ISSN 1561-7793

Вестник

Томского государственного университета

ПРИЛОЖЕНИЕ

№ 18 АВГУСТ 2006

Материалы международных, всероссийских и региональных научных конференций, симпозиумов, школ, проводимых в ТГУ

УДК 519.872

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ МОМЕНТОВ И МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В АСИНХРОННОМ АЛЬТЕРНИРУЮЩЕМ ПОТОКЕ

О.В. Ниссенбаум

Томский государственный университет

E-mail:amg@fpmk.tsu.ru

Рассматриваются асинхронные альтернирующие потоки событий с интенсивностью, являющейся кусочно-постоянным марковским процессом с двумя состояниями и инициированием лишних событий при смене состояний. Обсуждается вопрос об оценке параметров таких потоков в условиях возникновения периодов ненаблюдаемости постоянной длительности (так называемого мертвого времени), связанных с наступлением событий в потоке. Рассматриваются два метода оценивания длительности мертвого времени – метод моментов и метод максимального правдоподобия. Производится сравнительный анализ указанных методов при оценивании длительности мертвого времени.

Ключевые слова: *дважды стохастические потоки событий, мертвое время, оценивание параметров, плотность вероятностей, численный эксперимент, стохастическое моделирование, лишние события.*

Введение

Системы и сети массового обслуживания (СМО, СеМО) находят широкое применение в качестве математической модели реальных технических, физических и экономических систем. Случайные потоки событий являются, в свою очередь, математической моделью информационных потоков, функционирующих в СМО и СеМО. Например, случайными потоками событий достаточно адекватно описываются информационные потоки заявок, циркулирующих в цифровых сетях интегрального обслуживания (Integrated Service Digital Networks – ISDN), в измерительных системах, а также потоки элементарных частиц (фотонов, электронов), поступающих на регистрирующую аппаратуру в физических экспериментах.

В реальных объектах и системах, как правило, интенсивность потока событий меняется со временем, и часто эти изменения носят случайный характер, что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков событий. Такие потоки описаны в [1, 2].

Со стороны регистрирующего прибора также может быть внесена некоторая неопределенность, в частности, прибор может обладать так называемым «мертвым временем», то есть не регистрировать входящие события в течение некоторого времени с момента наступления или регистрации очередного события [3, 4]. Это можно сравнить с оглушением человека громким звуком, вследствие чего он не сможет слышать другие звуки, пока временная глухота не пройдет.

В настоящей работе рассмотрена задача об оценке длительности периода мертвого времени, наступающего в момент регистрации события прибором и имеющего фиксированную длительность, в асинхронном альтернирующем потоке событий с инициированием лишнего события. Приведены и сравнены два метода его оценки, а также рассмотрен метод моментов для оценки других параметров потока.

1. Постановка задачи

Рассматривается поток с инициированием лишнего события, интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: $\lambda(t) = \lambda$, $\lambda(t) = 0$. Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса (потока), если $\lambda(t) = \lambda$, и, наоборот, имеет место второе состояние процесса (потока), если $\lambda(t) = 0$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии есть случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону $F_1(t) = 1 - \exp(-\alpha_1 t)$, во втором – $F_2(t) = 1 - \exp(-\alpha_2 t)$, где α_1, α_2 – интенсивности перехода процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе и из второго в первое соответственно. В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ. Во втором состоянии процесса $\lambda(t)$ генерация событий не производится. Далее рассматривается 2 модификации этого потока. В первом случае переход процесса из второго состояния в первое вызывает инициирование лишнего события в первом состоянии в момент перехода (рис. 1).

Во втором случае переход процесса из первого состояния во второе вызывает инициирование лишнего события во втором состоянии в момент перехода (рис. 2).

После каждого зарегистрированного в момент времени t_i события наступает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюде-

нию. События, наступившие в течение мертвого времени, не вызывают продления его периода. По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т. д. Варианты возникающих ситуаций приведены на рисунках.

Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий в схеме с непродлевающимся мертвым временем (1-я модификация): 1, 2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; штриховка – периоды мертвого времени; t_1, t_2, ... – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке

Рис. 2. Формирование наблюдаемого потока событий в схеме с непродлевающимся мертвым временем (2-я модификация). Обозначения аналогичны рис. 1

Требуется оценить параметры потока λ, α_1, α_2 и длительность мертвого времени T.

Для первого случая (потока с инициированием лишнего события в первом состоянии в момент перехода из второго состояния в первое) в [5] получена аналитическая формула для плотности распределения вероятностей промежутков между наблюдаемыми событиями $p(\tau)$.

В [6] получена плотность распределения вероятностей промежутков между событиями в наблюдаемом потоке для второго типа рассматриваемого потока – с инициированием лишнего события в момент перехода процесса из первого состояния во второе во втором состоянии.

Выражения для плотностей вероятностей $p(\tau)$ интервала между соседними событиями рассматриваемых потоков, как для случая $T = 0$, так и для случая $T \neq 0$, совпали. При этом для $T = 0$ плотность вероятностей $p(\tau)$ определяется в виде

$$p(\tau) = \gamma(\lambda + \alpha_1)e^{-(\lambda+\alpha_1)\tau} + (1-\gamma)\alpha_2 e^{-\alpha_2\tau}, \tau \geq 0;$$

$$\gamma = \frac{\lambda - \alpha_2}{\lambda + \alpha_1 - \alpha_2}, \lambda, \alpha_1, \alpha_2 > 0, \quad \pi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \lambda, \alpha_1, \alpha_2 > 0, \tag{1}$$

для $T \neq 0$

$$p(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leq \tau < T, \\ \gamma\ (\lambda + \alpha_1)\ e^{-(\lambda+\alpha_1)\ (\tau - T)} + (1-\gamma)\ \alpha_2 e^{-\alpha_2(\tau - T)}, & \text{если} \quad \tau \geq T; \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{\lambda - \alpha_2}{\lambda + \alpha_1 - \alpha_2}\left[\ \pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\ T}\right], \quad \pi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \lambda, \alpha_1, \alpha_2 > 0. \tag{2}$$

Методом максимального правдоподобия построена оценка для мертвого времени T, $\hat{T}_m = \tau_{\min}$ для любых $\lambda > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$.

С использованием метода моментов выписаны уравнения для оценки параметров λ, α_1, α_2 и мертвого времени фиксированной длительности T:

$$M(\tau^k) = C_k,\ k = \overline{1,4};\quad M(\tau^k) = \int_T^{\infty} \tau^k p(\tau) d\tau = T^k + \sum_{i=1}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} T^{k-i} \left(\frac{\gamma}{\lambda_1^i} + \frac{1-\gamma}{\alpha_2^i} \right), \tag{3}$$

где $C_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tau_i^k$ – статистики, τ_i – временные интервалы между событиями в наблюдаемом потоке событий.

В результате достаточно трудоемких преобразований системы (3) найдено уравнение для оценки длительности мертвого времени T:

$$\begin{gathered} T^6 - 6C_1T^5 + 3\left(6C_1^2 - C_2\right) T^4 + 4\left(C_3 - 6C_1^3\right) T^3 + 3\left(C_4 + 12\ C_1^2C_2 - 8C_1C_3\right) T^2 + \\ +6\left(4C_1^2C_3 - 6C_1C_2^2 - C_1C_4 + 2C_2C_3\right) T + 4C_3^2 - 24C_1C_2C_3 + 18C_2^3 - 3C_2C_4 + 6C_1^2C_4 = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Очевидно, что решение уравнения (4) возможно только численно. В качестве оценки $\hat{T}$ естественно выбирать корень уравнения (4) из полуинтервала $(0, \tau_{\min}]$, где $\tau_{\min} = \min \tau_i$ ($i = \overline{1,n}$).

Оценки $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\alpha}_2$ при этом выражаются в виде

$$\begin{gathered} \hat{\lambda}_1 = \frac{1}{2}\left(-b + \sqrt{b^2 - 4c}\right);\ \hat{\alpha}_2 = \frac{1}{2}\left(-b - \sqrt{b^2 - 4c}\right); \\ b = 2\left(2\hat{T}^3 - 6C_1\hat{T}^2 + 6C_1^2\hat{T} + C_3 - 3C_1C_2\right) \times \left(\hat{T}^4 - 4C_1\hat{T}^3 + 6C_1^2\hat{T}^2 - 6C_1C_2\hat{T} + 2C_3\hat{T} - 2C_1C_3 + 3C_2^2\right)^{-1}; \\ c = 6\left(\hat{T}^2 - 2C_1\hat{T} - C_2 + 2C_1^2\right) \times \left(\hat{T}^4 - 4C_1\hat{T}^3 + 6C_1^2\hat{T}^2 - 6C_1C_2\hat{T} + 2C_3\hat{T} - 2C_1C_3 + 3C_2^2\right)^{-1}. \end{gathered} \tag{5}$$

При этом должны выполняться следующие неравенства: $b^2 - 4c > 0$, $b < 0$, $c > 0$, так как оценки $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\alpha}_2$ должны быть положительными. Кроме того, так как оценки $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\alpha}_2$, как видно из (5), являются корнями соответствующего квадратного уравнения, то при выборе корней принято, что $\lambda + \alpha_1 > \alpha_2$ (в реальных ситуациях величины α_1 и α_2 обычно сравнимы между собой, а исходный поток событий достаточно интенсивен); если же имеется другая априорная информация о соотношении параметров процесса $\lambda(t)$, то нужно в (5) поменять местами $\hat{\alpha}_2$ и $\hat{\lambda}_1$.

Оценка $\hat{\gamma}$ выражается в виде

$$\hat{\gamma} = \left(\hat{\lambda}_1\hat{\alpha}_2 / \left(\hat{\alpha}_2 - \hat{\lambda}_1\right)\right)\left(C_1 - \hat{T} - (1/\hat{\alpha}_2)\right). \tag{6}$$

Поскольку $0 \le \gamma \le 1$, в том случае, если окажется $\hat{\gamma} < 0$, необходимо скорректировать оценку, положив $\hat{\gamma} = 0$, а в случае, если $\hat{\gamma} > 1$, задать $\hat{\gamma} = 1$.

Если найдены (по формулам (4)–(6)) оценки $\hat{\gamma}$, $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\alpha}_2$, $\hat{T}$, то оценка $\hat{\alpha}_1$ находится из уравнения

$$\left(\left(\hat{\lambda}_1 - \hat{\alpha}_2\right)\hat{\gamma} + \hat{\alpha}_2\right)\alpha_1 + \left(\alpha_1 + \hat{\alpha}_2 - \hat{\lambda}_1\right)\alpha_1 e^{-(\alpha_1 + \hat{\alpha}_2)\hat{T}} + \hat{\alpha}_2\left(\hat{\lambda}_1 - \hat{\alpha}_2\right)(\hat{\gamma} - 1) = 0. \tag{7}$$

В уравнении (7) оценки $\hat{T}$, $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\gamma}$ определяются выражениями (4) – (6) соответственно, при этом уравнение (7) имеет единственный положительный корень, если $0 \le \hat{\gamma} \le 1$.

Наконец, оценка параметра λ находится в виде

$$\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_1 - \hat{\alpha}_1. \tag{8}$$

2. Численный эксперимент и сравнение его результатов

Перейдем к оцениванию параметров асинхронного альтернирующего дважды стохастического потока событий с плотностью распределения интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке, определяемой формулой (2), с помощью имитационной модели асинхронного альтернирующего потока.

Первым оцениваемым параметром является длительность мертвого времени T. Оценивание его может производиться двумя методами – методом моментов и методом максимального правдоподобия. Очевидно, метод максимального правдоподобия проще в реализации, а также не вызывает таких проблем при использовании, как возможное отсутствие или, наоборот, избыток корней уравнения. Если удастся показать, что

этот метод еще и более точен в каком-то диапазоне, то имеет смысл отказаться в нем от использования уравнения (3) для оценивания T в пользу оценки $\hat{T}_m = \tau_{\min}$. Для того чтобы сравнить качество методов оценивания, была проведена серия экспериментов при различных значениях параметров λ, α_1, α_2 и при различных значениях оцениваемого мертвого времени T. Как критерий качества оценивания была использована выборочная вариация от истинного значения: $\hat{V} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{T}_i - T)^2$, где N – количество реализаций потока в одном эксперименте, T – истинное значение длительности мертвого времени, $\hat{T}_i$ - оценка длительности мертвого времени, полученная при i-й реализации.

Для получения численных результатов разработан алгоритм вычисления полученных оценок. Программа реализована на языке Pascal. Первый этап расчета предполагает имитационное моделирование потоков с инициированием лишнего события и моделирование схемы непродлевающегося мертвого времени с целью формирования статистик $C_k, k = \overline{1,4}$. Описание алгоритма имитационного моделирования здесь не приводится, поскольку не содержит никаких принципиальных трудностей. Второй этап расчета – вычисление полученных оценок.

Проведены расчеты при $\lambda = 10$, $\lambda = 5$, $\lambda = 1$, $\lambda = 0{,}5$, при α_1 и α_2 от 0,01 до 0,1 с шагом 0,01 и от 0,1 до 1 с шагом 0,1, и при T от 1 до 9 с шагом 2. При этом все эксперименты проводились при общем времени наблюдения от 100 до 1000 единиц времени с шагом 100 ед.

В каждом эксперименте имитировалось $N = 100$ реализаций наблюдаемого потока событий.

В табл. 1 – 5 приведены выборочные вариации оценок длительности мертвого времени, полученных методом моментов и методом максимального правдоподобия. Вариации оценки, полученной методом моментов, обозначены в таблицах как $\hat{V}_m$, вариации оценки, полученной методом максимального правдоподобия, обозначены как $\hat{V}$.

Таблица 1

Таблица вариаций оценок мертвого времени T при значениях параметров $\lambda = 10$, $\alpha_1 = 0{,}1$, $\alpha_2 = 0{,}1$

Общее время процесса = 500

T	1	3	5	7	9
$\hat{V}$	0,0000004	0,0000046	0,0000106	0,0000382	0,0000362
$\hat{V}_m$	0,0000004	0,2515060	4,7313990	9,1626848	11,7916341

Общее время процесса = 600

T	1	3	5	7	9
$\hat{V}$	0,0000004	0,0000028	0,0000112	0,0000285	0,0000204
$\hat{V}_m$	0,0000004	0,3944905	5,8184340	10,5893709	12,1659692

Общее время процесса = 700

T	1	3	5	7	9
$\hat{V}$	0,0000003	0,0000024	0,0000085	0,0000124	0,0000147
$\hat{V}_m$	0,0002045	0,1373097	3,4153678	9,9098068	9,8511524

Общее время процесса = 800

T	1	3	5	7	9
$\hat{V}$	0,0000002	0,0000014	0,0000038	0,0000131	0,0000165
$\hat{V}_m$	0,0056936	0,1549197	5,5522207	10,0035413	10,3971512

Общее время процесса = 900

T	1	3	5	7	9
$\hat{V}$	0,0000001	0,0000012	0,0000046	0,0000063	0,0000095
$\hat{V}_m$	0,0073488	0,0048764	4,0514308	8,8286984	9,3752255

Общее время процесса = 1000

T	1	3	5	7	9
$\hat{V}$	0,0000001	0,0000016	0,0000030	0,0000117	0,0000138
$\hat{V}_m$	0,0258744	0,0188985	4,7188776	9,2159486	12,7382182

Таблица 2

Таблица вариаций оценок мертвого времени T при значениях параметров $\lambda = 1$, $\alpha_1 = 0{,}01$, $\alpha_2 = 0{,}03$

Общее время процесса = 900

T	1	3	5	7	9
$\hat{V}$	0,0000168	0,0000509	0,0001815	0,0003211	0,0005634
$\hat{V}_m$	0,0000168	0,0000509	0,0001768	0,0003211	1,3232664

Таблица 3

Таблица вариаций оценок мертвого времени T при значениях параметров $\lambda = 0{,}5$, $\alpha_1 = 0{,}02$, $\alpha_2 = 0{,}01$

Общее время процесса = 500

T	1	3	5	7	9
$\hat{V}$	0,0606553	0,0917392	0,0784059	0,1474591	0,0709315
$\hat{V}_m$	0,0606553	0,0916469	0,2873175	0,4310011	1,3782817

Таблица 4

Таблица вариаций оценок мертвого времени T при значениях параметров $\lambda = 0{,}5$, $\alpha_1 = 0{,}05$, $\alpha_2 = 0{,}09$

Общее время процесса = 900

T	1	3	5	7	9
$\hat{V}$	0,0001674	0,0006649	0,0014841	0,0016364	0,0026064
$\hat{V}_m$	0,0001669	0,1107896	2,7055710	4,7892697	4,9399598

Таблица 5

Таблица вариаций оценок мертвого времени T при значениях параметров $\lambda = 1$, $\alpha_1 = 0{,}02$, $\alpha_2 = 0{,}01$

Общее время процесса = 300

T	1	3	5	7	9
$\hat{V}$	891,54695	1686,8022	901,02683	128,20735	74,221166
$\hat{V}_m$	886,83077	1676,1175	901,02721	128,89560	77,028307

Общее время процесса = 500

T	1	3	5	7	9
$\hat{V}$	0,0181892	0,0070151	2469,1630	72,538390	108,48573
$\hat{V}_m$	0,0181892	0,0070151	2469,1630	72,743607	108,32888

В настоящей работе приведены таблицы, отражающие характерные ситуации, возникающие при оценивании параметра T при различных значениях других параметров.

В табл. 1 приведены вариации оценок длительности мертвого времени, полученные при значениях параметров исходного потока $\lambda = 10$, $\alpha_1 = 0{,}1$, $\alpha_2 = 0{,}1$, длительности мертвого времени $T = 1$, $T = 3$, $T = 5$, $T = 7$, $T = 9$ ед. времени и времени моделирования каждой реализации входящего потока $t = 500$, $t = 600$, $t = 700$, $t = 900$, $t = 1000$ ед. времени. Табл. 1 является иллюстрацией наиболее часто встречающегося результата эксперимента по оцениванию длительности мертвого времени в рассматриваемом потоке – удовлетворительное качество оценивания параметра T.

В табл. 2 приведены вариации оценок длительности мертвого времени, полученные при значениях параметров исходного потока $\lambda = 1$, $\alpha_1 = 0{,}01$, $\alpha_2 = 0{,}03$, длительности мертвого времени $T = 1$, $T = 3$, $T = 5$, $T = 7$, $T = 9$ ед. времени и времени моделирования каждой реализации входящего потока $t = 900$ ед. времени. В табл. 3 приведены вариации оценок длительности мертвого времени, полученные при значениях параметров исходного потока $\lambda = 0{,}5$, $\alpha_1 = 0{,}02$, $\alpha_2 = 0{,}01$, длительности мертвого времени $T = 1$, $T = 3$, $T = 5$, $T = 7$, $T = 9$ ед. времени и времени моделирования каждой реализации входящего потока $t = 500$ ед. времени. В табл. 4 приведены вариации оценок длительности мертвого времени, полученные при значениях параметров исходного потока, $\lambda = 0{,}5$, $\alpha_1 = 0{,}05$, $\alpha_2 = 0{,}09$, длительности мертвого времени $T = 1$, $T = 3$, $T = 5$, $T = 7$, $T = 9$ ед. времени и времени моделирования каждой реализации входящего потока $t = 900$ ед. времени. Табл. 2 – 4 отражают достаточно редко встречающуюся ситуацию удовлетворительного качества оценивания параметра T при незначительном превышении величины $\hat{V}$ над $\hat{V}_m$.

В табл. 5 приведены вариации оценок длительности мертвого времени, полученные при значениях параметров исходного потока $\lambda = 1$, $\alpha_1 = 0{,}02$, $\alpha_2 = 0{,}01$, длительности мертвого времени $T = 1$, $T = 3$, $T = 5$, $T = 7$,

$T = 9$ ед. времени и времени моделирования каждой реализации входящего потока $t = 300$, $t = 500$ ед. времени. Табл. 5 отражает ситуацию неудовлетворительного качества оценивания вследствие недостаточности времени наблюдения за потоком при том, что оценка параметра T, полученная методом моментов, может превосходить по качеству оценку, произведенную методом максимального правдоподобия.

Метод максимального правдоподобия в большинстве случаев дал оценку лучшую, чем метод моментов (см. табл. 1) . Оценка, полученная методом моментов, оказалась лучше только в тех случаях, когда качество оценивания было настолько низко (см. табл. 5), что любая из двух оценок не дала адекватного представления об истинном значении параметра. Очевидно, что в случае низкого качества оценивания мы имеем дело всего лишь с недостаточностью информации, а значит, требуется повысить общее время наблюдения за процессом. Крайне редки случаи, когда метод моментов дает лучшую оценку, чем метод максимального правдоподобия при хорошем качестве оценивания (то есть при низкой вариации), но и в этих случаях разница между вариациями обоих методов невелика (см. табл. 2 – 4).

Таким образом, можно рекомендовать метод максимального правдоподобия как метод оценивания величины мертвого времени T.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями // Техника средств связи. Сер. Системы связи. – 1989. – Вып. 7. – С. 46 – 54.
2. *Васильева Л.А., Горцев А.М.* Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 12. – С. 69 – 79.
3. *Курочкин С.С.* Многомерные статистические анализаторы. – М.: Атомиздат, 1968.
4. *Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф.* Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. – Минск: Университетское, 1988.
5. *Горцев А.М., Ниссенбаум О.В.* Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с инициированием лишнего события // Вестник ТГУ. – 2004. – № 284. – С. 139 – 147.
6. *Горцев А.М., Ниссенбаум О.В.* Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Изв. вузов. Физика. – 2005. – № 10. – С. 35 – 49.