

ФИЗИКА

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

ФИЗИКА МАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОНИКА

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

2·2004

СОДЕРЖАНИЕ

Физика элементарных частиц и теория поля

- Красюк И.И., Погорелов Е.Н. Овалы Декарта как фазовые траектории релятивистских заряженных частиц..... 3
Шульман Г.А. Дополнение к решению задачи о движении свободного нерелятивистского электрона в магнитном поле..... 11
Мельник И.А. Экспериментальное обнаружение сохранения непуассоновского статистического распределения излучения после отключения источника возмущения 15
Кувшинова Е.В., Панов В.Ф. Космологические модели с вращением 19

Математическая обработка данных физического эксперимента

- Идрисов Ф.Ф., Терпугов А.Ф. Фильтрация случайных процессов сплайнами первого порядка 22
Вальц О.В., Змеев О.А. Диффузионная аппроксимация модели Фонда социального страхования с релейно-гистерезисным управлением капиталом..... 26
Якупов Р.Т., Моисеева С.П., Шайдеман Д.Г. Субоптимальная обработка выходов измерительных модулей дискретных динамических систем со взвешиванием коэффициентов фильтров 32
Капустин Е.В., Лезарев А.В. Расчет характеристик бесконечно линейной системы массового обслуживания при дважды стохастическом входящем потоке 35
Глухова Е.В. Вероятностные характеристики количества вредных веществ в антропогенных образованиях 39
Гарайшина И.Р., Назаров А.А. Исследование математической модели процесса изменения страхового капитала Пенсионного фонда при стационарном пуассоновском входящем потоке страховых взносов 44

Физика полупроводников и диэлектриков

- Жога Л.В., Шильников А.В., Шпейзман В.В., Панкова Г.Г. Кинетика разрушения пьезокерамики при действии электрического поля 54
Ардышев М.В., Пичугин В.Ф. Ионный синтез пленок твердого раствора $Ga_{1-x}In_xAs$ 57
Горский П.В. Эффект Капицы в зарядово-упорядоченных слоистых кристаллах 60

Физика магнитных явлений

- Марьяничук П.Д., Цеханский В.Д., Майструк Э.В., Боднар А.И. Магнитные параметры кристаллов $Hg_{1-x}Mn_xSe_{1-y}S_y$ и $Hg_{1-x}Mn_xTe_{1-y}S_y$ 64
Алиев Ш.М., Камиллов И.К., Гусейнов М.М., Шахшаев Ш.О., Абдуев А.Х. Поведение остаточных намагниченностей подрешеток феррита-граната гадолиния вблизи температуры компенсации 69

Физика конденсированного состояния

- Афанасьев Н.И., Арканников Д.Э. Теория комплексной реакции прерывистого распада и рекристаллизации..... 73
Сюткин Н.Н. Структура сплавов с дальним порядком после ионной имплантации в полевом ионном микроскопе 79

* *
*

- Владимиров С.Н. Генерация хаотических временных рядов для исследования реакции физических систем на шумовые возмущения 88

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

УДК 519.2

Ф.Ф. ИДРИСОВ, А.Ф. ТЕРПУГОВ

**ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
СПЛАЙНАМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

В работе рассматривается возможность фильтрации стационарного случайного процесса сплайнами первого порядка, когда моменты измерений образуют пуассоновский поток событий постоянной интенсивности. Находятся среднеквадратичная погрешность фильтрации и приближенный алгоритм оценки значений процесса в узлах сплайна.

Введение

С задачей фильтрации случайных процессов приходится сталкиваться в самых различных областях науки, техники, экономики и т.д. Теория фильтрации разработана очень подробно, но исследования в этом направлении все еще продолжаются. В данной работе рассматривается новый подход к этой проблеме, основанный на использовании сплайнов для фильтрации значений случайного процесса. Сплайны нашли очень широкое применение в задачах аппроксимации функций, но их применение для задач фильтрации авторам неизвестно.

Математическая модель и постановка задачи

Пусть имеется стационарный случайный процесс $y(t)$ с математическим ожиданием $M\{y(t)\} = 0$ и функцией корреляции $R(\tau)$.

Разобьем всю временную ось на отрезки длиной T , и на каждом отрезке будем вести отсчет времени от начала этого отрезка. Пусть $t_i^{(r)}$ есть момент i -го измерения на r -м отрезке. В данной работе рассматривается случай, когда моменты измерений образуют пуассоновский поток событий постоянной интенсивности λ .

Пусть $x(t_i^{(r)})$ есть измеренное значение процесса $y(t)$. Будем считать, что $x(t_i^{(r)}) = y(t_i^{(r)}) + n(t_i^{(r)})$, где $n(t_i^{(r)})$ есть ошибки измерений. Предполагается, что $n(t_i^{(r)})$ являются независимыми случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 .

Рассмотрим отфильтрованные значения случайного процесса $y(t)$ в виде кусочно-ломаной линии, то есть в виде сплайна первого порядка. Обозначим через a_r значение сплайна на конце r -го отрезка. Тогда отфильтрованные траектории процесса $y(t)$ представляют собой отрезки прямых линий, соединяющих значения a_{r-1} и a_r для всех r . При наступлении нового временного интервала на его конце находится значение a_r и добавляется новый отрезок прямой. Таким образом, сплайн строится в темпе наступления новых интервалов времени.

Оценка узлов сплайна

Рассмотрим оценку значений a_r в форме

$$a_r = \sum_{i=1}^{N_r} x(t_i^{(r)})f(t_i^{(r)}) = \sum_{i=1}^{N_r} (y(t_i^{(r)}) + n(t_i^{(r)}))f(t_i^{(r)}), \tag{1}$$

где N_r есть число измерений на r -м отрезке, а $f(t)$ – некоторая весовая функция. Таким образом, рассматриваются лишь линейные оценки величин a_r .

Тогда

$$a_{r-1} = \sum_{i=1}^{N_{r-1}} x(t_i^{(r-1)})f(t_i^{(r-1)}) = \sum_{i=1}^{N_{r-1}} (y(t_i^{(r-1)}) + n(t_i^{(r-1)}))f(t_i^{(r-1)}), \tag{2}$$

и отфильтрованная траектория процесса $y(t)$ на r -м отрезке может быть представлена в виде

$$\hat{y}(t) = a_{r-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right) + a_r \frac{t}{T}. \quad (3)$$

Будем измерять погрешность фильтрации величиной

$$\epsilon^2 = \frac{1}{T} M \left\{ \int_0^T (\hat{y}(t) - y(t))^2 dt \right\}.$$

Так как $M\{\hat{y}(t) - y(t)\} = 0$, то

$$\epsilon^2 = \frac{1}{T} \int_0^T D\{\hat{y}(t) - y(t)\} dt, \quad (4)$$

где символ $D\{\dots\}$ означает вычисление дисперсии.

Вычислим величину ϵ^2 . Имеем

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) - y(t) = & \left(1 - \frac{t}{T}\right) \sum_{j=1}^{N_r-1} y(t_j^{(r-1)}) f(t_j^{(r-1)}) + \frac{t}{T} \sum_{i=1}^{N_r} y(t_i^{(r)}) f(t_i^{(r)}) - y(t) + \\ & + \left(1 - \frac{t}{T}\right) \sum_{j=1}^{N_r-1} n(t_j^{(r-1)}) f(t_j^{(r-1)}) + \frac{t}{T} \sum_{i=1}^{N_r} n(t_i^{(r)}) f(t_i^{(r)}). \end{aligned} \quad (5)$$

Два последних слагаемых не зависят от других слагаемых, и поэтому их дисперсия вычисляется особенно легко:

$$D \left\{ \frac{t}{T} \sum_{i=1}^{N_r} n(t_i^{(r)}) f(t_i^{(r)}) \right\} = \frac{t^2}{T^2} \sigma^2 M_i \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} f^2(t_i^{(r)}) \right\}.$$

Здесь остается усреднить по моментам измерений $t_i^{(r)}$. Учитывая, что они образуют пуассоновский поток событий постоянной интенсивности λ , и используя методику усреднения из [1], получим

$$D \left\{ \frac{t}{T} \sum_{i=1}^{N_r} n(t_i^{(r)}) f(t_i^{(r)}) \right\} = \frac{t^2}{T^2} \lambda \sigma^2 \int_0^T f^2(u) du.$$

Наконец, интегрируя по времени t , получим, что соответствующее слагаемое в ϵ^2 равно

$$\frac{\lambda \sigma^2}{3} \int_0^T f^2(u) du. \quad (6)$$

Точно такое же слагаемое получится и при вычислении дисперсии слагаемого

$$\left(1 - \frac{t}{T}\right) \sum_{j=1}^{N_r-1} n(t_j^{(r-1)}) f(t_j^{(r-1)}).$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в (5). Его вклад в ϵ^2 будет равен

$$\left(\frac{t}{T}\right)^2 M_i \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_r} R(t_i^{(r)} - t_j^{(r)}) f(t_i^{(r)}) f(t_j^{(r)}) \right\},$$

где M_i означает усреднение по моментам измерений $t_i^{(r)}$. Выполняя это усреднение по методике из [1], получим выражение

$$\left(\frac{t}{T}\right)^2 \left[\lambda^2 \int_0^T \int_0^T R(u-v) du dv + \lambda R(0) \int_0^T f^2(u) du \right].$$

Наконец, интегрируя по t , получим окончательно, что вклад второго слагаемого в ϵ^2 равен

$$\frac{1}{3} \left[\lambda^2 \int_0^T \int_0^T R(u-v) du dv + \lambda R(0) \int_0^T f^2(u) du \right]. \quad (7)$$

Точно такой же вклад дает и первое слагаемое. Третье слагаемое дает вклад, равный $R(0)$.

Рассмотрим теперь вклады, даваемые перекрестными слагаемыми. Комбинация второго и третьего слагаемых дает вклад, равный

$$\varepsilon^2 = 1 + Q \left(a^2 + ab + \frac{b^2}{3} \right) + a^2 + ab + \frac{b^2}{4} - \frac{5}{9} a^2 r_0 - \frac{5}{9} ab r_0 - \frac{23}{180} b^2 r_0 - 2a - b + \frac{7}{6} ar_0 + \frac{7}{15} br_0, \quad (13)$$

где $\frac{2}{3} \left(1 + \frac{\sigma^2}{R(0)} \right) \frac{1}{\lambda T}$. Приравняв нулю производные от этого выражения по a и b , получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2a \left(1 + Q - \frac{5}{9} r_0 \right) + b \left(1 + Q - \frac{5}{9} r_0 \right) = 2 - \frac{7}{6} r_0, \\ a \left(1 + Q - \frac{5}{9} r_0 \right) + b \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} Q - \frac{23}{90} r_0 \right) = 1 - \frac{7}{15} r_0. \end{cases} \quad (14)$$

Ее решение имеет вид

$$a = -\frac{9}{4} \frac{7r_0^2 - 56Qr_0 - 13r_0 + 60Q}{(2r_0 + 15Q)(5r_0 - 9 - 9Q)}, \quad b = \frac{21}{2} \frac{r_0}{2r_0 + 15Q}. \quad (15)$$

2) $r(\tau) = 1 - r_0(\tau/T)^2$. Тогда

$$\varepsilon^2 = 1 + Q \left(a^2 + ab + \frac{b^2}{3} \right) + a^2 + ab + \frac{b^2}{4} - \frac{1}{2} a^2 r_0 - \frac{1}{2} ab r_0 - \frac{1}{9} b^2 r_0 - 2a - b + ar_0 + \frac{1}{3} br_0. \quad (16)$$

Приравняв нулю производные от этого выражения по a и b , получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2a \left(1 + Q - \frac{1}{2} r_0 \right) + b \left(1 + Q - \frac{1}{2} r_0 \right) = 2 - r_0, \\ a \left(1 + Q - \frac{1}{2} r_0 \right) + b \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} Q - \frac{2}{9} r_0 \right) = 1 - \frac{1}{3} r_0. \end{cases} \quad (14)$$

Ее решение имеет вид

$$a = -2 \frac{r_0^2 - 6Qr_0 - 2r_0 + 6Q}{(r_0 + 6Q)(r_0 - 2 - 2Q)}, \quad b = \frac{6r_0}{6r_0 + Q}. \quad (15)$$

Знание этих коэффициентов и позволяет производить сплайновую фильтрацию случайного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Идрисов Ф. Ф. // Изв. вузов. Физика.– 1995.– № 3.– С. 3–10.
2. Idrisov F. F. // Proc. of the International Conf. «Computing Data Analysis and Modeling».– Minsk, 1998.

Томский госуниверситет
E-mail: terpugov@fpmk.tsu.ru

Поступила в редакцию 17.11.03.

$$-2 \frac{t}{T} M \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} y(t) y(t_i^{(r)}) f(t_i^{(r)}) \right\} = -2 \frac{t}{T} \lambda \int_0^T R(t-u) f(u) du,$$

или после интегрирования по t

$$-2 \frac{\lambda}{T^2} \int_0^T t dt \int_0^T R(t-u) f(u) du. \quad (8)$$

Аналогично, комбинация первого и третьего слагаемых дает вклад

$$-2 \frac{\lambda}{T^2} \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt \int_0^T R(T+t-u) f(u) du. \quad (9)$$

Наконец, комбинация первого и второго слагаемых дает вклад, равный

$$\begin{aligned} & 2 \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right) M \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} y(t_i^{(r)}) f(t_i^{(r)}) \sum_{j=1}^{N_{t-1}} y(t_j^{(r-1)}) f(t_j^{(r-1)}) \right\} = \\ & = 2 \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right) M \left\{ \sum_{i,j} R(T+t_i^{(r)} - t_j^{(r-1)}) f(t_i^{(r)}) f(t_j^{(r-1)}) \right\} = \\ & = 2 \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \lambda^2 \int_0^T \int_0^T R(T+u-v) f(u) f(v) dudv. \end{aligned}$$

Интегрируя по t , получим окончательно, что этот вклад равен

$$\frac{\lambda^2}{3} \int_0^T \int_0^T R(T+u-v) f(u) f(v) dudv. \quad (10)$$

Собирая вместе все эти слагаемые, получим окончательно, что среднеквадратичная погрешность сплайновой фильтрации равна

$$\begin{aligned} \epsilon^2 = & \frac{2\lambda}{3} (\sigma^2 + R(0)) \int_0^T f^2(u) du + \frac{\lambda^2}{3} \int_0^T \int_0^T [2R(u-v) + R(T+u-v)] f(u) f(v) dudv - \\ & - \frac{2\lambda}{T} \int_0^T f(u) du \int_0^T \left(\frac{t}{T} R(u-t) + \left(1 - \frac{t}{T}\right) R(T+t-u) \right) dt + R(0). \end{aligned} \quad (11)$$

Нахождение весовой функции

Для удобства дальнейших выкладок перейдем к функциям $r(\tau) = R(\tau)/R(0)$ и $f_0(\tau) = \lambda T f(\tau)$.

Тогда (11) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon^2}{R(0)} = & 1 + \frac{2}{3} \left(1 + \frac{\sigma^2}{R(0)}\right) \frac{1}{\lambda T} \frac{1}{T} \int_0^T f_0^2(u) du + \frac{1}{3} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T [2r(u-v) + r(T+u-v)] f_0(u) f_0(v) dudv - \\ & - \frac{2}{T^2} \int_0^T f_0(u) du \int_0^T \left(\frac{t}{T} r(u-t) + \left(1 - \frac{t}{T}\right) r(T+t-u) \right) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Минимизация этого выражения по $f_0(t)$ приводит к неоднородному уравнению Фредгольма, которое может быть решено лишь в очень ограниченном числе случаев. Рассмотрим поэтому лишь приближенные решения.

При аппроксимации функций сплайнами первого порядка было показано, что оптимальная весовая функция в этом случае также линейна по t . Рассмотрим поэтому лишь случай, когда $f_0(t)$ имеет вид $f_0(t) = a + b(t/T)$.

Что касается вида $r(\tau)$, то, прежде всего, отметим, что фильтрация сплайнами имеет смысл лишь на тех участках $[0, T]$, где значения $r(\tau)$ достаточно велики. Поэтому рассмотрим следующие два частных случая:

1) $r(\tau) = 1 - r_0 |\tau/T|$. Тогда (все приведенные ниже формулы получены с помощью программы MathCad)