ISSN 1561-7793

# Вестник

## Томского государственного университета

## ПРИЛОЖЕНИЕ

№ 18 АВГУСТ 2006

# Материалы международных, всероссийских и региональных научных конференций, симпозиумов, школ, проводимых в ТГУ

## Заключение

Результаты моделирования показывают, что при увеличении интенсивности обмена данными между распределенными сегментами, время моделирования возрастает.

При моделировании нагрузки CPU можно отметить, что преимущества работы распределенного варианта ощутимы при интенсивности обмена данными в распределенной среде приблизительно менее 0,0000075 сообщений/ед. модельного времени. При увеличении интенсивности обмена сообщениями распределенная модель выполняется медленнее, чем её локальный вариант.

При моделировании обмена данными с HDD ощущается преимущество распределенной модели при интенсивности обмена данными менее чем 0,0000721 сообщений/ед. модельного времени.

При моделировании комбинированной загрузки CPU+HDD, скорость счета распределенной модели была выше локального варианта при интенсивности обмена данными между сегментами распределенного варианта менее чем 0,0000644 сообщений/ед. модельного времени.

Таким образом, предварительная оценка интенсивности обмена сообщениями между отдельными сегментами модели при ее декомпозиции и соответственно степень эффективности самой декомпозиции могут быть получены в динамике путем расчета различных комбинаций этих сегментов.

Статический подход к получению соответствующих оценок является предметом дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Опарин Г.А., Феоктистов А.Г.* Технология разработки распределенных пакетов знаний // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Труды III Междунар. конф. – Самара: Самарский научный центр РАН, 2001. – С. 496 – 502.
2. *Fujimoto R. M.* Parallel and distributed simulation systems // Wiley, USA – 2000.
3. *Официальный* сайт GPSS World Student Version – Minuteman Software, режим доступа [http://www.minutemansoftware.com]
4. *Официальный* сайт GPSS/H – Wolverine Software Corporation, режим доступа [http://www.wolverinesoftware.com]


УДК 519.872

# БЕСКОНЕЧНО ЛИНЕЙНАЯ БЕСКОНЕЧНО ФАЗНАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМ ПРЕРЫВАНИЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ


О.Н. Галажинская

*Томский государственный университет*

**E-mail:** nazarov@fpmk.tsu.ru



В работе находятся основные характеристики бесконечно линейной бесконечно фазной системы массового обслуживания (стационарное распределение вероятностей числа заявок по фазам, среднее время пребывания заявки в системе) со случайным прерыванием обслуживания после прохождения очередной фазы.



**Ключевые слова:** *Система массового обслуживания, распределение вероятностей, время пребывания.*


В работе исследуется следующая система массового обслуживания (СМО).

В систему поступает пуассоновский поток заявок интенсивности $\lambda$. Сама система состоит из бесконечного числа линий, так что поступившая заявка занимает любую свободную линию. С другой стороны, каждая линия представляет собой бесконечно фазную однолинейную СМО. На $k$-й фазе обслуживание экспоненциальное ($k=\overline{1,\infty}$) с параметром $\mu_k$, так что среднее время пребывания на $k$-й фазе равно $1/\mu_k$. После окончания обслуживания на $k$-й фазе заявка с вероятностью $R_k$ переходит на следующую фазу и с вероятностью $1-R_k$ покидает систему.

Блок-схема изучаемой системы приведена на рис. 1. Она является математической моделью рынка товаров с так называемыми нетерпеливыми продавцами [1], которые постепенно снижают цену на свой товар (размер цены соответствует фазе обслуживания) и после определенного времени либо снижают цену на товар, либо товар будет продан и после продажи товара продавец покидает систему.

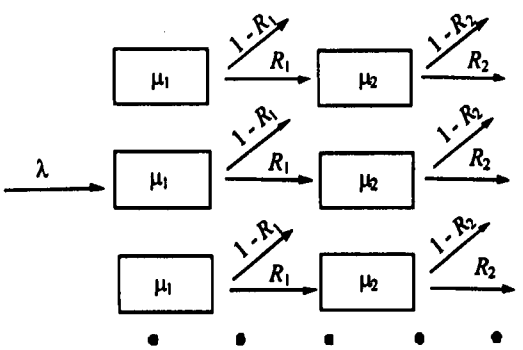


Рис. 1

## Стационарное распределение вероятностей числа заявок

Пусть $i_k(t)$ есть число заявок, находящихся на $k$-й фазе обслуживания в момент времени $t$. Введем для краткости записи вектор $I=\{i_1,i_2,i_3,...\}$ и через $P(I)=P\{i_1(t)=i_1,i_2(t)=i_2,i_3(t)=i_3,...\}$ обозначим вероятность того, что в момент времени $t$ на $k$-й фазе находится $i_k$ заявок ($k=\overline{1,\infty}$). Для стационарного распределения $P(I)$ не зависит от времени $t$.

Пусть $e_k=\{\underbrace{0,0,...,0}_{k-1},1,0,0,...\}$, где 1 находится на $k$-й позиции. Тогда, рассматривая возможные переходы в системе обычным образом [1], получаем систему уравнений

$$\left(\lambda+\sum_{k=1}^{\infty}i_k\mu_k\right)P(I)=\lambda P(I-e_1)+\sum_{k=1}^{\infty}(i_k+1)\mu_k(1-R_k)P(I+e_k)+\sum_{k=1}^{\infty}(i_k+1)\mu_kR_kP(I+e_k-e_{k+1}). \quad (1)$$

Найдем стационарное распределение методом производящих функций. Введем вектор $Z=\{z_1,z_2,z_3,...\}$ и производящую функцию

$$G(Z)=\sum_{i_1,i_2,...=0}^{\infty}\prod_{k=1}^{\infty}z_k^{i_k}P(I). \quad (2)$$

Тогда, умножая (1) на $\prod_{k=1}^{\infty}z_k^{i_k}$ и суммируя по всем значениям $i_1,i_2,i_3,...$, получим уравнение для производящей функции

$$\lambda G(Z)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_kz_k\frac{\partial G(Z)}{\partial z_k}=\lambda z_1G(Z)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(1-R_k)\frac{\partial G(Z)}{\partial z_k}+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_kR_kz_{k+1}\frac{\partial G(Z)}{\partial z_k}. \quad (3)$$

Его можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\{z_k-(1-R_k)-R_kz_{k+1}\}\frac{\partial G(Z)}{\partial z_k}=\lambda(z_1-1)G(Z) \quad (4)$$

с граничным условием $G(\mathbf{1})=1$ (здесь $\mathbf{1}=\{1,1,1,...\}$).

Будем искать производящую функцию в виде $G(Z)=\exp(\psi(Z))$. Для нее уравнение (4) можно записать как

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\{z_k-(1-R_k)-R_kz_{k+1}\}\frac{\partial\psi(Z)}{\partial z_k}=\lambda(z_1-1) \quad (5)$$

с граничным условием $\psi(\mathbf{1})=0$.

Покажем, что решение этого уравнения имеет вид

$$\psi(Z)=\sum_{n=1}^{\infty}(z_n-1)\rho_n. \quad (6)$$

Действительно, подставляя это выражение в (5), получим уравнение

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\{z_k-1-R_k(z_{k+1}-1)\}\rho_k=\lambda(z_1-1). \quad (7)$$

Возьмем $z_1<1$, $z_2=z_3=z_4=...=1$. Тогда (7) примет вид

$$\mu_1(z_1-1)\rho_1=\lambda(z_1-1),$$

откуда следует, что $\rho_1=\lambda/\mu_1$.

Вообще, пусть $z_1=z_2=...=z_{n-1}=1$, $z_n<1$, $z_{n+1}=z_{n+2}=z_{n+3}=...=1$. Тогда (7) дает соотношение

$$\mu_n(z_n-1)\rho_n=\mu_{n-1}R_{n-1}(z_n-1)\rho_{n-1},$$

откуда получается рекуррентная формула для $\rho_n$:

$$\rho_n=\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}R_{n-1}\rho_{n-1}. \quad (8)$$

Следовательно,

$$\rho_2=\frac{\mu_1}{\mu_2}R_1\rho_1=\frac{\mu_1}{\mu_2}R_1\frac{\lambda}{\mu_1}=\frac{\lambda}{\mu_2}R_1,$$

$$\rho_3=\frac{\mu_2}{\mu_3}R_2\rho_2=\frac{\mu_2}{\mu_3}R_2\frac{\lambda}{\mu_2}R_1=\frac{\lambda}{\mu_3}R_1R_2.$$

Продолжая, легко получить, что

$$\rho_n = \frac{\lambda}{\mu_n}\prod_{k=1}^{n-1} R_k \,. \tag{9}$$

Подстановкой этих выражений в (7) можно убедиться, что (7) обращается в тождество.

Таким образом, получается, что

$$\psi(Z) = (z_1 - 1)\frac{\lambda}{\mu_1} + \sum_{n=2}^{\infty}(z_n - 1)\frac{\lambda}{\mu_n}\prod_{k=1}^{n-1} R_k \,. \tag{10}$$

Следовательно

$$G(Z) = \exp\left((z_1 - 1)\frac{\lambda}{\mu_1}\right)\cdot\prod_{n=2}^{\infty}\exp\left((z_n - 1)\frac{\lambda}{\mu_n}\prod_{k=1}^{n-1} R_k\right). \tag{11}$$

Отсюда следует, что многомерное распределение $P(I)$ факторизуется, то есть является произведением одномерных распределений

$$P(I) = \prod_{n=1}^{\infty} P_n(i_n)\,, \tag{12}$$

где каждый сомножитель $P_n(i_n)$ является распределением Пуассона с параметром $\rho_n$, где

$$\rho_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu_1}, & n = 1, \\ \dfrac{\lambda}{\mu_n}\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} R_k, & n \ge 2. \end{cases} \tag{13}$$

## Время пребывания заявки в системе. Условие существования стационарного режима

В рассматриваемой бесконечно линейной СМО стационарный режим существует при условии, что математическое ожидание времени пребывания заявки в системе конечно.

Обозначим через $T_n$ математическое ожидание остаточного времени обслуживания заявки, начиная от $n$-й фазы. Тогда имеет место следующее соотношение

$$T_n = \frac{1}{\mu_n} + R_n T_{n+1}\,, \tag{14}$$

так как среднее время пребывания на $n$-й фазе равно $1/\mu_n$ и с вероятностью $R_n$ заявка продолжит свое обслуживание, но уже на $n$+1-й фазе.

Отсюда имеем следующую цепочку соотношений:

$$T_1 = \frac{1}{\mu_1} + R_1 T_2 = \frac{1}{\mu_1} + R_1\left(\frac{1}{\mu_2} + R_2 T_3\right) = \frac{1}{\mu_1} + \frac{R_1}{\mu_2} + R_1 R_2 T_3 =$$

$$= \frac{1}{\mu_1} + \frac{R_1}{\mu_2} + \frac{R_1 R_2}{\mu_3} + R_1 R_2 R_3 T_4 = \ldots = \frac{1}{\mu_1} + \sum_{k=2}^{N-1}\frac{1}{\mu_k}\prod_{m=1}^{k-1} R_m + T_N\prod_{m=1}^{N-1} R_m \,. \tag{15}$$

Если бы система имела только $N$ фаз, то тогда $T_N = 1/\mu_N$ и среднее время пребывания заявки в системе было бы равно

$$T_1^{(N)} = \frac{1}{\mu_1} + \sum_{k=2}^{N-1}\frac{1}{\mu_k}\prod_{m=1}^{k-1} R_m + \frac{1}{\mu_N}\prod_{m=1}^{N-1} R_m \,. \tag{16}$$

Но у нас число фаз бесконечно, и поэтому необходимо совершить предельный переход $N \to \infty$.

**Теорема.** Если для системы с бесконечным числом фаз ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\mu_k}\prod_{m=1}^{k-1} R_m \tag{17}$$

сходится, то в рассматриваемой СМО существует стационарный режим.

***Доказательство:***

Пусть ряд $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\mu_k}\prod_{m=1}^{k-1} R_m$ сходится. Тогда его общий член стремится к нулю, то есть $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\mu_N}\prod_{m=1}^{N-1} R_m = 0$.

Переходя в (16) к пределу $N \to \infty$, получим

$$T_1 = \lim_{N\to\infty} T_1^{(N)} = \frac{1}{\mu_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \prod_{m=1}^{k-1} R_m , \tag{18}$$

и если $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \prod_{m=1}^{k-1} R_m < +\infty$, то среднее время пребывания заявки в системе конечно и поэтому в ней существует стационарный режим.

Если $\lim_{N\to\infty} \mu_N \neq 0$, что обычно имеет место на практике, то отсюда следует, что $\prod_{m=1}^{\infty} R_m = 0$. С этим условием мы еще встретимся ниже.

Найдем теперь плотность вероятностей времени пребывания заявки в системе. Пусть $\tau_n$ есть (случайное) время пребывания заявки на $n$-й фазе и $t_n$ есть (случайное) остаточное время обслуживания заявки, начиная с $n$-й фазы. Тогда имеет место следующее очевидное соотношение:

$$t_n = \begin{cases} \tau_n, & \text{с вероятностью } 1 - R_n, \\ \tau_n + t_{n+1}, & \text{с вероятностью } R_n. \end{cases} \tag{19}$$

Введем функцию $g_n(q) = M\{\exp(-qt_n)\}$, являющуюся преобразованием Лапласа от плотности вероятностей $p_n(t_n)$ времени $t_n$. Тогда из (19) следует соотношение

$$g_n(q) = (1 - R_n) M\{\exp(-q\tau_n)\} + R_n M\{\exp(-q\tau_n - qt_n)\} =$$

$$= M\{\exp(-q\tau_n)\}(1 - R_n g_{n+1}(q)) = \frac{\mu_n}{\mu_n + q}(1 - R_n g_{n+1}(q)), \tag{20}$$

так как в силу экспоненциальности времени обслуживания $M\{\exp(-q\tau_n)\} = \mu_n/(\mu_n + q)$.

Отсюда, последовательно применяя это соотношение для $g_1(q)$, $g_2(q)$, $g_3(q)$ и т.д. легко получить, что $g_1(q)$ имеет вид

$$g_1(q) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - R_k}{R_k} \prod_{m=1}^{k} \frac{\mu_m R_m}{\mu_m + q} . \tag{21}$$

Разложим $\frac{1 - R_k}{R_k} \prod_{m=1}^{k} \frac{\mu_m R_m}{\mu_m + q}$ на простейшие. Используя так называемый метод вычеркивания, получим

$$\frac{1 - R_k}{R_k} \prod_{m=1}^{k} \frac{\mu_m R_m}{\mu_m + q} = \sum_{s=1}^{k} \frac{A_{sk}}{\mu_s + q}, \quad A_{sk} = \frac{1 - R_k}{R_k} \prod_{\substack{m=1 \\ m\neq s}}^{k} \frac{\mu_m R_m}{\mu_m - \mu_s}, \quad s = \overline{1,k}, \tag{22}$$

так что

$$g_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{k} \frac{A_{sk}}{\mu_s + q} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_s + q} \sum_{k=s}^{\infty} A_{sk} . \tag{23}$$

Отсюда, находя обратное преобразование Лапласа:

$$p_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{k} A_{sk} \exp(-\mu_s t) = \sum_{s=1}^{\infty} \exp(-\mu_s t) \sum_{k=s}^{\infty} A_{sk} ,$$

или в явном виде

$$p_1(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \left( \sum_{k=s}^{\infty} \frac{1 - R_k}{R_k} \prod_{\substack{m=1 \\ m\neq s}}^{k} \frac{\mu_m R_m}{\mu_m - \mu_s} \right) \exp(-\mu_s t) , \tag{24}$$

что и определяет плотность вероятностей времени пребывания заявки в системе.

### Распределение вероятностей числа реализованных фаз

Пусть заявка покинет систему после прохождения $n$-й фазы. Этот факт мы будем называть так: «заявка реализована на $n$-й фазе».

Обозначим через $G(n)$ вероятность того, что заявка будет реализована на $n$-й фазе. Это означает, что она не покинет систему после прохождения 1-й, 2-й, ..., $n$–1-й фаз и покинет ее после прохождения $n$-й фазы. Поэтому

$$G(1) = 1 - R_1 , \quad G(n) = (1 - R_n) \prod_{m=1}^{n-1} R_m , \quad n = \overline{2,\infty} . \tag{25}$$

Эти формулы можно записать в едином виде так:

$$G(n)=\frac{1-R_n}{R_n}\prod_{m=1}^{n}R_m,\quad n=\overline{1,\infty}. \tag{26}$$

Обозначим через $H(N)$ вероятность того, что заявка будет реализована не более чем за $N$ фаз. Тогда

$$H(N)=\sum_{n=1}^{N}G(n)=1-R_1+\sum_{n=2}^{N}(1-R_n)\prod_{m=1}^{n-1}R_m=1-R_1+\sum_{n=2}^{N}\prod_{m=1}^{n-1}R_m-\sum_{n=2}^{N}\prod_{m=1}^{n}R_m=$$

$$=1-R_1+R_1+\sum_{n=3}^{N}\prod_{m=1}^{n-1}R_m-\sum_{n=2}^{N-1}\prod_{m=1}^{n}R_m-\prod_{m=1}^{N}R_m=1-\prod_{m=1}^{N}R_m. \tag{26}$$

Пусть $H$ есть вероятность того, что заявка вообще будет когда-нибудь реализована, то есть вероятность того, что она вообще покинет систему. Тогда

$$H=\lim_{N\to\infty}H(N)=1-\prod_{m=1}^{\infty}R_m \tag{27}$$

и $1-H=\prod_{m=1}^{\infty}R_m$ есть вероятность того, что заявка никогда не покинет систему. Для нормального функционирования системы и существования в ней стационарного режима надо, чтобы $1-H=0$, то есть чтобы выполнялось условие

$$\prod_{m=1}^{\infty}R_m=0. \tag{28}$$

Как следует из теории бесконечных произведений [2], для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\ln R_m=+\infty, \tag{29}$$

то есть чтобы ряд, составленный из $\ln R_m$, был расходящимся.

Если $\lim_{m\to\infty}R_m\neq 1$, то общий член ряда (29) не стремится к нулю, ряд является расходящимся и условие (28) выполнено. Пусть теперь $\lim_{m\to\infty}R_m=1$. Так как $\forall m\ R_m\le 1$, то представим $R_m$ а виде $R_m=1-a_m,\ a_m\ge 0$. Так как

$$\lim_{m\to\infty}\frac{-\ln R_m}{a_m}=\lim_{m\to\infty}\frac{-\ln(1-a_m)}{a_m}=1,$$

то ряды $-\sum_{m=1}^{\infty}\ln R_m$ и $\sum_{m=1}^{\infty}a_m$ сходятся или расходятся одновременно [2]. Поэтому для выполнения условия (28) в этом случае достаточно, чтобы

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_m=\sum_{m=1}^{\infty}(1-R_m)=+\infty. \tag{30}$$

### Математическое ожидание числа реализованных фаз

Найдем теперь математическое ожидание $\overline{n}$ числа реализованных фаз, то есть число фаз, которые пройдет заявка, прежде чем она покинет систему. Имеем

$$\overline{n}=\sum_{n=1}^{\infty}nG(n)=1-R_1+\sum_{n=2}^{\infty}n(1-R_n)\prod_{m=1}^{n-1}R_m=$$

$$=1-R_1+\sum_{n=2}^{\infty}n\prod_{m=1}^{n-1}R_m-\sum_{n=2}^{\infty}n\prod_{m=1}^{n}R_m=$$

$$=1-R_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\prod_{m=1}^{n}R_m-\sum_{n=2}^{\infty}n\prod_{m=1}^{n}R_m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{n}R_m.$$

Таким образом,

$$\bar{n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{n} R_m , \tag{31}$$

и для конечности $\bar{n}$ надо, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{n} R_m$ сходился.

### Распределение связанных с фазами величин

Пусть с каждой фазой связана некоторая неотрицательная случайная величина $S$, которая на $m$-й фазе имеет плотность вероятностей $p_m(S)$. Будем также считать, что вероятность $R_m$ перехода на следующую фазу также зависит от значения величины $S$, то есть $R_m = R_m(S)$.

Рассмотрим случай, когда значения величины $S$ на разных фазах статистически независимы. Это предположение аналогично гипотезе Клейнрока [3] о том, что независимы продолжительности обслуживания одной и той же заявки в различных узлах сети массового обслуживания.

Пусть $S_e$ есть то значение случайной величины $S$, которое она принимает в тот момент, когда заявка покидает систему. Нас будет интересовать плотность вероятностей $p_e(S)$ этой величины.

Заявка покинет систему после прохождения $n$-й фазы с вероятностью

$$\bar{G}(n) = (1 - R_n(S_e)) \prod_{m=1}^{n-1} \bar{R}_m ,$$

где

$$\bar{R}_m = M\{R_m(S)\} = \int_0^{\infty} R_m(x) p_m(x) dx ,$$

и по определению считается, что $\prod_{m=1}^{0} \bar{R}_m = 1$. Тогда для преобразования Лапласа от функции $p_e(S)$ имеем

$$g_e(q) = M\{\exp(-qS_e)\} = \sum_{n=1}^{\infty} M\{\exp(-qS_e) | n\} \bar{G}(n) .$$

Выполняя усреднение, получим

$$g_e(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-qx} (1 - R_n(x)) p_n(x) dx \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \bar{R}_m .$$

Обратное преобразование Лапласа от $e^{-qx}$ есть $\delta(S - x)$. Поэтому

$$p_e(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \delta(x - S)(1 - R_n(x)) p_n(x) dx \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \bar{R}_m = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - R_n(S)) p_n(S) \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \bar{R}_m , \tag{32}$$

что и дает искомый результат. В частности, отсюда следует, что

$$M\{S_e\} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} S(1 - R_n(S)) p_n(S) dS \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \bar{R}_m . \tag{33}$$

Вычислить его можно лишь при конкретизации всех входящих в него функций.

### ЛИТЕРАТУРА


1. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. – М.: Наука, 1970. – Т. 2. – 800 с.
3. *Клейнрок Л.* Коммуникационные сети: стохастические потоки и задержки сообщений. – М.: Наука, 1970.