

На правах рукописи

Чуприков Николай Леонидович

Вопросы квантовой динамики частицы в структурах с обычной и фрактальной геометрией

01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Томск - 2009

Работа выполнена на кафедре теоретической физики ГОУ ВПО «Томский государственный педагогический университет»

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор,
Караваев Геннадий Федорович

Официальные оппоненты: член-корреспондент РАН доктор физико-математических наук, профессор
Волович Игорь Васильевич

доктор физико-математических наук, профессор,
Самсонов Борис Федорович

доктор физико-математических наук, профессор,
Килин Виктор Андреевич

Ведущая организация: Российский университет дружбы народов (г. Москва)

Защита состоится 11 февраля 2010 г. в 14³⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.267.07 при ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, г.Томск, пр. Ленина, 36

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета

Автореферат разослан «__» _____ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук

Ивонин И. В.

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена развитию новых подходов к описанию квантовой динамики частицы в структурах с обычной и фрактальной геометрией и решению таких связанных с нею проблем, как проблема времени туннелирования, ванье-штарковская проблема и задача о рассеянии частицы на идеальных фрактальных потенциалах.

Актуальность темы. Сравнительно простые, задачи квантовой динамики частицы в одномерных системах всегда были в центре внимания физиков-теоретиков, играя роль своеобразного полигона для разработки и совершенствования методов исследования электронных состояний в реальных трехмерных структурах. Но с созданием слоистых квантоворазмерных структур (полупроводниковых гетероструктур и сверхрешеток), неоднородных в направлении, ортогональном границам раздела слоев, и возникшей необходимостью исследования поперечного электронного транспорта в таких структурах, число работ, посвященных решению одномерных задач, выросло многократно. Значительная часть этих исследований укладывается в следующие три направления: а) совершенствование методов решения одномерного уравнения Шредингера для частицы с постоянной и с переменной массой; б) исследование особенностей квантовой динамики частицы в периодических структурах во внешних полях, а также в структурах с фрактальной геометрией; в) исследование временных аспектов одномерного законченного рассеяния.

Что касается первого направления, то к моменту появления искусственных квантоворазмерных структур уже были известны такие методы решения одномерного уравнения Шредингера, как асимптотический метод Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна (ВКБ), метод матрицы переноса и метод матрицы рассеяния. Они фактически и стали основным инструментом исследования электронного транспорта в этих структурах, дополняя друг друга. Например, достоинство метода ВКБ состоит в том, что он дает удивительно простой способ нахождения приближенных аналитических решений одномерного уравнения Шредингера для широкого класса гладких потенциалов, сводя решение задачи к решению алгебраического уравнения второго порядка. Формализм матрицы переноса оказался удобным для анализа электронных состояний в периодических структурах. Рекуррентные соотношения метода матрицы рассеяния оказались самыми надежными в численных расчетах параметров рассеяния слоистых структур, независимо от количества и размера содержащихся в них слоев. Однако для целенаправленного создания гетероструктур, заведомо прозрачных для электронов с заданным значением энергии, требуется умение решать обратную задачу - находить число и размер слоев, при которых структура полностью прозрачна для таких электронов. В настоящее время значительный успех в "квантовом конструировании" систем с требуемыми параметрами рассеяния был достигнут в рамках метода обратной задачи рассеяния [1]. Но удобнее всего эту задачу было бы решать на основе условия прозрачности (требовании равенства нулю коэффициента отражения), сформулированном в

виде уравнения на искомые параметры. Однако в таком виде условие прозрачности было получено лишь в рамках асимптотического подхода, то есть, лишь для достаточно гладких потенциалов. Более того, даже в этом классе потенциалов, из-за расходимости ВКБ-разложений в классических точках поворота, полученное условие прозрачности имеет ограниченную область применимости. В настоящее время для решения проблемы, связанной с точками поворота, разработаны различные подходы, среди которых наиболее эффективными являются метод модельных уравнений и метод канонического оператора Маслова. Однако решение этой проблемы в современных подходах было получено за счет заметного усложнения техники асимптотического разложения по сравнению с традиционным методом ВКБ. Таким образом, к разряду актуальных задач следует отнести и разработку новых вариантов метода матрицы переноса (или метода матрицы рассеяния), которые делали бы возможным вывод условия прозрачности для одномерных структур, и поиск новых асимптотических подходов, которые давали бы максимально простой способ построения всюду регулярных асимптотических разложений, включая точки поворота.

В рамках второго направления выделяется задача о стационарных состояниях электрона в бесконечных периодических структурах во внешнем постоянном однородном электрическом поле (ванье-штарковская проблема) (см. обзор [2]) и задача о рассеянии электрона на идеальных фрактальных потенциалах - самоподобном фрактальном потенциале и потенциале в форме канторовой лестницы. Решение первой задачи важно для развития теории твердого тела. Что касается второй задачи, то ее решение, прежде всего, необходимо для выявления предельных свойств предфракталов ("реальных фракталов"). Кроме того, важно, что эта задача дает уникальную возможность изучить в рамках сравнительно простой модели явление масштабной инвариантности, которое, кроме теории фракталов, возникает также в теории критических явлений и в квантовой теории поля. Стоит также упомянуть связь этой задачи с построением p -адической квантовой механики, где возникает уравнение Шредингера с дробными производными (см., например, [3]).

Решение обеих задач сопряжено с серьезными математическими трудностями. В частности, в рамках скалярного представления внешнего электрического поля ванье-штарковская проблема является задачей с сингулярным потенциалом. Строгие результаты относительно характера энергетического спектра частицы в ванье-штарковской проблеме для ограниченных в пределах одного периода потенциалов получены лишь при дополнительных условиях на их гладкость (в этом случае спектр непрерывный), а также для периодических структур, составленных из δ -потенциалов (спектр может быть как непрерывным, так и дискретным) или потенциалов, описываемых первой производной δ -функции (спектр дискретный). Вопрос о характере спектра в ванье-штарковской проблеме, без ограничения на гладкость потенциала, в рамках строгой модели не решен. Кроме того, за рамками известных в этой области работ осталось исследование симметрии задачи (которая, хотя и отлична от трансляционной, но все-таки имеется). В частности, представляет интерес по-

иск решений уравнения Шредингера, удовлетворяющих условию симметрии задачи. Другой аспект проблемы состоит в том, что для решения ваньештарковской проблемы в случае сверхрешеток, наряду с уравнением Шредингера, часто использовалось также и уравнение для огибающей волновой функции, полученное в рамках приближения эффективной массы. В связи с этим, представляет интерес исследовать спектр энергии и симметрию в данной задаче не только на основе обычного уравнения Шредингера, но и на основе уравнения Шредингера для частицы с переменной массой, которое совпадает по форме с уравнением для огибающей волновой функции, но свободно от ограничений, налагаемых приближением эффективной массы. Что касается задачи о рассеянии частицы на фрактальных потенциалах, заданных на канторовом множестве, то здесь ситуация не менее сложная; во всяком случае, ни в одном из известных подходов не удалось учесть геометрию канторова множества. В результате, одномерное законченное рассеяние в случае *идеальных* фрактальных потенциалов и явление масштабной инвариантности в данной задаче остались не исследованными.

Теперь остановимся на проблеме определения характеристических времен одномерного законченного рассеяния, больше известной как проблема времени туннелирования. Многолетний опыт ее решения показал, что определение этой характеристики представляет собой серьезную, далеко не техническую проблему. Существующие определения времени туннелирования, полученные на основе уравнения Шредингера *и на основе уравнения Дирака*, предсказывают так называемый эффект Хартмана – насыщение времени туннелирования частицы с ростом ширины прямоугольного барьера (аналогичный эффект, благодаря оптико-механической аналогии, предсказывается и для световых пучков, проходящих через слоистые среды). Очевидно, время туннелирования, как характеристика движения частицы, не может обладать таким свойством. В противном случае, это означало бы, что верхний предел для средней скорости туннелирования частицы через потенциальные барьеры не существует. В настоящее время вопрос о природе эффекта Хартмана остается дискуссионным, а сам эффект трактуется как парадокс, требующий решения. Спорным также является вопрос и об источнике трудностей, возникающих при решении проблемы времени туннелирования.

Ключевым для понимания истоков парадокса Хартмана является тот факт, что волновой пакет, описывающий одномерное законченное рассеяние, распадается после рассеяния на два волновых пакета (прошедший и отраженный), которые локализованы в разных пространственных областях. Не случайно, что в дискуссии вокруг проблемы времени туннелирования вопрос о том, отдельно или совместно хронометрировать движение прошедших и отраженных частиц, занимает центральное место. Проблема заключается в том, что в квантовой механике нет ясного ответа на этот вопрос. Действительно, с одной стороны, сама постановка задачи для одномерного законченного рассеяния предполагает, что все измерения должны проводиться по завершению рассеяния с помощью двух детекторов - один для прошедших, а другой для отраженных частиц. Согласно теории вероятностей, экспериментальные дан-

ные, полученные с помощью разных детекторов, не могут описываться одним и тем же (колмогоровским) вероятностным пространством (см. обзор [4], а также работу [5]). Это указывает на то, что данный процесс должен рассматриваться как объединение одночастичных подпроцессов прохождения и отражения, которые характеризуются своими, индивидуальными временами рассеяния. С другой стороны, в рамках стандартной модели одномерного законченного рассеяния, раздельное хронометрирование подпроцессов в области барьера реализовать невозможно, поскольку для этого нужно знать динамику частиц, участвующих в каждом из подпроцессов, на всех этапах рассеяния. В то же время стандартная модель не предполагает столь детальное описание подпроцессов.

Таким образом, в рамках существующей модели одномерного законченного рассеяния проблема времени туннелирования не может быть корректно решена в принципе, и именно с этим связано появление парадокса Хартмана. Решение этой проблемы предполагает разработку модели одномерного законченного рассеяния как объединения подпроцессов прохождения и отражения, с описанием эволюции обоих подпроцессов на всех этапах рассеяния.

Цель работы состояла в совершенствовании старых и развитии новых математических методов описания квантовой динамики частицы в системах с обычной и фрактальной геометрией и включала следующие задачи:

- совершенствование метода матрицы переноса, которое предполагает вывод численно устойчивых рекуррентных соотношений для параметров рассеяния и вывод на их основе условий прозрачности для одномерных систем общего вида;
- обобщение метода ВКБ с целью построения всюду регулярных асимптотических разложений для решений одномерного уравнения Шредингера с любым гладким потенциалом, заданным в ограниченном пространственном интервале, при наличии классических точек поворота;
- развитие нового подхода к решению ванье-штарковской проблемы на базе уравнений Шредингера для частиц с постоянной и переменной массой, пригодного для любых потенциалов, ограниченных в пределах одной ячейки периодической структуры и в общем случае не являющихся гладкими;
- определение параметров рассеяния самоподобного фрактального потенциала и потенциала в форме канторовой лестницы, с учетом геометрии канторова множества, на котором заданы оба потенциала;
- развитие квантовомеханической модели одномерного законченного рассеяния, как объединения подпроцессов прохождения и отражения, предусматривающей описание подпроцессов на всех этапах рассеяния и определение времени рассеяния для каждого подпроцесса.

Научная новизна результатов диссертационной работы состоит в следующем:

- разработан вариант метода матрицы переноса, рекуррентные соотношения которого численно устойчивы; на их основе получены условия прозрачности для одномерных структур общего вида, а также условия появления широких резонансов для структур специального вида; введено понятие “фазовых точек поворота” и на этой основе дана наглядная физическая интерпретация условия прозрачности для фаз;
- показано, что для любого гладкого потенциала с классическими точками поворота, заданного в ограниченном пространственном интервале, включение в формализм ВКБ-разложений достаточного количества дифференциальных следствий уравнения Риккати позволяет получать ВКБ-разложения, регулярные во всей области задания потенциала; при этом не нужно выводить формулы связи и, кроме того, достаточно ограничиться лишь главным членом разложения, увеличивая точность аппроксимации за счет включения в формализм новых дифференциальных следствий;
- показано, что в ванье-штарковской проблеме, для любого потенциала, ограниченного по величине в пределах одной ячейки периодической структуры, спектр энергии частицы с постоянной массой непрерывный при любой напряженности внешнего электрического поля, за исключением так называемого “резонансного” случая; впервые найдены решения уравнения Шредингера, удовлетворяющие условию симметрии задачи;
- показано, что в аналогичной модели, но для частицы с переменной (эффективной) массой, которая описывается периодической кусочно-постоянной функцией пространственной переменной, спектр дискретный, а решения, удовлетворяющие условию симметрии задачи, не существуют;
- впервые разработан формализм для нахождения матриц переноса и параметров рассеяния самоподобного фрактального потенциала и потенциала в форме канторовой лестницы, получены функциональные уравнения для матриц переноса и параметров рассеяния обоих потенциалов; обнаружено три типа решений для самоподобного фрактального потенциала; показано, что в предельном случае, когда фрактальная размерность канторова множества, где заданы потенциалы, равна единице, “канторова лестница” рассеивает как обычная потенциальная ступенька, а самоподобный фрактальный потенциал - как δ -потенциал;
- на примере симметричных потенциальных барьеров разработана новая модель одномерного законченного рассеяния, согласно которой данный квантовый процесс представляет собой объединение двух взаимосвязанных когерентно протекающих подпроцессов – прохождения и отражения; для обоих подпроцессов получены волновые функции; показано, что если начальное состояние частицы описывается узким в пространстве импульсов волновым пакетом, то подпроцессы несовместимы (т.е., каждая частица ансамбля может участвовать только в одном из них); в общем случае подпроцессы частично совместимы на самом этапе рассеяния (на этом этапе нор-

ма волновой функции, описывающей подпроцесс прохождения, может, хотя и незначительно, меняться);

- в случае, когда подпроцессы строго несовместимы, определены времена рассеяния; показано, что время туннелирования частицы через прямоугольный потенциальный барьер растет экспоненциально с ростом ширины барьера, а не выходит на насыщение, как это предсказывает стандартная модель; показано, появление эффекта Хартмана в стандартной модели объясняется тем, что время туннелирования в этой модели фактически вводится не для частицы, а для проходящего через барьер локального интерференционного максимума, который является результатом наложения двух когерентных волновых процессов, описывающих прохождение и отражение.

Положения и результаты, выносимые на защиту.

1. Новый вариант метода матрицы переноса, рекуррентные соотношения которого позволяют вычислять параметры рассеяния для любых одномерных многобарьерных систем, состоящих из конечного числа δ -потенциалов и гладких потенциалов, заданных на ограниченных интервалах. Условия прозрачности двухбарьерных систем общего вида и их интерпретация на основе введенной в работе концепции "фазовых точек поворота". Результаты исследования условий прозрачности и полученные на их основе условия появления "широких резонансов" для систем, состоящих из трех и четырех одинаковых прямоугольных потенциальных барьеров.
2. Метод построения всюду регулярных асимптотических разложений для решений уравнения Шредингера с любым гладким потенциалом с классическими точками поворота, заданным в ограниченном интервале.
3. Метод и результаты исследования параметров рассеяния квантовой частицы на одномерной структуре, состоящей из N одинаковых ячеек, с любым в пределах одной ячейки ограниченным гладким потенциалом или δ -потенциалом.
4. Метод нахождения решений уравнения Шредингера, удовлетворяющих условию симметрии, в задаче о квантовой динамике электрона в кристаллических решетках и сверхрешетках во внешнем постоянном однородном электрическом поле (ванье-штарковская проблема). Установлен характер электронного спектра для любых потенциалов, ограниченных по величине в пределах одной ячейки периодической структуры, без дополнительных условий на их гладкость.
5. Результаты аналогичного исследования ванье-штарковской проблемы на основе уравнения Шредингера для частицы с переменной массой при условии, что масса частицы является (периодической) кусочно-постоянной функцией пространственной переменной.
6. Новый подход к изучению параметров рассеяния частицы на идеальных фрактальных потенциалах - самоподобном фрактальном потенциале и потенциале в форме канторовой лестницы, - в котором точно учитывается геометрия канторова множества. Функциональные уравнения для матрицы переноса и параметров рассеяния обоих потенциалов. Три типа решений

для матрицы переноса и параметров рассеяния самоподобного фрактального потенциала. Предельные свойства обоих потенциалов, когда фрактальная размерность канторова множества равна единице.

7. Новая квантовомеханическая модель одномерного законченного рассеяния, как объединения подпроцессов прохождения и отражения, разработанная для симметричных потенциальных барьеров на основе уравнения Шредингера и предусматривающая описание эволюции подпроцессов на всех этапах рассеяния.
8. Определения характеристических времен одномерного законченного рассеяния для подпроцессов прохождения и отражения на основе новой модели. Объяснение парадокса Хартмана.

Научная и практическая значимость диссертационной работы состоит в том, что в ней дано решение ряда проблем, связанных с описанием квантовой динамики частицы в системах с обычной и фрактальной геометрией, представляющих интерес и с точки зрения фундаментальных исследований, и с точки зрения приложений. В частности, дано решение ванье-штарковской проблемы для более широкого класса потенциалов, чем это было сделано ранее (что может быть полезным для исследования явления локализации волн различной природы в периодических структурах во внешних полях); исследованы особенности квантовой динамики частицы в детерминированных идеальных фрактальных структурах; на основе (стандартного) уравнения Шредингера разработана новая модель одномерного законченного рассеяния, согласно которой данный процесс является объединением подпроцессов прохождения и отражения и которая дает детальное описание подпроцессов на всех этапах рассеяния, а также объясняет парадокс Хартмана. Решение этих задач основано на формализме матрицы переноса, который получил здесь дальнейшее развитие. В частности, полученное на его основе условие прозрачности, дополняя существующие методы “квантового конструирования”, может быть полезным для целенаправленного создания квантоворазмерных структур с необходимыми свойствами. Идея использования дифференциальных следствий уравнения Риккати существенно упрощает построение всюду регулярных ВКБ-разложений для гладких потенциалов, заданных в ограниченном интервале. Важно также подчеркнуть, что эта идея, в принципе, может быть реализована и для других дифференциальных уравнений с малым параметром.

Апробация работы. Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались на следующих семинарах и конференциях:

Семинар “Нелинейные высокочастотные явления в полупроводниках и полупроводниковых структурах и проблемы их применения в электронике СВЧ” (Навои, 1991); Second International Conference On Nanometer Scale Science and Technology (Moscow, 1993); International Symposium "Physics and Engenering of Millimeter and Submillimeter Waves" (Kharkov, 1994); IV Международная конференция по физике полупроводников (Новосибирск, 1999); Научная конференция "Математические модели нелинейных возбуждений, переноса, дина-

мики, управления в конденсированных системах и других средах" (Москва, 2000); International Conference on Foundations of Probability and Physics – 4 (Vaxjo, Sweden, 2006); International Conference “Quantum Theory: Reconsideration of Foundations – 4” (Vaxjo, Sweden, 2007), Международная конференция по математической физике и ее приложениям (Самара, 2008); семинар лаборатории теоретической физики Сибирского физико-технического института; семинар Научно-образовательного центра теоретической физики при ТГПУ; семинар отдела математической физики Математического института им. В. А. Стеклова РАН; семинар отдела физики твердого тела Физического института им. П. Н. Лебедева РАН; семинар лаборатории теоретической физики Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 22 работы в научных изданиях, включая 18 статей в отечественных и зарубежных журналах и 4 статьи в трудах конференций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав основного текста, заключения и списка цитируемой литературы. Общий объем работы составляет 207 страниц, включая 36 рисунков и список литературы из 195 наименований.

Личный вклад автора. Все изложенные в диссертации результаты получены самим автором либо при его непосредственном участии. Автором также осуществлен выбор направлений, объектов и методов исследования.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, дан краткий обзор основных достижений и проблем в данной области исследований, сформулированы основные цели и задачи работы, а также кратко изложены структура и содержание диссертации.

В **первой главе** представлен вариант метода матрицы переноса для решения одномерного уравнения Шредингера с любым кусочно-гладким потенциалом, включая также и δ -потенциалы. В начале главы дан обзор работ, посвященных развитию методов матрицы переноса, метода матрицы рассеяния и метода фазовых функций, а также представлен сравнительный анализ достоинств и недостатков существующих вариантов этих подходов.

В данной работе метод матрицы переноса развивается на примере одномерного уравнения Шредингера для частицы с переменной (эффективной) массой. Матрица переноса вводится как матрица, связывающая решения исследуемого уравнения во внебарьерных областях – пространственных интервалах, на которых потенциал равен нулю, а эффективная масса частицы равна массе свободной частицы. Для любого кусочно-гладкого потенциала, а также для δ -потенциалов, матрица переноса, Y , записывается в виде

$$Y = \begin{pmatrix} q & p \\ p^* & q^* \end{pmatrix}; \quad q = \sqrt{\frac{1}{T}} \exp[i(\kappa_0 d - J)], \quad p = \sqrt{\frac{R}{T}} \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2} - \kappa_0 s + F\right)\right], \quad (1)$$

где T и R - соответственно, коэффициенты прохождения и отражения ($T+R=1$); J и F - фазовые характеристики; κ_0 - волновое число волны де-Бройля, описывающей частицу во внебарьерных областях; $d=b-a$, $s=b+a$; a и b - координаты левой и правой границ барьера, соответственно; $T(-\kappa_0)=T(\kappa_0)$, $J(-\kappa_0)=-J(\kappa_0)$, $F(-\kappa_0)=\pi-F(\kappa_0)$.

Отличительной чертой данного подхода является выделение вкладов $\kappa_0 d$ и $\kappa_0 s$ в выражениях для фаз матричных элементов q и p . Фаза F является, в некотором смысле, мерой асимметрии потенциальных барьеров, поскольку для барьеров симметричной формы она может принимать лишь два значения - 0 или π .

Для параметров рассеяния T , J и F прямоугольных потенциальных барьеров (ям) и δ -потенциалов получены явные аналитические выражения, а для многобарьерных структур получены рекуррентные соотношения. А именно, если потенциальные барьеры расположены в интервалах $[a_n, b_n]$, где $n=1, \dots, N$ ($a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots$), то

$$\begin{aligned} T_{(1,n+1)} &= \left[1 + \frac{(\sqrt{R_{(1,n)}} - \sqrt{R_{n+1}})^2 + 4\sqrt{R_{(1,n)}R_{n+1}} \cos^2(\chi_{(1,n+1)})}{T_{(1,n)}T_{n+1}} \right]^{-1}, \\ J_{(1,n+1)} &= \frac{1}{2}(J_{(1,n)} + J_{n+1} - F_{(1,n)} + F_{n+1}) + \arctg \left[\frac{1 - \sqrt{R_{(1,n)}R_{n+1}} \operatorname{tg}(\chi_{(1,n+1)})}{1 + \sqrt{R_{(1,n)}R_{n+1}}} \right] + \eta, \\ F_{(1,n+1)} &= \frac{1}{2}(F_{(1,n)} + F_{n+1} - J_{(1,n)} + J_{n+1}) + \arctg \left[\frac{\sqrt{R_{(1,n)}} - \sqrt{R_{n+1}}}{\sqrt{R_{(1,n)}} + \sqrt{R_{n+1}}} \operatorname{tg}(\chi_{(1,n+1)}) \right] + \eta; \end{aligned} \quad (2)$$

$\chi_{(1,n+1)} = (J_{(1,n)} + J_{n+1} + F_{(1,n)} - F_{n+1})/2 + \kappa_0 l_{(n,n+1)}$; $l_{(n,n+1)} = a_{n+1} - b_n$; $\eta = 0$, если $\cos(\chi_{(1,n+1)}) \geq 0$, иначе $\eta = \pi$; величины со сложным индексом $(1, n)$ характеризуют n -барьерную структуру, а величины с простым индексом n описывают n -ый потенциальный барьер.

Достоинством этих соотношений является то, что они численно устойчивы [6], и, что особенно важно, они удобны для аналитических исследований. В частности, именно на их основе построены точные модели рассеяния частицы на самоподобном фрактальном потенциале и потенциале в форме канторовой лестницы, которые будут представлены ниже. Кроме того, на их основе можно получить условия прозрачности для одномерных структур общего вида. А именно, для частицы с энергией E двухбарьерная система полностью прозрачна, если одновременно выполняются два условия –

$$R_1(E) = R_2(E) = R(E), \quad R(E) \cos(\chi_{(1,2)}) = 0.$$

Если при этом $R(E) \neq 0$, то второе условие принимает вид

$$J_1 + J_2 + F_1 - F_2 + 2\kappa_0 l_{(1,2)} = \pi(2n+1); \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

Условию прозрачности (3) можно дать наглядную физическую интерпретацию, если ввести понятие “фазовых точек поворота” - точек на оси Ox , в которых фазы падающей и отраженной волн совпадают. Для волны, падающей на барьер слева, эти точки имеют координаты

$x_l = a + (J - F - \pi/2 + 2\pi n)/(2\kappa_0)$, где n - целое число. Для волны, падающей справа - $x_r = b - (J + F - \pi/2 + 2\pi n)/(2\kappa_0)$. Далее, пусть f_l - суммарный фазовый путь падающей слева на барьер свободной волны де-Бройля от левой границы барьера до фазовой точки поворота, эффективно заменяющей барьер, и отраженной волны от точки поворота обратно до левой границы барьера. Несложно показать, что (с точностью до $2\pi n$) $f_l = J - F - \pi/2$. Аналогичный фазовый путь f_r для волны, падающей на барьер справа, определяется выражением $f_r = J + F - \pi/2$.

В результате условие прозрачности (3) можно записать в виде

$$f_r^{(1)} + f_l^{(2)} + 2\kappa_0 l_{(1,2)} = 2\pi n; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

Левая часть этого равенства есть замкнутый фазовый путь свободной волны де-Бройля, заключенный между фазовыми точками поворота $x_r^{(1)}$ и $x_l^{(2)}$ первого и второго барьеров, соответственно. Таким образом, условие прозрачности двухбарьерной системы общего вида, как и известное условие квантования Бора-Зоммерфельда, имеет простой физический смысл. Однако, в отличие от последнего, условие прозрачности (4) является точным.

В работе представлен детальный анализ условий прозрачности. В частности, на их основе получены условия появления “широких резонансов” – резонансов, в которых первые три производных коэффициента прохождения по энергии равны нулю, а четвертая – отлична от нуля. Например, система из четырех одинаковых прямоугольных барьеров шириной d и высотой V_0 , с двумя внешними внебарьерными областями шириной l_1 и внутренней внебарьерной областью шириной l_0 , имеет широкий резонанс в области $E < V_0$, если одновременно выполняются два условия

$$\theta_{(-)} \operatorname{th}(\kappa d) + \operatorname{tg}(\kappa_0 l_0) = 0, \quad \kappa_0 (l_1 - l_0) = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right); \quad \theta_{(-)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_0}{\kappa} - \frac{\kappa}{\kappa_0} \right), \quad \kappa = \sqrt{2m_0(V_0 - E)} / \hbar.$$

Как и метод фазовых функций, метод матрицы переноса удобен и для анализа параметров рассеяния гладких потенциалов. В работе определена связь между элементами матрицы переноса и волновой функцией и на этой основе получены дифференциальные уравнения для элементов матрицы переноса и параметров рассеяния. Получены формулы, связывающие параметры рассеяния с ВКБ-разложениями решений уравнения Шредингера.

Вторая глава посвящена построению асимптотических разложений решений одномерного уравнения Шредингера, регулярных в точках поворота любого порядка. Идея метода состоит в том, что для построения таких разложений достаточно использовать нужное количество дифференциальных следствий уравнения Риккати.

Следует подчеркнуть, что эта идея была предложена нами в 1994 году независимо от работы Мальцева [7], где была предложена такая же идея. Более того, она и реализована в обоих подходах различным образом. Если в методе Мальцева разложение проводится, как и в методе ВКБ, по целым степеням постоянной Планка \hbar , то в нашем подходе разложение проводится по целым степеням функции $\varepsilon(x; \hbar)$, которая зависит от пространственной перемен-

ной и постоянной Планка. Эта функция мала по норме вместе с \hbar и зависит от вида потенциала. В качестве нормы функции берется максимальное значение модуля функции на исследуемом пространственном интервале.

Пусть дано стационарное одномерное уравнение Шредингера с гладким потенциалом $V(x)$, заданным в интервале $[a, b]$. И пусть в этом интервале имеются классические точки поворота, причем одна из них имеет максимальный порядок, равный N . Кратко, формализм разложения выглядит следующим образом. Как и в традиционном методе ВКБ, решение уравнения Шредингера находится в виде $\Psi(x) = \exp[S(x)]$ и, тем самым, сводится к решению уравнения Риккати. Однако, в отличие от метода ВКБ, в данном подходе, кроме самого уравнения Риккати, в формализм включаются и его первые N дифференциальных следствий, которые записываются в виде

$$y^{(m+1)} + \sum_{k=0}^m C_k^m y^{(m-k)} y^{(k)} = Q^{(m)} \quad (m=0,1,\dots,N-1);$$

$$\frac{dy^{(N)}}{dx} + \sum_{k=0}^N C_k^N y^{(N-k)} y^{(k)} = Q^{(N)}, \quad (5)$$

$$y = dS/dx, \quad Q^{(0)} = 2m_0[V(x) - E]/\hbar^2; \quad y^{(m)} \equiv d^m y / dx^m; \quad Q^{(m)} \equiv d^m Q^{(0)} / dx^m;$$

$$C_k^m = \frac{m!}{(m-k)!k!}. \text{ Заметим, что если } x_{turn} \text{ - точка поворота } N\text{-го порядка, то}$$

$$Q^{(0)}(x_{turn}) = \dots Q^{(N-1)}(x_{turn}) = 0, \quad Q^{(N)}(x_{turn}) \neq 0. \text{ Далее пусть } y^{(m)}(x) = \varepsilon^{-m-1}(x; \hbar) u_m(x), \text{ где}$$

$$u_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{m,k}(x; \hbar) \varepsilon^k(x; \hbar). \quad (6)$$

Коэффициенты разложения находятся из системы уравнений. В нулевом порядке малости они имеют вид

$$u_{m+1,0} + \sum_{k=0}^m C_k^m u_{m-k,0} u_{k,0} = Q_m \quad (m=0,1,\dots,N-1); \quad \sum_{k=0}^N C_k^N u_{N-k,0} u_{k,0} = Q_N; \quad (7)$$

а в α -ом порядке малости ($\alpha=1,2,\dots$) –

$$u_{m+1,\alpha} + \sum_{k=0}^m \sum_{\gamma=0}^{\alpha} C_k^m u_{m-k,\gamma} u_{k,\alpha-\gamma} = 0 \quad (m=0,1,\dots,N-1),$$

$$\frac{du_{N,\alpha-1}}{dx} - (N+2-\alpha) \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} u_{N,\alpha-1} + \sum_{k=0}^N C_k^N \sum_{\gamma=0}^{\alpha} u_{N-k,\gamma} u_{k,\alpha-\gamma} = 0; \quad (8)$$

здесь $Q_m = \varepsilon^{m+2} Q^{(m)}$; $\|Q_m(x; \hbar)\| = O(1)$, $\|\varepsilon^{(m)}(x; \hbar)\| = O(\|\varepsilon(x; \hbar)\|)$.

Функция $\varepsilon(x; \hbar)$ находится из уравнений (7) при условии, что $u_{0,0} = 1$. Если положить $u_{m,0} = \varepsilon^{m+1} \kappa_m$, то $\varepsilon(x; \hbar) = \kappa_0^{-1}(x; \hbar)$, причем

$$\kappa_{m+1} + \sum_{k=0}^m C_k^m \kappa_{m-k} \kappa_k = Q^{(m)} \quad (m=0,1,\dots,N-1); \quad \sum_{k=0}^N C_k^N \kappa_{N-k} \kappa_k = Q^{(N)}. \quad (9)$$

Эта система уравнений эквивалентна алгебраическому уравнению $(N+2)$ -го порядка для κ_0 . Если x_0 - точка поворота n -го порядка, то среди корней этого уравнения имеется $n+2$ комплексных корня, которые равны по модулю и для которых $|\varepsilon(x_0; \hbar)| = O(\hbar^{2/(n+2)})$. Остальные корни приводят к неприемлемо большим значениям $|\varepsilon(x_0; \hbar)|$ и должны быть отброшены. Таким образом, в данном

подходе разложение по $\varepsilon(x; \hbar)$ в точке поворота n -го порядка эквивалентно разложению по степеням $\hbar^{2/(n+2)}$. Если же точка x_0 лежит вдали от точек поворота (такую точку формально можно рассматривать как точку поворота нулевого порядка), то имеются два корня, которые равны по модулю и для которых $|\varepsilon(x_0; \hbar)| = O(\hbar)$. В такой точке разложение по $\varepsilon(x; \hbar)$ эквивалентно разложению по целым степеням \hbar и, следовательно, эквивалентно ВКБ-разложению. Однако, в отличие от ВКБ-разложения, ряд по $\varepsilon(x; \hbar)$ не имеет особенности в самой точке поворота n -го порядка. При этом важно, чтобы число учтенных дифференциальных следствий было не меньше n .

Есть еще одна важная особенность данного подхода. Как известно, асимптотические ряды расходятся, и лишь конечное число членов такого ряда может дать требуемую точность расчета. Причем, чем меньше параметр малости, тем больше точность. Но как быть, если параметр малости (как например \hbar) является фиксированной величиной, а требуемая точность не достигнута? В рамках метода ВКБ эта задача неразрешима. В то же время в предлагаемом подходе для этого нужно просто увеличить число используемых дифференциальных следствий уравнения Риккати. В частности, в пределе $N \rightarrow \infty$ главный член разложения (6) при $m=0$ дает точное решение уравнения Риккати. В этом приближении уравнения (8) становятся ненужными, и решение имеет вид $y \approx \varepsilon^{-1}(x; \hbar) = \kappa_0(x; \hbar)$.

Как было показано выше, для любой точки x всегда можно найти два корня $\kappa_0(x; \hbar)$ алгебраического уравнения, обратная величина которых мала по модулю вместе с \hbar . Однако только для одного из них функция $\varepsilon(x; \hbar)$ мала по норме во всем интервале $[a, b]$. Продемонстрируем это на примере частицы с энергией $E = V_0$, падающей на потенциальный барьер, $V(x) = V_0(1 + x/d)$, заданный в интервале $[-d/2, d/2]$. В данном случае начало координат является точкой поворота первого порядка. Легко показать, что если $N=1$, то система уравнений (9) эквивалентна уравнению $\kappa_0^3 - \kappa_0 Q^{(0)}(x; \hbar) + Q^{(1)}(x; \hbar)/2 = 0$, если $N=2$, то $3\kappa_0^4 - 4\kappa_0^2 Q^{(0)}(x; \hbar) + \kappa_0 Q^{(1)}(x; \hbar) + (Q^{(0)}(x; \hbar))^2 - Q^{(2)}(x; \hbar)/2 = 0$. Среди корней обоих уравнений имеется один корень, $\kappa_0^{(1)}(x; \hbar)$, который дает хорошую аппроксимацию точного решения $y(x)$ для данного потенциала во всем интервале $[a, b]$.

На рис. 1 показано точное решение уравнения Риккати, $y(x)$, которое соответствует частному решению $Vi(\rho x) + i \cdot Ai(\rho x)$ уравнения Шредингера с данным потенциалом; $Ai(x)$ и $Bi(x)$ - функции Эйри; ρ - параметр, который зависит от энергии частицы, а также от V_0 и d ; i - мнимая единица. Заметим, что при $N=2$ главный член разложения дает более точное решение, чем при $N=1$. Кроме того, для любого значения N в области $x > 0$ всегда найдется такая точка x_b , что $\Im(\kappa_0^{(1)}(x; \hbar)) = 0$ для $x \geq x_b$ (на графиках приближенных функций в этой точке имеется излом). В то же время, $\Im(y(x)) \neq 0$ в этой области (хотя и $|\Im(y(x))| \ll |\Re(y(x))|$). То есть, точное решение $y(x)$ в области $x \geq x_b$ при-

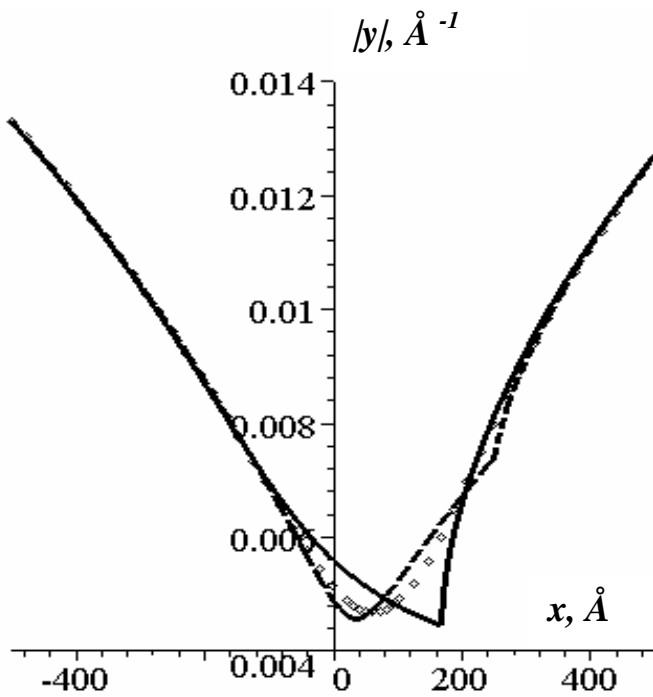


Рис. 1. Зависимость $|y|$ (полые круги) и $|\kappa_0^{(1)}|$ от x :
сплошная линия - $N = 1$; пунктирная линия - $N = 2$

водит к двум независимым вещественным решениям уравнения Шредингера, а приближенное решение $\kappa_0^{(1)}(x; \hbar)$ порождает только одно из них.

Следует, однако, заметить, что чем больше учитывается дифференциальных следствий уравнения Риккати, тем правее лежит точка x_b на оси Ox . Таким образом, всегда найдется такое значение N , что корень $\kappa_0^{(1)}(x; \hbar)$ будет воспроизводить оба независимых решения уравнения Шредингера на всем исследуемом интервале $[a, b]$. В этом

случае нет необходимости в выводе так называемых формул связи.

Основная цель **третьей главы** – описание квантовой динамики электрона в периодических структурах во внешнем постоянном однородном электрическом поле. Для ограниченных и полубесконечных структур изучается задача рассеяния, а для бесконечных структур выясняется характер электронного спектра - ванье-штарковская проблема (ВШП).

Однако, кроме решения задачи с внешним электрическим полем, здесь также приводится решение задачи без внешнего поля. Это делается по нескольким причинам: во-первых, этот подход имеет свои особенности и поэтому сам по себе представляет интерес; во-вторых, описанный ниже способ решения ВШП фактически является обобщением предлагаемого метода решения задачи без поля; в третьих, полученные в этом подходе явные выражения для параметров рассеяния N -барьерной периодической структуры положены в основу изучения одномерного законченного рассеяния для самоподобного фрактального потенциала, заданного на обобщенном канторовом множестве (см. Главу 4).

Итак, пусть имеется уравнение Шредингера, описывающее стационарные состояния электрона, с энергией $E > 0$, в одномерной системе, состоящей из N одинаковых ячеек (периодов). Потенциал $V(x)$ в барьерной области $[a_n, b_n]$ n -ой ячейки записывается в виде $V(x) = v(x)$, а во внебарьерной области $[b_n, a_{n+1}]$ равен нулю; функция $v(x)$ описывает потенциальный барьер, который не является полностью непрозрачным для частицы; $n = 0, 1, \dots, N$. Найдем такие решения уравнения Шредингера, которые удовлетворяют условию

$$\Psi(x; E) = \alpha \Psi(x - D; E), \quad (10)$$

где точки x и $x - D$ принадлежат соседним ячейкам структуры; α - произвольная константа, $D = d + l$ - период структуры; d - ширина барьеров, l - внебарьерной области. Условие (10) будем называть далее условием симметрии. Если записать решения одномерного уравнения Шредингера во внебарьерных областях в виде $\Psi_n(x) = A_n^{(+)} \exp(i\kappa_0 x) + A_n^{(-)} \exp(-i\kappa_0 x)$ ($n = 0, 1, \dots, N$), то для решений в нулевой и первой ячейках условие (10) принимает вид

$$A_1 = \alpha F A_0, \quad (11)$$

$$\text{где } F = \begin{pmatrix} \exp(-i\kappa_0 D) & 0 \\ 0 & \exp(i\kappa_0 D) \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} A_n^{(+)} \\ A_n^{(-)} \end{pmatrix}; \quad n = 0, 1.$$

Кроме того, согласно методу матрицы переноса, $A_0 = Y_1 A_1$, где Y_1 - матрица переноса, описывающая потенциальный барьер $v(x)$, которую будем считать известной. Из этого соотношения, с учетом (11), следует, что для решения, удовлетворяющего условию (10), вектор A_0 должен быть собственным вектором, а α - собственным значением модифицированной матрицы переноса, $\tilde{Y}_1 = Y_1 F$, описывающей одну ячейку периодической структуры -

$$\tilde{Y}_1^{-1}(E) A_0(E) = \alpha(E) A_0(E). \quad (12)$$

Это задача имеет два независимых решения, и, следовательно, имеются два независимых решения одномерного уравнения Шредингера, удовлетворяющие условию симметрии (10).

Для обоих решений связь между векторами A_0 и A_N , которые входят в решения для крайних ячеек структуры, опять реализуется двояко: с одной стороны, $A_0 = Y_{(1,N)} A_N$, где $Y_{(1,N)}$ - матрица переноса описывающая N ячеек структуры; с другой стороны, благодаря симметрии $A_N = \alpha^N F^N A_0$. Поскольку вектор A_0 и параметр α уже известны, эти два соотношения позволяют найти в явном виде матрицу $Y_{(1,N)}$ -

$$\tilde{p}_{(1,N)} = \Omega_N \tilde{p}_1, \quad \Re(\tilde{q}_{(1,N)}) = \theta_N, \quad \Im(\tilde{q}_{(1,N)}) = \Omega_N \Im(\tilde{q}_1), \quad (13)$$

где $\tilde{q}_{(1,N)} = q_{(1,N)} \exp(-iN\kappa_0 D)$, $\tilde{p}_{(1,N)} = p_{(1,N)} \exp(iN\kappa_0 D)$;

$$\Omega_N = \frac{\sin(N\phi)}{\sin(\phi)}, \quad \theta_N = \cos(N\phi), \quad \phi = \arccos(u), \quad \text{если } |u| \leq 1;$$

$$\Omega_N = \frac{sh(N\phi)}{sh(\phi)}, \quad \theta_N = \text{sign}(u) ch(N\phi), \quad \phi = \text{arcch}(u), \quad \text{если } |u| > 1; \quad u = \Re(\tilde{q}_1) = \frac{\cos(J_1 + \kappa_0 l)}{\sqrt{T_1}}.$$

Отсюда следует, что

$$T_{(1,N)} = (1 + \rho \Omega_N^2)^{-1}, \quad J_{(1,n)} = \arccos(\theta_N \sqrt{T_{(1,n)}}) - \kappa_0 l, \quad F_{(1,n)} = \begin{cases} F_1, & \text{если } \Omega_N \geq 0; \\ F_1 + \pi, & \text{если } \Omega_N < 0; \end{cases} \quad \rho = \frac{R_1}{T_1}$$

В случае полубесконечных периодических структур, т.е., когда $N \rightarrow \infty$, для $E \geq 0$ на шкале энергии выделяются области прозрачности (где $|u(E)| \leq 1$) и непрозрачности (где $|u(E)| > 1$), которые совпадают с разрешенными и запрещенными энергетическими зонами в соответствующей задаче для бесконечной периодической структуры. В областях непрозрачности $T_{(1,\infty)}(E) \equiv 0$. В областях

прозрачности функция $T_{(1,\infty)}(E)$ почти всюду имеет неограниченную первую производную, причем $T_{\min}(E) \leq T_{(1,\infty)}(E) \leq 1$, где нижняя огибающая определяется выражением $T_{\min}(E) = \frac{\sin^2(J_1 + \kappa_0 l) - R_1}{\sin^2(J_1 + \kappa_0 l)}$.

Теперь рассмотрим задачу с внешним электрическим полем. Как известно, в скалярном представлении, включение внешнего электрического поля приводит к тому, что потенциал $V(x)$ в уравнении Шредингера для бесконечной периодической структуры уже не обладает свойством трансляционной симметрии. Это, собственно, и стало камнем преткновения при решении ВШП. Однако симметрия в этой задаче все-таки имеется, и поэтому, как и в задаче без поля, наша дальнейшая задача – сформулировать новое условие симметрии и найти решения уравнения Шредингера, удовлетворяющие этому условию. Кроме того, эту же задачу представляет интерес решить и на основе уравнения для огибающей волновой функции, поскольку оно использовалось во многих работах по ВШП наряду с уравнением Шредингера

Рассмотрим уравнение Шредингера, где потенциал $V(x)$ определяется следующим образом: в (барьерной области) $[a_n, b_{n+1}]$ n -ой ячейки $V(x) = \tilde{v}(x) - n\Delta$, а во внебарьерной области $[b_n, a_n]$ $V(x) = -n\Delta$; $b_0 < a_0 \leq b_1 < \dots < a_{N-1} \leq b_N < a_N$; $b_0 = -\infty$, $a_{N+1} = +\infty$; $b_n - a_{n-1} = d$, $a_n - b_n = l$ ($n=1, \dots, N$); здесь $\tilde{v}(x)$ - ограниченный потенциал, в котором учтено влияние внешнего электрического поля; $\Delta = |e| E_{ext} D$; e - электрический заряд электрона; E_{ext} - напряженность внешнего электрического поля. Внебарьерные области играют здесь вспомогательную роль; их ширина может быть равна нулю.

В этой задаче условие симметрии, вместо (10), имеет вид

$$\Psi(x; E) = \alpha \Psi(x - D; E + \Delta), \quad (14)$$

Запишем общее решение одномерного уравнения Шредингера во внебарьерных областях для ячеек с номерами $n=0, 1, \dots, N$,

$$\Psi_n(x) = A_n^{(+)} \exp[i\kappa_n(x - b_n)] + A_n^{(-)} \exp[-i\kappa_n(x - b_n)]; \quad \kappa_n(E) = \sqrt{2m_0(E + n\Delta)/\hbar^2}.$$

Согласно методу матрицы переноса, для любого решения одномерного уравнения Шредингера векторы $A_0(E)$ и $A_1(E)$, соответствующие первым двум ячейкам структуры, связаны соотношением

$$A_0(E) = \lambda(E)Z(E)A_1(E); \quad (15)$$

где $Z(E) = \tilde{Y}_1(E)\Gamma(E) \equiv \begin{pmatrix} q & p \\ p^* & q^* \end{pmatrix}$; $\tilde{Y}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{q} & \tilde{p} \\ \tilde{p}^* & \tilde{q}^* \end{pmatrix}$ - модифицированная матрица переноса, описывающая потенциальный барьер $\tilde{v}(x)$; $\tilde{q} = \frac{1}{\sqrt{T}} \exp[-i(J + \kappa_0 l)]$;

$$\tilde{p} = \sqrt{\frac{R}{T}} \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2} + F - \kappa_0 l\right)\right]; \quad \lambda(E)\Gamma(E) - \text{“матрица сшивания”, связывающая решение в смежных областях ступеньки высотой } \Delta, \text{ расположенной в точке } x = b_1;$$

$\Gamma = \begin{pmatrix} q_s & p_s \\ p_s & q_s \end{pmatrix}$; $q_s = \frac{1}{2}(\lambda^{-1} + \lambda)$, $p_s = \frac{1}{2}(\lambda^{-1} - \lambda)$, $\lambda(E) = \sqrt{\frac{\kappa_1(E)}{\kappa_0(E)}} = \left(\frac{E + \Delta}{E}\right)^{1/4}$.

Для ячеек с номерами n и $n+1$ справедливо рекуррентное соотношение

$$A_n(E) = \lambda(E + \Delta)Z(E + \Delta)A_{n+1}(E), \quad (16)$$

Отсюда следует, что векторы $A_0(E)$ и $A_N(E)$ для крайних ячеек связаны соотношением

$A_0(E) = \lambda_{(1,N)}(E)Z_{(1,N)}(E)A_N(E)$, где $\lambda_{(1,N)}(E) = \prod_{n=0}^{N-1} \lambda(E + n\Delta) \equiv \left(\frac{E + N\Delta}{E}\right)^{1/4}$, $Z_{(1,N)}(E) = Z(E)Z(E + \Delta)\dots Z(E + (N-1)\Delta)$. Это соотношение упрощается, если записать его в терминах вспомогательных векторов $\tilde{A}_n(E) = \lambda_{(1,n)}(E)A_n(E)$: $\tilde{A}_0(E) \equiv A_0(E) = Z_{(1,N)}(E)\tilde{A}_N(E)$.

Далее предполагается, что для искомым решений, удовлетворяющих условию (14), векторы $A_0(E)$ и $A_1(E)$ должны быть связаны соотношением $\tilde{A}_1(E) = C(E)\tilde{A}_0(E + \Delta)$, где $C(E)$ - некоторая произвольная функция (в этом случае, в условии (14) $\alpha(E) = C(E)/\lambda(E)$). Совместно с соотношением (15) это требование приводит к функциональному уравнению для функции $A_0(E)$:

$$A_0(E) = C(E)Z(E)A_0(E + \Delta), \quad (17)$$

которое играет центральную роль в данном подходе. При выключении внешнего электрического поля это уравнение трансформируется в задачу (12).

Далее доказывается, что для любого ограниченного на одном периоде потенциала и любого значения E_{ext} это уравнение имеет два независимых решения для любого значения энергии частицы из области $E > 0$. Исключением является так называемый “резонансный” случай (см. ниже). Оба решения записываются в виде

$$A_0(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(E); \quad (18)$$

вспомогательные функции $\eta_0(E), \eta_1(E), \dots$ вводятся с помощью соотношений

$$\eta_0(E) = C(E)Z(E)\eta_0(E); \quad (19)$$

$$\eta_n(E) = C(E)Z(E)\eta_{n-1}(E + \Delta), \quad n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Уравнение (19) формально совпадает с характеристическим уравнением (12) в задаче без поля и имеет для каждого значения E два решения $\eta_0^{(1)}(E)$ и $\eta_0^{(2)}(E)$, которые соответствуют собственным значениям $C_1(E)$ и $C_2(E)$:

$$C_1 = C_2^{-1} = C = (q + y)^{-1}, \quad \eta_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ y/p \end{pmatrix}, \quad \eta_0^{(2)} = \begin{pmatrix} -y/p^* \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = -\frac{i|p|^2 \text{sign}(\zeta)}{|\zeta| + \sqrt{\zeta^2 - |p|^2}}, \quad \zeta = \Im(q).$$

Как и в (12), здесь появляются “области прозрачности” и “области непрозрачности” (но они не дают спектр электрона в данной задаче). В областях непрозрачности (где $|\zeta| < |p|$) $|y(E)| = |p(E)|$; в центрах областей, где $\zeta(E) = 0$, функция $y(E)$ терпит разрыв. В областях прозрачности $y(E)$ - всюду непрерывная функция; здесь $|y(E)| \leq |p(E)|^{1+\delta}$, где $\delta > 0$. Важно, что в области больших значений энергии $|p(E)| \sim E^{-1}$. Как следствие, ширина областей прозрачности с ростом номера областей растет, хотя и немонотонно, а областей непрозрачности убывает. Поэтому точки $E + n\Delta$, где $n = 0, 1, \dots$, начиная с некоторого номера n_{max} , попадают только в области прозрачности, что, в конечном счете, и обес-

печивает существование предела (18). Исключением является “резонансный” случай, когда в области высоких энергий значения $E + n\Delta$ ($n=0,1,\dots$), как и корни уравнения $\sin(J_1(E) + \kappa_0 l) = 0$, определяющие положения центров областей непрозрачности, кратны ε ; $\varepsilon = \pi^2 \hbar^2 / 2m_0 D^2$.

В “нерезонансном” случае предел (18) существует, что приводит к двум векторам $A_0^{(1)}(E)$, $A_0^{(2)}(E)$ и, соответственно, к двум решениям одномерного уравнения Шредингера, $\Psi_1(x; E)$ и $\Psi_2(x; E)$, которые удовлетворяют условию (14) и имеют ненулевые плотности потока вероятности I_1 и I_2 :

$$A_0^{(1)} = G_\infty(E) \begin{pmatrix} Q_{(1,\infty)}(E) \\ P_{(1,\infty)}^*(E) \end{pmatrix}, \quad A_0^{(2)} = G_\infty^{-1}(E) \begin{pmatrix} P_{(1,\infty)}(E) \\ Q_{(1,\infty)}^*(E) \end{pmatrix}; \quad \tilde{A}_\infty^{(1)} = G_\infty(E) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_\infty^{(2)} = G_\infty^{-1}(E) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$G_\infty(E) = \prod_{n=0}^{\infty} C(E + n\Delta); \quad I_1 = |G_\infty(E)|^2 \hbar \kappa_0 / m_0 \quad \text{и} \quad I_2 = -|G_\infty(E)|^{-2} \hbar \kappa_0 / m_0.$$

Для полубесконечной решетки, для любого $E > 0$, решения $\Psi_1(x; E)$ и $\Psi_2(x; E)$ с ростом номера ячейки n убывают (по модулю) как $n^{-1/4}$. При этом $T_{(1,\infty)}(E) \neq 0$, т.е., часть решетки, расположенная справа от нулевой ячейки, не является абсолютно непрозрачной для электрона. Таким образом, если структура бесконечна, то электронные состояния нелокализованы, что характерно для непрерывного спектра.

Как видим, поиск решений, удовлетворяющих условию симметрии (14) для ограниченных структур, напрямую связан с соответствующей задачей для полубесконечной и бесконечной структур. В последнем случае, за нулевую ячейку можно взять любую ячейку структуры. Таким образом, в “нерезонансном” случае, спектр энергии электрона в бесконечной решетке в постоянном однородном электрическом поле является непрерывным на всей шкале энергии, для любого ограниченного в пределах одного периода потенциала и любого значения E_{ext} !

Поскольку плотности потока вероятности для $\Psi_1(x; E)$ и $\Psi_2(x; E)$ не равны нулю, обе функции при $x \rightarrow -\infty$ растут неограниченно и, следовательно, не могут рассматриваться в качестве волновых функций, описывающих стационарные состояния электрона в бесконечной периодической структуре в задаче с полем. Эту роль играет “бестоковая” линейная комбинация этих функций (которая, очевидно, уже не удовлетворяет условию (14)).

Заметим, что полученные выше результаты относительно электронного спектра и решений, удовлетворяющих условию симметрии задачи, полностью применимы и для сверхрешеток (с ограниченным в пределах одного периода потенциалом), поскольку здесь важна лишь асимптотика матричного элемента $p(E)$ при больших значениях энергии. Тем не менее, представляет интерес развить описанный выше подход и на основе уравнения Шредингера для частицы с переменной массой, по форме совпадающего с уравнением для огибающей волновой функции. Это уравнение, как уже было сказано выше, часто использовалось в исследованиях ВШП, причем без учета зависимости эффективной массы электрона от энергии. Это позволит выяснить влияние пространственной зависимости эффективной массы электрона на характер его

энергетического спектра в ВШП и законность применения приближения эффективной массы для решения ВШП.

Будем полагать, что потенциал такой же, как и в предыдущей модели, но теперь масса частицы в барьерных и внебарьерных областях разная и равна, соответственно, m и m_0 . Таким образом, эта модель справедлива для периодических структур специального вида, в которых внебарьерные области заняты одним материалом, а барьерные – другим.

Те рассуждения, которые приводят в предыдущей модели к функциональному уравнению (17), применимы и в данном случае. Однако теперь предел (18) не существует. Это объясняется тем, что в данной модели ширина областей непрозрачности вспомогательной задачи (19) в области высоких энергий растет с номером области, а не убывает, как для частицы с постоянной массой. Чтобы увидеть это, достаточно рассмотреть выражение для коэффициента прохождения прямоугольного потенциального барьера высотой V_0 –

$$T(E) = [1 + \vartheta^2 \sin^2(\kappa d)]^{-1}, \quad \vartheta = \frac{1}{2} \left(\frac{m\kappa_0}{m_0\kappa} - \frac{m_0\kappa}{m\kappa_0} \right), \quad \kappa = \sqrt{2m(E - V_0)/\hbar^2}.$$

В пределе $E \rightarrow \infty$, $\vartheta = \begin{cases} 0, & \text{если } m = m_0; \\ \vartheta_\infty, & \text{если } m \neq m_0; \end{cases} \quad \vartheta_\infty = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{m}{m_0}} - \sqrt{\frac{m_0}{m}} \right)$. Таким образом, в

этом пределе асимптотика $|p(E)| \sim E^{-1}$ для сверхрешеток не имеет места - $T_{low} \leq T(E) \leq 1$, где $T_{low} = (1 + \vartheta_\infty^2)^{-1}$. Согласно данной модели, $T_{(1,\infty)}(E) = 0$, движение электрона в бесконечной периодической структуре финитно, его энергетический спектр дискретный и определяется, вместе с $A_0^{(+)}(E)$ и $A_0^{(-)}(E)$, соотношениями

$$\frac{A_0^{(-)}(E)}{A_0^{(+)}(E)} = \exp \left[i \left(\tilde{J}_{(1,\infty)} - \tilde{F}_{(1,\infty)} - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \exp \left[-i \left(\tilde{J}_{(-\infty,0)} + \tilde{F}_{(-\infty,0)} - \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Уравнение на собственные значения энергии можно записать в виде условия прозрачности для “двухбарьерной структуры”, где один “барьер” описывается матрицей переноса $Z_{(-\infty,0)}$, а второй - $Z_{(1,\infty)}$:

$$\tilde{J}_{(-\infty,0)}(E) + \tilde{F}_{(-\infty,0)}(E) + \tilde{J}_{(1,\infty)}(E) - \tilde{F}_{(1,\infty)}(E) = k\pi, \quad (21)$$

здесь k - нечетное число. Из симметрии потенциала следует, что если значение E - корень уравнения (21), то значения $E + n\Delta$ (n - целое число) также будут его корнями, образуя так называемую ванье-штарковскую лестницу. То есть, спектр энергии электрона в бесконечной периодической структуре во внешнем постоянном однородном электрическом поле является дискретным для любого ограниченного в пределах одного периода потенциала и любого значения E_{ext} . Причем решающую роль в образовании такого спектра играет различие эффективных масс электрона в смежных слоях структуры.

Как известно, такой спектр был получен Ванье на основе уравнения Шредингера (для частицы с постоянной массой) в “однозонном приближении” (для j -

ой зоны $E_{n,j} = n\Delta + \frac{D}{2\pi} \int_0^{2\pi/D} E_j^{(0)}(k) dk$; $E_j^{(0)}(k)$ - разрешенные значения энергии в за-

даче без поля). Поскольку $j=1,2,\dots$, можно ожидать, что корни уравнения (21) образуют бесконечную совокупность вложенных друг в друга ваньештарковских лестниц.

Заметим, этот результат получен в предположении, что уравнение для огибающей волновой функции применимо к анализу ВШП. Однако приближение эффективной массы, в рамках которого получено это уравнение, не годится для нахождения электронного спектра и “симметричных” решений в ВШП. Как следует из предлагаемой модели, решение обоих вопросов тесно связано с задачей об электронном спектре без внешнего электрического поля и требует знания эффективной массы частицы на всей шкале энергии, включая запрещенные зоны, где понятие эффективной массы теряет смысл.

Тем не менее, результаты модели могут быть использованы для решения физических задач, где возникает такого же вида уравнение. Например, для решения задачи о распространении упругих волн в массивном стержне с периодически меняющимся поперечным сечением (или плотностью), когда стержень расположен вертикально в поле силы тяжести.

Кроме того, в следующих двух случаях данное уравнение может быть использовано и для исследования влияния внешнего электрического поля на состояния электрона в *ограниченных* сверхрешетках: 1) приложенная к сверхрешетке разность потенциалов много меньше ширины занятой разрешенной зоны, так что энергия электрона не успевает заметно измениться, когда он проходит через всю структуру; 2) приложенная разность потенциалов больше ширины разрешенной зоны, но меньше ширины запрещенной зоны, отделяющей занятую разрешенную зону от соседней свободной зоны (этот случай имеет место для сверхрешеток, состоящих из ям, разделенных широкими барьерами; состояние электрона локализовано в пределах одной из ям).

В четвертой главе представлены две модели, описывающие рассеяние электрона на самоподобном фрактальном потенциале (СФП) и на потенциале в форме канторовой лестницы. Обе модели базируются на “обычном” уравнении Шредингера, поскольку канторово множество, где оба потенциала являются недифференцируемыми функциями, имеет меру нуль. В то же время для любой точки, не принадлежащей канторову множеству, всегда найдется δ -окрестность, в которой не будет точек, принадлежащих канторову множеству, и, следовательно, в которой оба потенциала – константы. Так что для решения этой задачи нет необходимости переходить к модельным уравнениям с дробными производными.

Главная цель предлагаемого подхода – точно учесть геометрию канторова множества. Сначала рассматривается СФП $V_0(x)$, заданный на канторовом множестве в интервале $[0, L]$. Это сингулярный потенциал мощностью W_0 ($W_0 = \int_{-\infty}^{\infty} V_0(x) dx$), отличный от нуля только в точках канторова множества. СФП представляет собой иерархическую структуру, состоящую из бесконечного числа уровней: СФП нулевого уровня (исходный потенциал) состоит из двух СФП первого уровня $V_1(x)$; каждый СФП первого уровня состоит из двух

СФП второго уровня $V_2(x)$, и т.д. Для любого номера n справедливы соотношения $V_{n+1}(x) = V_n(\alpha x)$ и $V_n(x) = V_{n+1}(x) + V_{n+1}(x - x_n)$, где $x_n = d_n(1 - 1/\alpha)$; $d_n = L/\alpha^n$; α - масштабный множитель. Матрица переноса $Y_n(k, 0, d_n)$ крайнего левого в интервале $[0, L]$ СФП n -го уровня связана с матрицей переноса СФП следующего уровня соотношением

$$Y_n(k, 0, d_n) = Y_{n+1}(k, 0, d_{n+1})Y_{n+1}(k, d_n - d_{n+1}, d_n), \quad (22)$$

где k - волновое число де-Бройлевской волны свободной частицы. Однако любую матрицу переноса $Y(k, x_1, x_2)$, описывающую потенциальный барьер, расположенный в интервале $[x_1, x_2]$, можно записать через матрицу $Z(k)$, которая не зависит от расположения барьера на оси Ox :

$$Y(k, x_1, x_2) = D^{-1}(k, x_1)Z(k)D(k, x_2), \text{ где}$$

$$Z(k) = \begin{pmatrix} q & p \\ p^* & q^* \end{pmatrix}, D(k, x) = \begin{pmatrix} \exp(ikx) & 0 \\ 0 & \exp(-ikx) \end{pmatrix}; q = \frac{1}{\sqrt{T}} \exp(-iJ), p = \sqrt{\frac{R}{T}} \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2} + F\right)\right].$$

Поэтому соотношение (22), вводя обозначение $\gamma = 1 - 2/\alpha$, можно записать в виде, справедливом для любого СФП n -го уровня:

$$Z_n(k) = Z_{n+1}(k)D^{-1}(k, \gamma d_n)Z_{n+1}(k). \quad (23)$$

Подобного рода рекуррентные соотношения обычно используются для расчета параметров рассеяния предфракталов. Однако для исследования идеального фрактального потенциала соотношением (23) напрямую воспользоваться невозможно, поскольку в СФП нет наименьшего структурного элемента. Чтобы определить матрицу переноса СФП, необходимо учесть его симметрию. На основе уравнения Липпмана-Швингера можно доказать, что скейлинговое соотношение для потенциала $V_{n+1}(x) = V_n(\alpha x)$ приводит к аналогичному соотношению для матрицы переноса СФП: $Z_{n+1}(k) = Z_n(\alpha k)$.

С учетом этого соотношения, из рекуррентного соотношения (23) следует функциональное уравнение $Z_n(k) = Z_n(\alpha k)D^{-1}(k, \gamma d_n)Z_n(\alpha k)$, которое, если положить $\phi_n = kd_n$ ($\phi_0 \equiv \phi = kL$), приводится к виду $Z_n(\phi_n) = Z_n(\alpha\phi_n)D^{-1}(\phi_n, \gamma)Z_n(\alpha\phi_n)$. Если теперь учесть, что $Z_n(\phi_n) = Z_0(\phi) = Z_0(\alpha^n \phi_n)$, то решение задачи фактически сводится к решению уравнения для матрицы переноса СФП нулевого уровня $Z_0(\phi) = Z_0(\alpha\phi)D^{-1}(\phi, \gamma)Z_0(\alpha\phi)$.

Из этого уравнения далее можно получить функциональные уравнения для параметров рассеяния T , J и F . Их структура такова, что уравнение для фазы F отделяется и легко решается: как и для δ -потенциала, для СФП $F = 0$, если $W_0 > 0$, и $F = \pi$, если $W_0 < 0$. Остальные параметры рассеяния - T и J - удовлетворяют двум связанным функциональным уравнениям. После замены $y = \pi/2 - J$ их можно записать в виде

$$T(\alpha\phi) = U_1(\phi, T(\phi), y(\phi)), \quad y(\alpha\phi) = U_2(\phi, T(\alpha\phi), y(\phi)); \quad (25)$$

$$U_1(\phi, T(\phi), y(\phi)) = 2\sqrt{T(\phi)} \frac{\sqrt{T(\phi)} + \sin[\beta(\phi, y(\phi))]}{1 + T(\phi) + 2\sqrt{T(\phi)} \sin[\beta(\phi, y(\phi))]};$$

$$U_2(\phi, T(\alpha\phi), y(\phi)) = \gamma\phi + \eta \left[\frac{\beta(\phi, y(\phi))}{2} + \arcsin \sqrt{\frac{T(\alpha\phi)}{2} + R(\alpha\phi) \sin^2 \left(\frac{\beta(\phi, y(\phi))}{2} \right)} \right];$$

где $\eta = 1$, если $\sin[2\beta(\phi, y(\phi))] \geq 0$, иначе $\eta = -1$; фаза β находится в первой четверти на комплексной плоскости, причем $\sin[\beta(\phi, y(\phi))] = |\sin[y(\phi) - \gamma\phi]|$. Обнаружено три типа решений, с разной асимптотикой в области $\phi \ll 1$:

$$T(\phi) = a^2 \phi^2, \quad y(\phi) = b\phi; \quad a = \frac{2(\alpha - 1)}{\alpha^2(\alpha + 1)}, \quad b = -\frac{2}{\alpha^2(\alpha + 1)};$$

$$T(\phi) = \xi^2 \phi^{2s}, \quad y(\phi) = \xi \phi^s; \tag{26}$$

$$T(\phi) = \left\{ 1 + ch^2 [\omega(\ln(\phi))] sh^2(c\phi^{-s}) \right\}^{-1}, \quad J(\phi) = \arctg \left\{ sh^2 [\omega(\ln(\phi))] th^2(c\phi^{-s}) \right\};$$

здесь $s = \ln(2)/\ln(\alpha)$; ξ и c - произвольные вещественные константы, не равные нулю; ω - вещественная функция - $\omega[\ln(\phi) + \ln(\alpha)] = \omega[\ln(\phi)] > 0$.

На всей шкале значений параметра ϕ решение имеет вид $T(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n(\phi)$; $y(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\phi)$; $t_0(\phi)$ и $f_0(\phi)$ - указанные выше асимптотики, а функции $t_n(\phi)$ и $f_n(\phi)$ ($n = 1, 2, \dots$) определяются рекуррентными соотношениями

$$t_n(\phi) = U_1(\phi/\alpha, t_{n-1}(\phi/\alpha), f_{n-1}(\phi/\alpha)), \quad f_n(\phi) = U_2(\phi/\alpha, t_n(\phi), f_{n-1}(\phi/\alpha))$$

Для СФП на обобщенном канторовом множестве, в котором СФП n -го уровня состоит из N одинаковых СФП $(n+1)$ -го уровня и $N-1$ одинаковых лакун (внебарьерных областей), модель строится аналогично (теперь $\alpha > N$, а $s = \ln(N)/\ln(\alpha)$). Следует лишь отметить, что в данном случае рекуррентные соотношения, связывающие параметры рассеяния СФП соседних уровней, выводятся на основе явных выражений для параметров рассеяния системы N одинаковых барьеров (см. (13)).

В общем случае обнаружены те же три типа решений (другими словами, три типа СФП), что и для $N = 2$. Отметим наиболее характерные особенности поведения функции $\rho(\phi) = R(\phi)/T(\phi)$ для каждого из них. Для первого типа СФП выделяются две области на шкале ϕ : в левой области $\ln(\rho) \sim -2\ln(\phi)$, в правой $-\ln(\tilde{\rho}) \sim -2s\ln(\phi)$; здесь $\tilde{\rho}(\phi)$ - нижняя огибающая функции $\rho(\phi)$. Две области выделяются и для СФП второго типа: в левой области $\ln(\rho) \sim -2s\ln(\phi)$, в правой $-\ln(\tilde{\rho}) \sim -2s\ln(\phi)$. Для СФП третьего типа выделяются три области. Для $\omega(\phi) \equiv const$ в крайней левой области $\ln \ln(\rho) \sim \ln(2|c|) - s\ln(\phi)$; в средней $-\ln(\rho) \sim -2\ln(\phi)$, если значения ω и $|c|$ достаточно велики, в противном случае $\ln(\rho) \sim -2s\ln(\phi)$; в крайней правой области $\ln(\tilde{\rho}) \sim -2s\ln(\phi)$. Эти три области выделяются и в том случае, когда $\omega(\phi)$ не является константой. Однако зависимость $\rho(\phi)$ для СФП третьего типа в этом случае становится сложнее; см. рис.2 для $\omega(\phi) = 15[\sin(2\pi \ln(\phi)/\ln(\alpha)) + 1.001]$. В этом случае параметры рассеяния СФП зависят от числа лакун, т.е., от N , для всех значений ϕ . Этой зависимости нет только в области $\phi \ll 1$ для СФП второго типа. Таким образом, полуэмпирический метод решения этой задачи на основе модельных уравнений с дробными производными, в которых не учитывается параметр N , не получает оправдания в нашем подходе.

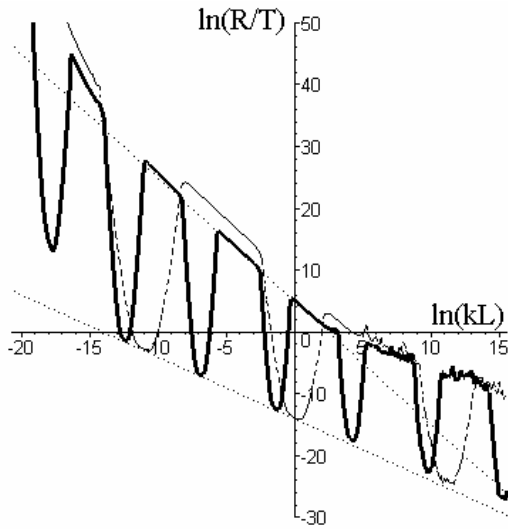


Рис.2. Зависимость $\ln(R/T)$ от $\ln(\phi)$ для $s = 0.5$, $c = 0.001$, жирная линия - $N = 2$; пунктирная - $N = 4$; точками изображены асимптоты $5 - 2\ln(\phi)$ и $-14 - 2s \ln(\phi)$.

В пределе $s = 1$, СФП первых двух типов рассеивают как δ -потенциал с той же мощностью W_0 . В этом случае, для СФП второго типа $\xi = -\hbar^2/m_0W_0L$, а для первого типа $b = -a = -(3N)^{-1} = \hbar^2/m_0W_0L$ (см. асимптоты (26)). Таким образом, для СФП первого типа возникает ограничение на параметры N , W_0 и L .

Что касается потенциала в форме канторовой лестницы, то здесь не удалось продвинуться так же далеко, как и в случае СФП. Тем не менее, здесь удалось получить функциональное уравнение для матрицы переноса и решить его в предельном случае, когда $s \rightarrow 1$. Если СФП, являясь производной канторовой лестницы, рассеивает, согласно первым двум решениям, как δ -потенциал, то сама канторова лестница, согласно найденному для нее

решению, рассеивает в пределе $s \rightarrow 1$ как обычная потенциальная ступенька. В то же время изменение обоих фрактальных потенциалов, в отличие от δ -потенциала и ступеньки, происходит в интервале $[0, L]$, а не в отдельной точке.

Пятая глава посвящена решению проблемы времени туннелирования, которая возникает в рамках стандартной модели одномерного законченного рассеяния и которая предсказывает аномально короткие (эффект Хартмана) и даже отрицательные времена туннелирования. Этот результат неприемлем с точки зрения физики, и поэтому данный эффект больше известен как парадокс, требующий объяснения (см., например, [8]).

Как видно из обзорных работ по проблеме времени туннелирования, все трудности, связанные с описанием временных аспектов одномерного законченного рассеяния, обусловлены, в конечном счете, тем, что на последнем этапе рассеяния исходный волновой пакет, описывающий состояние частицы, распадается на прошедший и отраженный волновые пакеты, локализованных в разных пространственных областях. В связи с этим, первый вопрос, который неизбежно возникает при решении проблемы времени туннелирования, - это вопрос о том, как хронометрировать движение прошедших и отраженных частиц в данной задаче - отдельно или совместно. Проблема заключается в том, что существующая модель этого процесса не позволяет в принципе ответить на него корректно.

Действительно, с одной стороны, одномерное законченное рассеяние предполагает, что все измерения над частицами должны проводиться на последнем этапе рассеяния, причем с помощью двух детекторов - один для прошедших, а другой для отраженных частиц. Уже это подсказывает, что данный процесс следует рассматривать как объединение двух одночастичных подпро-

цессов – прохождения и отражения – и не имеет смысла вводить времена рассеяния как средние значения, общие для этих подпроцессов. Этот вывод следует и из теории вероятностей, согласно которой два (статистических) набора экспериментальных данных, полученных с помощью разных детекторов, не могут описываться одним и тем же (колмогоровским) вероятностным пространством. Но дело в том, что существующая модель одномерного законченного рассеяния рассматривает этот процесс как единый процесс и не предполагает раздельное описание подпроцессов на всех этапах рассеяния. Это делает невозможным определение времен рассеяния для подпроцессов, поскольку для этого нужно знать их эволюцию в области барьера.

Таким образом, в рамках стандартной модели одномерного законченного рассеяния определение характеристических времен рассеяния невозможно ни для его подпроцессов, ни для всего процесса в целом. Причем первое не предполагает сама модель (и в ней нет необходимого формализма раздельного описания подпроцессов на всех этапах рассеяния), а второе противоречит теории вероятностей. Определение времени туннелирования в обход этих ограничений как раз и ведет к парадоксу Хартмана.

Таким образом, на наш взгляд, единственный разумный выход из этого тупика, согласующийся с теорией вероятностей (и с принципом соответствия), - это предположить, что одномерное законченное рассеяние есть объединение двух случайных подпроцессов – прохождения и отражения – и попытаться извлечь необходимую информацию об эволюции обоих подпроцессов на всех этапах рассеяния из волновой функции, описывающей весь процесс. Реализация этой программы представлена ниже.

Пусть E - энергия электрона, падающего слева на *симметричный* потенциальный барьер $V(x)$, расположенный в интервале $[a, b]$. И пусть $u(x - x_c, k)$ и $v(x - x_c, k)$ - нечетная и, соответственно, четная вещественные функции - решения уравнения Шредингера в области барьера, причем $\frac{du}{dx}v - \frac{dv}{dx}u = \kappa$; $k = \sqrt{2mE / \hbar^2}$; $x_c = (a + b)/2$. Волновая функция $\Psi_{full}(x; k)$, описывающая стационарное состояние всего ансамбля частиц в этой задаче, имеет вид $\Psi_{full}(x; k) = e^{ikx} + b_{out} e^{ik(2a-x)}$ для $x \leq a$, $\Psi_{full}(x; k) = a_{out} e^{ik(x-d)}$ для $x \geq b$, и $\Psi_{full}(x, k) = a_{full} u(x - x_c, k) + b_{full} v(x - x_c, k)$ для $a \leq x \leq b$;

$$a_{full} = -\frac{1}{\kappa} a_{out} P^* e^{ika}; \quad b_{full} = \frac{1}{\kappa} a_{out} Q^* e^{ika}, \quad a_{out} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{Q^*} - \frac{P}{P^*} \right), \quad b_{out} = -\frac{1}{2} \left(\frac{Q}{Q^*} + \frac{P}{P^*} \right),$$

$$Q = \left(\frac{du(x - x_c)}{dx} + iku(x - x_c) \right) \Big|_{x=b}; \quad P = \left(\frac{dv(x - x_c)}{dx} + ikv(x - x_c) \right) \Big|_{x=b}.$$

Поставим задачу найти такие два решения $\Psi_{ref}(x; k)$ и $\Psi_{tr}(x; k)$ уравнения Шредингера, что $\Psi_{full}(x; k) = \Psi_{tr}(x; k) + \Psi_{ref}(x; k)$, причем в области $x \leq a$ $\Psi_{tr}(x; k) = A_{tr}^{in} e^{ikx}$, $\Psi_{ref}(x; k) = A_{ref}^{in} e^{ikx} + b_{out} e^{ik(2a-x)}$; $A_{tr}^{in} + A_{ref}^{in} = 1$, $|A_{tr}^{in}| = |a_{out}|$, $|A_{ref}^{in}| = |b_{out}|$. Можно показать, что существуют две пары функций $\Psi_{ref}(x; k)$ и $\Psi_{tr}(x; k)$, удовлетворяющих этим условиям. В одной паре $\Psi_{ref}(x; k)$ - четная функция относи-

тельно точки x_c , а в другой – нечетная, которая определяется выражениями $\Psi_{ref}(x; k) = \kappa^{-1} (PA_{in}^{ref} + P^* b_{out}) e^{ika} \cdot u(x - x_c; k)$, $a \leq x \leq b$; $\Psi_{ref}(x; k) = -b_{out} e^{ik(x-d)} + A_{ref}^{in} e^{-ik(x-s)}$, $x \geq b$. Как видно, это решение содержит волны, которые падают на барьер справа (это относится и к функции $\Psi_{tr}(x; k)$ в данной паре). При этом функция $\Psi_{ref}(x; k)$ описывает ансамбль частиц, которые не пересекают точку x_c . Учитывая, что в ансамбле частиц, который описывается функцией $\Psi_{full}(x; k)$ нет частиц, падающих на барьер справа, мы полагаем, что волновая функция, описывающая в данной задаче подпроцесс отражения, определяется следующими выражениями: $\psi_{ref}(x; k) = \Psi_{ref}(x; k)$ для $x \leq x_c$, и $\psi_{ref}(x; k) = 0$ для $x \geq x_c$. Соответственно, для подпроцесса прохождения имеем $\psi_{tr}(x; k) = \Psi_{tr}(x; k)$ для $x \leq x_c$, и $\psi_{tr}(x; k) = \Psi_{full}(x; k)$ для $x \geq x_c$. Обе функции и соответствующие плотности потока вероятности всюду непрерывны (заметим, что четное решение $\Psi_{ref}(x; k)$ не позволяет построить функции для подпроцессов, удовлетворяющие этому условию непрерывности).

Очевидно, $\Psi_{full}(x; k) = \psi_{tr}(x; k) + \psi_{ref}(x; k)$, где, окончательно, $\psi_{tr}(x; k) = A_{in}^{tr}(k) e^{ikx}$, $\psi_{ref}(x; k) = A_{in}^{ref}(k) e^{ikx} + b_{out}(k) e^{-ik(x-2a)}$ для $x \leq a$;
 $\psi_{tr} = a_{tr}^l u(x - x_c) + b_{tr} v(x - x_c)$, $\psi_{ref}(x, k) = \frac{1}{\kappa} (PA_{in}^{ref} + P^* b_{out}) e^{ika} u(x - x_c, k)$ для $a \leq x \leq x_c$;
 $\psi_{tr}(x; k) = \Psi_{full}(x; k)$, $\psi_{ref}(x; k) = 0$ для $x \geq x_c$; здесь $a_{tr}^l = \frac{1}{\kappa} PA_{in}^{tr} e^{ika}$, $b_{tr} = b_{full}$,
 $A_{in}^{ref} = b_{out} (b_{out}^* - a_{out}^*) \equiv \sqrt{R} \exp(i\lambda)$, $A_{in}^{tr} = a_{out}^* (b_{out} + a_{out}) \equiv \sqrt{T} \exp\left[i\left(\lambda + \text{sign}(\lambda) \frac{\pi}{2}\right)\right]$;
 $\lambda = \pm \arctg \sqrt{T/R}$. Заметим, что не только $A_{tr}^{in} + A_{ref}^{in} = 1$, но и $|A_{tr}^{in}|^2 + |A_{ref}^{in}|^2 = 1$! Функции $\psi_{ref}(x; k)$ и $\psi_{tr}(x; k)$ – это и есть искомые функции, которые описывают в данной задаче подпроцессы отражения и прохождения, соответственно. Заметим, свойства $\psi_{ref}(x; k)$ согласуются с тем фактом, что для классических частиц, падающих слева на гладкий симметричный потенциальный барьер и отражающихся от него, центр барьерной области является крайней правой точкой поворота, независимо от массы частицы, а также размеров и формы симметричного барьера.

Заметим также, что хотя функции $\psi_{ref}(x; k)$ и $\psi_{tr}(x; k)$, а также соответствующие плотности потока вероятности всюду непрерывны, их первые производные разрывны в точке x_c . В этой точке обе функции, в отличие от их суммы, не удовлетворяют уравнению Шредингера. Все это относится и к достаточно узким в k -пространстве волновым пакетам $\Psi_{full}(x, t)$, $\psi_{ref}(x, t)$ и $\psi_{tr}(x, t)$, сформированным, соответственно, из $\Psi_{full}(x; k)$, $\psi_{ref}(x; k)$ и $\psi_{tr}(x; k)$. Центр симметричного барьера является особой точкой для подпроцессов. В частности, на отражающиеся частицы в этой точке действует дополнительная сила, воз-

вращающая их обратно в область $x < a$: $\frac{d\langle \hat{p} \rangle_{ref}}{dt} = \left\langle -\frac{dV(x)}{dx} \right\rangle_{ref} - \frac{\hbar^2}{2m} \left| \frac{\partial \psi_{ref}(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_c-0}^2$;

$\langle \hat{p} \rangle_{ref}$ - среднее значение импульса. Для подпроцесса прохождения аналогич-

ный вклад описывается выражением $\left| \frac{\partial \psi_{tr}(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_c+0}^2 - \left| \frac{\partial \psi_{tr}(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_c-0}^2$. Для узких

пакетов это выражение равно нулю. Заметим также, что в этом случае для любого момента времени t справедливы соотношения

$$\bar{T} = \langle \psi_{tr}(x,t) | \psi_{tr}(x,t) \rangle = const, \quad \bar{R} = \langle \psi_{ref}(x,t) | \psi_{ref}(x,t) \rangle = const,$$

$$\Re(\langle \psi_{tr}(x,t) | \psi_{ref}(x,t) \rangle) = 0, \quad \langle \Psi_{full}(x,t) | \Psi_{full}(x,t) \rangle = \bar{T} + \bar{R} = 1.$$

Последнее равенство означает, что в данном случае подпроцессы прохождения и отражения несовместимы, то есть, каждая частица исходного ансамбля, на всех этапах рассеяния, участвует только в одном из этих подпроцессов.

Разложение $\Psi_{full}(x,t) = \psi_{tr}(x,t) + \psi_{ref}(x,t)$ остается в силе и в общем случае, когда ширина волнового пакета в k -пространстве не мала в начальный момент времени. Кроме того, в общем случае сохраняется также и норма \bar{R} функции $\psi_{ref}(x,t)$. Однако норма функции $\psi_{tr}(x,t)$ постоянна и равна $1 - \bar{R}$ только на этапах до и после прохождения через барьер. На самом этапе прохождения ее норма \bar{T} может меняться (уравнение непрерывности нелинейно, поэтому выполнение этого уравнения в точке x_c для стационарных состояний, имеющих разрывную первую производную в этой точке, не гарантирует его выполнение для суперпозиции таких состояний). Таким образом, в общем случае, при разделении одномерного законченного рассеяния на подпроцессы, линейный формализм квантовой механики не позволяет полностью избавиться от интерференционных вкладов в $\psi_{tr}(x,t)$. Следует, однако, заметить, что в проведенных численных расчетах для гауссовых волновых пакетов, ширина которых сравнима с шириной потенциального барьера, относительное изменение нормы \bar{T} не превышало семи процентов. Это объясняется тем, что такие пакеты достаточно быстро расплываются, и в момент рассеяния лишь малая часть пакета находится в области барьера, за счет чего роль точки x_c в эволюции подпроцессов ослабляется. Таким образом, и в общем случае функции $\psi_{ref}(x,t)$ и $\psi_{tr}(x,t)$ фактически описывают несовместимые подпроцессы.

Теперь, когда эволюция подпроцессов известна на всех этапах рассеяния, можно определить для каждого из них времена рассеяния. Для стационарных состояний в работе вводятся времена пребывания $\tau_{dwell}^{tr}(k)$ и $\tau_{dwell}^{ref}(k)$. Что касается нестационарных состояний, то здесь рассматриваются только узкие в k -пространстве волновые пакеты (для них норма \bar{T} сохраняется). Для таких пакетов вводятся локальные (τ_{tr}^{gr} , τ_{ref}^{gr}) и асимптотические (τ_{tr}^{as} , τ_{ref}^{as}) групповые времена рассеяния, и ларморовы времена рассеяния (τ_{tr}^L , τ_{ref}^L):

$$\tau_{dwell}^{tr}(k) = \frac{m}{\hbar k T(k)} \int_a^b |\psi_{tr}(x,k)|^2 dx = \frac{2m}{\hbar k T(k)} \int_{x_c}^b |\Psi_{full}(x,k)|^2 dx, \quad \tau_{dwell}^{ref}(k) = \frac{m}{\hbar k R(k)} \int_a^{x_c} |\psi_{ref}(x,k)|^2 dx ;$$

$$\tau_{tr}^{as} = \frac{m}{\hbar} \langle k \rangle_{in}^{tr} \left(\langle J'(k) \rangle_{out}^{tr} - \langle \lambda'(k) \rangle_{in}^{tr} \right); \quad \tau_{ref}^{as} = \frac{m}{\hbar} \langle k \rangle_{in}^{ref} \left(\langle J'(k) - F'(k) \rangle_{out}^{ref} - \langle \lambda'(k) \rangle_{in}^{ref} \right);$$

$$\tau_{tr}^L = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_a^b dx |\psi_{tr}(x,t)|^2; \quad \tau_{ref}^L = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_a^{x_c} dx |\psi_{ref}(x,t)|^2; \quad \text{угловые скобки обозначают усреднение по in- и out-состояниям, а штрих – производную; для симметричных барьеров } F'(k) \equiv 0.$$

Пусть $\psi_{tr,ref}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A_{in}(k) \psi_{tr,ref}(x,k) e^{-iE(k)t/\hbar} dk$; где $A_{in}(k)$ определяется из начального условия для $\Psi_{full}(x,t)$, тогда

$$\tau_{tr}^L = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} \varpi(k) \Gamma(k) \tau_{dwell}^{tr}(k) dk \quad \tau_{ref}^L = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} \varpi(k) R(k) \tau_{dwell}^{ref}(k) dk, \quad \text{где } \varpi(k) = |A_{in}(k)|^2 - |A_{in}(-k)|^2.$$

Заметим, что все эти концепции времени рассеяния были известны и раньше. Новым является то, что здесь они вводятся на основе функций ψ_{ref} и ψ_{tr} , а не Ψ_{full} . В результате, свойства времен рассеяния в новой и стандартной моделях одномерного законченного рассеяния различаются качественно. Выделим два, на наш взгляд, наиболее важных различия.

1) Стандартная модель базируется на неявном предположении, что прошедшие и отраженные частицы стартуют, в среднем, из той же точки, что и частицы всего ансамбля. Однако в новой модели это не так. Рассмотрим, например, δ -потенциал, полагая без потери общности, что $\langle \hat{x} \rangle_{full}^{(0)} = 0$. В этом случае в стандартной модели τ_{tr}^{as} равно $md_{eff}/\hbar k$, где $d_{eff} = \frac{2m\hbar^2 W}{\hbar^4 k^2 + m^2 W^2}$, при этом

$$\langle \hat{x} \rangle_{full}^{(0)} = \langle \hat{x} \rangle_{full}^{(0)} = 0. \quad \text{В новой модели } d_{eff} = 0, \quad \langle \hat{x} \rangle_{tr}^{(0)} = -\frac{2m\hbar^2 W}{\hbar^4 k^2 + m^2 W^2}, \quad \langle \hat{x} \rangle_{full}^{(0)} = 0.$$

2) Согласно стандартной модели, для электрона с заданной энергией, туннелирующего через широкий прямоугольный барьер, конечные показания ларморовых часов τ_{tr}^{end} дают время пребывания частицы в области барьера (напомним, что ларморова процедура хронометрирования предполагает включение в области барьера слабого магнитного поля, направленного ортогонально движению частиц). С ростом ширины барьера, эта характеристика выходит на насыщение (эффект Хартмана). Это означает, что эффективная скорость туннелирования электрона в этом случае может превышать скорость света. Однако в новой модели ситуация иная. Действительно, время τ_{tr}^{end} (которое определяется через параметры *прошедшего* волнового пакета и, следовательно, одинаково в обеих моделях) выходит на насыщение с ростом ширины барьера. Однако дело в том, что эта характеристика не равна времени пребывания частицы в области барьера τ_{tr}^L . Согласно новой модели $\tau_{tr}^{end} = \tau_{tr}^{(0)} + \tau_{tr}^L + \tau_{int}$, где $\tau_{tr}^{(0)}$ - показания ларморовых часов перед вхождением в область барьера, τ_{tr}^L - длительность ларморовой прецессии спина электрона в слабом магнитном поле, τ_{int} - вклад, описывающий вращение (среднего) спина проходящих через барьер частиц, связанное с особенностью в эволюции процесса прохождения в точке x_c (этот вклад может иметь любой знак). Для уз-

ких пакетов $\tau_{tr}^L = \tau_{dwell}^{tr}(k)$. С ростом ширины барьера эта характеристика растет экспоненциально и, следовательно, эффективная скорость туннелирования частицы экспоненциально убывает. В этом случае $\tau_{tr}^{(0)} = \tau_{ref}^{(0)} \ll \tau_{tr}^{end} \sim \tau_{ref}^L \ll \tau_{tr}^L \sim |\tau_{int}|$, если $E < V_0$. Заметим, что появление вклада τ_{int} , связанного с тем, что центр симметричного барьера является особой точкой для подпроцессов, играет важную роль в объяснении парадокса Хартмана. Наличие этого вклада означает, что для подпроцесса прохождения в области барьера существует не один, а два механизма, которые приводят к вращению (среднего) спина электрона. Это означает, что *прямое* измерение времени туннелирования электронов с помощью "ларморовых часов" невозможно, и насыщение величины τ_{tr}^{end} вовсе не является признаком того, что эффективная скорость туннелирования частицы может быть как угодно большой. (Однако в случае отражения это сделать можно, поскольку $\tau_{ref}^{end} = \tau_{ref}^{(0)} + \tau_{ref}^L$; если частица рассеивается на широком прямоугольном потенциальном барьере, $\tau_{ref}^{end} \approx \tau_{ref}^L$.)

С точки зрения представленной модели, время туннелирования, которое определено в рамках стандартной модели, характеризуют не *частицу*, туннелирующую через барьер, а проходящий через него *локальный интерференционный максимум*, который является результатом наложения двух когерентных волновых процессов, описывающих прохождение и отражение. Его скорость не связана с движением частицы и, следовательно, может быть любой.

Основные результаты и выводы

1. Разработан новый вариант метода матрицы переноса с численно устойчивыми рекуррентными соотношениями, на основе которых получены условия прозрачности для ограниченных двухбарьерных систем общего вида. Введено понятие "фазовых точек поворота" и на этой основе дана наглядная физическая интерпретация условия прозрачности для фаз. Получены условия появления "широких резонансов" в системах, состоящих из трех и четырех одинаковых прямоугольных потенциальных барьеров.
2. Показано, что введение в формализм ВКБ-разложений достаточного количества дифференциальных следствий уравнения Риккати позволяет получать всюду регулярные асимптотические разложения для любого гладкого потенциала с классическими точками поворота, заданного в ограниченном пространственном интервале. При этом достаточно ограничиться лишь главным членом разложения, увеличивая точность приближения за счет включения в формализм новых дифференциальных следствий.
3. Разработан новый подход к решению ванье-штарковской проблемы, в котором определение спектра энергии тесно связано с нахождением решений уравнения Шредингера, удовлетворяющих условию симметрии задачи. Показано, что для бесконечных периодических структур с любым (не обязательно гладким) потенциалом, ограниченным по величине в пределах одной ячейки, электронный спектр непрерывный и существуют два комплексных независимых решения, удовлетворяющих условию симметрии. Оба решения растут неограниченно в классически недоступной области, и,

- следовательно, (вещественная) волновая функция, описывающая состояния электрона в бесконечной структуре, не удовлетворяет условию симметрии.
4. Аналогичный подход к решению ванье-штарковской проблемы разработан на основе уравнения Шредингера для частицы с переменной массой. Это уравнение совпадает по форме с уравнением для огибающей волновой функции (оно широко использовалось в работах по ванье-штарковской проблеме для сверхрешеток), но, в отличие от этого уравнения, не связано с ограничениями метода эффективной массы. В частности, в данном подходе не предполагается зависимость массы частицы от ее энергии. Показано, что если масса частицы является периодической кусочно-постоянной функцией, то спектр энергии дискретный, а решения уравнения, удовлетворяющие условию симметрии, не существуют. Данный подход может быть использован для решения любых физических задач, где возникает такого же вида уравнение и где его применение обосновано. Что касается сверхрешеток, то в этом случае нужно учитывать зависимость эффективной массы частицы от энергии. Однако, как следует из данной модели, при любой напряженности внешнего электрического поля решение вопроса об энергетическом спектре и исследовании симметрии данной задачи требует знания эффективной массы частицы на всей шкале энергии, включая запрещенные зоны, где понятие эффективной массы теряет смысл. Поэтому решение обоих вопросов в рамках приближения эффективной массы невозможно в принципе. Это уравнение может быть использовано лишь для анализа состояний электрона в *ограниченных* сверхрешетках при условии, что энергия электрона в процессе движения под действием внешнего электрического поля практически не меняется.
 5. Показано, что при решении задачи о рассеянии частицы на идеальных фрактальных потенциалах, заданных на канторовом множестве, точный учет геометрии канторова множества приводит к функциональному уравнению для матрицы переноса, из которого следует, что борновское приближение в принципе не годится для решения задачи рассеяния на таких потенциалах. В случае самоподобного фрактального потенциала получено три класса решений для матриц переноса и параметров рассеяния. Соответствующее уравнение для канторовой лестницы исследовано лишь в пределе, когда фрактальная размерность канторова множества равна единице. Показано, что в этом случае канторова лестница рассеивает как обычная потенциальная ступенька, а самоподобный фрактальный потенциал (согласно двум решениям из трех) – как δ -потенциал.
 6. Разработана новая модель одномерного законченного рассеяния, согласно которой этот квантовый процесс является объединением двух когерентно протекающих подпроцессов – прохождения и отражения. Показано, что линейный формализм квантовой механики позволяет однозначно восстановить эволюцию подпроцессов на всех этапах рассеяния по волновой функции, описывающей весь процесс. Показано, что в случае туннелирования частицы через широкий прямоугольный потенциальный барьер время туннелирования, определенное в рамках данной модели, растет экспоненци-

ально с ростом ширины барьера, а не выходит на насыщение, как это следует из существующей модели одномерного законченного рассеяния.

Список цитируемой литературы

1. Захарьев Б. Н., Чабанов В. М., Минеев М. А. Послушная квантовая механика. Новый статус теории в подходе обратной задачи. – 2002. Москва. Институт компьютерных исследований. – 300 с.
2. Nenciu G. Dynamics of band electrons in electric and magnetic fields: rigorous justification of the effective Hamiltonians//Rev. Mod. Phys. - 1991. - V.63. - P.91-127.
3. Vladimirov V. S., Volovich I. V. p-Adic Schrödinger equation//Lett. Math. Phys. – 1989. – V. 18. – P.43-53.
4. Хренников А. Ю. Эксперимент ЭПР-Бома и неравенства Белла: квантовая физика и теория вероятностей // ТМФ. - 2008. - Т.157. - С.99-115.
5. Славнов Д. А. Квантовые измерения и колмогоровская теория вероятности//ТМФ. – 2003. – Т.136. – Вып.3. – С. 436–443.
6. Rakityansky S. A. Modified transfer matrix for nanostructures with arbitrary potential profile // Phys. Rev. B. - 2004. - V.70. - P.205323(1-16).
7. Maltsev N. E. New family of asymptotic solutions of Helmholtz equation // J. Math. Phys.- 1994. - V.35. - P.1387-1398.
8. Winful H. G. Tunneling time, the Hartman effect, and superluminality: A proposed resolution of an old paradox//Physics Reports. - 2006. - V.436. - P.1-69.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Чуприков Н. Л. Матрица переноса одномерного уравнения Шредингера//ФТП. – 1992. – т. 26. – № 12. – С.2040-2047.
2. Караваев Г. Ф., Чуприков Н. Л. Туннелирование в многобарьерных квантовых структурах в условиях полной прозрачности//Изв. вузов, Физика. – 1993. – Т.27. – №3. – С.51-56.
3. Чуприков Н. Л. Временные характеристики одночастичного рассеяния в одномерных системах//ФТП. – 1993. – Т. 27. – № 5. – С.799-807.
4. Чуприков Н. Л. Уравнения для элементов матрицы переноса одномерного уравнения Шредингера//Изв. вузов, Физика. – 1993. Т. 27. – № 6. – С.48-51.
5. Караваев Г. Ф., Чуприков Н. Л. Особые случаи резонансного туннелирования в многобарьерных квантовых структурах//Изв. вузов, Физика. – 1993. – № 8. – С.49-53.
6. Чуприков Н. Л. Времена рассеяния частицы на одномерных потенциальных барьерах//ФТП. – Т. 31. – 1997. – С.427-431.
7. Chuprikov N. L. The even asymptotic solution of the 1D-Schrodinger equation with non-degenerate turning points//Proc. of International Symposium "Physics and Engenering of Millimeter and Submillimeter Waves". - Kharkov, 1994. - P.243-246.
8. Chuprikov N. L. The even asymptotic solution of the 1D-Schrodinger equation with N-fold generate turning points//Proc. of International Symposium "Physics

- and Engenering of Millimeter and Submillimeter Waves". - Kharkov, 1994. - P.240-242.
9. Чуприков Н. Л. Туннелирование в одномерной системе N одинаковых потенциальных барьеров//ФТП. – Т. 30. – № 3. –С.443-450.
 - 10.Chuprikov N. L. Stationary states of an electron in periodic structures in a constant uniform electrical field//J. Phys.: Condens. Matter. - 1998. - V.10. - P.6707-6716.
 - 11.Chuprikov N. L. The role of the spatial dependence of the electron effective mass in forming the Wannier-Stark spectrum//J. Phys.: Condens. Matter. - 1999. - V.11. - P.1069-1079.
 - 12.Chuprikov N. L. The transfer matrices of the self-similar fractal potential on the Cantor set//J. Phys. A: Math. Gen. - 2000. - V.33. - P.4293-4308; corrigendum in J. Phys. A: Math. Theor. - 2008. - V.41. - P.379801.
 - 13.Chuprikov N. L. and Zhabin D. N. The electron tunneling through a self-similar fractal potential on the generalized Cantor set//J. Phys. A: Math. Gen. - 2000. - V.33. - P.4309-4316.
 - 14.Чуприков Н. Л., Жабин Д. Н. Электронный транспорт через одномерную фрактальную структуру//Изв.вузов, Физика. – 2000. – Т.43. – №12 – С.51-56
 - 15.Чуприков Н. Л., Жабин Д. Н. Фазовые времена туннелирования электрона через самоподобный фрактальный потенциал//Изв. вузов, Физика. – 2000. – Т. 43. № 12. – С.57-61.
 - 16.Chuprikov N. L. and Spiridonova O. V. A new type of solution of the Schrodinger equation on a self-similar fractal potential//J. Phys. A: Math. Gen. - 2006. - V.39. - P.L559-L562; corrigendum in J. Phys. A: Math. Theor. - 2008. - V.41. - P.409801.
 - 17.Жабин Д. Н., Чуприков Н. Л. Матрица переноса фрактального потенциала в форме канторовой лестницы//Изв. вузов, Физика. – 2003. – Т. 46. – № 9. – С.64-70.
 - 18.Чуприков Н. Л. Новый взгляд на квантовый процесс туннелирования: волновые функции для прохождения и отражения//Изв. вузов, Физика. – 2006. Т. 49. – № 2. – С.3-9.
 - 19.Чуприков Н. Л. Новый взгляд на квантовый процесс туннелирования: характерные времена для прохождения и отражения//Изв. вузов, Физика. – 2006. Т.49. – № 3. – С.72-81.
 - 20.Chuprikov N. L. A new model of a one-dimensional completed scattering and the problem of quantum nonlocality//Proc. Conf. Foundations of Probability and Physics - 4/Ed. By G. Adenier, C.A. Fuchs and A.Yu. Khrennikov. - Ser. Proc. Conf. AIP, Melville, New York, 2007. - V.889. - P.283-288.
 - 21.Chuprikov N. L. The continuity equation as a bridge between quantum and classical probabilities//Proc. Conf. Quantum Theory: Reconsideration of Foundations - 4/Ed. By G. Adenier, A.Yu. Khrennikov, Pekka Lahti, Vladimir I. Man'ko and Theo M. Nieuwenhuizen. - Ser. Proc. Conf. AIP, Melville, New York, 2007. - V.962. - P.238-241.
 22. Чуприков Н. Л. О новой математической модели туннелирования//Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия – 2008. – Вып.8/1. – Т.67. – С.625-633.