 - \frac{a_2}{a_1} \right) \int_0^1 \left(e^{\frac{2}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} + q e^{\frac{1}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} \right) \frac{dz}{z^{2\gamma}} \right] - dQ_0 = \\ &= \frac{c_0 Q_0}{\lambda_1} \left[(\lambda_0 + \lambda_1) - \frac{1}{a_1 T} \left(Q_0 - \frac{a_2}{a_1} \right) \int_0^1 e^{\frac{2}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} \frac{dz}{z^{2\gamma}} - \frac{a_2}{a_1^2 T} \int_0^1 e^{\frac{1}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} \frac{dz}{z^{2\gamma}} \right] - dQ_0. \end{aligned} \quad (19)$$

Находя максимум P по Q_0 , получаем

$$Q_{0\text{opt}} = \frac{2\lambda_1 a_1 T}{c_0 I_2} \left[\frac{c_0}{\lambda_1} \left(\lambda_0 + \lambda_1 + \frac{a_2}{a_1^2 T} (I_2 - I_1) \right) - d \right], \quad (20)$$

где
$$I_2 = \int_0^1 e^{\frac{2}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} \frac{dz}{z^{2\gamma}}, \quad I_1 = \int_0^1 e^{\frac{1}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} \frac{dz}{z^{2\gamma}}.$$

Максимальное значение прибыли при этом равно

$$P_{\text{max}} = \frac{4\lambda_1 a_1 T}{c_0 I_2} \left[\frac{c_0}{\lambda_1} \left(\lambda_0 + \lambda_1 + \frac{a_2}{a_1^2 T} (I_2 - I_1) \right) - d \right]^2. \quad (21)$$

Используя численные методы поиска экстремума, можно найти и оптимальное значение параметра γ , которое обеспечивает $\max_{\gamma} P_{\text{max}}$. Оно также мало отличается от 1, и поэтому можно приближенно брать $\gamma = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новицкая Е.В., Тертугов А.Ф.* Оптимизация розничной продажи скоропортящейся продукции Томск: Изд-во Том. ун-та. 2004. 94 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 26 ноября 2007 г.