

# *Вестник*

Томского государственного университета

*ПРИЛОЖЕНИЕ*

№ 18

АВГУСТ 2006

*Материалы международных,  
всероссийских и региональных  
научных конференций,  
симпозиумов, школ,  
проводимых в ТГУ*



## ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ АСИНХРОННОГО ПОТОКА С ИНИЦИИРОВАНИЕМ ЛИШНИХ СОБЫТИЙ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

А.М. Горцев, Л.А. Нежелская

*Томский государственный университет*

E-mail: amg@fpmk.tsu.ru

Рассматривается асинхронный поток с иницированием лишних событий, интенсивность которого есть кусочно-постоянный случайный марковский процесс с двумя состояниями. Исследуются три разновидности этого потока, определяемые вариантами иницирования лишних событий. Находятся оценки параметров потоков, основанные на применении метода моментов.

**Ключевые слова:** асинхронный поток, лишнее событие, плотность вероятностей, оценки параметров.

### Введение

Математические модели потоков событий широко применяются при описании реальных телекоммуникационных сетей, спутниковых сетей связи и других сетей и систем, которые объединяются единым термином – цифровые сети интегрального обслуживания (Integral Service Digital Network – ISDN). Интенсивное развитие ISDN привело к возникновению новых математических моделей входящих потоков событий, достаточно адекватно описывающих реальные информационные потоки, функционирующие в ISDN. Одними из первых работ в этом направлении были статьи [1 – 3]. Подчеркнём, однако, что в литературе по теории массового обслуживания и её приложениям в целом, как и в литературе, посвящённой исследованию ISDN, в частности, довольно незначительное количество работ посвящено адаптивным системам обслуживания, то есть системам, функционирующим в условиях полной или частичной неопределённости. Более того, подавляющее число авторов рассматривает ситуации, когда все параметры, характеризующие входящий поток событий, априорно известны, хотя в реальных ситуациях дело обстоит, как правило, иначе. На практике параметры, определяющие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо (что ещё более ухудшает ситуацию) они изменяются со временем, при этом изменения часто носят случайный характер, что приводит к рассмотрению дважды стохастических потоков событий. С другой стороны, очевидно, что функционирование системы обслуживания непосредственно зависит от параметров входящего потока событий.

Дважды стохастические потоки событий, у которых интенсивность является кусочно-постоянным случайным марковским процессом, делятся на три типа: 1) синхронные дважды стохастические потоки событий [4] – потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий; 2) асинхронные дважды стохастические потоки событий [5] – потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий; 3) полусинхронные дважды стохастические потоки событий [6] – потоки, у которых для одного множества состояний справедливо 1, а для остальных состояний справедливо 2. Отмеченные выше потоки событий можно представить в виде моделей MAP (Markovian Arrival Process) – потоков событий [7, 8] с определёнными ограничениями на параметры последних [9].

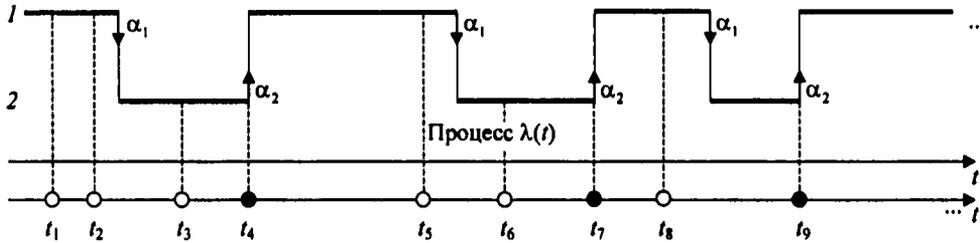
В настоящей статье рассматриваются модификации асинхронного потока с иницированием лишних событий и решается задача оценивания параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий. Подчеркнём, что в дальнейшем изложении рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потоков событий.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим асинхронный поток событий [5], интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс  $\lambda(t)$  с двумя состояниями:  $\lambda_1, \lambda_2$ , ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ). Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса (потока), если  $\lambda(t) = \lambda_1$  и, наоборот, имеет место второе состояние процесса (потока), если  $\lambda(t) = \lambda_2$ . Если имеет место первое состояние процесса  $\lambda(t)$ , то в течение временного интервала, когда  $\lambda(t) = \lambda_1$ , поток событий (события 1-го типа) ведёт себя как пуассоновский с параметром  $\lambda_1$ . Длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  в первом состоянии есть случайная величина, распределённая по экспоненциальному закону  $F_1(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t}$ , где  $\alpha_1$  – интенсивность перехода процесса  $\lambda(t)$  из первого состояния во второе. Если имеет место второе состояние процесса  $\lambda(t)$ , то в течение временного интервала, когда  $\lambda(t) = \lambda_2$ , поток событий (события 2-го типа) ведёт себя как пуассоновский с параметром  $\lambda_2$ . Длительность пребывания про-

цесса  $\lambda(t)$  во втором состоянии есть также экспоненциально распределённая случайная величина с функцией распределения  $F_1(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$ , где  $\alpha_2$  – интенсивность перехода процесса  $\lambda(t)$  из второго состояния в первое. В сделанных предположениях нетрудно показать, что  $\lambda(t)$  – марковский процесс.

Рассмотрим первую модификацию описанного асинхронного потока, заключающуюся в следующем: последовательные переходы из второго состояния процесса  $\lambda(t)$  в первое инициируют (с вероятностью 1) наступление лишнего события (событие 3-го типа) в первом состоянии процесса  $\lambda(t)$  в момент перехода. Вариант возникающей ситуации приведён на рисунке.



Асинхронный поток с инициированием лишних событий в первом состоянии процесса  $\lambda(t)$  при переходе процесса из второго состояния в первое: 1, 2 – состояния процесса  $\lambda(t)$ ;  $t_1, t_2, \dots$  – моменты наступления событий;  $t_4, t_7, t_9, \dots$  – моменты наступления лишних событий

Рассматривается стационарный режим функционирования асинхронного потока с инициированием лишних событий (далее наблюдаемый поток событий), поэтому переходными процессами на интервале наблюдения  $(t_0, t)$ , где  $t_0$  – начало наблюдений,  $t$  – окончание наблюдений, пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить  $t_0 = 0$ . Так как процесс  $\lambda(t)$  является ненаблюдаемым, а наблюдаемыми являются только временные моменты  $t_1, t_2, \dots$  наступления событий в наблюдаемом потоке, то необходимо по этим наблюдениям оценить (в момент  $t$  окончания наблюдений) параметры  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2$  случайного процесса  $\lambda(t)$ .

## 2. Плотность вероятностей интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке

Нетрудно показать, что наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать, начиная с момента  $t_i$  (момента наступления события). Тогда последовательность моментов наступления событий  $t_1, t_2, \dots$  образует вложенную цепь Маркова [10]. Обозначим  $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , – длительность  $i$ -го интервала между двумя соседними событиями потока. Так как рассматривается стационарный режим функционирования потока (поток уже функционирует бесконечно долго), то плотность вероятности длительности интервала  $(t_i, t_{i+1})$  будет одна и та же для всех интервалов, то есть  $p(\tau_i) = p(\tau)$  для любого  $i$ . В силу этого момент времени  $t_i$  без потери общности можно положить равным 0 ( $t_i = 0$ ), или, что то же самое, момент наступления события есть  $\tau = 0$ .

Обозначим  $\pi_j$  – априорная финальная вероятность того, что процесс  $\lambda(\tau)$  находится в  $j$ -м ( $j = 1, 2$ ) состоянии в любой момент времени ( $\pi_1 + \pi_2 = 1$ ). В [11] показано, что

$$\pi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (1)$$

Введем вероятности  $\tilde{\pi}_j$  – условная апостериорная вероятность того, что процесс  $\lambda(\tau)$  в момент времени  $\tau = 0$  находится в  $j$ -м ( $j = 1, 2$ ) состоянии при условии, что в момент времени  $\tau = 0$  событие наблюдаемого потока наступило ( $\tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2 = 1$ ). Получим явные выражения для  $\tilde{\pi}_j$  ( $j = 1, 2$ ). Обозначим  $A$  – событие, заключающееся в том, что в момент  $\tau = 0$  событие наблюдаемого потока наступило;  $(A, \lambda(0) = \lambda_i)$  – событие, заключающееся в том, что в момент  $\tau = 0$  событие наблюдаемого потока наступило и процесс  $\lambda(\tau)$  в момент  $\tau = 0$  находится в  $j$ -ом состоянии;  $(A, \lambda(0) = \lambda_j, \lambda(-\Delta\tau) = \lambda_k)$  – событие, заключающееся в том, что в момент  $\tau = 0$  событие наблюдаемого потока наступило и процесс  $\lambda(\tau)$  в момент  $\tau = 0$  находится в  $j$ -ом состоянии ( $j = 1, 2$ ), и в момент  $\tau = -\Delta\tau$  процесс  $\lambda(\tau)$  находится в  $k$ -ом состоянии ( $k = 1, 2$ ), где  $\Delta\tau > 0$  – достаточно малая величина. Тогда вероятность события  $(A, \lambda(0) = \lambda_j)$  запишется в виде

$$P(A, \lambda(0) = \lambda_j) = \sum_{k=1}^2 P(A, \lambda(0) = \lambda_j, \lambda(-\Delta\tau) = \lambda_k) = \sum_{k=1}^2 P(\lambda(-\Delta\tau) = \lambda_k) P(A, \lambda(0) = \lambda_j | \lambda(-\Delta\tau) = \lambda_k), \quad j = 1, 2,$$

$$P(A, \lambda(0) = \lambda_1 | \lambda(-\Delta\tau) = \lambda_1) = \lambda_1 \Delta\tau + o(\Delta\tau), \quad P(A, \lambda(0) = \lambda_1 | \lambda(-\Delta\tau) = \lambda_2) = \alpha_2 \Delta\tau + o(\Delta\tau), \quad (2)$$

$$P(A, \lambda(0) = \lambda_2 | \lambda(-\Delta\tau) = \lambda_2) = \lambda_2 \Delta\tau + o(\Delta\tau), \quad P(A, \lambda(0) = \lambda_2 | \lambda(-\Delta\tau) = \lambda_1) = 0,$$

где  $P(\lambda(-\Delta\tau) = \lambda_k) = \pi_k$ ,  $\pi_k$  определены в (1),  $k = 1, 2$ . Тогда из (2) находим

$$P(A, \lambda(0) = \lambda_1) = \pi_1 \lambda_1 \Delta\tau + \pi_2 \alpha_2 \Delta\tau + o(\Delta\tau),$$

$$P(A, \lambda(0) = \lambda_2) = \pi_2 \lambda_2 \Delta\tau + o(\Delta\tau).$$

Используя формулу Байеса, получаем

$$P(\lambda(0) = \lambda_1 | A) = \frac{\pi_1 \lambda_1 \Delta\tau + \pi_2 \alpha_2 \Delta\tau + o(\Delta\tau)}{\pi_1 \lambda_1 \Delta\tau + \pi_2 \alpha_2 \Delta\tau + \pi_2 \lambda_2 \Delta\tau + o(\Delta\tau)},$$

$$P(\lambda(0) = \lambda_2 | A) = \frac{\pi_2 \lambda_2 \Delta\tau + o(\Delta\tau)}{\pi_1 \lambda_1 \Delta\tau + \pi_2 \alpha_2 \Delta\tau + \pi_2 \lambda_2 \Delta\tau + o(\Delta\tau)}. \quad (3)$$

Деля числители и знаменатели в (3) на  $\Delta\tau$ , устремляя  $\Delta\tau$  к нулю, учитывая, что  $\lim P(\lambda(0) = \lambda_j | A) = \bar{\pi}_j$ , при  $\Delta\tau \rightarrow 0$  ( $j = 1, 2$ ), и принимая во внимание выражения (1), окончательно находим

$$\bar{\pi}_1 = \frac{\alpha_2 (\lambda_1 + \alpha_1)}{\alpha_2 (\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_2 \alpha_1}, \quad \bar{\pi}_2 = \frac{\lambda_2 \alpha_1}{\alpha_2 (\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_2 \alpha_1}. \quad (4)$$

Обозначим  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – финальная вероятность того, что наступившее событие есть событие  $i$ -го типа. Тогда можно показать, что

$$q_1 = \frac{\lambda_1 \alpha_2}{\alpha_2 (\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_2 \alpha_1}, \quad q_2 = \frac{\lambda_2 \alpha_1}{\alpha_2 (\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_2 \alpha_1}, \quad q_3 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 (\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_2 \alpha_1}, \quad (5)$$

при этом  $\bar{\pi}_1 = q_1 + q_3$ ,  $\bar{\pi}_2 = q_2$ , что является естественным.

Введём в рассмотрение вероятности  $p_{ij}(\tau)$  – условные вероятности того, что на интервале  $(0, \tau)$  нет событий наблюдаемого потока и в момент  $\tau$   $\lambda(\tau) = \lambda_j$  ( $j = 1, 2$ ) при условии, что в момент  $\tau = 0$   $\lambda(0) = \lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ), и событие в момент  $\tau = 0$  произошло. Выписывая систему дифференциальных уравнений для  $p_{ij}(\tau)$  и решая её, находим

$$p_{11}(\tau) = e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad p_{12}(\tau) = \frac{\alpha_1}{\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2} \left[ e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} \right],$$

$$p_{21}(\tau) = 0, \quad p_{22}(\tau) = e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} \quad (\tau \geq 0). \quad (6)$$

Плотность вероятностей  $p(\tau)$  с учётом введённых вероятностей  $\bar{\pi}_j$  ( $j = 1, 2$ ) и  $p_{ij}(\tau)$  ( $i, j = 1, 2$ ) примет вид

$$p(\tau) = \sum_{i=1}^2 \bar{\pi}_i \sum_{j=1}^2 a_j p_{ij}(\tau), \quad (7)$$

где  $a_1 = \lambda_1$ ,  $a_2 = \lambda_2 + \alpha_2$ . Подставляя в (7) выражения (4), (6), находим

$$p(\tau) = \gamma (\lambda_1 + \alpha_1) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} + (1 - \gamma) (\lambda_2 + \alpha_2) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}, \quad \tau \geq 0;$$

$$\gamma = \frac{\alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2) (\lambda_1 + \alpha_1)}{(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2) (\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2)}, \quad \lambda_j > 0, \quad \alpha_j > 0 \quad (j = 1, 2). \quad (8)$$

### 3. Рекуррентность наблюдаемого потока

Прежде чем переходить к задаче оценивания параметров  $\lambda_i$ ,  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) наблюдаемого потока, рассмотрим вопрос о независимости наблюдений  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  (то есть вопрос о рекуррентности потока). Пусть  $(t_1, t_2)$ ,  $(t_2, t_3)$  – два смежных интервала с соответствующими длительностями:  $\tau_1 = t_2 - t_1$ ,  $\tau_2 = t_3 - t_2$ ; их расположение на временной оси, в силу стационарности потока, произвольно. Тогда совместная плотность вероятностей  $p(\tau_1, \tau_2)$  примет вид

$$p(\tau_1, \tau_2) = [\bar{\pi}_1 (\lambda_1 p_{11}(\tau_1) + \alpha_2 p_{12}(\tau_1)) + \bar{\pi}_2 \alpha_2 p_{22}(\tau_1)] \sum_{i=1}^2 a_i p_{i1}(\tau_2) + \lambda_2 \alpha_2 p_{22}(\tau_2) \sum_{i=1}^2 \bar{\pi}_i p_{i2}(\tau_1), \quad (9)$$

где  $\bar{\pi}_i$  ( $i = 1, 2$ ) определены в (4);  $a_1, a_2$  определены в (7);  $p_{ij}(\tau_1), p_{ij}(\tau_2)$  определены в (6) для  $\tau = \tau_1$  либо  $\tau = \tau_2$  ( $i, j = 1, 2$ ). Подставляя их выражения в (9) и проделывая необходимые преобразования, получаем

$$p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1) p(\tau_2) +$$

$$+ \frac{\lambda_1 \lambda_2 \gamma (1 - \gamma)}{(\lambda_1 + \alpha_1) (\lambda_2 + \alpha_2)} \left[ (\lambda_1 + \alpha_1) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_1} - (\lambda_2 + \alpha_2) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau_1} \right] \left[ (\lambda_1 + \alpha_1) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_2} - (\lambda_2 + \alpha_2) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau_2} \right], \quad (10)$$

где  $\gamma, p(\tau_i)$  определены в (8) для  $\tau = \tau_j$  ( $j = 1, 2$ ).

Таким образом, асинхронный поток с иницированием лишнего события в первом состоянии процесса  $\lambda(t)$  при его переходе из второго состояния в первое является в общем случае коррелированным потоком. Если положить в (10)  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_2 = 0$ , то есть рассмотреть асинхронный альтернирующий поток с иницированием лишних событий [12], то из (10) вытекает его рекуррентность.

#### 4. Построение оценок параметров наблюдаемого потока методом моментов

Рассмотрим задачу оценивания неизвестных параметров  $\lambda_i, \alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) наблюдаемого потока. Одними из популярных методов оценивания являются метод максимального правдоподобия и метод моментов [13]. В соответствии с методом максимального правдоподобия [13] оценками  $\hat{\lambda}_i, \hat{\alpha}_i$  ( $i = 1, 2$ ) параметров  $\lambda_i, \alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) будут те значения переменных  $\lambda_i, \alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ), которые доставляют глобальный максимум функции правдоподобия  $L(\lambda_i, \alpha_i | \tau_1, \dots, \tau_n)$ , где  $\tau_1, \dots, \tau_n$  – наблюдаемые значения длительностей интервалов  $(t_i, t_{i+1})$ ,  $i = \overline{1, n}$ , на интервале наблюдения  $(0, t)$ . Так как наблюдаемый поток является коррелированным, то для того, чтобы выписать явный вид функции правдоподобия, необходимо знать явный вид совместной плотности вероятностей  $p(\tau_1, \dots, \tau_n)$  для произвольного  $n$ , что само по себе уже является непростой задачей. В связи с этим рассмотрим задачу оценивания параметров  $\lambda_i, \alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) с использованием метода моментов, дающего оценки, обладающие достаточно хорошими свойствами при больших выборках наблюдений, и для применения которого достаточно знания плотности (8) [13].

Введём статистики  $C_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_i^k$ , где  $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то есть наблюдается  $n + 1$  событий потока.

Тогда для оценки параметров  $\lambda_i, \alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) необходимо иметь четыре уравнения моментов:

$$M(\tau^k) = C_k, \quad k = \overline{1, 4};$$

$$M(\tau^k) = \int_0^{\infty} \tau^k p(\tau) d\tau = \frac{k! \gamma}{(\lambda_1 + \alpha_1)^k} + \frac{k!(1-\gamma)}{(\lambda_2 + \alpha_2)^k}, \quad k = \overline{1, 4}, \quad (11)$$

где  $p(\tau)$ ,  $\gamma$  определены в (8). Систему уравнений (11) нетрудно привести к виду

$$\begin{aligned} C_1(\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2) - (\alpha_1 + \alpha_2) &= 0; \\ C_1(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2) - \frac{1}{2} C_2(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2) &= 1; \\ C_2(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2) - \frac{1}{3} C_3(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2) &= 2C_1; \\ C_3(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2) - \frac{1}{4} C_4(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2) &= 3C_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Вводя в (12) новые переменные  $x_1 = \lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2$ ,  $x_2 = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $x_3 = \lambda_1 + \lambda_2$ ,  $x_4 = \lambda_1 \lambda_2$ , получаем (12) в виде

$$\begin{aligned} C_1 x_1 - x_2 &= 0; \\ \frac{1}{2} C_2 x_1 - C_1 x_2 - C_1 x_3 + \frac{1}{2} C_2 x_4 &= -1; \\ \frac{1}{3} C_3 x_1 - C_2 x_2 - C_2 x_3 + \frac{1}{3} C_3 x_4 &= -2C_1; \\ \frac{1}{4} C_4 x_1 - C_3 x_2 - C_3 x_3 + \frac{1}{4} C_4 x_4 &= -3C_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Определитель системы линейных неоднородных уравнений (13) равен нулю. С другой стороны, ранг расширенной матрицы системы (13) равен четырём. Таким образом, полученная система линейных неоднородных уравнений (13) несовместна, то есть оценить четыре параметра  $\lambda_i, \alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ), используя четыре уравнения моментов (11), невозможно.

Выход из создавшейся ситуации возможен, если учесть корреляционные свойства наблюдаемого потока.

Введём статистику  $C_0 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i \tau_{i+1}$ , учитывающую корреляцию между соседними интервалами  $(t_i, t_{i+1})$ ,

$(t_{i+1}, t_{i+2})$ , образованными моментами наступления событий  $t_i, t_{i+1}, t_{i+2}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ . Тогда математическое ожидание статистики  $C_0$  (в силу стационарности наблюдаемого потока) запишется в виде

$$M(C_0) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} M(\tau_i \tau_{i+1}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} M(\tau_1 \tau_2) = M(\tau_1 \tau_2),$$

где  $M$  – оператор математического ожидания;  $\tau_1, \tau_2$  – по-прежнему (см. пункт 3) длительности смежных интервалов  $(t_1, t_2), (t_2, t_3)$ , произвольно расположенных на интервале наблюдения  $(0, t), t \geq t_{n+1}$ ;

$$M(\tau_1 \tau_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty \tau_1 \tau_2 p(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (14)$$

В (14) совместная  $p(\tau_1, \tau_2)$  определена выражением (10). Подставляя (10) в (14), находим

$$M(\tau_1 \tau_2) = \left( \frac{\gamma}{\lambda_1 + \alpha_1} + \frac{1-\gamma}{\lambda_2 + \alpha_2} \right)^2 + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \gamma (1-\gamma)}{(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)} \left( \frac{1}{\lambda_1 + \alpha_1} - \frac{1}{\lambda_2 + \alpha_2} \right)^2, \quad (15)$$

где  $\gamma$  определена в (8). Тогда уравнение моментов, учитывающее корреляционные свойства наблюдаемого потока, будет иметь вид  $M(\tau_1, \tau_2) = C_0$ .

Таким образом, система уравнений моментов для оценки параметров  $\lambda_i, \alpha_i (i = 1, 2)$  выпишется в виде

$$M(\tau_1 \tau_2) = C_0, \quad M(\tau^k) = C_k, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (16)$$

где  $M(\tau_1, \tau_2)$  определено в (15);  $M(\tau^k), k = \overline{1, 3}$ , определены в (11). Производя достаточно трудоёмкие преобразования системы (16), учитывая при этом уже произведённые преобразования системы (11) (три первых уравнения системы (12)), получаем явные формулы для оценок  $\hat{\lambda}_i, \hat{\alpha}_i (i = 1, 2)$  параметров  $\lambda_i, \alpha_i (i = 1, 2)$  наблюдаемого потока:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= \frac{1}{2} \left( d + \sqrt{d^2 - 4a} \right), \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{1}{2} \left( d - \sqrt{d^2 - 4a} \right); \\ \hat{\alpha}_1 &= \frac{1}{2} \left( b - d + \sqrt{b^2 - 4c} - \sqrt{d^2 - 4a} \right), \quad \hat{\alpha}_2 = \frac{1}{2} \left( b - d - \sqrt{b^2 - 4c} + \sqrt{d^2 - 4a} \right); \\ a &= \frac{12(C_1^2 - C_0)}{3C_2^2 - 2C_1C_3}, \quad b = \frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1C_3}, \quad c = \frac{6(2C_1^2 - C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3}; \\ d &= \frac{2(6C_1C_2 - 6C_0C_1 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1C_3}; \quad b^2 - 4c > 0, \quad d^2 - 4a > 0, \quad a > 0, \quad b > 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$c > 0, d > 0; \hat{\lambda}_i > 0, \hat{\alpha}_i > 0 (i = 1, 2)$ . В (17), кроме того, принято, что  $\alpha_1 > \alpha_2$ ; если будет априорно известно, что  $\alpha_1 < \alpha_2$ , то оценки  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$  в (17) поменяются местами.

## 5. Вторая модификация асинхронного потока событий

Рассмотрим вторую модификацию описанного в пункте 1 асинхронного потока, заключающуюся в следующем: последовательные переходы из первого состояния процесса  $\lambda(t)$  во второе инициируют (с вероятностью 1) наступление лишнего события (событие 3-го типа) во втором состоянии процесса  $\lambda(t)$  в момент перехода. Таким образом, вторая модификация асинхронного потока отличается от первой местоположением лишнего события (во втором состоянии процесса  $\lambda(t)$ ) и моментом его инициирования (момент перехода процесса  $\lambda(t)$  из первого состояния во второе) (см. рисунок).

Последовательность всех выкладок в данном случае ничем не отличается от последовательности выкладок для первой модификации асинхронного потока, поэтому здесь приведём конечные формулы. Вероятности  $\pi_j (j = 1, 2)$  определяются формулами (1). Для вероятностей  $\tilde{\pi}_j (j = 1, 2)$  справедливы следующие выражения:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{\lambda_1 \alpha_2}{\alpha_2 (\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_2 \alpha_1}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{\lambda_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 (\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_2 \alpha_1}.$$

Финальные вероятности  $q_i (i = 1, 2, 3)$  наступления события  $i$ -го типа в наблюдаемом потоке совпадают с финальными вероятностями (5) для первой модификации асинхронного потока, при этом  $\tilde{\pi}_1 = q_1, \tilde{\pi}_2 = q_2 + q_3$ . Плотность вероятностей  $p(\tau)$  и совместная плотность вероятностей  $p(\tau_1, \tau_2)$  для второй модификации асинхронного потока совпадают с плотностью вероятностей (8) и совместной плотностью вероятностей (10) для первой модификации асинхронного потока, то есть вторая модификация асинхронного потока является коррелированным потоком. Наконец, формулы для оценок  $\hat{\lambda}_i, \hat{\alpha}_i (i = 1, 2)$  параметров  $\lambda_i, \alpha_i (i = 1, 2)$  наблюдаемого потока для второй модификации асинхронного потока полностью тождественны формулам (17) для первой модификации асинхронного потока.

Таким образом, последовательное инициирование лишних событий при переходе процесса  $\lambda(t)$  из первого состояния во второе либо, наоборот, из второго в первое является в конечном итоге равноправным в смысле вида плотности вероятностей (8) и совместной плотности вероятностей (10).

## 6. Третья модификация асинхронного потока событий

Рассмотрим третью модификацию описанного в пункте 1 асинхронного потока, заключающуюся в следующем: последовательные переходы из первого состояния процесса  $\lambda(t)$  во второе инициируют (с вероятностью 1) наступление лишнего события (событие 3-го типа) во втором состоянии процесса  $\lambda(t)$  в момент перехода и, наоборот, последовательные переходы из второго состояния процесса  $\lambda(t)$  в первое также инициируют (с вероятностью 1) наступление лишнего события (событие 4-го типа) в первом состоянии в момент перехода. Таким образом, третья модификация асинхронного потока является объединением первой и второй модификаций.

Последовательность выкладок в рассматриваемом случае в основном совпадает с последовательностью выкладок для первой модификации асинхронного потока, поэтому здесь приведём конечные формулы. Вероятности  $\pi_j$  ( $j = 1, 2$ ) определяются формулами (1). Для вероятностей  $\tilde{\pi}_j$  ( $j = 1, 2$ ) справедливы следующие выражения:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{\alpha_2(\lambda_1 + \alpha_1)}{\alpha_2(\lambda_1 + \alpha_1) + \alpha_1(\lambda_2 + \alpha_2)}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{\alpha_1(\lambda_2 + \alpha_2)}{\alpha_2(\lambda_1 + \alpha_1) + \alpha_1(\lambda_2 + \alpha_2)}. \quad (18)$$

Финальные вероятности  $q_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) того, что наступившее событие есть событие  $i$ -го типа, запишутся в виде

$$q_1 = \frac{\lambda_1 \alpha_2}{\alpha_2(\lambda_1 + \alpha_1) + \alpha_1(\lambda_2 + \alpha_2)}; \quad q_2 = \frac{\lambda_2 \alpha_1}{\alpha_2(\lambda_1 + \alpha_1) + \alpha_1(\lambda_2 + \alpha_2)};$$

$$q_3 = q_4 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2(\lambda_1 + \alpha_1) + \alpha_1(\lambda_2 + \alpha_2)},$$

при этом  $\tilde{\pi}_1 = q_1 + q_4$ ,  $\tilde{\pi}_2 = q_2 + q_3$ . Вероятности  $p_{ij}(\tau)$  ( $i, j = 1, 2$ ) определяются как

$$p_{11}(\tau) = e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad p_{12}(\tau) = p_{21}(\tau) = 0, \quad p_{22}(\tau) = e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}. \quad (19)$$

Наконец, плотность вероятностей  $p(\tau)$  выпишется в виде

$$p(\tau) = \gamma(\lambda_1 + \alpha_1)e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} + (1 - \gamma)(\lambda_2 + \alpha_2)e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}, \quad \tau \geq 0; \quad (20)$$

$$\gamma = \frac{\alpha_2(\lambda_1 + \alpha_1)}{\alpha_2(\lambda_1 + \alpha_1) + \alpha_1(\lambda_2 + \alpha_2)}, \quad \lambda_j > 0, \quad \alpha_j > 0, \quad (j = 1, 2).$$

Совместная плотность вероятностей  $p(\tau_1, \tau_2)$  определится выражением

$$p(\tau_1, \tau_2) = \tilde{\pi}_1 p_{11}(\tau_1)[\lambda_1(\lambda_1 + \alpha_1)p_{11}(\tau_2) + \alpha_1(\lambda_2 + \alpha_2)p_{22}(\tau_2)] + \tilde{\pi}_2 p_{22}(\tau_1)[\lambda_2(\lambda_2 + \alpha_2)p_{22}(\tau_2) + \alpha_2(\lambda_1 + \alpha_1)p_{11}(\tau_2)]. \quad (21)$$

Подставляя (18), (19) в (21) и прodelывая необходимые преобразования, получаем (21) в виде

$$p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2) + \frac{(\lambda_1 \lambda_2 - \alpha_1 \alpha_2)\gamma(1-\gamma)}{(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)} [(\lambda_1 + \alpha_1)e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_1} - (\lambda_2 + \alpha_2)e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau_1}] [(\lambda_1 + \alpha_1)e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_2} - (\lambda_2 + \alpha_2)e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau_2}], \quad (22)$$

где  $\gamma$ ,  $p(\tau_i)$  определены в (20) для  $\tau = \tau_i$  ( $j = 1, 2$ ).

Таким образом, асинхронный поток с инициированием лишних событий, как в первом состоянии процесса  $\lambda(t)$ , так и во втором при его переходе из второго состояния в первое и наоборот, является в общем случае коррелированным потоком. Если положить в (22)  $\lambda_1 \lambda_2 = \alpha_1 \alpha_2$ , то третья модификация асинхронного потока событий будет рекуррентным потоком.

Задача оценивания параметров потока  $\lambda_i$ ,  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) в рассматриваемом случае приводит к результату, аналогичному результату пункта 4. Система уравнений моментов (11), где  $p(\tau)$ ,  $\gamma$  определены в (20), является, по-прежнему, несовместной и для оценки параметров  $\lambda_i$ ,  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) используется система (16). В системе (16)  $M(\tau^k)$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , определены в (11), где  $p(\tau)$  и  $\gamma$ , в свою очередь, определены выражением (20). Математическое ожидание  $M(\tau_1, \tau_2)$  в (16) определено формулой (14). Подставляя туда выражение (22), находим

$$M(\tau_1 \tau_2) = \left( \frac{\gamma}{\lambda_1 + \alpha_1} + \frac{1 - \gamma}{\lambda_2 + \alpha_2} \right)^2 + \frac{(\lambda_1 \lambda_2 - \alpha_1 \alpha_2)\gamma(1-\gamma)}{(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)} \left( \frac{1}{\lambda_1 + \alpha_1} - \frac{1}{\lambda_2 + \alpha_2} \right)^2,$$

где  $\gamma$  определена в (20). Производя достаточно трудоёмкие преобразования системы (16), получаем явные формулы для оценок  $\hat{\lambda}_i$ ,  $\hat{\alpha}_i$  ( $i = 1, 2$ ) параметров  $\lambda_i$ ,  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) наблюдаемого потока:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{1}{2} \left( d + \sqrt{b^2 - 4c} - A \frac{2 - bC_1}{\sqrt{b^2 - 4c}} \right); \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{1}{2} \left( d - \sqrt{b^2 - 4c} + A \frac{2 - bC_1}{\sqrt{b^2 - 4c}} \right);$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{2} A \left( C_1 + \frac{2 - bC_1}{\sqrt{b^2 - 4c}} \right); \quad \hat{\alpha}_2 = \frac{1}{2} A \left( C_1 - \frac{2 - bC_1}{\sqrt{b^2 - 4c}} \right),$$
(23)

где  $A = \frac{6(2C_0 - C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3}$ ;  $b, c, d$  определены в (17);  $b^2 - 4c > 0, A > 0, b > 0, c > 0, d > 0; \hat{\lambda}_i > 0, \hat{\alpha}_i > 0 (i = 1, 2)$ .

В (23), кроме того, принято, что  $\alpha_1 > \alpha_2$ ; если будет априорно известно, что  $\alpha_1 < \alpha_2$ , то оценки  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$  в (23) поменяются местами.

### Заключение

Полученные результаты показывают возможность оценивания параметров  $\lambda_i, \alpha_i (i = 1, 2)$  модификаций асинхронного потока событий по результатам текущих наблюдений (в течение некоторого временного интервала). Выражения (17), (23) для оценок параметров получены в явном виде, что позволяет производить вычисления без привлечения численных методов решения уравнений (16). Так как потоки с инициированием лишнего события являются в общем случае коррелированными потоками, то сделать каких-либо выводов, основанных на аналитических формулах, о качестве получаемых оценок без привлечения имитационного моделирования представляется затруднительным.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчёта фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1979. – № 6. – С. 92 – 99.
2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчёта фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1980. – № 1. – С. 55 – 61.
3. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. – 1979. – V. 16. – P. 764 – 779.
4. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности «мёртвого» времени и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // Радиотехника. – 2004. – № 10. – С. 8 – 16.
5. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание длительности мёртвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 12. – С. 69 – 79.
6. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание периода мёртвого времени и параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий // Измерительная техника. – 2003. – № 6. – С. 7 – 13.
7. Lucantoni D.M., Neuts M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communications in Statistics Stochastic Models. – 1994. – V. 10. – P. 575 – 598.
8. Machihara F.A. A MAP/SM/1 queue with service times depending on the arrival process // Symposium on Performance Models for Information Communication Networks: Proc. Conf., Tokyo. – 1997. – P. 180 – 191.
9. Василевская Т.П., Завгородняя М.Е., Шмырин И.С. О соотношении моделей МАР-потока событий и асинхронного, полусинхронного и синхронного дважды стохастических потоков событий // Вестник ТГУ. Приложение. – 2004. – № 9 (II). – С. 138 – 144.
10. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. – М.: Высшая школа, 1982.
11. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 3. – С. 179 – 184.
12. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мёртвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с инициированием лишнего события // Вестник ТГУ. – 2004. – № 284. – С. 137 – 145.
13. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975.