

На правах рукописи

Половников Кирилл Викторович

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ ПОДХОД К КОНФОРМНОЙ
МЕХАНИКЕ С РАСШИРЕННОЙ СУПЕРСИММЕТРИЕЙ

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2009

Работа выполнена на кафедре Высшей математики и математической физики
Томского политехнического университета

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, профессор
Томского политехнического университета
Галажинский Антон Владимирович

Научный консультант: профессор Ганноверского университета
Лехтенфельд Олаф

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук, профессор
Томского государственного
педагогического университета
Бухбиндер Иосиф Львович

кандидат физ.-мат. наук, старший научный
сотрудник Института математики
им. С.Л. Соболева СО РАН
Плетнев Николай Гаврилович

Ведущая организация: Объединенный институт ядерных исследований,
Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова

Защита состоится “24” декабря 2009 г. в 16.30 час. на заседании
диссертационного совета Д 212.267.07 по защите диссертаций на соискание
ученой степени доктора физико-математических наук при Томском государ-
ственном университете по адресу: 634050, Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского госу-
дарственного университета

Автореферат разослан “ ___ ” ноября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук
профессор

И.В. Ивонин

Актуальность темы

Поиск единой, всеобъемлющей и непротиворечивой теории всех фундаментальных взаимодействий, объединение их на основе единого общего принципа занимает одно из центральных мест в современной теоретической физике. Новые возможности на этом пути появились после открытия суперсимметрии. На основе общих соображений было показано, что симметрии специальной теории относительности, формулирующиеся в терминах группы Пуанкаре, естественным образом расширяются до суперсимметрии.

Было установлено, что суперсимметричные теории поля обладают более мягким ультрафиолетовым поведением. В ряде случаев расходимости от бозонных полей в эффективном действии полностью сокращаются с расходящимися вкладами от фермионных полей. Следующим шагом в развитии суперсимметрии стала теория супергравитации.

В настоящее время распространена точка зрения, что суперсимметричные теории являются низкоэнергетическими приближениями более фундаментальной теории – теории суперструн, которая рассматривается как наиболее вероятный кандидат на роль единой теории всех фундаментальных взаимодействий. Современная теория суперструн содержит в себе большинство важнейших фундаментальных принципов и идей квантовой теории поля: квантовую гравитацию, калибровочную инвариантность, многомерность пространства-времени, отсутствие аномалий.

В современной теоретической и математической физике пристальное внимание уделяется исследованию суперсимметричных расширений точно решаемых и интегрируемых систем, имеющих широкое применение, в том числе и в теории суперструн. Наиболее важным примером таких систем являются модели типа Калоджеро. Это обусловлено тем, что данные модели обладают конформной инвариантностью. Интерес к конформно инвариантным теориям обусловлен изучением различных аспектов АДС/КТП дуальности. Кроме того, такие модели имеют отношение к физике черных дыр. В этой связи стоит отметить предположение о том, что поскольку область пространства-

времени вблизи горизонта событий ряда экстремальных черных дыр имеет конформную группу изометрий $so(1, 2)$, то изучение конформной механики может дать некоторую информацию о квантовых свойствах черных дыр. В частности, в литературе активно обсуждается гипотеза Гиббонса и Таунсенда, согласно которой $\mathcal{N}=4$ суперконформное расширение одномерной модели Калоджеро в пределе большого числа частиц может дать микроскопическое описание экстремальной черной дыры Райсснера-Нордстрема вблизи горизонта событий.

Таким образом, построение $\mathcal{N}=4$ суперконформного расширения модели Калоджеро и других одномерных конформных квантово-механических моделей является актуальной задачей, имеющей приложения в различных областях теоретической физики.

Цель работы

Целью работы является разработка систематического метода построения $\mathcal{N}=4$ суперконформных расширений одномерных конформных квантово-механических систем; их классификация на основе теоретико-группового подхода; исследование геометрической структуры, лежащей в основе $\mathcal{N}=4$ суперконформной механики общего вида.

Научная новизна

Впервые предложен метод построения $\mathcal{N}=4$ суперконформных квантово-механических систем, основанный на нелокальной реализации супералгебры $su(1, 1|2)$. Построены новые $\mathcal{N}=4$ суперконформные модели многих частиц, ассоциированные с корневыми системами простых алгебр Ли. Впервые построено $\mathcal{N}=4$ суперконформное расширение трехчастичной модели Калоджеро. Найдены новые решения уравнения Виттена-Дайкграафа-Верлинде-Верлинде. Разработан новый суперполевой подход к построению $\mathcal{N}=4$ суперконформных систем многих частиц в одном измерении.

Научная и практическая ценность работы

Результаты диссертации представляют интерес в контексте развития теории интегрируемых систем и суперсимметричной квантовой механики. На примере трехчастичной модели Калоджеро показана эффективность предложенного метода построения $\mathcal{N} = 4$ суперконформных расширений одномерных квантово-механических систем.

Поскольку с каждой $\mathcal{N} = 4$ суперконформной системой ассоциировано некоторое решение уравнения Виттена-Дайкграафа-Верлинде-Верлинде, то обнаруживаются геометрическая и алгебраическая структуры, лежащие в основе $\mathcal{N} = 4$ суперконформной механики. Это дает возможность более систематического изучения данных систем, а также предлагает естественный метод построения новых моделей, ассоциированных с системами корневых векторов простых алгебр Ли и их обобщениями.

Следующее важное приложение полученных результатов имеет место в контексте общей теории $d = 1$, $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии. Одномерные супермультиплеты достаточно хорошо изучены, проведена их полная классификация. Однако не существует универсального метода описания взаимодействия между ними. Одномерные суперконформные системы предлагают новые возможности для изучения общей структуры взаимодействия $d = 1$, $\mathcal{N} = 4$ супермультиплетов.

Суперконформные механики можно также рассматривать как одномерные конформные теории поля. Поэтому результаты данной диссертационной работы актуальны также в контексте изучения АДС/КТП-соответствия. Представляет интерес построение новых одномерных конформных механик и построение дуальных им теорий в двумерном пространстве анти де Ситтера.

Кроме того, следует отметить возможное приложение полученных результатов в физике черных дыр. В частности, ожидается, что $\mathcal{N} = 4$ суперконформное расширение одномерной модели Калоджеро в пределе большого числа частиц может дать микроскопическое описание экстремальной черной дыры Райсснера-Нордстрема вблизи горизонта событий.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложен новый метод построения $\mathcal{N} = 4$ суперконформных квантовомеханических систем, основанный на нелокальной реализации супералгебры $su(1, 1|2)$.
2. Построен новый класс одномерных $\mathcal{N} = 4$ суперконформных квантовомеханических моделей многих частиц, ассоциированных с корневыми системами простых алгебр Ли.
3. Найден новый класс решений уравнения Виттена-Дайкграафа-Верлинде-Верлинде, ассоциированных с приводимыми системами корневых векторов и включающих радиальные слагаемые.
4. Построено $\mathcal{N} = 4$ суперконформное расширение трехчастичной модели Калоджеро.
5. Построена универсальная суперполевая формулировка для $\mathcal{N}=4$ суперконформной механики многих частиц в одномерном пространстве.

Апробация диссертации и публикации

Результаты диссертации докладывались на международных конференциях:

- III Международная конференция студентов и молодых ученых “Перспективы развития фундаментальных наук”, 2006 г., Томск;
- IV Международная конференция студентов и молодых ученых “Перспективы развития фундаментальных наук”, 2007 г., Томск;
- XVIII Международная летняя школа-семинар “Recent problems in Physics”, 2006 г., Казань;

- XIX Международная летняя школа-семинар “Recent problems in Physics”, 2007 г., Казань;
- VII Международная конференция “Supersymmetries and Quantum Symmetries (SQS’07)”, 2007 г., Дубна;
- VIII Международная конференция “Supersymmetries and Quantum Symmetries (SQS’09)”, 2009 г., Дубна;
- XVIII Международная конференция “Integrable Systems and Quantum symmetries (ISQS-18)”, 2009 г., Прага, Чехия;

а также на научных семинарах кафедры Высшей математики и математической физики Томского политехнического университета, кафедр Теоретической физики и Квантовой теории поля Томского государственного университета.

По теме диссертации опубликовано 5 статей в отечественной и зарубежной печати.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы, содержащего 125 библиографических ссылок. Общий объем диссертации составляет 107 страниц. Работа содержит 2 рисунка и 3 таблицы.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, проведен краткий обзор литературы и установлена связь результатов, представленных в диссертации, с результатами, полученными ранее другими авторами. Дано

описание структуры диссертационной работы и сформулированы основные задачи, решаемые в ней.

В **первой главе диссертации** рассматривается одномерная квантово-механическая система $n + 1$ тождественных частиц, обладающая конформной инвариантностью. Данная система описывается гамильтонианом вида

$$H = H_0 + V_B(x^1, \dots, x^{n+1}) = \frac{1}{2} p_I p_I + V_B(x^1, \dots, x^{n+1}), \quad (1)$$

а также операторами D и K – генераторами дилатаций и конформных бустов, соответственно. Их реализация на фазовом пространстве рассматриваемой системы имеет вид

$$D = -\frac{1}{4}(x^I p_I + p_I x^I) \quad \text{и} \quad K = \frac{1}{2} x^I x^I. \quad (2)$$

Здесь $I = 1, \dots, n + 1$, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Бозонный потенциал ограничен условием конформности

$$(x^I \partial_I + 2) V_B = 0, \quad (3)$$

следующим из соотношений конформной алгебры $so(1, 2)$

$$[D, H] = -i\hbar H, \quad [H, K] = 2i\hbar D, \quad [D, K] = i\hbar K. \quad (4)$$

Исследуется поведение данных операторов при действии автоморфизма конформной алгебры, имеющего следующий вид

$$T \rightarrow \tilde{T} = \left(e^{\frac{i}{\hbar} B} e^{\frac{i}{\hbar} A} \right) T \left(e^{-\frac{i}{\hbar} A} e^{-\frac{i}{\hbar} B} \right), \quad (5)$$

где

$$A = \alpha H + \frac{1}{\alpha} K - 2D, \quad B = -\alpha H_0 - \frac{1}{\alpha} K + 2D, \quad (6)$$

а параметр α имеет размерность длины. Показывается, что при таком преобразовании конформный гамильтониан переходит в гамильтониан системы свободных частиц, генератор дилатаций не изменяется, а генератор специальных конформных преобразований получает нелокальную добавку, явным

образом зависящую от конформного потенциала исходного гамильтониана

$$\begin{aligned}
\left(e^{\frac{i}{\hbar}B}e^{\frac{i}{\hbar}A}\right) H \left(e^{-\frac{i}{\hbar}A}e^{-\frac{i}{\hbar}B}\right) &= H_0, \\
\left(e^{\frac{i}{\hbar}B}e^{\frac{i}{\hbar}A}\right) D \left(e^{-\frac{i}{\hbar}A}e^{-\frac{i}{\hbar}B}\right) &= D, \\
\left(e^{\frac{i}{\hbar}B}e^{\frac{i}{\hbar}A}\right) K \left(e^{-\frac{i}{\hbar}A}e^{-\frac{i}{\hbar}B}\right) &= K + \alpha^2 e^{\frac{i}{\hbar}B} V_B e^{-\frac{i}{\hbar}B}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Установлено, что данное преобразование не зависит от параметра α , т. е. производная от оператора $e^{\frac{i}{\hbar}B}e^{\frac{i}{\hbar}A}$ по переменной α равна нулю.

Показывается, что данное преобразование также применимо к конформной механике общего вида во внешнем гармоническом потенциале. Гамильтониан такой системы под действием аналогичного автоморфизма отображается в гамильтониан системы невзаимодействующих осцилляторов.

Таким образом, появляется возможность установить структуру энергетического спектра многочастичной конформной квантовой механики общего вида в гармонической ловушке, который в данном случае совпадает (с точностью до сдвига на постоянную величину) с энергетическим спектром системы невзаимодействующих осцилляторов.

Во **второй главе диссертации** на основе найденного отображения, развивается метод построения $\mathcal{N} = 4$ суперконформных расширений одномерных квантовых систем многих частиц. Для этого вводятся операторы ψ_α^I и $\bar{\psi}^{I\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$), описывающие фермионные степени свободы, и конформная алгебра $so(1, 2)$ расширяется до суперконформной алгебры $su(1, 1|2)$. Из требования замыкания суперконформной алгебры определяется структура гамильтониана $\mathcal{N} = 4$ суперконформной механики

$$H = \frac{1}{2} U_I U_I + \frac{\hbar^2}{8} W_{IJK} W_{IJK} - U_{IJ}(x) \langle \psi_\alpha^I \bar{\psi}^{J\alpha} \rangle + \frac{1}{4} W_{IJKL}(x) \langle \psi_\alpha^I \psi^{J\alpha} \bar{\psi}^{K\beta} \bar{\psi}_\beta^L \rangle, \tag{8}$$

где

$$W_{IJK} = \partial_I \partial_J \partial_K F, \quad U_{IJ} = \partial_I \partial_J U. \tag{9}$$

Для построения $\mathcal{N} = 4$ суперконформного расширения конформной механики общего вида необходимо задать два препотенциала: U и F , которые находятся из следующей системы структурных дифференциальных уравнений в

частных производных

$$(\partial_I \partial_K \partial_P F)(\partial_J \partial_L \partial_P F) = (\partial_J \partial_K \partial_P F)(\partial_I \partial_L \partial_P F) , \quad x^I \partial_I \partial_J \partial_K F = -\delta_{JK} , \quad (10)$$

$$\partial_I \partial_J U - (\partial_I \partial_J \partial_K F) \partial_K U = 0 , \quad x^I \partial_I U = -C . \quad (11)$$

Первое уравнение в (10) нелинейно и является обобщением уравнения Виттена-Дайкграфа-Верлинде-Верлинде, известного из топологической теории поля и теории Зайберга-Виттена. Данное уравнение также лежит в основе математического описания многообразий Фробениуса. Все известные решения данного уравнения строятся на основе корневых систем простых алгебр Ли (или некоторых их обобщений – так называемых V-систем). Таким образом, устанавливается геометрическая структура, лежащая в основе $\mathcal{N} = 4$ суперконформной механики, и ее связь с простыми алгебрами Ли.

В частности, найдены решения структурных уравнений, ассоциированные с двумерными неприводимыми корневыми системами алгебр Ли A_2 , B_2 и G_2 .

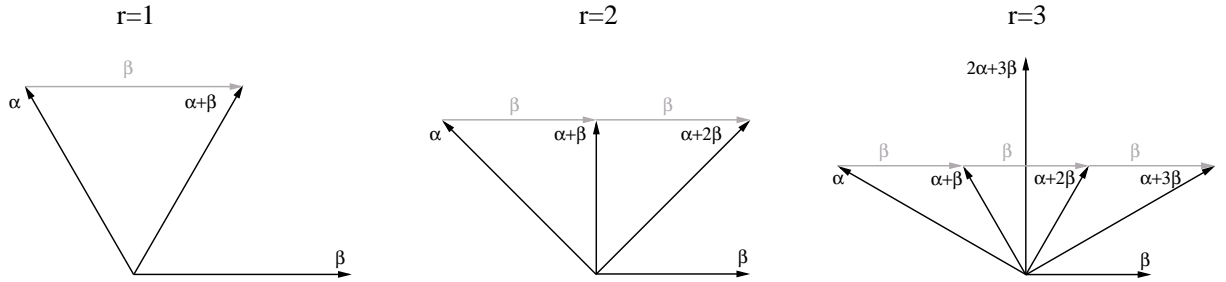


Рис. 1: Корневые системы алгебр Ли A_2 , B_2 и G_2

Также получен новый однопараметрический класс решений уравнения Виттена-Дайкграфа-Верлинде-Верлинде вида

$$F = -\frac{1}{2} f_L \sum_{\alpha \in \Phi_L^+} (\alpha \cdot x)^2 \ln |\alpha \cdot x| - \frac{1}{2} f_S \sum_{\alpha \in \Phi_S^+} (\alpha \cdot x)^2 \ln |\alpha \cdot x| , \quad (12)$$

для систем корневых векторов различной длины B_n , C_n и F_4 , где Φ^+ – набор положительных корней, а параметры f_L и f_S имеют вид

$$f_L = \frac{1}{h^\vee} + (h - h^\vee)t = \frac{1}{h} + (h - h^\vee)t' , \quad (13)$$

$$f_S = \frac{1}{h^\vee} + (h - r h^\vee)t = r \left\{ \frac{1}{h} + \left(\frac{h}{r} - h^\vee \right) t' \right\} , \quad (14)$$

и $t = t' - \frac{1}{\hbar h^\vee} \in \mathbb{R}$. Здесь h и h^\vee – коксетеровское и дуальное коксетеровское числа, соответственно.

Кроме того, в данной главе строится новый класс решений уравнения Виттена-Дайкграафа-Верлинде-Верлинде, содержащих радиальное слагаемое вида $R^2 \ln R^2$, где R – радиус-вектор в конфигурационном пространстве системы

$$F = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} f_{\alpha} (\alpha \cdot x)^2 \ln |\alpha \cdot x| - \frac{1}{2} f_R R^2 \ln R^2 . \quad (15)$$

Здесь набор векторов $\{\alpha\}$ образует неприводимую \vee -систему (т. е. не может быть разложен на взаимно ортогональные подсистемы). Данное решение затем обобщается на случай приводимой системы векторов.

Далее находится решение структурных уравнений, определяющих $\mathcal{N}=4$ суперконформное расширение трехчастичной модели Калоджеро. Установлено, что соответствующие препотенциалы имеют следующий вид

$$\begin{aligned} U(x^1, x^2, x^3) &= -g \sum_{i < j} \ln |x^i - x^j| , \\ F(x^1, x^2, x^3) &= -\frac{1}{6} (x^1 + x^2 + x^3)^2 \ln |x^1 + x^2 + x^3| - \frac{1}{4} \sum_{i < j} (x^i - x^j)^2 \ln |x^i - x^j| \\ &\quad + \frac{1}{36} \sum_{\substack{i < j \\ i \neq k \neq j}} (x^i + x^j - 2x^k)^2 \ln |x^i + x^j - 2x^k| . \end{aligned} \quad (16)$$

Кроме этого, во второй главе получено общее решение структурных уравнений для произвольной системы трех тождественных частиц.

В **третьей главе диссертации** развивается суперполевым подход к построению $\mathcal{N} = 4$ суперконформных расширений одномерных многочастичных систем. Рассматривается суперполевое действие вне массовой оболочки

$$S = - \int dt d^2\theta d^2\bar{\theta} G(u^A) , \quad \text{где } A = 1, \dots, n . \quad (17)$$

Здесь $G(u^A)$ – суперпотенциал, который является произвольной функцией набора суперполей u^A , ограниченных связями

$$[D^a, \bar{D}_a]u^A = 0 , \quad D^2 u^A = im^A \quad \text{и} \quad \bar{D}^2 u^A = -im^A . \quad (18)$$

Налагая условие суперконформной симметрии и требуя, чтобы бозонный кинетический член был плоским, получены следующие дифференциальные уравнения на суперпотенциал

$$\begin{aligned} u^A G_A - G &= a_A u^A , \\ G_{ABX} G^{XY} G_{YCD} - G_{ACX} G^{XY} G_{YBD} &= 0 , \end{aligned} \quad (19)$$

где a_A – произвольный набор констант и $G^{XY} G_{YZ} = \delta^X_Z$. Общий метод решения уравнений (19) неизвестен. Однако эта трудность разрешается переходом в инерциальную систему координат путем замены переменных $u^A = u^A(y)$ с Якобианом

$$u^A_i \equiv \frac{\partial u^A}{\partial y^i}(y) . \quad (20)$$

Показывается, что в инерциальных координатах из условия суперконформной инвариантности теории и требования, чтобы бозонный кинетический член был плоским, следует интегрируемость обратного Якобиана

$$\frac{\partial y^i}{\partial u^A}(u(y)) \equiv (u^{-1})^i_A =: w_{A,i} = \partial_i w_A \equiv \frac{\partial w_A}{\partial y^i}(y) , \quad (21)$$

а также условие однородности на функции перехода

$$y^i u^A_i = 2 u^A . \quad (22)$$

Данный факт говорит о том, что существует набор суперполей w_A ‘дуальных’ к суперполям u^A .

Доказывается, что все структурные уравнения, включая уравнение Виттена-Дайкграафа-Верлинде-Верлинде, следуют автоматически из условий (21) и (22). Кроме того, установлено, что суперпотенциал, а также оба препотенциала гамильтоновой формулировки на массовой оболочке могут быть выражены в терминах функций $u^A = u^A(y)$ и $w_A = w_A(y)$ следующим образом

$$\begin{aligned} G &= -u^A w_A , \\ U &= -w_A m^A , \\ \partial_i \partial_j \partial_k F &= f_{ijk} , \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$f_{ijk} = -w_{ijk} \cdot u = w_{ij} \cdot u_k = -w_i \cdot u_{jk} = w \cdot u_{ijk} - \partial_i \partial_j \partial_k (w \cdot u) . \quad (24)$$

Приводится общее решение полученных уравнений для двумерных неприводимых систем, что соответствует трансляционно инвариантным трехчастичным моделям. Для случая трехмерных неприводимых систем (моделей четырех тождественных частиц) находятся частные решения, основанные на корневых системах классических алгебр Ли D_3 и B_3 .

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

Основные работы, опубликованные по теме диссертации:

1. Galajinsky A., Lechtenfeld O., Polovnikov K. Calogero models and nonlocal conformal transformations // Phys. Lett. B – 2006. – N 643. – p. 221-227
2. Галажинский А.В., Лехтенфельд О., Половников К.В. О структуре конформно инвариантных моделей в одномерном пространстве // Известия ТПУ. – 2006. – Т. 309. – N 6. – С. 14-16.
3. Galajinsky A., Lechtenfeld O., Polovnikov K. N=4 superconformal Calogero model // JHEP – 2007. – Vol. 11 – p. 008
4. Galajinsky A., Lechtenfeld O., Polovnikov K. N=4 mechanics, WDVV equations and roots // JHEP – 2009. – Vol. 0903 – p. 113
5. Krivonos S., Lechtenfeld O., Polovnikov K. N=4 superconformal n -particle mechanics via superspace // Nucl. Phys. B – 2009. – Vol. 817 – p. 265-283