ISSN 1561-7793

Вестник

Томского государственного университета

ПРИЛОЖЕНИЕ

№ 18 АВГУСТ 2006

Материалы международных, всероссийских и региональных научных конференций, симпозиумов, школ, проводимых в ТГУ

УДК 519.872

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЙ BMAP-ПОТОКА СОБЫТИЙ

О.С. Жанхотова, И.С. Шмырин

Томский государственный университет

E-mail: igor@fpmk.tsu.ru

Рассматривается задача оптимального оценивания параметров BMAP-потока событий по наблюдениям за моментами наступления событий потока. Находятся выражения для апостериорных вероятностей состояний управляющего процесса BMAP-потока. Предлагается алгоритм оптимального оценивания по критерию максимума апостериорной вероятности состояния, основанный на рекуррентном расчете апостериорных вероятностей состояний управляющего процесса.

Ключевые слова: *BMAP-поток событий, управляющий процесс, оценка состояний, апостериорная плотность вероятностей.*

Введение

В современной литературе по теории массового обслуживания значительное число работ посвящено исследованию систем обслуживания с нестационарными потоками событий. Замечено, что такие математические модели потоков достаточно адекватно описывают потоки заявок в реальных современных информационно-вычислительных сетях. В терминах различных математических школ такие потоки называют дважды стохастическими потоками [1, 2] или коррелированными потоками [3], BMAP-потоками событий [3, 4]. При исследовании систем обслуживания с входящими BMAP-потоками событий определенный интерес представляют задачи нахождения различных характеристик входящих потоков. Примером таких исследований могут служить работы [1, 5, 6]. В данной работе для наиболее общей модели потоков – BMAP-потока событий – рассмотрена задача оптимального оценивания состояний потока по наблюдениям за моментами наступления событий потока.

1. Постановка задачи

Дадим краткое описание математической модели BMAP-потока событий. Моменты времени наступления событий потока определяются поведением стационарного кусочно-постоянного случайного процесса $\nu(t)$ с непрерывным временем и пространством состояний $\{1, 2,..., n\}$, называемого также управляющим процессом MAP-потока событий. Время пребывания процесса $\nu(t)$ в состоянии i случайно и распределено экспоненциально с параметром λ_i, $i=\overline{1,n}$. По окончании пребывания процесса в состоянии i процесс переходит в состояние j, при этом в момент перехода может наступить k событий потока, $k \geq 0$. Вероятность того, что по окончании состояния i процесс $\nu(t)$ перейдет в состояние j и в момент перехода наступит k событий, есть величина $p_{i,j}^{(k)}$, $i,j=\overline{1,n}$, $k \geq 0$. При этом полагается, что переход процесса $\nu(t)$ из состояния i в то же самое состояние i без наступления событий невозможен, т.е.

$$p_{i,i}^{(0)} = 0,\ i=\overline{1,n}. \tag{1}$$

Процесс $\nu(t)$ полагается ненаблюдаемым, параметры потока (параметры распределений длительностей состояний λ_i и вероятности переходов $p_{i,j}^{(k)}$, $i,j=\overline{1,n}$, $k \geq 0$) полагаются известными. Наблюдениями за процессом $\nu(t)$ являются моменты времени наступления событий потока. Требуется по наблюдениям за моментами времени наступления событий $t_1, t_2, ..., t_n$ в момент окончания наблюдений оценить текущее состояние процесса $\nu(t)$. Для оценивания состояния будем использовать критерий максимума апостериорной вероятности, который, согласно [6], является оптимальным в смысле полной вероятности ошибки вынесения решения:

$$\hat{\nu}(t) = \arg\max_{j=\overline{1,n}} w_j(t), \tag{2}$$

где $w_j(t) = p(\nu(t)=j \mid t) = p(\nu(t)=j \mid 0 < t_1 < t_2 < ... < t_n \leq t)$ – апостериорная вероятность состояния j процесса $\nu(t)$ в момент времени t. Для построения алгоритма оценивания получим формулы для расчета апостериорных вероятностей $w_j(t)$, $j=\overline{1,n}$.

2. Вывод выражений для апостериорных вероятностей состояний

Пусть время меняется дискретно с малым шагом Δt: $t = k\Delta t$, $k = 0,1,2...$. Рассмотрим процесс $(\nu^{(k)}, r_k)$, где $\nu^{(k)} = \nu(k\Delta t)$ – значение процесса $\nu(t)$ в момент времени $k\Delta t$, $\nu^{(k)} \in \{1,2,...,n\}$, $r_k = r((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ – число событий, наступивших на интервале времени $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$. Процесс $(\nu^{(k)}, r_k)$ – марковский, так как значение $\nu^{(k)} = \nu(k\Delta t)$ зависит лишь от значения $\nu^{(k-1)} = \nu((k-1)\Delta t)$ в силу экспоненциального распределения длительностей состояний процесса $\nu(t)$, значение r_k зависит лишь от значения $\nu^{(k-1)}$ в силу того же экспоненциального распределения длительностей состояний. Рассмотрим $(\vec{\nu}^{(m)}, \vec{r}_m)$, где $\vec{\nu}^{(m)} = (\nu^{(0)}, \nu^{(1)}, ..., \nu^{(m)})$ – последовательность значений $\nu^{(k)}$ на интервале $(0, m\Delta t)$, $\vec{r}_m = (r_0, r_1, ..., r_m)$ – последовательность наблюдений за наступлением событий на интервале $(0, m\Delta t)$. В силу марковости процесса $(\nu^{(k)}, r_k)$ совместная вероятность значений $(\vec{\nu}^{(m)}, \vec{r}_m)$ есть произведение переходных вероятностей:

$$p\left(\vec{\nu}^{(m)}, \vec{r}_m\right) = p\left(\nu^{(0)}, r_0\right) \prod_{k=1}^{m} p\left(\nu^{(k)}, r_k \mid \nu^{(k-1)}, r_{k-1}\right).$$

Аналогично записывается совместная вероятность значений $\left(\vec{\nu}^{(m+1)}, \vec{r}_{m+1}\right)$:

$$p\left(\vec{\nu}^{(m+1)}, \vec{r}_{m+1}\right) = p\left(\nu^{(0)}, r_0\right) \prod_{k=1}^{m+1} p\left(\nu^{(k)}, r_k \mid \nu^{(k-1)}, r_{k-1}\right),$$

откуда, с учетом предыдущей формулы, получаем

$$p\left(\vec{\nu}^{(m+1)}, \vec{r}_{m+1}\right) = p\left(\vec{\nu}^{(m)}, \vec{r}_m\right) p\left(\nu^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \nu^{(m)}, r_m\right).$$

В последнем выражении суммируем по всем возможным значениям $\nu^{(k)}$, $k = \overline{1,m}$:

$$p\left(\nu^{(m+1)}, \vec{r}_{m+1}\right) \sum_{\nu^{(m)}=1}^{n} p\left(\nu^{(m)}, \vec{r}_m\right) p\left(\nu^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \nu^{(m)}, r_m\right). \tag{3}$$

По формуле условной вероятности

$$p\left(\nu^{(m+1)}, \vec{r}_{m+1}\right) = p\left(\nu^{(m+1)} \mid \vec{r}_{m+1}\right) p\left(\vec{r}_{m+1}\right), \quad p\left(\nu^{(m)}, \vec{r}_m\right) = p\left(\nu^{(m)} \mid \vec{r}_m\right) p\left(\vec{r}_m\right),$$

так что (3) можно переписать в виде

$$p\left(\nu^{(m+1)}, \vec{r}_{m+1}\right) = \frac{p\left(\vec{r}_m\right)}{p\left(\vec{r}_{m+1}\right)} \sum_{i=1}^{n} p\left(\nu^{(m)} = i \mid \vec{r}_m\right) p\left(\nu^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \nu^{(m)} = i, r_m\right),$$

откуда, используя условие нормировки $\sum_{j=1}^{n} p\left(\nu^{(m+1)} = j \mid \vec{r}_m\right) = 1$, получаем (3) в виде

$$p\left(\nu^{(m+1)}, \vec{r}_{m+1}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p\left(\nu^{(m)} = i \mid \vec{r}_m\right) p\left(\nu^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \nu^{(m)} = i, r_m\right)}{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} p\left(\nu^{(m)} = i \mid \vec{r}_m\right) p\left(\nu^{(m+1)} = j, r_{m+1} \mid \nu^{(m)} = i, r_m\right)}. \tag{4}$$

Положим в (4) для определенности $\nu^{(m+1)} = j$ и рассмотрим переходную вероятность $p\left(\nu^{(m+1)} = j, r_{m+1} \mid \nu^{(m)} = i, r_m\right)$. Учитывая приведенные выше рассуждения о марковости процесса $\left(\nu^{(k)}, r_k\right)$, имеем

$$p\left(\nu^{(m+1)} = j, r_{m+1} \mid \nu^{(m)} = i, r_m\right) = p\left(\nu^{(m+1)} = j, r_{m+1} \mid \nu^{(m)} = i\right), \quad i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Пусть $r_{m+1} = 0$. Тогда вероятность (5) для случая $i = j$ есть вероятность того, что, находясь в момент $m\Delta t$ в состоянии j, процесс $\nu(t)$ оказался в момент $(m+1)\Delta t$ в том же состоянии j и при этом событие потока не наступило. В силу (1) (невозможности перехода из состояния в то же самое состояние без наступления события) описанная ситуация может сложиться лишь в случае, если для процесса $\nu(t)$ не произошло смены состояния на интервале $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$, то есть

$$p\left(\nu^{(m+1)} = j, r_{m+1} = 0 \mid \nu^{(m)} = j\right) = 1 - \lambda_j \Delta t + o(\Delta t), \quad j = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Для случая $i \neq j$ вероятность (5) есть вероятность того, что процесс $\nu(t)$, находясь в момент $m\Delta t$ в состоянии i, оказался в момент $(m+1)\Delta t$ в состоянии j, $j \neq i$, при этом события не наступило. В этом случае

$$p\left(\nu^{(m+1)} = j, r_{m+1} = 0 \mid \nu^{(m)} = i\right) = \left(1 - \lambda_j \Delta t + o(\Delta t)\right) p_{i,j}^{(0)}, \ i \neq j, \ i, j = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Пусть теперь $r_{m+1} = k$, $k \geq 1$. Согласно математической модели потока, из факта наступления событий на интервале $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ следует факт перехода процесса $\nu(t)$ из состояния в состояние на интервале $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$. В этом случае

$$p\left(\nu^{(m+1)} = j, r_{m+1} = 1 \mid \nu^{(m)} = i\right) = \left(\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)\right) p_{i,j}^{(k)}, \ i, j = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Введем обозначения: $t = m\Delta t$, $t + \Delta t = (m+1)\Delta t$, $p\left(\nu^{(m)} = i \mid \vec{r}_m\right) = w_i(t)$, $p\left(\nu^{(m+1)} = j \mid \vec{r}_{m+1}\right) = w_j(t + \Delta t)$. Положим в (4) $r_{m+1} = 0$. С использованием обозначений и формул (6), (7), учитывая (1), перепишем (4) в виде

$$w_j(t+\Delta t) = \frac{w_j(t)\left(1 - \lambda_j \Delta t\right) + \sum_{i=1}^{n} w_i(t) \lambda_i p_{i,j}^{(0)} \Delta t + o(\Delta t)}{\sum_{j=1}^{n} \left\{ w_j(t)\left(1 - \lambda_j \Delta t\right) + \sum_{i=1}^{n} w_i(t) \lambda_i p_{i,j}^{(0)} \Delta t \right\} + o(\Delta t)}, \ j = \overline{1,n}.$$

Производя в последнем выражении несложные преобразования и устремляя $\Delta t \to 0$, будем иметь

$$\frac{dw_j(t)}{dt} = w_j(t) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(1 - \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}^{(0)}\right) w_i(t) - \lambda_j w_j(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{i,j}^{(0)} w_i(t), \ j = \overline{1,n}.$$

Обозначая

$$z_i = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}^{(k)}, \ i = \overline{1,n}, \tag{9}$$

и учитывая, что $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}^{(k)} = 1$, $i = \overline{1,n}$, окончательно получаем

$$\frac{dw_j(t)}{dt} = w_j(t) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i w_i(t) - \lambda_j w_j(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{i,j}^{(0)} w_i(t), \ j = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Система (10) представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно $w_j(t)$, $j = \overline{1,n}$, где $w_j(t)$ – апостериорная вероятность состояния j процесса $\nu(t)$. Решение системы (10) определяет поведение апостериорных вероятностей состояний на интервалах между моментами наступления событий потока.

Положим теперь в (4) $r_{m+1} = k$, $k \geq 1$. Используя введенные обозначения и формулу (8), получаем (4) в виде

$$w_j(t+\Delta t) = \frac{\Delta t \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_1(i,j) w_i(t) + o(\Delta t)}{\Delta t \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_1(i,j) w_i(t) + o(\Delta t)}, \ j = \overline{1,n}.$$

Пусть t_s – момент времени наступления событий потока, $t_s \in (t, t + \Delta t)$. Обозначим $\Delta t' = t_s - t$, $\Delta t'' = t + \Delta t - t_s$ ($\Delta t' + \Delta t'' = \Delta t$). Устремим независимо $\Delta t'$ и $\Delta t''$ к нулю (при этом $\Delta t \to 0$). Получим

$$w_j(t_s + 0) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{i,j}^{(k)} w_i(t_s - 0)}{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{i,j}^{(k)} w_i(t_s - 0)}, \ j = \overline{1,n}, \ k = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Выражения (11) представляют собой формулы пересчета апостериорных вероятностей $w_j(t)$ в момент наступления k событий потока, $k \geq 1$. Заметим, что формулы (11) определяют граничные условия для решения системы (10) на интервале (t_s, t).

Найдем решение системы (10) на интервале (t_s,t), t_s – момент наступления события. Будем искать решение в виде

$$w_j(t)=y_j(t)\exp\left\{\int_{t_s}^{t}\varphi(\tau)d\tau\right\},\ j=\overline{1,n},$$
$$\varphi(\tau)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i w_i(\tau), \tag{12}$$

$y_j(\tau)$ – неизвестные функции, z_i, $i=\overline{1,n}$ определены в (9). Подставляя (12) в (10), будем иметь

$$\frac{dy_j(t)}{dt}\exp\left\{\int_{t_s}^{t}\varphi(\tau)d\tau\right\}+y_j(t)\exp\left\{\int_{t_s}^{t}\varphi(\tau)d\tau\right\}\varphi(t)=y_j(t)\exp\left\{\int_{t_s}^{t}\varphi(\tau)d\tau\right\}\varphi(t)-$$
$$-\lambda_j y_j(t)\exp\left\{\int_{t_s}^{t}\varphi(\tau)d\tau\right\}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i p_{i,j}^{(0)}y_j(t)\exp\left\{\int_{t_s}^{t}\varphi(\tau)d\tau\right\},\ j=\overline{1,n},$$

откуда, произведя необходимые сокращения, получим

$$\frac{dy_j(t)}{dt}=-\lambda_j y_j(t)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i p_{i,j}^{(0)}y_j(t),\ j=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Система (13) является системой линейных однородных дифференциальных уравнений относительно $y_j(t)$ вида

$$\frac{dy(t)}{dt}=Ay(t),$$
$$y(t)=\|y_j(t)\|_{n\times 1},\ \frac{dy(t)}{dt}=\left\|\frac{dy_j(t)}{dt}\right\|_{n\times 1},\ A=\|A_{ij}\|_{n\times n}, \tag{14}$$
$$A_{ij}=\begin{cases}-\lambda_i, & i=j,\\ \lambda_j p_{j,i}^{(0)}, & i\neq j,\end{cases}\quad i,j=\overline{1,n}.$$

Заметим, что, согласно [3], матрица A^{T} невырождена, стабильна и все собственные числа матрицы A^{T} имеют отрицательную действительную часть. Для случая различных вещественных собственных чисел матрицы A можно записать решение (14) в виде

$$y_j(t)=\sum_{l=1}^{n}c_l\gamma_j^{(l)}\exp\{\mu_l(t-t_s)\},\ j=\overline{1,n}, \tag{15}$$

где μ_l, $l=\overline{1,n}$, – собственные числа матрицы A системы (14), $\gamma^{(l)}=\|\gamma_j^{(l)}\|_{n\times 1}$, $l=\overline{1,n}$, – собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным числам s_l, $l=\overline{1,n}$, c_l, $l=\overline{1,n}$, – неизвестные константы. Константы c_l находим из граничного условия для (12) при $t=t_k+0$:

$$\sum_{l=1}^{n}c_l\gamma_j^{(l)}=w_j(t_s+0),\ j=\overline{1,n}. \tag{16}$$

Система (16) является системой линейных неоднородных уравнений относительно констант c_l, $l=\overline{1,n}$, вида

$$\Gamma c=w(t_s+0),$$
$$c=\|c_j\|_{n\times 1},\ w(t_s+0)=\|w_j(t_s+0)\|_{n\times 1},\ \Gamma=\|\Gamma_{ij}\|_{n\times n},$$
$$\Gamma_{ij}=\gamma_i^{(j)},\ i,j=\overline{1,n}$$

решая которую, получаем

$$c_l=\frac{\det\Gamma^{(l)}}{\det\Gamma},\ \Gamma^{(l)}=\|\Gamma_{ij}^{(l)}\|_{n\times n},\ \Gamma_{ij}^{(l)}=\begin{cases}\gamma_i^{j}, & j\neq l,\\ w_j(t_s+0), & j=l\end{cases},\ i,j=\overline{1,n}. \tag{17}$$

Используя в (12) условие нормировки $\sum_{j=1}^{n}w_j(t)=1$, записываем (12) в виде

$$w_j(t)=\frac{y_j(t)}{\sum_{l=1}^{n} y_l(t)},\ j=\overline{1,n},$$

и далее, с использованием выражений (15), получаем окончательный вид для решения системы (10):

$$w_j(t)=\frac{\sum_{l=1}^{n} c_l\gamma_j^{(l)}\exp\{\mu_l(t-t_s)\}}{\sum_{l=1}^{n} c_l\exp\{\mu_l(t-t_s)\}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^{(l)}},\ j=\overline{1,n}, \tag{18}$$

где μ_l, $\gamma^{(l)}$, $l=\overline{1,n}$ – собственные числа и соответствующие им собственные векторы матрицы A системы (14), константы c_l. $l=\overline{1,n}$, определены в (17).

3. Алгоритм оценивания состояний BMAP-потока событий

Совокупность полученных формул позволяет сформулировать оптимальный алгоритм оценивания состояний BMAP-потока событий:

1. Для заданных параметров потока λ_j, $j=\overline{1,n}$, и $p_k(i,j)$, $k=0,1$, рассчитываются собственные числа и собственные векторы матрицы A, определенной в (14). В случае различных вещественных собственных чисел переходим к п. 2; в противном случае алгоритм оценивания состояний неприменим.

2. В начальный момент времени наблюдения $t_0=0$ задается произвольное распределение вероятностей $w_j(t_0+0)$, $j=\overline{1,n}$. Полагается $s=0$.

3. Для любого момента t, $t>t_k$, рассчитываются апостериорные вероятности состояний $w_j(t)$, $j=\overline{1,n}$, по формулам (17), (18). Оценка $\hat{\nu}(t)$ состояния процесса $\nu(t)$ находится из условия максимума апостериорных вероятностей состояний (2).

4. В момент времени t_{s+1} наступления k событий полагается $s=s+1$ и рассчитываются апостериорные вероятности состояний $w_j(t_s-0)$, $j=\overline{1,n}$, по формулам (17), (18). По формуле (11) производится пересчет апостериорных вероятностей $w_j(t_k+0)$, $j=\overline{1,n}$, в момент наступления события.

5. Повторяются шаги 3, 4 алгоритма.

Заключение

Таким образом, в данной работе решена задача оптимального оценивания состояний BMAP-потока событий, предложен алгоритм рекуррентного расчета апостериорных вероятностей состояний. Подчеркнем, что предложенный алгоритм оценивания состояний применим только в случае выполнения условий для собственных чисел матрицы A (14) (они должны быть вещественны и различны).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильева Л.А., Горцев А.М.* Оценивание длительности мёртвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 12. – С. 69 – 79.
2. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оценивание длительности «мёртвого» времени и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // Радиотехника. – 2004. – № 10. – С. 8 – 16.
3. *Дудин А.Н., Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. – Мн.: БГУ, 2000. – 175 с.
4. *Lucantoni D.M.* New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. – 1991. – V. 7. – P. 1 – 46.
5. *Катаева С.С.* Об одном подходе к распознаванию МС-потока событий // Массовое обслуживание. Потоки, системы, сети. Материалы Международной конференции «Математические методы исследования телекоммуникационных сетей». – Минск, 1998. – С. 5 – 9.
6. *Нежельская Л.А.* Алгоритм оценивания состояния синхронного МС-потока // Труды 11-й Белорусской школы-семинара по массовому обслуживанию. – Минск, 1995. – С. 93 – 94.
7. *Хазен Э.М.* Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления – М.: Сов. радио, 1968. – 256 с.