На правах рукописи

Китаева Анна Владимировна

РОБАСТНОЕ И НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

05.13.01–«Системный анализ, управление и
обработка информации (в отраслях информатики,
вычислительной техники и автоматизации)»

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Томск – 2010

Работа выполнена в Томском политехническом университете и Томском государственном университете

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор
Кошкин Геннадий Михайлович

Официальные оппоненты:
доктор технических наук, профессор
Кориков Анатолий Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор
Шумилов Борис Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор
Якупов Рафаэль Тимирович

Ведущая организация:
Московский физико-технический институт

Защита состоится:
22 апреля 2010 г. в 10.30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.12 при Томском государственном университете по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться:
В научной библиотеке Томского государственного университета по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 34.

Автореферат разослан: « __5_ » марта 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор технических наук, профессор В. И. Смагин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В последние десятилетия прошлого века началось интенсивное развитие и применение непараметрических и робастных методов обработки данных. Это вызвано, с одной стороны, необходимостью управления сложными, не поддающимися параметрическому описанию экономическими и социальными структурами, а также техническими объектами, для которых важна, к примеру, устойчивость применяемых методов к сбоям и помехам в работе регистрирующей аппаратуры; с другой стороны, развитием вычислительной техники, позволяющей реализовывать трудоемкие алгоритмы.

В диссертации получил дальнейшее развитие на основе идей локальной полиномиальной аппроксимации, заложенных Cleveland W.S., Stone C.J., Катковником В.Я. и развитых впоследствии Fan J., Gijbels I., Ruppert D., Wand M.P., непараметрический подход к оцениванию функционалов от условных распределений (условных функционалов) и их производных, разработанный Кошкиным Г.М. на основе ядерных оценок подстановки типа Надарая-Ватсона.

Подход на основе функций от функционалов от совместного либо условного распределения (базовых функционалов) и их производных позволяет, с одной стороны, разбить анализ статистических свойств оценок на два этапа: 1) исследование свойств оценок базовых функционалов и 2) исследование свойств интересующей нас оценки на основе теорем сходимости (Кошкин Г.М.); с другой стороны, позволяет подходить с единых позиций к идентификации исследуемой системы в широком смысле, а именно, единообразно оценивать наряду с функцией регрессии условную дисперсию, функции чувствительности и другие характеристики. Функциональный подход оказывается эффективным в таких задачах обработки данных, как фильтрация, интерполяция и прогноз (Добровидов А.В.), в задачах восстановления плотностей распределения вероятностей, их производных, отношений производных и т.п. для шумов регрессионных моделей (Васильев В.А.).

Методы непараметрического ядерного оценивания, в том числе и рекуррентные, применены к оцениванию функции интенсивности пуассоновских потоков событий. Пуассоновские процессы служат адекватной моделью многих реально протекающих процессов. В настоящее время с их помощью моделируются, к примеру, поступление сообщений в сетях связи, потоки задач в сетях ЭВМ, приход клиентов в страховых компаниях или банках, поступление нервных импульсов на нейроны в нейрофизиологии, потоки частиц в физических экспериментах. Это объясняет большое количество работ, посвященных различным подходам к оцениванию интенсивности неоднородных пуассоновских процессов (Helmers R., Mangku I.W. & Zitikis R.; Kutoyants Yu.A., Leemis L.M., Nason G.P., Reynaud-Bouret P., Timcová J., Терпугов А.Ф.). Исследуемые в работе статистики аналогичны по структуре ядерным оценкам плотности и их специфика заключается в том, что объем выборки является случайной величиной.

Наряду с непараметрическими оценками условных функционалов, имеющими локальный характер, в работе исследованы асимптотические свойства параметрических оценок медианного типа моделей временных рядов, позволяющие единообразно описывать поведение системы на всем интересующем промежутке времени. В этих моделях входные переменные, в отличие от рассматриваемых в работе задач непараметрического оценивания условных функционалов, являются детерминированными (предполагается, что тренды разлагаются по некоторой произвольно фиксированной системе функций, и наблюдения производятся на заданном интервале в равноотстоящие моменты времени). Стремление повысить точность результатов в условиях априорной неопределенности шумов приводит к развитию устойчивых (робастных) методов, которые, как правило, дают достаточно хорошие результаты при «основном» распределении и катастрофически не теряют точность оценивания при некоторых отклонениях реального распределения от гипотетического (Hampel F., Huber P.J., Tukey J.W., Шевляков Г.Л., Шуленин В.П., Шурыгин А.М.). Робастные процедуры, можно считать, занимают промежуточное положение между классическими параметрическими и непараметрическими методами по степени исходной определенности модели. В данной работе рассматриваются оценки параметров регрессионных и авторегрессионных моделей, основанные на норме L_1 (Basset G.W. & Koenker R., Bloomfield P. & Stieger W.), т.е. оценки медианного типа, устойчивые по эффективности в сравнении с оценками метода наименьших квадратов (ОМНК). Построение оценок параметров регрессии на разностях наблюдений (следуя идеям Hodges J.L. & Lehmann E.L.) позволяет получить существенно более точные, в сравнении с традиционными медианными (оценками метода наименьших модулей – ОМНМ), результаты в случае гауссовских шумов.

Построению математических моделей и исследованию вероятностных характеристик работы фондов социального страхования в последние годы посвящен ряд работ, в которых идеи классической модели страхования применяются с учетом особенности работы таких фондов (Вальц О.В., Гарайшина И.Р., Змеев О.А., Лившиц К.И., Назаров А.А.). В работе проведена оптимизация управлением капиталом фонда в асимптотике, когда модель определяется тремя входными статистическими параметрами (не считая параметров управления): интенсивностью пуассоновского потока страховых выплат, средним и дисперсией их распределения, которые могут быть оценены предложенными методами.

Целью работы является построение и исследование процедур

– оценивания параметров полиномиальных трендов временных рядов на заданном интервале, работоспособных в случае неопределенности помех наблюдений, устойчивых по эффективности к аномальным выбросам наблюдений (робастное оценивание);

– локального полиномиального оценивания функционалов от условных распределений и их производных, работоспособных в условиях сильной изменчивости регрессионной зависимости и невозможности ее единообразного описания на исследуемом интервале (непараметрическое оценивание).

Методы исследований. Исследование предложенных методов оценивания и оптимизация проводились с использованием аппарата теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, вариационного исчисления, дифференциальных уравнений, имитационного моделирования.

Теоретическая ценность работы заключается в том, что в ней

– исследованы асимптотические свойства оценок со знаковой меточной функцией, в том числе построенных на разностях и отношениях наблюдений первого и второго порядков;

– рассмотрены подходы к оцениванию функционалов от условных распределений и их производных, позволяющие с единых позиций подходить к локальной идентификации стохастических систем, например, класс введенных функционалов позволяет с единых позиций описать систему характеристик производственных функций;

– локальные непараметрические алгоритмы, предложенные в работе, позволяют решать задачи идентификации, управления и т.д. при зависимых наблюдениях в случае, когда применение параметрических методов неэффективно;

– исследованы асимптотические свойства непараметрических оценок функции интенсивности неоднородного пуассоновского процесса, построенных по единственной реализации процесса на интервале фиксированной длины;

– решены задачи оптимального управления капиталом фонда социального страхования в асимптотической модели, и найдено распределение вероятностей величины капитала фонда в случае, когда выплаты по социальным программам образуют пуассоновский поток.

Практическая ценность работы заключается в следующем:

– робастные параметрические оценки, предложенные в работе, дают существенный выигрыш в точности оценивания по сравнению с классическими методами в случае присутствия аномальных ошибок в наблюдениях и дают высокую точность в гауссовском случае в сравнении с традиционными медианными оценками – ОМНМ;

– предложенные рекуррентные процедуры дают возможность производить вычисления в режиме реального времени, что особенно важно при необходимости обрабатывать большие массивы быстро поступающей информации и выдавать результат в любой требуемый момент. Такая ситуация возникает, например, при текущем анализе финансового рынка;

–решена задача идентификации в широком смысле нелинейной гетероскедастической авторегрессии произвольного порядка, и полученные результаты применены для прогнозирования цен акций;

– на основе предложенных медианных оценок разработан комплект программ для устойчивого последовательного оценивания параметров квадратичного тренда среднего.

Научная новизна полученных в диссертации результатов состоит в следующем:

1. Показана сильная состоятельность и асимптотическая нормальность оценок медианного типа параметров тренда положения (масштаба), построенных на разностях (отношениях) наблюдений первого и второго порядков.

2. Предложены и исследованы оценки медианного типа параметра устойчивого процесса авторегрессии в том числе и при наличии аддитивной помехи наблюдения. Показана сильная состоятельность оценок. В случае авторегрессионного процесса, наблюдаемого без помех, показана асимптотическая нормальность оценок.

3. Исследована сходимость в среднеквадратичном локальных оценок подстановки функционалов от условных распределений и их производных для многомерных зависимых наблюдений. Предложены рекуррентные модификации оценок, масштабированные по каждой компоненте многомерного вектора наблюдений.

4. Исследована условная сходимость в среднеквадратичном локальных оценок полиномиальной аппроксимации функционалов от условных распределений и их производных.

5. Показана сходимость в среднеквадратичном непараметрических оценок ядерного типа функции интенсивности неоднородного пуассоновского процесса.

6. Предложены критерии оптимизации деятельности некоммерческого страхового фонда, и решены задачи оптимального управления капиталом фонда в асимптотическом приближении.

Достоверность и обоснованность результатов подтверждается строгими математическими выкладками. Работоспособность предложенных методов оценивания подтверждается имитационным моделированием и численными примерами, в том числе с использованием реальных данных.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 52 работы, из них 14 опубликованы в изданиях, определенных перечнем ВАК РФ для опубликования основных научных результатов докторских диссертаций по специальности «Системный анализ, управление и обработка информации».

Апробация работы. Основные положения диссертации и отдельные её результаты докладывались и обсуждались на следующих конференциях, симпозиумах, школах-семинарах:

VI и VII Всесоюзной школе-семинаре по непараметрическим и робастным методам статистики в кибернетике (Томск, 1987; Иркутск, 1991); IX Всесоюзной конференции по теории кодирования и передачи информации (Одесса, 1988); Всесоюзной научно-технической конференции «Статистические методы в теории передачи и преобразования информационных сигналов» (Киев, 1988); III Всесоюзной конференции «Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов» (Гродно, 1988); Всесоюзном совещании «Анализ временных рядов и его применение в экономике (Львов, 1988); XI Всесоюзном научно-техническом семинаре в секции «Теория информации» ЦП ВНТО РЭС им. А.С. Попова (Ульяновск, 1989); III Международной научно-технической конференции "Идентификация, измерение характеристик и имитация случайных сигналов" (Новосибирск, 1994); Международной конференции "Всесибирские чтения по математике и механике" (Томск, 1997); IX Международном симпозиуме по непараметрическим и робастным методам в кибернетике (Красноярск, 1997); III Сибирском конгрессе по прикладной и промышленной математике, посвященном памяти С.Л. Соболева (Новосибирск, 1998); The Joint Session of Prague Symposium on Asymptotic Statistics & Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes (Prague, 1998); The Fifth International Conference «Computer Data Analysis and Modeling» (Minsk, 1998); The 5th and The 6th Korea-Russian International Symposium on Science and Technology (Tomsk, Russia, 2001; Novosibirsk, Russia, 2002); 9th IFAC Workshop "Adaptation and Learning in Control and Signal Processing" & 3d IFAC Workshop "Periodic Control Systems" (Saint Petersburg, Russia, 2007); VI Международной научно-практической конференции "Информационные технологии и математическое моделирование" (Анжеро-Судженск, 2007); VI Международной научно-практической конференции "Новые информационные технологии в исследовании сложных структур" (Томск, 2008); VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием "Информационные технологии и математическое моделирование" (Анжеро-Судженск, 2009); на семинарах Томского госуниверситета и Томского политехнического университета.

Реализация и внедрение результатов. Работа, связанная с робастным оцениванием, выполнялась в соответствии с госбюджетной темой «Разработка и исследование математического и программного обеспечения автоматических и автоматизированных систем обработки информации, управления и проектирования», входящей в план Сибирского физико-технического института (СФТИ) при Томском государственном университете (ТГУ) в соответствии с координационным планом НИР АН СССР по комплексной проблеме «Кибернетика» на 1986-90 г.г., а также с хоздоговорными темами, выполнявшимися СФТИ в 1987-89 г.г. Комплект программ, позволяющий последовательно оценивать параметры квадратичного тренда, был использован при обработке данных телеметрических измерений в автоматизированной системе управления сложными динамическими объектами, а также был передан в отраслевой фонд алгоритмов и программ Минвуза СССР (№ М88112 от 21.06.1988).

Работа, связанная с непараметрическим оцениванием, выполнялась в соответствии с планами научно-исследовательских работ ТГУ по базовому финансированию МОПО в рамках темы «Разработка и исследование математических моделей и программной поддержки статистической обработки разнотипных данных» в 1994-99 г.г. и СФТИ по заданию Федерального агентства по образованию в рамках темы «Исследование вероятностных, статистических и логических моделей информационных потоков в технических, экономических системах и компьютерных системах обработки информации» в 2006-2008 г.г., а также по программам, поддержанным: грантом РФФИ № 95-01-00289 «Непараметрические и робастные методы обнаружения зависимостей, классификации и селекции» (1995-96 г.г.); грантом РФФИ № 98-01-00296 «Непараметрическое оценивание функционалов от распределений по зависимым выборкам» (1998-2000 г.г.); проектом РФФИ № 09-08-00595 «Идентификация и управление в стохастических системах в условиях неопределенности характеристик объектов и возмущений» (2009-2011 г.г.).

Материалы диссертации использовались в учебном процессе в

Томском государственном и политехническом университетах при подготовке курсов по вероятностным и статистическим дисциплинам.

Личный вклад соискателя. В список положений, выносимых на защиту, включены результаты, в которых вклад соискателя является основным.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, содержащего 354 наименования, и приложения. Содержание работы изложено на 319 страницах, иллюстрировано 18 рисунками.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит обзор работ по непараметрическому и робастному параметрическому оцениванию, относящихся к теме исследования, в их взаимосвязи и историческом развитии. Приведены краткие характеристика и содержание работы.

В первой главе рассматриваются оценки параметров трендов случайного процесса вида $x_t = f_t + g_t u_t$, где функции f_t и g_t допускают параметрическое представление, u_t − помехи наблюдения.

В разделах 1.1−1.6 наблюдения $\left\{x_i, i=\overline{1,N}\right\}$ за процессом $\left\{x_t\right\}$ производятся в равноотстоящие друг от друга моменты времени на интервале $\left[0,1\right]$, $\left\{u_t\right\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью вероятностей $p(\cdot)$. Функции трендов сдвига $f\left(\cdot\right) = \sum_{k=0}^{s} a_k \psi_k\left(\cdot\right)$ и масштаба $g\left(\cdot\right) = \exp\left[\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \varphi_k\left(\cdot\right)\right]$ разлагаются по заданным системам непрерывных ортонормированных на отрезке $[0,1]$ функций. Доказана сильная состоятельность и асимптотическая нормальность, найдены ковариационные матрицы асимптотического распределения всех рассматриваемых оценок. В разделах 1.1−1.4 предполагается, что $g_t \equiv 1$.

В разделе 1.1 рассматриваются простые медианные оценки, полученные по взвешенному МНМ. Оптимальные (в смысле асимптотической точности оценивания) оценки являются асимптотически некоррелированными, и их асимптотические дисперсии совпадают с дисперсией выборочной медианы шумов (в гауссовском случае эффективность составляет $2/\pi \approx 0.64$).

В разделе 1.2 исследованы медианные оценки, построенные на разностях выборочных значений. Оценки $\overrightarrow{\hat{a}^{(2)}} = \left(\hat{a}_k^{(2)}, \quad k = \overline{1,s}\right)$ параметров $\vec{a} = \left(a_k, \quad k = \overline{1,s}\right)$ определяются системой уравнений $\vec{\xi}\left(\overrightarrow{\hat{a}^{(2)}}\right) =$

$$= \left(\sum_{i,j=1}^{N} b_m\left(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}\right) \operatorname{sgn}\left\{ x_i - x_j - \sum_{k=1}^{s} \hat{a}_k^{(2)} \left[\psi_k\left(\frac{i}{N}\right) - \psi_k\left(\frac{j}{N}\right) \right] \right\}, m = \overline{1,s} \right) = 0.$$

В силу дискретности знаковой функции, равенство $\vec{\xi}\left(\overrightarrow{\hat{a}^{(2)}}\right) = 0$ может не достигаться ни при каких значениях вектора $\overrightarrow{\hat{a}^{(2)}}$. В этом случае в качестве решения берется любое значение, доставляющее $\inf \left\| \vec{\xi}\left(\overrightarrow{\hat{a}^{(2)}}\right) \right\|$, где $\|\vec{a}\|$ – евклидова норма вектора $\vec{a}$.

Теорема 1.3. Пусть плотность распределения вероятностей $p(\cdot)$ непрерывна на всей числовой прямой, весовые функции $b_m(\cdot,\cdot)$ непрерывны на квадрате $[0.1;0.1]$, $b_m(x,y) = -b_m(y,x)$, матрица

$\left(\int_0^1 \int_0^1 b_j(x,y)\left[\psi_k(x)-\psi_k(y)\right]dxdy, \quad j,k=\overline{1,s} \right)$ не вырождена, система уравнений $\int_0^1 \int_0^1 b_j(x,y) \int_0^{\sum_{k=1}^{s}\Delta\hat{a}_k^{(2)}[\psi_k(x)-\psi_k(y)]} \int_{-\infty}^{\infty} p(x+v)p(v)dvdtdxdy=0, j=\overline{1,s}$ имеет единственное решение $\Delta\overrightarrow{\hat{a}^{(2)}}=\left(\hat{a}_1^{(2)}-a_1,...,\hat{a}_s^{(2)}-a_s\right)=0$. Тогда оценки $\overrightarrow{\hat{a}^{(2)}}$ сильно состоятельны, и вектор $\sqrt{N}\Delta\overrightarrow{\hat{a}^{(2)}}$ распределен асимптотически нормально с нулевым средним и матрицей ковариаций $C=\frac{1}{3}\left(\int_{-\infty}^{\infty} p^2(u)du\right)^{-2} P^{-1}BP^{-1T}$, $B=\left(\int_0^1\int_0^1\int_0^1 b_j(x,y)b_k(x,z)dxdydz, j,k=\overline{1,s}\right)$, $P=\left(\int_0^1\int_0^1 b_j(x,y)\left[\psi_k(x)-\psi_k(y)\right]dxdy, j,k=\overline{1,s}\right)$.

Показано, что наилучшую асимптотическую точность оценивания обеспечивают $b_k(x,y)=\psi_k(x)-\psi_k(y)$. При этом оценки асимптотически не коррелированны, и их асимптотические дисперсии совпадают с дисперсией ранговых оценок параметра положения с весовой функцией Вилкоксона. В гауссовском случае эффективность оптимальных оценок составляет $3/\pi \approx 0.955$, т.е. в 1.5 раза выше, чем оптимальных простых медианных оценок. Нижняя граница асимптотической эффективности, равная 0.072, достигается на плотности параболического вида.

В разделах 1.3, 1.4 рассмотрены оценки параметра при старшем члене квадратичного тренда $\left(\psi_0 \equiv 1, \psi_1 = x-1/2, \psi_2 = x^2-x+1/6\right)$, построенные на разностях наблюдений второго порядка: центральных – ($x_{i+k}+x_{i-k}-2x_i$) и общего вида – ($x_{i+k}+x_{i-k}-x_{i+l}-x_{i-l}$). Оценки соответственно находятся из уравнений $\left(M=\left]\left(N-1\right)/2\right[\right)$:

$$\sum_{k=1}^{M} f\left(\frac{k}{N}\right)\sum_{i=k+1}^{N-k}\operatorname{sgn}\left[x_{i+k}+x_{i-k}-2x_i-2\hat{a}_2\frac{k^2}{N^2}\right]=0\,, \tag{3}$$

$$\sum_{k,l=1}^{M} f\left(\frac{k}{N},\frac{l}{N}\right)\sum_{i=\max(k+1,l+1)}^{\min(N-k,N-l)}\operatorname{sgn}\left[x_{i+k}+x_{i-k}-x_{i+l}-x_{i-l}-2\hat{a}_{2(o)}\frac{k^2-l^2}{N^2}\right]=0, \tag{4}$$

$]c[$ – целая часть числа c, $f(\cdot)$ и $f(\cdot,\cdot)$ − некоторые весовые функции, заданные на $[0;0.5]$ и $[0,0.5;0,0.5]$ соответственно.

Теорема 1.8. Пусть плотность распределения вероятностей $p(\cdot)$ непрерывна на всей числовой прямой, функция $f(\cdot,\cdot)$ ограничена, и $f(x,y)=-f(y,x)$. Тогда при $N\to\infty$ $\hat{a}_{2(o)}$ сходится почти наверное к a_2, и случайная величина $\sqrt{N}\left(\hat{a}_{2(o)}-a_2\right)$ имеет асимптотическое нормальное распределение с нулевым средним значением и дисперсией, равной

$$0.25\left[\int_0^{1/2}\int_0^{1/2} f(x,y)\left[1-2\max(x,y)\right]\left(x^2-y^2\right)dxdy\right]^{-2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}p_1^2(v)dv\right)^{-2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{x}\breve{p}(n)dn-\int_{x}^{\infty}\breve{p}(n)dn\right]^2 p(x)dx\int_0^1\left[\int_{x/2}^{\min(1,2x)}\int_{\max(x/2,y/2)}^{\min(y,x)} f(x-z,y-z)dzdy+\right.$$

$$\left.+\int_{\max(2x-1,0)}^{(x+1)/2}\int_{\max(x,y)}^{\min[(1+y)/2,(1+x)/2]} f(x-z,y-z)dzdy\right]^2 dx,$$ $p_1(\cdot)$ − свертка функции

$p(\cdot)$, $\breve{p}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p_1(x+v)p(v)dv.$

Для $f(x)=x^{\alpha}$ максимальное значение эффективности в случае гауссовского распределения (≈ 0.78) достигается при $\alpha\approx 1.34$. Зафиксировав индекс k (или l) в (4) и рассматривая оценку $\hat{a}_2^*$, полученную при $0<l<M$ из уравнения

$$\sum_{k=l}^{M} f\left(k/N\right)\sum_{i=k+1}^{N-k}\operatorname{sgn}\left[x_{i+k}+x_{i-k}-x_{i+l}-x_{i-l}-2\hat{a}_2^*\left(k^2-l^2\right)/N^2\right]=0,$$

удается достичь достаточно высокой асимптотической эффективности (≈ 0.92) при $u=\lim\limits_{N\to\infty} l/N \approx 0.16$ для гауссовского распределения.

В разделе 1.5 считается, что $f_t=0$, и рассматриваются оценки параметров тренда масштаба распределения, аналогичные оптимальным оценкам разделов 1.1, 1.2, 1.4. Соответствующие эффективности в гауссовском случае составляют $4\pi^{-1}\sigma_0^{-2}e^{-\sigma_0^{-2}} \approx 0.466$, где σ_0 определяется из условия $\sigma_0^{-1}\int\limits_0^1 \exp\left(-x^2\sigma_0^{-2}/2\right)dx/\sqrt{2\pi}=0.25$; $6\pi^{-2}\approx 0.608$; приблизительно 0.5 при $f(x)=1-x$ и $u\approx 0.17$.

В разделе 1.6 рассмотрены простые медианные оценки и оценки, использующие разности наблюдений первого порядка, в случае одновременного тренда параметра сдвига и масштаба.

В разделе 1.7 считается, что $g_t\equiv 1$, а u_t представляет собой стационарный гауссовский процесс с нулевым средним и заданной ковариационной функцией $\sigma^2\rho(\cdot)$. Исследованы оценки

1) $\left\{\hat{a}_k^{(1)},\quad k=\overline{0,s}\right\}$: $\int\limits_0^T \psi_m\left(t/T\right)\operatorname{sgn}\left[x(t)-\sum\limits_{k=0}^{s}\hat{a}_k^{(1)}\psi_k\left(t/T\right)\right]dt=0,\quad m=\overline{0,s}$,

2) $\left\{\hat{a}_k^{(2)},\quad k=\overline{1,s}\right\}$: $\int\limits_0^T\int\limits_0^T\left[\psi_m\left(t_1/T\right)-\psi_m\left(t_2/T\right)\right]\times$

$$\times\operatorname{sgn}\left[x(t_1)-x(t_2)-\sum_{k=1}^{s}\hat{a}_k^{(2)}\left[\psi_k\left(t_1/T\right)-\psi_k\left(t_2/T\right)\right]\right]dt_1dt_2=0, m=\overline{1,s},$$

3) $\hat{a}_2$ (при $\psi_0\equiv 1, \psi_1=x-1/2, \psi_2=x^2-x+1/6$): $0<l<T/2$, $\int\limits_l^{T/2} f\left(s/t\right)\times$

$$\times \int\limits_{s}^{T-s} \operatorname{sgn}\left[x(t+s)+x(t-s)-x(t+l)-x(t-l)-2\hat{a}_2\left(s^2-l^2\right)/T^2\right] dt ds = 0.$$

Асимптотические дисперсии оценок равны соответственно: 1) $\sigma^2 C_1$;

2) $2\sigma^2 C_2$; 3) $\dfrac{2\sigma^2}{\pi}\left[\int\limits_u^{1/2} f\left(s\right)(1-2s)\left(s^2-u^2\right)ds\right]^{-2} \int\limits_u^{1/2} f(x) \int\limits_x^{1-x} \left\{ C_2 \int\limits_u^{\min(y,1-y)} f(z)\,dz + \right.$

$+2C_4\left[\int\limits_u^{(y+x)/2} f(z)dz + \int\limits_u^{\tilde{u}} f(z)dz + \int\limits_u^{\max(u,(y-x)/2)} f(z)dz - 2\int\limits_u^{\max(u,(y-u)/2)} f(z)dz\right]\left.\vphantom{\int}\right\} dydx,$

$\tilde{u}=\tilde{u}(x,y)=\max\left[\min(1/2, y+2u, y-2u), u\right]$, $C_i = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \arcsin\left[\rho(u)/i\right] du$. При

$\rho(u)=e^{-\alpha|u|}, \alpha>0$ асимптотические эффективности оценок равны:

1) $2/\pi/\ln 2 \approx 0.92$; 2) $\left(2\int\limits_0^{1/2} \arcsin x / x dx\right)^{-1} \approx 0.987$; 3) наибольшую точность оценивания (≈ 0.97) дает весовая функция $f(x)=1-x$ (из набора $f(x)=x, f(x)=1-x, f(x)=1$) при значении $u \approx 0.17$.

В случае выборки из смеси гауссовских распределений: $p(\cdot) = (1-\varepsilon)N\left(0,\sigma_1^2\right)+\varepsilon N\left(0,\sigma_2^2\right), \sigma_1^2 << \sigma_2^2$, что соответствует наличию аномальных ошибок, появляющихся с вероятностью ε, точность рассмотренных оценок в сравнении с ОМНК может быть неограниченно велика.

В разделе 1.8 показано, что в соответствии с критерием согласия χ^2 с пятипроцентным уровнем значимости теоретические выводы для оценок, рассмотренных в разделах 1.1, 1.2, 1.4, подтверждаются, начиная с объемов выборок соответственно $N \approx 30, \quad N \approx 10, \quad N \approx 25$.

Во второй главе предложены оценки медианного типа параметра стационарного авторегрессионного процесса (АРП) первого порядка

$x_{i+1} = \rho x_i + \varepsilon_{i+1}$, где $\{\varepsilon_i\}$ − независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью вероятностей $p(\cdot)$. Структура доказательств аналогична доказательству соответствующих теорем первой главы, но при этом существенно используется марковость АРП. В разделах 2.1, 2.2 рассмотрен случай АРП, наблюдаемого без помех.

В разделе 2.1 исследована оценка, определяемая уравнением

$$\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-i} x_i \operatorname{sgn}\left(x_{i+j} - \hat{\rho}_1 x_{i+j-1}\right)\varphi(j) = 0 .$$

Теорема 2.1. Пусть весовая функция $\varphi(\cdot)$ неотрицательна и ограничена, плотность распределения вероятностей непрерывна в нуле, $p(x) = p(-x)$, $p(0) \neq 0$, и существует $\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x)dx$. Тогда оценка $\hat{\rho}_1$ сходится почти наверное к ρ. Если дополнительно существует $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx$, то случайная величина $\sqrt{N}\left(\hat{\rho}_1 - \rho\right)$ имеет асимптотическое нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией, равной $0.25\left(1-\rho^2\right)p^{-2}(0)\sigma^{-2} \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{i,j=1}^{N} \rho^{|i-j|}\varphi(i)\varphi(j)\left[\sum_{j=1}^{N}\varphi(j)\rho^{j-1}\right]^{-2}$.

Показано, что максимальная точность оценивания достигается при $\varphi(1) \equiv 1$, $\varphi(j) \equiv 0,\ j \neq 1$. В случае $p(\cdot) = N\left(0, \sigma^2\right)$ асимптотическая эффективность оптимальной оценки $\hat{\rho}_1$ составляет $2/\pi$.

В разделе 2.2 исследована обобщенная медианная оценка $\hat{\rho}_2$:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \operatorname{sgn}\left(x_i\left(x_{i+1} - \hat{\rho}_2 x_i\right)\right) = 0.$$

Найдена дисперсия асимптотического распределения оценки $\hat{\rho}_2$

$D\left(\hat{\rho}_2\right) = p^{-2}(0)\left[\int\limits_0^\infty t p_x(t)dt\right]^{-2}/16$, где $p_x(\cdot)$ – плотность распределения АРП в стационарном режиме. Заметим, что сильная состоятельность оценки $\hat{\rho}_2$ не требует существования среднего значения процесса $\{x_t\}$, а асимптотическая нормальность – дисперсии процесса $\{x_t\}$. В гауссовском случае $D\left(\hat{\rho}_{МНК}\right)/D\left(\hat{\rho}_2\right) = 4/\pi^2$.

В разделах 2.3, 2.4 рассмотрен случай АРП, наблюдаемого с аддитивной помехой: $z_n = x_n + \eta_n$. Предложены оценки, определяемые уравнениями:

$$\sum_{i=3}^{N} z_{i-2}\operatorname{sgn}\left(z_i - \hat{\rho}_3 z_{i-1}\right) = 0, \tag{5}$$

$$\sum_{i=3}^{N} \operatorname{sgn}\left(z_{i-2}\left(z_i - \hat{\rho}_4 z_{i-1}\right)\right) = 0. \tag{6}$$

Показана сильная состоятельность и найдены дисперсии асимптотического распределения оценок $\hat{\rho}_3$ и $\hat{\rho}_4$. Оценка $\hat{\rho}_3$ не дает принципиального выигрыша в точности оценивания при $\sigma_0 = \sigma_\eta/\sigma >> 1$. Этот недостаток можно преодолеть внесением наблюдений в (5) под знаковую функцию, как это сделано в (6). При $p(\cdot) = N\left(0,\sigma^2\right)$, плотности распределения помехи $p_\eta(\cdot) = N\left(0,\sigma_\eta^2\right)$ асимптотическая дисперсия $D\left(\hat{\rho}_4\right) = O\left(\sigma_0^2\right)$, в то время как для обычной оценки $\hat{\rho}$, полученной из уравнения $\sum_{i=3}^{N} z_{i-2}\left(z_i - \hat{\rho} z_{i-1}\right) = 0,$ дисперсия $D\left(\hat{\rho}\right) = O\left(\sigma_0^4\right)$.

В разделе 2.5 обобщенные медианные оценки применены для оценивания коэффициентов линейного тренда параметра АРП. Определены локальные (т.е. имеющие место в некоторой окрестности истинного значения параметров) асимптотические свойства оценок.

В третьей главе рассматриваются ядерные оценки нормированной функции интенсивности пуассоновского процесса и вопросы оптимизации деятельности фонда социального страхования, в котором страховые выплаты моделируются пуассоновским процессом.

Оценивание интенсивности $\lambda(\cdot)$ проведено по единственной реализации процесса на интервале фиксированной длины $\left[0,T\right]$. Усреднение в (7) необходимо вести по совместному распределению моментов наступления событий $\left\{t_i\right\}$ и количества событий N на интервале $\left[0,T\right]$.

В разделе 3.1 показана сходимость в среднеквадратичном статистики

$$\left(Nh_N\right)^{-1}\sum_{i=1}^{N}K\left(\left(t-t_i\right)/h_N\right) \qquad (7)$$

к нормированной интенсивности $\lambda(t)/\Lambda(0,T)$, где $\Lambda(a,b)=\int_a^b\lambda(t)dt$, h_N – параметр размытости, $K(\cdot)$ – функция-ядро. Показано, что скорость сходимости совпадает с обычной скоростью сходимости ядерных оценок плотности вероятностей при $h_i=i^r, -1<r<0$. Асимптотические результаты получены в схеме серий при неограниченном возрастании интенсивности на рассматриваемом интервале.

В разделе 3.2 исследована сходимость в среднеквадратичном рекуррентной оценки нормированной интенсивности:

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{h_i}K\left(\left(t-t_i\right)/h_i\right)=\left(1-N^{-1}\right)S_{N-1}+\left(Nh_N\right)^{-1}K\left(\left(t-t_N\right)/h_N\right). \qquad (8)$$

В (8) в отличие от (7) параметр размытости h_i подбирается для каждого наблюдения, что и позволяет находить оценку рекуррентно.

Теорема 3.3. Пусть ядро $K(\cdot)$ – финитная и ограниченная функция, причем $\int_{-\infty}^{\infty} K(u)du = 1$, $\left|\int_{-\infty}^{\infty} K(u)u^m du\right| \le M$, $\int_{-\infty}^{\infty} K^2(x)x^m dx < \tilde{M}$ $\forall m = 1, 2, ...;$ $\lambda(\cdot)$ непрерывна в точке $t \in (0,T)$, $\Lambda(t,T) \ne 0;$ монотонная последовательность чисел $h_n \downarrow 0$, $nh_n \to \infty$, и $\left|\sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i h_{i+n}^m\right| \le Ch_n^m$ $\forall m,$ где C – некоторая константа. Тогда статистика (8) сходится в среднеквадратичном (в предложенной схеме серий) к $\lambda(t) / \Lambda(0,T)$.

В разделе 3.3 рассмотрены задачи оптимизации управления капиталом фондов социального страхования в диффузионной аппроксимации.

В разделе 3.3.1 решена задача стабилизации работы фонда в смысле минимизации дисперсии капитала фонда $S(t)$ при фиксированной вероятности неплатежеспособности для линейного релейного (т.е., выплаты по социальным программам начинаются только при $S(t) > S_0$) управления капиталом.

В разделе 3.3.2 решена задача минимизации дисперсии скорости изменения капитала фонда $c(S)$ при фиксированной вероятности выделения средств на социальные программы π_1 при релейном нелинейном управлении капиталом. Оптимальная скорость выделения средств на социальные программы при требовании непрерывности управления $c^*(s) = a_2\lambda\tilde{c}\left(1+\gamma_0^2\right)\gamma_0^{-1} \operatorname{tg}\left(\tilde{c}\gamma_0^{-1}(s-S_0)\right)\left[1+\gamma_0 \operatorname{tg}\left(\tilde{c}\gamma_0^{-1}(s-S_0)\right)\right]^{-1}$, при $S_m > s > S_0$, где $0 < \gamma_0 < \sqrt{\pi_1\left(1-\pi_1\right)^{-1}}$ – единственный положительный корень уравнения $\gamma\left(1+\gamma^2\right)(\operatorname{arctg}\gamma + \pi/2) + \gamma^2 = \pi_1\left(1-\pi_1\right)^{-1};$ $\tilde{c} = \left(c_0 - a_1\lambda\right)\left(a_2\lambda\right)^{-1};$ λ, a_1, a_2 – входные статистические параметры,

c_0 – заданный детерминированный параметр управления. Капитал фонда не может превышать величины $S_m = S_0 + \gamma_0 \tilde{c}^{-1} \left(\mathrm{arctg}\, \gamma_0 + \pi / 2 \right)$.

Оптимальная скорость выделения средств на социальные программы в общем случае $c^*(s) = a_2 \lambda \tilde{c} \left(1 - \left(1.5\pi_1 \left(\pi_1 - 1 \right)^{-1} + \tilde{c}(s - S_0) \right)^{-1} \right)$ при $S_m > s \geq S_0$. Максимальная величина капитала фонда $S_m = S_0 + +1.5\pi_1 \tilde{c}^{-1} (1 - \pi_1)^{-1}$. Как и в случае непрерывного управления, при стремлении капитала к S_m скорость выделения денег на социальные программы начинает неограниченно возрастать. Отказ от непрерывности управления позволяет уменьшить дисперсию $c(S)$ при фиксированной вероятности π_1, при этом зависимость $c^*(s)$ от π_1 имеет более простой вид. Непрерывность $c^*(s)$ нарушается только при $s = S_0$, где происходит скачок величины $\left(c_0 - a_1 \lambda \right) \left(1 + 2 / \pi_1 \right) / 3$. Критический уровень капитала, при принижении которого прекращаются выплаты по социальным программам $S_0 = -0.5 \left(\ln(1 - \pi_1) + \ln \alpha_0 \right) / \tilde{c}$, α_0 – вероятность разорения.

В разделе 3.3.3 аналогичная задача поставлена для релейного управления капиталом при наличии гистерезиса. Эта задача решена при некоторых упрощающих предположениях.

В разделах 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, считая процесс изменения капитала фонда диффузионным процессом, мы не конкретизировали распределение страховых выплат, полагая известными только два первых момента этого распределения. Этого было достаточно, чтобы определить основную характеристику системы – стационарное распределение вероятностей капитала. В разделе 3.3.4 найдено точное распределение капитала при релейном управление капиталом и экспоненциально распределенных страховых выплатах и выплатах по социальным программам, образующим пуассоновский поток.

В четвертой главе рассмотрены оценки условных функционалов и их производных, а также многомерной функции интенсивности, построенные по независимым наблюдениям.

Введены функции

$$J(x) = Q\left(\left\{b(x)\right\},\quad \left\{b^{(1j)}(x)\right\}\right) = H\left(\left\{a(x)\right\},\quad \left\{a^{(1j)}(x)\right\}\right),\quad j=\overline{1,m} \tag{9}$$

где $x \in R^m$; $Q(t): R^{(m+1)s} \to R^1$, $H(t): R^{(m+1)(s+1)} \to R^1$ – заданные функции, а внутренние функционалы, являющиеся аргументами функций $H(\cdot)$ и $Q(\cdot)$, определены следующим образом:

$$b_i^{(0j)}(x) = b_i(x) = a_i(x)/p(x) = a_i(x)/a_{s+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(y) f(y\,|\,x)dy,\ b_i^{(1j)}(x) =$$

$$= \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_j},\ b(x) = \left(b_1(x),...,b_s(x)\right),\ b^{(1j)}(x) = \left(b_1^{(1j)}(x),...,b_s^{(1j)}(x)\right),\ i=\overline{1,s},$$

$$a_i^{(0j)}(x) = a_i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(y) f(y,x)dy,\ a_i^{(1j)}(x) = \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j},\ i=\overline{1,s+1},$$

$$a^{(0j)}(x) = a(x) = \left(a_1(x),...,a_{s+1}(x)\right),\ a^{(1j)}(x) = \left(a_1^{(1j)}(x),...,a_{s+1}^{(1j)}(x)\right),\ j=\overline{1,m},$$

$g_1,...,g_s$ – известные скалярные функции, причем $g_{s+1} \equiv 1$, $f(\cdot,\cdot)$ – неизвестная плотность распределения наблюдаемого случайного вектора $Z = (X,Y) \in R^{m+1}$, $p(\cdot)$ – плотность распределения вектора X, $f(y\,|\,x) = f(x,y)/p(x)$ – условная плотность распределения.

В рамках модели (9) можно описать функцию регрессии, функции чувствительности по входам, показывающие степень связи между изменениями входных и выходных характеристик объекта, условную дисперсию (функцию волатильности) и т.п. Заметим, что в приложениях в основном приходится сталкиваться с функциями от условных функционалов и их производных $Q(x)$.

Оценивание функций $J(x)$ проводится методом подстановки, т. е. путем замены в (9) неизвестных функционалов $a^{(rj)}(x)$ (или $b^{(rj)}(x)$) их ядерными оценками

$$a_n^{(rj)}(x) = \left(nh_n^{m+r}\right)^{-1} \sum_{l=1}^{n} g(Y_l)\mathbf{K}^{(rj)}\left(\left(x - X_l\right)/h_n\right), \quad r = 0,1 \ , \qquad (10)$$

где $Z_l = (X_l, Y_l), \quad l = \overline{1,n}$ – (m+1)-мерная случайная выборка, параметры размытости $h_n \downarrow 0$, $\mathbf{K}^{(0j)}(u) = \mathbf{K}(u) = \prod_{i=1}^{m} K(u_i)$ – m-мерное мультипликативное ядро, $\mathbf{K}^{(1j)}(u) = \dfrac{\partial \mathbf{K}(u)}{\partial u_j}$, $a_n^{(rj)}(x) = \left(a_{1n}^{(rj)}(x), \ldots, a_{(s+1)n}^{(rj)}(x)\right)$, $g(y) = \left(g_1(y), \ldots g_{s+1}(y)\right)$. В свою очередь оценки условных функционалов $b(x)$: $b_n(x) = \sum_{l=1}^{n} g(Y_l)\mathbf{K}\left(\left(x - X_l\right)/h_n\right)\left[\sum_{l=1}^{n} \mathbf{K}\left(\left(x - X_l\right)/h_n\right)\right]^{-1} =$

$$= a_n(x)\left[p_n(x)\right]^{-1} = a_n^{(0j)}(x)\left[a_{(s+1)n}^{(0j)}(x)\right]^{-1}, \ \ b_n(x) = \left(b_{n1}(x), \ldots, b_{ns}(x)\right).$$

Свойства таких оценок определяются отдельно свойствами статистик подстановки и преобразования $H(\cdot)$ (или $Q(\cdot)$).

В разделе 4.1.1 изучена сходимость в среднеквадратичном оценок подстановки условных функционалов и их производных.

Наряду с главной частью среднеквадратичной ошибки (СКО) оценок (10), определен порядок скорости сходимости четвертых начальных и центральных моментов оценок, что необходимо для применения теорем сходимости.

Использование знакопеременных ядер позволяет повысить скорость сходимости смещения оценок (10), но, с другой стороны, приводит к трудностям интерпретации результатов (например, получается, что оценка плотности не обладает свойствами плотности) и к неустойчивости оценок условных функционалов, что порождает проблемы при нахождении СКО оценок подстановки. Рассматриваемые в следующем параграфе оценки условных функционалов построены с использованием ядер-плотностей и также дают улучшенную скорость сходимости смещения.

В разделе 4.1.2 в одномерном случае ($m=1$) изучены оценки, удовлетворяющие критерию

$$\sum_{i=1}^{n}\left(g_j\left(Y_i\right)-\hat{\alpha}_j-\hat{\alpha}_j^{(1)}\left(X_i-x\right)\right)^2 K\left(\left(x-X_i\right)/h_n\right)\Rightarrow \min_{\left(\hat{\alpha}_j,\hat{\alpha}_j^{(1)}\right)},$$

$\hat{\alpha}_j$ и $\hat{\alpha}_j^{(1)}$ служат оценками $b_j(x)$ и $b_j'(x)$ соответственно. Найдена условная (при условии $X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n$) асимптотическая СКО оценок $\hat{\alpha}_j$ и $\hat{\alpha}_j^{(1)}$, и определен порядок сходимости их условных четвертых моментов. Вычисление условных характеристик снимает проблему нахождения мажорирующей последовательности (см. условие 2 теоремы 5.3).

Рассмотрено также поведение асимптотических условных смещения и дисперсии оценок в общем случае (полиномиальная локальная аппроксимация условных функционалов):

$$\sum_{i=1}^{n}\left(g_j\left(Y_i\right)-\sum_{k=0}^{p}\tilde{\hat{\alpha}}_j^{(k)}\left(X_i-x\right)^k\right)^2 K\left(\left(x-X_i\right)/h_n\right)\Rightarrow \min_{\hat{\alpha}_j^{(k)}}. \qquad (11)$$

Здесь $\tilde{\hat{\alpha}}_{jn}^{(k)}k!$ служит оценкой производной k-го порядка ($k\le p$) $b_j^{(k)}(x)$.

Обозначим $M=\left(\int_{-\infty}^{\infty}x^{i+j}K(x)dx,\quad i,j=\overline{0,p}\right)$, матрицы $U_{(k)}$ − такие же,

как и матрица *M*, за исключением ($k+1$)-ого столбца, который заменен на столбец $\left(1, u, ..., u^p\right)^T$.

Теорема 4.2. Пусть функция $b_j(x),\ j=\overline{1,s}$ имеет непрерывные производные до $p+2$-го порядка включительно, плотность $p(\cdot)$ непрерывно дифференцируема в точке x, $p(x)\neq 0$, $K(\cdot)$ − ядро-плотность, заданное на компакте, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^{2k+1}K(u)du=0,\ k=\overline{0,p},$ функция $\varphi_j(x)=$ $=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_j{}^2(y)f(y\,|\,x)dy-b_j{}^2(x)$ непрерывна точке x, $p-k$ − нечетно, $p\geq k\geq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(h_n+1/\left(nh_n^{2k+1}\right)\right)=0$. Тогда при $n\to\infty$ СКО $\tilde{\tilde{\alpha}}_{jn}^{(k)}(x)$:

$$u^2\left(\tilde{\tilde{\alpha}}_{jn}^{(k)}(x)\right)=\left|M\right|^{-2}\left[\left(b_j{}^{(p+1)}(x)\right)^2 h_n^{2(p-k+1)}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^{p+1}K(u)\left|U_{(k)}(u)\right|du\right)^2\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(p+1\right)!\right]^{-2}+\varphi_j(x)p^{-1}(x)n^{-1}h_n^{-2k-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|U_{(k)}(u)\right|^2du+o_p\left(h_n^{2(p-k+1)}+n^{-1}h_n^{-2k-1}\right)\right].$$

В разделе 4.2 рассмотрена сходимость в среднеквадратичном рекуррентных аналогов оценок раздела 4.1. В разделе 4.2.1 рекуррентные оценки функционалов $a^{(rj)}(x)$ построены с векторным параметром размытости

$$a_n^{(rj)}(x)=n^{-1}\sum_{l=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}h_{lk}^{-1}g(Y_l)\mathbf{K}^{(rj)}\left(\left(x-X_l\right)/h_{(l)}\right)=$$

$$=a_{n-1}^{(rj)}(x)-n^{-1}\left[a_{n-1}^{(rj)}(x)-\prod_{k=1}^{m}h_{nk}^{-1}g(Y_n)\mathbf{K}^{(rj)}\left(\left(x-X_n\right)/h_{(n)}\right)\right],\quad r=0{,}1.$$

Здесь $\mathbf{K}^{(0j)}\left(u/h_{(l)}\right)=\mathbf{K}\left(u/h_{(l)}\right)=\prod\limits_{i=1}^{m}K\left(u_i/h_{li}\right)$ − m-мерное мультипликативное ядро, масштабированное по каждой компоненте,

$$\mathbf{K}^{(1j)}(u) = \frac{\partial \mathbf{K}(u)}{\partial u_j} = K(u_1)...K(u_{j-1})K^{(1)}(u_j)K(u_{j+1})...K(u_m),\ K^{(1)}(u_j) = \frac{dK(u_j)}{du_j},$$

последовательности чисел $h_{nk} \downarrow 0 \quad \forall k = \overline{1,m}$.

В качестве полурекуррентных, поскольку только числитель и знаменатель оцениваются рекуррентно, оценок подстановки условных функционалов $b(x)$ в точке x рассмотрены статистики

$$b_n(x) = \frac{\sum_{l=1}^{n}\prod_{k=1}^{m} h_{lk}^{-1} g(Y_l)\mathbf{K}\left(\left(x - X_l\right)/h_{(l)}\right)}{\sum_{l=1}^{n}\prod_{k=1}^{m} h_{lk}^{-1}\mathbf{K}\left(\left(x - X_l\right)/h_{(l)}\right)} = \frac{a_n(x)}{p_n(x)}, \tag{12}$$

$p_n(x)$ − рекуррентная ядерная оценка многомерной плотности.

Заметим, что оценки (12) можно записать в виде $b_n\left(x\right) =$

$$= b_{n-1}\left(x\right) + \left(g\left(Y_n\right) - b_{n-1}\left(x\right)\right)\left[1 + (n-1)p_{n-1}(x)\prod_{k=1}^{m} h_{nk}\left(\mathbf{K}\left(\left(x - X_n\right)/h_{(n)}\right)\right)^{-1}\right]^{-1},$$

что удобно в задачах прогнозирования, поскольку $g\left(Y_n\right) - b_{n-1}\left(x\right)$ − ошибка прогноза на n-ом шаге.

В разделе 4.2.2 найдена асимптотическая условная СКО рекуррентных аналогов оценок (11): $\hat{\alpha}_{j(n+1)} = \hat{\alpha}_{jn} + \left(n+1\right)^{-1} K\left(\left(X_{n+1} - x\right)/h_{n+1}\right)\times$ $\times\left(g_j(Y_{n+1}) - V_{n+1}\hat{\alpha}_n\right)S_{n+1}{}^{-1}V_{n+1}{}^{T}/h_{n+1}$, где $V_n = \left(\left(X_n - x\right)^k, k = \overline{0,p}\right)$, $S_n = n^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - x\right)^{i+j-2} K\left(\left(X_i - x\right)/h_i\right)/h_i,\ i,j = \overline{1,p+1}\right)$, и матрица $S_{n+1}{}^{-1}$ также пересчитывается рекуррентно.

В разделе 4.3 исследуются устойчивые оценки ядерного типа многомерной функции интенсивности отказов, входящей в класс дополненных функционалов (по терминологии Кошкина Г.М.). Аналитические результаты проиллюстрированы статистическим моделированием.

Локальное оценивание условных функционалов и их производных на основе полиномиальной аппроксимации улучшает скорость сходимости смещения и позволяет находить оценки производных условных функционалов любого порядка естественным образом.

В пятой главе рассмотрены непараметрические оценки условных функционалов и их производных для строго стационарных наблюдений, удовлетворяющих условию сильного перемешивания (с. п.).

В разделе 5.1 найдена главная часть СКО и порядок сходимости четвертых моментов оценок (10) для многомерных с. п. наблюдений $Z_l=(X_l,Y_l),\quad l=\overline{1,n}$ с коэффициентом с.п. $\alpha(\tau)$ удовлетворяющим условию $\int\limits_0^\infty [\alpha(\tau)]^\lambda d\tau<\infty$ для некоторого числа $\lambda\in(0,0.5)$.

В разделе 5.2 аналогичные результаты получены для рекуррентных оценок $a_n^{(rj)}(x)=n^{-1}\sum\limits_{l=1}^n g(Y_l)\mathbf{K}^{(rj)}\left(\left(x-X_l\right)/h_l\right)/h_l^{m+r}$. Пусть $f_{1(1+\tau)}(z,p)$ – $2(m+1)$-мерная плотность распределения выборочных величин $\left(Z_1,Z_{1+\tau}\right),\tau\ge 1$, $a_t^{s+}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|g_t^{\,s}(y)\right|f(x,y)dy$, $T_j=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u^jK(u)du$.

Теорема 5.2. Пусть симметричное нормированное ограниченное ядро $K(\cdot)$ удовлетворяет условиям $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|K^{(r)}(u)\right|du<\infty,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|u^{\nu}K(u)\right|du<\infty$ $T_j=\begin{cases}0, j<\nu,\\ \text{const}\ne 0, j=\nu\end{cases}$, функция $a_t^{(rj)}(\cdot)$ и все ее частные производные ν-го порядка непрерывны и ограничены на R^m, функции $a_t^{1+}(\cdot)$, $a_t^{\frac{2}{1-2\lambda}+}(\cdot)$ ограничены на R^m и непрерывны в точке *x*, функция $a_t^{2+}(\cdot)$ ограничена и непрерывна в точке *x*, функция $\int_{R^2}|g_t(v)g_t(q)|f_{1(1+\tau)}(x,v,y,q)\,dv\,dq$ ограничена на R^2, для монотонно не возрастающей последовательности h_n: $\lim_{n\to\infty}\left(h_n + 1/(nh_n^{m+2r})\right) = 0$ и $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} h_i^{\beta} = h_n^{\beta} S_{\beta} + o\left(h_n^{\beta}\right)$ для $\beta = \nu, m+2r$.

Тогда СКО $a_{tn}^{(rj)}(\cdot)$: $u^2\left(a_{tn}^{(rj)}(x)\right) = S_{\nu}{}^2 T_{\nu}{}^2 h_n^{2\nu}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial^{(\nu)} a_t^{(rj)}(x)}{\partial x_l^{\nu}}\right)^2 / \left(\nu!\right)^2 +$

$$+S_{-(m+2r)}\varphi_t(x) n^{-1} h_n^{-m-2r}\int_{-\infty}^{\infty} K^{(r)2}(u)du\left(\int_{-\infty}^{\infty} K^2(u)du\right)^{m-1} + o\left(n^{-1}h_n^{-m-2r} + h_n^{2\nu}\right).$$

Смещение оценок локальной полиномиальной аппроксимации $\tilde{\hat{\alpha}}_j^{(0)}$ ведет себя по отношению к степени полинома p так же (дает улучшенную скорость сходимости), как смещение оценок $b_{jn}(x)$ по отношению к параметру ν (скорость сходимости в среднеквадратичном рекуррентных и обычных оценок подстановки для зависимых и независимых наблюдений одинакова).

В разделе 5.3 рассмотрены оценки раздела 4.1.2 $\hat{\alpha}_j$ и $\hat{\alpha}_j^{(1)}$ в случае с. п. наблюдений: найдены главные части смещений и дисперсий асимптотических распределений.

Порядок скорости сходимости оптимальных непараметрических оценок функционалов $a^{(rj)}(x), r = 0,1$ для с. п. наблюдений, равный $2\nu\left[m + 2(\nu + r)\right]^{-1}$, при больших ν, как и для независимых наблюдений, приближается к обычному порядку скорости сходимости параметрических оценок.

В разделе 5.4 приведены теоремы сходимости, позволяющие находить СКО оценок подстановки и их кусочно-гладких аппроксимаций, а также результаты, связанные с оптимальным выбором параметров размытости, и СКО соответствующих оптимальных оценок.

В разделе 5.5 даны примеры применения ядерных оценок, результаты моделирования и численных расчетов. С помощью оценок подстановки и их кусочно-гладких аппроксимаций, в том числе и рекуррентных, проводится непараметрическая идентификация двухфакторной производственной функции. Рассмотрена непараметрическая идентификация в широком смысле процесса нелинейной гетероскедастической авторегрессии второго порядка с применением к задаче прогнозирования и обработки реальных данных на цены акций.

В заключении перечислены основные результаты, полученные в работе.

В приложении представлены документы, подтверждающие практическое использование результатов исследований.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Методы и результаты исследования асимптотических свойств оценок медианного типа параметров тренда положения (масштаба), построенных на разностях (отношениях) наблюдений первого и второго порядков.

2. Результаты исследования асимптотических свойств оценок медианного типа параметра устойчивого процесса авторегрессии при отсутствии и при наличии аддитивной помехи наблюдения.

3. Методы построения и нахождения главных частей асимптотических среднеквадратичных ошибок локальных оценок ядерного типа функционалов от условных распределений и их производных.

4. Метод исследования сходимости в среднеквадратичном локальных ядерных оценок функции интенсивности неоднородного пуассоновского процесса.

5. Критерии и результаты оптимального управления капиталом некоммерческого страхового фонда в асимптотической модели, зависящей

от среднего, дисперсии величины страховых выплат и интенсивности пуассоновского потока, управляющего выплатами.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях по перечню ВАК РФ

1. Китаева А.В. Медианные оценки параметров квадратичного тренда временного ряда // Автометрия. 1990. № 1. С. 87−90.
2. Китаева А.В. Медианная оценка параметра квадратичного тренда среднего // Деп. в ВИНИТИ редколлегией журнала «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика» 26 мая 1988 № 4101-88. 15 с.
3. Китаева А.В. Рекуррентное оценивание функции интенсивности пуассоновского процесса // Известия Томского политехнического университета. 2008. Т. 312. № 5. С. 5−10.
4. Китаева А.В. Устойчивое оценивание одновременного тренда среднего и дисперсии случайного сигнала // Известия Томского политехнического университета. 2008. Т. 313. № 5. С. 5−9.
5. Китаева А.В. Локальные полиномиальные оценки условных функционалов и их производных по независимым наблюдениям // Известия Томского политехнического университета. 2009. Т. 314. № 5. С. 6−10.
6. Китаева А.В., Кошкин Г.М. Устойчивое с улучшенной скоростью сходимости непараметрическое оценивание многомерной функции интенсивности // Автоматика и телемеханика. 1997. № 5. С. 202−214.
7. Китаева А.В., Кошкин Г.М. Рекуррентное непараметрическое оценивание функций от функционалов многомерной плотности и их производных // Автоматика и телемеханика. 2009. № 3. С. 48−67.
8. Китаева А.В., Кошкин Г.М. Полурекуррентные ядерные оценки базовых функционалов по независимым наблюдениям // Известия Том-

ского политехнического университета. 2008. Т. 312. № 2. С. 8−12.

9. Китаева А.В., Кошкин Г.М. Ядерные оценки базовых функционалов по зависимым наблюдениям // Известия Томского политехнического университета. 2009. Т. 314. № 2. С. 26−31.

10. Китаева А.В., Кошкин Г.М. Полурекуррентная непараметрическая идентификация в широком смысле нелинейной гетероскедастической авторегрессии // Автоматика и телемеханика. 2010. № 2. С. 92−111.

11. Китаева А.В., Кошкин Г.М., Пивен И.Г. Непараметрическая идентификация в экономических системах // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2008. Т. 15. Вып.4. С. 588−612.

12. Китаева А.В., Терпугов А.Ф. Сильно состоятельная и асимптотически нормальная оценка параметра авторегрессии первого порядка с бесконечной дисперсией // Вестник Томского государственного университета. Декабрь 2003. № 280. С. 185−187.

13. Китаева А.В., Терпугов А.Ф. Управление капиталом фонда социального страхования // Вестник Томского государственного университета. Март 2006. № 290. С. 167−168.

14. Китаева А.В., Терпугов А.Ф. Модель фонда социального страхования при релейном управлении капиталом и экспоненциально распределенных страховых выплатах и выплатах по социальным программам // Вестник Томского государственного университета. Декабрь 2006. № 293. С. 35−38.

Публикации в других изданиях

15. Китаева А.В. Оценки медианного типа для коэффициентов тренда временного ряда // Поиск сигнала в многоканальных системах: сб. статей. Томск: Изд-во Томского университета, 1987. Вып. 2. С. 89−98.

16. Китаева А.В. Оценки медианного типа для коэффициентов ли-

нейной регрессионной модели // Материалы 6-ой Всесоюзной школы по непараметрическим и робастным методам статистики в кибернетике. Томск. 1987. Часть 1. С. 188−191.

17. Китаева А.В. Медианные оценки параметров тренда среднего гауссовских процессов, основанные на разностях первого и второго порядков // Тезисы докладов III Всесоюзной конференции «Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов». Гродно. 1988. Часть 1. С. 46−48.

18. Китаева А.В. Робастные оценки параметров авторегрессии, примененные в случае линейного тренда параметров модели // Статистический анализ и обработка экспериментальных данных: межвузовский сборник научных трудов. Новосибирск: НЭТИ, 1988. С. 67−73.

19. Китаева А.В. Медианные оценки параметров тренда масштаба // Оптимизация систем управления и фильтрации. М. 1988. Деп. в ВИНИТИ 30 декабря 1988 № 9225-В88. С. 85−93.

20. Китаева А.В. Оценки медианного типа параметров авторегрессии, наблюдаемой с аддитивной помехой // Тезисы докладов XI Всесоюзного научно-технического семинара секции «Теория информации» ЦП ВНТО РЭС им. А.С. Попова. Ульяновск. 1989. Часть 1. С. 42−43.

21. Китаева А.В. Оптимизация деятельности фонда социального страхования // Обработка данных и управление в сложных системах: сборник статей. Томск: Изд-во Томского университета, 2005. Вып. 7. С. 131−134.

22. Китаева А.В. Управление капиталом фонда социального страхования при наличии гистерезиса // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2006. № 18. С. 297−302.

23. Китаева А.В., Кошкин Г.М. Устойчивое непараметрическое оценивание функции интенсивности // Информатика и процессы управле-

ния: межвузовский сборник научных статей / Отв. ред. А.И. Рубан. Красноярск: Изд-во КГТУ, 1996. С. 85−93.

24. Китаева А.В., Кошкин Г.М. Среднеквадратическая сходимость непараметрической оценки функции от функционалов плотности и их производных // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2007. № 23. С. 309–314.

25. Китаева А.В., Кошкин Г.М. Непараметрическое оценивание производственной функции и ее характеристик // Материалы VI Международной научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ-2007). Томск: Изд-во Томского университета, 2007. Часть 1. С. 120–124.

26. Китаева А.В., Кошкин Г.М. Непараметрическое оценивание функций от условных моментов по многомерным наблюдениям с сильным перемешиванием // Труды 8-й Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». М.: Институт проблем управления им В.А. Трапезникова, 2009. С. 1001–1018.

27. Китаева А.В., Кошкин Г.М. Рекуррентные непараметрические оценки локальной линейной аппроксимации условных функционалов // Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ-2009). Часть 1. Томск: Изд-во Томского университета, 2009. С. 47–51.

28. Китаева А.В., Кошкин Г.М., Рюмкин В.И. Непараметрическое оценивание условных функционалов по зависимым наблюдениям // Третий Сибирский конгресс по прикладной и промышленной математике, посвященный памяти С.Л.Соболева (1908-1989). Тезисы докладов. Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1998. Часть IV. С. 97–98.

29. Китаева А.В., Терпугов А.Ф. Медианные оценки параметров тренда среднего гауссовского процесса // Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции «Статистические методы в теории передачи и преобразования информационных сигналов». Киев: КИИГА, 1988. С. 139−140.

30. Китаева А.В., Терпугов А.Ф. Непараметрическое оценивание нормированной интенсивности пуассоновского процесса по наблюдениям на заданном интервале // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2006. №19. С. 169−172.

31. Кошкин Г.М., Китаева А.В. Оценивание отношений функций в условиях непараметрической неопределенности // Тезисы докладов 3-й Международной научно-технической конференции «Идентификация, измерение характеристик и имитация случайных сигналов». Новосибирск. 1994. С. 20–22.

32. Anna Kitayeva. Mean-square convergence of a kernel type estimate of the intensity function of an inhomogeneous Poisson process // The Second International Conference «Problems of Cybernetics and Informatics» (PCI'2008). Proceedings. Baku, Azerbaijan. 2008. Vol. III. P. 149–152.

33. Kitayeva A.V., Koshkin G.M. Continuous-Discrete Nonparametric Kernel Algorithms for Identifying and Control // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2002. Т. 9. Вып. 2. С. 488−490.

34. Kitayeva A.V., Koshkin G.M. Semi-recursive kernel estimation of function of density functionals and their derivatives // 9th IFAC Workshop «Adaptation and Learning in Control and Signal Processing» & 3d IFAC Workshop «Periodic Control» (ALCOSP'07/PSYCO'07). Saint Petersburg, Russia. 2007. IPACS Electronic Library at http://lib.physcon.ru/.

35. Anna Kitayeva and Gennady Koshkin. Semi-recursive kernel estimation of the production function and its characteristics // The Second Interna-

tional Conference «Problems of Cybernetics and Informatics» (PCI'2008). Proceedings. Baku, Azerbaijan. 2008. Vol. III. P. 145–148.

36. Kitaeva A.V., Koshkin G.M., Piven I.G. Nonparametric algorithms of identification of nonlinear multivariate autoregression processes // The 6th Russian-Korean International Symposium on Science and Technology (KORUS-2002). Materials. Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University, 2002. Vol. 3. P. 173.

37. Kitaeva A.V., Koshkin G.M., Piven I.G., Ryumkin V.I. Nonparametric identification of dynamic systems // Материалы научно-практического семинара «Проблемы синтеза и проектирования систем автоматического управления». Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. С. 97−100.

38. Kitaeva A.V., Koshkin G.M., Piven I.G., Ryumkin V.I. On nonparametric kernel identification of nonlinear autoregression process // The 5th Korea-Russian International Symposium on Science and Technology (KORUS-2001). Proceedings. Tomsk: Tomsk Polytechnic University, 2001. Vol. 2. P. 208−211.

39. Kitayeva A.V., Koshkin G.M., Ryumkin V.I. Nonparametric estimation of regression curves from dependent observations // Proceedings of the Fifth International Conference «Computer Data Analysis and Modeling». Vol. 1: A-M / Editing by Prof. S.A. Aivazyan and Prof. Yu.S. Kharin. Minsk: BSU, 1998. P. 139−144.

40. Kitayeva A.V., Koshkin G.M., Ryumkin V.I. Nonparametric estimation of conditional functionals from dependent observations // Proceedings of the Joint Session of Prague Symposium on Asymptotic Statistics & Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes (Prague Stochastics'98) / Editors: Marie Huskova, Petr Lachout, Jan Amos Visek. Prague: Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1998. Vol. 1. P. 295−300.