ISSN 1561-7793

Вестник

Томского государственного университета

ПРИЛОЖЕНИЕ

№ 18 АВГУСТ 2006

Материалы международных, всероссийских и региональных научных конференций, симпозиумов, школ, проводимых в ТГУ

Секция 9

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.865

ОПТИМАЛЬНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ ДЛЯ ОДНОГО ВИДА ЭКЗОТИЧЕСКИХ ОПЦИОНОВ ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА В СЛУЧАЕ ВЫПЛАТЫ ДИВИДЕНДОВ

А.В. Аникина, Н.С. Демин*, С.В. Рожкова

Томский политехнический университет,
**Томский государственный университет*

E-mail: oceanann@rambler.ru

В данной работе приводится решение задачи оптимального хеджирования для опционов купли и продажи экзотического типа при наличии выплаты по рисковым активам дивидендов. Получены формулы, определяющие стоимости опционов, а также эволюцию во времени капиталов и портфелей. Получены соотношения паритета, связывающие решения для опционов купли и продажи. Исследованы свойства решения.

Ключевые слова: *опцион, финансовый рынок, хеджирование, капитал, портфель, дивиденды.*

1. Постановка задачи

Рассмотрение задачи проводится на стандартном вероятностном пространстве $(\Omega, F_t, \mathbb{F}=(F_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ [1, 2]. Через $\mathbb{P}_t = \mathbb{P}|F_t$ обозначается сужение меры $\mathbb{P}$ на F_t. На финансовом рынке обращаются рисковые (акции) и безрисковые (банковский счет, государственные облигации) активы, текущие цены которых S_t и B_t в течение интервала времени $t \in [0,T]$ определяются уравнениями из [1, 2]:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t),\ dB_t = rB_t dt, \tag{1.1}$$

где W_t – стандартный винеровский процесс, $\sigma > 0, r > 0, S_0 > 0, B_0 > 0$, решение которых имеет вид

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \left(\sigma^2/2\right)\right)t + \sigma W_t\right\},\ B_t = B_0 \exp\{rt\}. \tag{1.2}$$

Считаем, что текущее значение капитала инвестора X_t определяется в виде [1, 2]

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \tag{1.3}$$

где $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ – пара F_t-измеримых процессов, составляющая портфель ценных бумаг инвестора. За обладание акцией происходят выплаты дивидендов в соответствии с процессом D_t со скоростью $\delta\gamma_t S_t$, пропорциональной рисковой части капитала с коэффициентом δ, таким, что $0 \leq \delta < r$, т.е.

$$dD_t = \delta\gamma_t S_t dt. \tag{1.4}$$

Тогда изменение капитала в задаче с дивидендами происходит в виде

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + dD_t. \tag{1.5}$$

Из (1.3) следует, что

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t. \tag{1.6}$$

Тогда, согласно (1.5), (1.6), $B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = dD_t$, что является балансовым соотношением, заменяющим условие самофинансируемости в стандартной задаче [1, 2]. Из (1.1), (1.3) – (1.5) следует, что капитал определяется уравнением

$$dX_t = rX_t dt + \sigma\gamma_t S_t dW_t^{\mu-r+\delta},$$

$$W_t^{\mu-r+\delta} = W_t + (\mu - r + \delta)t/\sigma. \tag{1.7}$$

Далее нам потребуется результат, связанный с преобразованием мер вида

$$d\mathbb{P}_t^* = Z_t d\mathbb{P}_t, \tag{1.8}$$

математические ожидания относительно которых $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}^*$ соответственно.

Теорема Гирсанова [1]. Пусть Y_t – диффузионный процесс, определяемый уравнением $dY_t = b(t, Y_t)dt + dW_t$, где W_t – винеровский процесс. Пусть

$$Z_t = \exp\left\{-\int_0^t b(\tau, Y_\tau)dW_\tau - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(\tau, Y_\tau)d\tau\right\},$$

причем

$$\mathbf{E}Z_t = 1. \tag{1.9}$$

Тогда процесс Y_t является винеровским относительно меры $\mathbb{P}^*$.

Пусть $Y_t = W_t^{\mu-r+\delta}$. Согласно (1.7),

$$dY_t = dW_t^{\mu-r+\delta} = ((\mu - r + \delta)/\sigma)dt + dW_t. \tag{1.10}$$

Так как, согласно (1.10), $b(\tau, Y_\tau) = (\mu - r + \delta)/\sigma$, то

$$Z_t = Z_t^{\mu-r+\delta} = \exp\left\{-\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)^2 t\right\}.$$

Так как

$$\mathbf{E}\exp\{\sigma W_t\} = \exp\{(\sigma^2 t)/2\},$$

то $\mathbb{E}Z_t^{\mu-r+\delta} = 1$, т.е. условие (1.9) для $Z_t^{\mu-r+\delta}$ выполняется.

Пусть $\mathbb{P}^* = \mathbb{P}^{\mu-r+\delta}$, определяемая преобразованием $d\mathbb{P}_t^{\mu-r+\delta} = Z_t^{\mu-r+\delta}d\mathbb{P}_t$, и пусть $\mathbb{E}^* = \mathbb{E}^{\mu-r+\delta}$. Тогда, согласно теореме Гирсанова, процесс $W_t^{\mu-r+\delta}$ вида (1.7) является винеровским относительно меры $\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}$, т.е. для $t > \tau$ $\mathbb{E}^{\mu-r+\delta}\left(W_t^{\mu-r+\delta} - W_\tau^{\mu-r+\delta}|F_\tau\right) = 0$, $\mathbb{E}^{\mu-r+\delta}([W_t^{\mu-r+\delta} - W_\tau^{\mu-r+\delta}]^2|F_\tau) = t - \tau$. Таким образом, обозначая через $Law(\cdot|\mathbb{P})$ и $Law(\cdot|\mathbb{P}^{\mu-r+\delta})$ свойства процессов относительно $\mathbb{P}$ и $\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}$, получаем

$$Law(W^{\mu-r+\delta}|\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}) = Law(W|\mathbb{P}). \tag{1.11}$$

Тогда, согласно (1.2), (1.7), (1.11),

$$\begin{aligned} Law\left(S_t; t \le T \mid \mathbb{P}^{\mu-r+\delta}\right) &= Law(S_0 \exp\{(\mu - (\sigma^2/2))t + \sigma W_t\}; t \le T|\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}) = \\ &= Law(S_0 \exp\{(r - \delta - (\sigma^2/2))t + \sigma W_t^{\mu-r+\delta}\}; t \le T|\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}) = \\ &= Law(S_0 \exp\{(r - \delta - (\sigma^2/2))t + \sigma W_t\}; t \le T|\mathbb{P}). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Таким образом, $Law\left(S(\mu, r, \delta)|\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}\right) = Law(S(r, \delta)\mathbb{P})$, т.е. вероятностные свойства процесса $S(\mu, r, \delta)$, определяемого уравнением $d_t S_t(\mu, r, \delta) = S_t(\mu, r, \delta)\left((r - \delta)dt + \sigma dW_t^{\mu-r+\delta}\right)$, относительно $\mathbb{P}^{\mu-r+\delta}$ совпадают со свойствами процесса $S(r, \delta)$, определяемого уравнением

$$d_t S_t(r, \delta) = S_t(r, \delta)((r - \delta)dt + \sigma dW_t), \tag{1.13}$$

относительно меры $\mathbb{P}$.

Задача: Сформировать портфели $\pi_t^C(\delta) = \left(\beta_t^C(\delta), \gamma_t^C(\delta)\right)$ и $\pi_t^P(\delta) = \left(\beta_t^P(\delta), \gamma_t^P(\delta)\right)$ в случае опционов купли и продажи таким образом, чтобы формирование капиталов X_t^C и X_t^P согласно (1.3) в конечный момент времени T обеспечило выполнение платежного условия $X_T = f_T(S)$.

В данной работе для опционов купли и продажи платежные функции имеют вид [3]

$$f(S_T) = f^C(S_T) = \min\left\{(S_T - K_1)^+, K_2\right\},\ f(S_T) = f^P(S_T) = \min\left\{(K_1 - S_T)^+, K_2\right\}, \tag{1.14}$$

где $K_1 > 0$ – оговариваемая в момент заключения контракта цена реализации рискового актива в момент исполнения T, а $K_2 > 0$ – величина, ограничивающая выплату по опциону.

Далее всюду $a^+ = \max(a; 0)$,

$$\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-s^2/2}ds. \tag{1.15}$$

2. Основные результаты

Теорема 1. Пусть $b_1^C(\delta,t)$, $b_2^C(\delta,t)$, $d_1^C(\delta,t)$ и $d_2^C(\delta,t)$ определены формулами

$$b_1^C(\delta,t)=\frac{\ln(K_1/S_t)-\left(r-\delta+\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \tag{2.1}$$

$$b_2^C(\delta,t)=\frac{\ln((K_1+K_2)/S_t)-\left(r-\delta+\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \tag{2.2}$$

$$d_1^C(\delta,t)=\frac{\ln(K_1/S_t)-\left(r-\delta-\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \tag{2.3}$$

$$d_2^C(\delta,t)=\frac{\ln((K_1+K_2)/S_t)-\left(r-\delta-\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{2.4}$$

Тогда в случае опциона купли рациональная стоимость опциона $C_T(\delta)=X_0$, портфель $\pi_t^C(\delta)=\left\{\gamma_t^C(\delta),\beta_t^C(\delta)\right\}$ и капитал $X_t^C(\delta)$ определяются формулами

$$C_T(\delta)=S_0e^{-\delta T}\left[\Phi\left(b_2^C(\delta)\right)-\Phi\left(b_1^C(\delta)\right)\right]-K_1e^{-rT}\left[\Phi\left(d_2^C(\delta)\right)-\Phi\left(d_1^C(\delta)\right)\right]+K_2e^{-rT}\Phi\left(-d_2^C(\delta)\right); \tag{2.5}$$

$$\gamma_t^C(\delta)=e^{-\delta(T-t)}\left(\Phi\left(b_2^C(\delta,t)\right)-\Phi\left(b_1^C(\delta,t)\right)\right); \tag{2.6}$$

$$\beta_t^C(\delta)=-\frac{K_1}{B_t}e^{-r(T-t)}\left[\Phi\left(d_2^C(\delta,t)\right)-\Phi\left(d_1^C(\delta,t)\right)\right]+\frac{K_2}{B_t}e^{-r(T-t)}\Phi\left(-d_2^C(\delta,t)\right); \tag{2.7}$$

$$X_t^C(\delta)=S_te^{-\delta(T-t)}\left[\Phi\left(b_2^C(\delta,t)\right)-\Phi\left(b_1^C(\delta,t)\right)\right]-$$
$$-K_1e^{-r(T-t)}\left[\Phi\left(d_2^C(\delta,t)\right)-\Phi\left(d_1^C(\delta,t)\right)\right]+K_2e^{-r(T-t)}\Phi\left(-d_2^C(\delta,t)\right), \tag{2.8}$$

где $b_1^C(\delta)=b_1^C(\delta,t)$, $b_2^C(\delta)=b_2^C(\delta,t)$, $d_1^C(\delta)=d_1^C(\delta,t)$, $d_2^C(\delta)=d_2^C(\delta,t)$ при $t=0$.

Доказательство. Согласно общей теории [1, 2],

$$X_t=e^{-r(T-t)}F_{T-t}(S_t); \tag{2.9}$$

$$X_0=e^{-rT}F_T(S_0); \tag{2.10}$$

$$\gamma_t=e^{-r(T-t)}\frac{\partial F_{T-t}(s)}{\partial s}(S_t); \tag{2.11}$$

$$\beta_t=\frac{1}{B_T}\left[F_{T-t}(S_t)-S_t\frac{\partial F_{T-t}(s)}{\partial s}(S_t)\right], \tag{2.12}$$

где $F_{T-t}(S_t)=E\{f_T(S_T(r,\delta))|S_t\}$. Тогда из (1.1), (1.2), (1.13) и (1.14) с учетом (2.1) – (2.4)

$$F_{T-t}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\min\left\{\left(se^{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z}-K_1\right)^+,K_2\right\}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_1^C(t)}^{d_2^C(t)}\left(se^{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z}-K_1\right)e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_2^C(t)}^{\infty}K_2e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}se^{(r-\delta)(T-t)}\int_{d_1^C(t)}^{d_2^C(t)}e^{-\frac{z^2}{2}+\sigma\sqrt{T-t}z-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}dz-K_1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_1^C(t)}^{d_2^C(t)}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+K_2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_2^C(t)}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=se^{(r-\delta)(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_1^C(t)}^{d_2^C(t)}e^{-\frac{\left(z-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2}{2}}dz-K_1\left[\Phi\left(d_2^C(\delta,t)\right)-\Phi\left(d_1^C(\delta,t)\right)\right]+K_2\Phi\left(-d_2^C(\delta,t)\right)=$$

$$=se^{(r-\delta)(T-t)}\left[\Phi\left(b_2^C(\delta,t)\right)-\Phi\left(b_1^C(\delta,t)\right)\right]-K_1\left[\Phi\left(d_2^C(\delta,t)\right)-\Phi\left(d_1^C(\delta,t)\right)\right]+K_2\Phi\left(-d_2^C(\delta,t)\right). \tag{2.13}$$

Таким образом (2.5) – (2.8) следуют из (2.9) – (2.13).

Теорема 2. Пусть $b_1^P(\delta,t)$, $b_2^P(\delta,t)$, $d_1^P(\delta,t)$ и $d_2^P(\delta,t)$ определены формулами

$$b_1^P(\delta,t)=\frac{\ln(K_1/S_t)-\left(r-\delta+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \tag{2.14}$$

$$b_2^P(\delta,t)=\frac{\ln((K_1-K_2)/S_t)-\left(r-\delta+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \tag{2.15}$$

$$d_1^P(\delta,t)=\frac{\ln(K_1/S_t)-\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \tag{2.16}$$

$$d_2^P(\delta,t)=\frac{\ln((K_1-K_2)/S_t)-\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{2.17}$$

Тогда в случае опциона продажи рациональная стоимость опциона $P_T(\delta)=X_0$, портфель $\pi_t^P(\delta)=\{\gamma_t^P(\delta),\beta_t^P(\delta)\}$ и капитал $X_t^P(\delta)$ определяются формулами

$$P_T(\delta)=-S_0e^{-\delta T}\left[\Phi\left(b_1^P(\delta)\right)-\Phi\left(b_2^P(\delta)\right)\right]+K_1e^{-rT}\left[\Phi\left(d_1^P(\delta)\right)-\Phi\left(d_2^P(\delta)\right)\right]+K_2e^{-rT}\Phi\left(d_2^P(\delta)\right); \tag{2.18}$$

$$\gamma_t^P(\delta)=-e^{-\delta(T-t)}\left[\Phi\left(b_1^P(\delta,t)\right)-\Phi\left(b_2^P(\delta,t)\right)\right]; \tag{2.19}$$

$$\beta_t^P(\delta)=\frac{K_1}{B_t}e^{-r(T-t)}\left[\Phi\left(d_1^P(\delta,t)\right)-\Phi\left(d_2^P(\delta,t)\right)\right]+\frac{K_2}{B_t}e^{-r(T-t)}\Phi\left(d_2^P(\delta,t)\right); \tag{2.20}$$

$$X_t^C(\delta)=-S_te^{-\delta(T-t)}\left[\Phi\left(b_1^P(\delta,t)\right)-\Phi\left(b_2^P(\delta,t)\right)\right]+$$

$$+K_1e^{-r(T-t)}\left[\Phi\left(d_1^P(\delta,t)\right)-\Phi\left(d_2^P(\delta,t)\right)\right]+K_2e^{-r(T-t)}\Phi\left(d_2^P(\delta,t)\right), \tag{2.21}$$

где $b_1^P(\delta)=b_1^P(\delta,t)$, $b_2^P(\delta)=b_2^P(\delta,t)$, $d_1^P(\delta)=d_1^P(\delta,t)$ и $d_2^P(\delta)=d_2^P(\delta,t)$ при $t=0$.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1. Так как $f^P(S_T)=\min\{(K_1-S_T)^+,K_2\}$, то из (1.1), (1.2), (1.13), с учетом (2.14) – (2.17) следует

$$F_{T-t}^P(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\min\left\{\left(K_1-se^{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}}\right)^+,K_2\right\}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_2^P(t)}^{d_1^P(t)}\left(K_1-se^{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}}\right)e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_2^P(t)}K_2e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}se^{(r-\delta)(T-t)}\int_{d_2^P(t)}^{d_1^P(t)}e^{-\frac{z^2}{2}+\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}K_1\int_{d_2^P(t)}^{d_1^P(t)}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}K_2\int_{-\infty}^{d_2^P(t)}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=-se^{(r-\delta)(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_2^P(t)}^{d_1^P(t)}e^{-\frac{\left(z-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2}{2}}dz+K_1\left[\Phi\left(d_1^P(\delta,t)\right)-\Phi\left(d_2^P(\delta,t)\right)\right]+K_2\Phi\left(d_2^P(\delta,t)\right)=$$

$$=-se^{(r-\delta)(T-t)}\left[\Phi\left(b_1^P(\delta,t)\right)-\Phi\left(b_2^P(\delta,t)\right)\right]+K_1\left[\Phi\left(d_1^P(\delta,t)\right)-\Phi\left(d_2^P(\delta,t)\right)\right]+K_2\Phi\left(d_2^P(\delta,t)\right). \tag{2.22}$$

Путем подстановки (2.22) в (2.10) – (2.13) получаем (2.18) – (2.21).

3. Анализ решения

Теорема 3. Пусть $\tilde{C}_T(\delta)$, $\tilde{\gamma}_t^C(\delta)$, $\tilde{\beta}_t^C(\delta)$, $\tilde{X}_t^C(\delta)$ есть пределы $C_T(\delta)$, $\gamma_t^C(\delta)$, $\beta_t^C(\delta)$, $X_t^C(\delta)$ при $K_2\uparrow\infty$. Пусть $\tilde{P}_T(\delta)$, $\tilde{\gamma}_t^P(\delta)$, $\tilde{\beta}_t^P(\delta)$, $\tilde{X}_t^P(\delta)$ есть пределы $P_T(\delta)$, $\gamma_t^P(\delta)$, $\beta_t^P(\delta)$, $X_t^P(\delta)$ при $K_2\uparrow K_1$. Тогда

$$\tilde{C}_T(\delta)=S_0e^{-\delta T}\Phi\left(-b_1^C(\delta)\right)-K_1e^{-rT}\Phi\left(-d_1^C(\delta)\right); \tag{3.1}$$

$$\tilde{\gamma}_t^C(\delta)=e^{-\delta(T-t)}\Phi\left(-b_1^C(\delta,t)\right); \tag{3.2}$$

$$\tilde{\beta}_t^C(\delta)=-\frac{K_1}{B_t}e^{-r(T-t)}\Phi\left(-d_1^C(\delta,t)\right); \tag{3.3}$$

$$\tilde{X}_t^C(\delta)=S_te^{-\delta(T-t)}\Phi\left(-b_1^C(\delta,t)\right)-K_1e^{-r(T-t)}\Phi\left(-d_1^C(\delta,t)\right); \tag{3.4}$$

$$\tilde{P}_T=-S_0e^{-\delta T}\Phi\left(b_1^P(\delta)\right)+K_1e^{-rT}\Phi\left(d_1^P(\delta)\right); \tag{3.5}$$

$$\tilde{\gamma}_t^P=-e^{-\delta(T-t)}\Phi\left(b_1^P(t)\right); \tag{3.6}$$

$$\tilde{\beta}_t^P=\frac{K_1}{B_t}e^{-r(T-t)}\Phi\left(d_1^P(\delta,t)\right); \tag{3.7}$$

$$\tilde{X}_t^C=-S_te^{-\delta(T-t)}\Phi\left(b_1^P(\delta,t)\right)+K_1e^{-r(T-t)}\Phi\left(d_1^P(\delta,t)\right). \tag{3.8}$$

Данные результаты следуют непосредственно из теорем 1 и 2 и представляют собой полное решение задач хеджирования стандартных европейских опционов при наличии выплат по дивидендам. В случае $\delta=0$, когда выплаты по дивидендам отсутствуют, формула (3.1) переходит в известную формулу Блэка – Шоулса [4].

Теорема 4. Имеют место паритетные соотношения:

$$P_T(\delta)=C_T(\delta)+S_0e^{-\delta T}\left[\Phi\left(b_2^P(\delta)\right)-\Phi\left(b_2^C(\delta)\right)\right]-$$
$$-K_1e^{-rT}\left[\Phi\left(d_2^P(\delta)\right)-\Phi\left(d_2^C(\delta)\right)\right]+K_2e^{-rT}\left[\Phi\left(d_2^P(\delta)\right)-\Phi\left(-d_2^C(\delta)\right)\right]; \tag{3.9}$$

$$\gamma_t^P(\delta)=\gamma_t^C(\delta)+e^{-\delta(T-t)}\Phi\left(b_2^P(\delta,t)\right)-\Phi\left(b_2^C(\delta,t)\right); \tag{3.10}$$

$$\beta_t^P(\delta)=\beta_t^C(\delta)+\frac{K_1}{B_t}e^{-r(T-t)}\left[\Phi\left(d_2^C(\delta,t)\right)-\Phi\left(d_2^P(\delta,t)\right)\right]+$$
$$+\frac{K_2}{B_t}e^{-r(T-t)}\left[\Phi\left(d_2^P(\delta,t)\right)-\Phi\left(-d_2^C(\delta,t)\right)\right]; \tag{3.11}$$

$$X_t^P(\delta)=X_t^C(\delta)+S_te^{-\delta(T-t)}\left[\Phi\left(b_2^P(\delta,t)\right)-\Phi\left(b_2^C(\delta,t)\right)\right]-$$
$$-K_1e^{-r(T-t)}\left[\Phi\left(d_2^P(\delta,t)\right)-\Phi\left(d_2^C(\delta,t)\right)\right]+K_2e^{-r(T-t)}\left[\Phi\left(d_2^P(\delta,t)\right)-\Phi\left(-d_2^C(\delta,t)\right)\right]. \tag{3.12}$$

Доказательство следует непосредственно из соотношений теорем 1 и 2.

Теорема 5. Асимптотические свойства решения заключаются в следующем:

1. $\lim\limits_{\sigma\to0}\gamma_t^C(\delta)=0$, $K_1e^{-r(T-t)}>S_1e^{-\delta(T-t)}$; $\lim\limits_{\sigma\to\infty}\gamma_t^C(\delta)=0$;
2. $\lim\limits_{\sigma\to0}\beta_t^C(\delta)=0$, $K_1e^{-r(T-t)}>S_1e^{-\delta(T-t)}$; $\lim\limits_{\sigma\to\infty}\beta_t^C(\delta)=0$;
3. $\lim\limits_{\sigma\to0}X_t^C(\delta)=0$, $K_1e^{-r(T-t)}>S_1e^{-\delta(T-t)}$; $\lim\limits_{\sigma\to\infty}X_t^C(\delta)=0$; $\lim\limits_{S_t\to0}X_t^C(\delta)=0$; $\lim\limits_{S_t\to\infty}X_t^C(\delta)=K_2e^{-r(T-t)}$;
4. $\lim\limits_{\sigma\to0}C_T(\delta)=0$, $K_1e^{-r(T-t)}>S_1e^{-\delta(T-t)}$; $\lim\limits_{\sigma\to\infty}C_T(\delta)=0$; $\lim\limits_{S_0\to0}C_T(\delta)=0$; $\lim\limits_{S_0\to\infty}C_T(\delta)=K_2e^{-rT}$;
5. $\lim\limits_{\sigma\to0}\gamma_t^P(\delta)=0$, $(K_1-K_2)e^{-r(T-t)}>S_1e^{-\delta(T-t)}$; $\lim\limits_{\sigma\to\infty}\gamma_t^P(\delta)=0$;
6. $\lim\limits_{\sigma\to0}\beta_t^P(\delta)=\frac{K_2}{B_t}e^{-r(T-t)}$, $(K_1-K_2)e^{-r(T-t)}>S_1e^{-\delta(T-t)}$; $\lim\limits_{\sigma\to\infty}\beta_t^P(\delta)=0$;
7. $\lim\limits_{\sigma\to0}X_t^P(\delta)=K_2e^{-r(T-t)}$, $(K_1-K_2)e^{-r(T-t)}>S_1e^{-\delta(T-t)}$; $\lim\limits_{\sigma\to\infty}X_t^P(\delta)=0$; $\lim\limits_{S_t\to0}X_t^P(\delta)=K_2e^{-r(T-t)}$; $\lim\limits_{S_t\to\infty}X_t^P(\delta)=0$;

8. $\lim\limits_{\sigma\to 0} P_T(\delta)=K_2e^{-r(T-t)}$, $(K_1-K_2)e^{-r(T-t)}>S_1e^{-\delta(T-t)}$; $\lim\limits_{\sigma\to\infty} P_T(\delta)=0$; $\lim\limits_{S_0\to 0} P_T(\delta)=K_2e^{-r(T-t)}$; $\lim\limits_{S_0\to\infty} P_T(\delta)=0$.

Доказательство сформулированных результатов проводится непосредственно с использованием свойств функции Лапласа: $\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x)=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x)=0$; $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$; $\Phi(x)$ – непрерывна справа по x. Экономическая интерпретация этих свойств очевидна: стоимость опциона равна нулю в ситуации, когда предъявлять его к исполнению не имеет смысла; стоимость опциона резко возрастает, когда он всегда будет предъявлен к исполнению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. – М.: ФАЗИС, 1998. – 1016 с.
2. *Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В.* К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39. – № 1. – С. 80 – 129.
3. *Rubinstein M.* Exotic options // Finance working paper. – Inst. of Business and Economic Research. Univ. of California, Berkeley, 1991. – № 220.
4. *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // J. of Political Economy. – 1973. – May/June. – P. 637 – 657.

УДК 519.2

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С КУМУЛЯТИВНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА И НЕЗАВИСИМЫМ ВРЕМЕНЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ КЛИЕНТА С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

К.А. Горбенко

Томский государственный университет

E-mail: KirillGorbenko@narod.ru

Рассматривается модель функционирования страховой компании в виде бесконечнолинейной системы массового обслуживания. Интенсивность входящего потока является условной и линейно зависит от числа поступивших клиентов (рисков). Время обслуживания клиента независимое и имеет произвольную функцию распределения.

Ключевые слова: *кумулятивный поток, произвольное обслуживание.*

Предлагаемая модель строится на основе трех случайных процессов:

$N(t)$ – число клиентов, пришедших в компанию на интервале $[t_0,t]$, где t_0 – момент возникновения компании и $N(t_0)=0$;

$k(t)$ – число обслуживаемых клиентов в момент времени t, $k(t_0)=0$;

$S(t)$ – величина капитала компании в момент времени t, $S(t_0)=S_0$.

Опишем события, которые могут произойти на интервале $[t, t+\Delta t]$, где Δt достаточно мало.

1) Пришел страхователь. Предполагается, что поток страхователей обладает следующими свойствами:

$$\mathrm{P}\{\Delta N(t)=1|N(t)=N\}=(\lambda+\beta N)\Delta t+o(\Delta t);$$

$$\mathrm{P}\{\Delta N(t)=0|N(t)=N\}=1-(\lambda+\beta N)\Delta t+o(\Delta t),$$

$$\mathrm{P}\{\Delta N(t)>1|N(t)=N\}=o(\Delta t),$$

где $\Delta N(t)=N(t+\Delta t)-N(t)$, $\lambda>0$, $\beta>0$.

С каждым приходом клиента связывается страховой взнос, величина которого моделируется независимой случайной величиной ξ со средними характеристиками

$$\mathrm{M}\xi=a_1,\ \mathrm{M}\xi^2=a_2.$$

2) Пришел повторный страховой взнос. Обозначим через $\Delta M(t)$ число повторных взносов на интервале $[t, t+\Delta t]$, тогда предполагается

$$\mathrm{P}\{\Delta M(t)=1|k(t)=k\}=\lambda_\zeta k\Delta t+o(\Delta t);$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} m^2\,\mathrm{P}\{\Delta M(t)=m|k(t)=k\}=o(\Delta t).$$