Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1984

3.6
Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

УДК 532.5—6+533.6.011+536.24
Газовая динамика: Сборник статей./Под ред. Л. В. Комаровского. — Томск: Изд-во Томск. ун-та. 1984.— 12,2 л.— 1 р. 80 к. 500 экз. 1703040000.

Сборник составлен из оригинальных теоретических работ по газовой динамике, в которых исследуются течения газа в каналах и соплах, турбулентные и струйные течения несжимаемой жидкости, рассматриваются вариационные задачи и задачи управления.

Для специалистов по методам решения задач механики жидкости и газа.

Рецензент — В. И. Тараканов

Редактор — Л. В. Комаровский

Г $\frac{1703040000}{177(012)-84}$ 71—84

© Издательство Томского университета, 1984

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПУЛЬСАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

О. Н. Шабловский

Предложенный в [1, 2] подход к исследованию проблемы турбулентности — решение уравнений для осредненных гидродинамических величин совместно с уравнениями пульсационных параметров.

В данной работе излагается аналитический алгоритм построения осредненных по времени и пульсационных характеристик течения несжимаемой жидкости для одного частного класса решений этих уравнений. Полученные зависимости дают пример турбулентного течения жидкости вдоль центральной оси трехмерного прямолинейного канала.

Уравнения осредненного движения и уравнения пульсаций

При выводе уравнений турбулентного движения жидкости исходными являются уравнения Стокса [1—4]. Далее применяем обозначения: x, y, z — декартовы координаты; t — время; v_x, v_y, v_z — компоненты вектора актуальной скорости; p — давление; ρ — плотность; ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Согласно гипотезе Рейнольдса при актуальном движении жидкости имеет место линейная суперпозиция осредненных и пульсационных гидродинамических величин:

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x;\ v_y = \bar{v}_y + v'_y;\ v_z = \bar{v}_z + v'_z;\ p = \bar{p} + p'. \tag{1}$$

Оператор осреднения по времени возьмем в виде

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \varphi(x,\ y,\ z,\ \xi)\, d\xi,\ \varphi = \bar{\varphi} + \varphi', \tag{2}$$

где τ — период осреднения, при этом все правила осреднения Рейнольдса будут выполнены [3, 4]. Подстановка (1) в уравнения Стокса и последующее осреднение дают уравнения Рейнольдса осредненного турбулентного движения. Уравнения для пульсаций скорости и давления получаются вычитанием уравнений Рейнольдса из уравнений Стокса. Запись всех этих уравнений в общем виде имеется в [1—3].

Выделим частный класс движений жидкости

$$\bar{v}_x = U(x,\ y,\ t);\ \bar{v}_y = V(x,\ y,\ t);\ \bar{v}_z = W_0(x,\ y,\ t) + zW_1(x,\ y,\ t);$$
$$\bar{p} = \bar{p}(x,\ y,\ t), \tag{3}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$v_x' = u(x, y, t);\ v_y' = v(x, y, t);\ v_z' = w_0(x, y, t) + zw_1(x, y, t);$$
$$p' = p'(x, y, t),$$

тогда получим уравнения осредненного движения:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\Pi + U^2 - 2\nu\frac{\partial U}{\partial x} - \nu W_1 + \overline{u^2}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[UV - \nu \times \right.$$
$$\left. \times\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \overline{uv} + G\right] = 0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[UV - \nu\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \overline{uv}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\Pi + V^2 - 2\nu\frac{\partial V}{\partial y} - \right.$$
$$\left. - \nu W_1 + \overline{v^2} + H\right] = 0; \tag{5}$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[UW_1 - \nu\frac{\partial W_1}{\partial x} + \overline{uw_1}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[VW_1 - \nu\frac{\partial W_1}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + \overline{vw_1}\right] + 2(W_1^2 + \overline{w_1^2}) = 0;$$

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[UW_0 - \nu\frac{\partial W_0}{\partial x} + \overline{uw_0}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[VW_0 - \nu\frac{\partial W_0}{\partial y} + \overline{vw_0}\right] +$$
$$+ 2(W_0W_1 + \overline{w_0w_1}) = 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + W_1 = 0,\ \frac{\partial G}{\partial y} = UW_1 + \overline{uw_1},\ \frac{\partial H}{\partial y} = VW_1 + \overline{vw_1},$$
$$\frac{\overline{p}}{\rho} = \Pi + B(t).$$

Уравнения пульсационного движения жидкости в этом случае такие:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{p'}{\rho} + 2Uu + u^2 - \nu\frac{\partial u}{\partial x} - \overline{u^2}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[Uv + Vu + uv - \right.$$
$$\left. - \nu\frac{\partial u}{\partial y} - \overline{uv}\right] + uW_1 + w_1U + uw_1 - \overline{uw_1} = 0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[Uv + Vu + uv - \nu\frac{\partial v}{\partial x} - \overline{uv}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{p'}{\rho} + \right.$$
$$\left. + 2Vv - \nu\frac{\partial v}{\partial y} + v^2 - \overline{v^2}\right] + vW_1 + w_1V + vw_1 - \overline{vw_1} = 0;$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[Uw_1 + W_1u - \nu\frac{\partial w_1}{\partial x} + uw_1 - \overline{uw_1}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[Vw_1 + W_1v - \right.$$
$$\left. - \nu\frac{\partial w_1}{\partial y} + vw_1 - \overline{vw_1}\right] + 4W_1w_1 + 2(w_1^2 - \overline{w_1^2}) = 0;$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[Uw_0 - \nu\frac{\partial w_0}{\partial x} + uW_0 + u\,w_0 - \overline{uw_0}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[Vw_0 - \nu\frac{\partial w_0}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + vW_0 + vw_0 - \overline{vw_0}\right] + 2(W_0w_1 + W_1w_0 + w_0w_1 - \overline{w_0w_1}) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + w_1 = 0.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Преобразование уравнений турбулентного движения к новым независимым переменным

В уравнении (5) возьмем

$$V = -\frac{\partial \xi}{\partial y};\ UV - \nu\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \overline{uv} = \frac{\partial \eta}{\partial y};$$

$$H + \Pi + V^2 - \nu W_1 - 2\nu\frac{\partial V}{\partial y} + \overline{v^2} = \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

и преобразуем (4):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(U + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[U^2 - V^2 - H - \frac{\partial \eta}{\partial x} - 2\nu\frac{\partial U}{\partial x} + 2\nu\frac{\partial V}{\partial y} + \overline{u^2} - \overline{v^2}\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[UV - \nu\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) + G + \overline{uv}\right] = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому уравнению, применим такие соотношения:

$$U + \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\partial A}{\partial y},\ U^2 - V^2 - H - \frac{\partial \eta}{\partial x} - 2\nu\frac{\partial U}{\partial x} + 2\nu\frac{\partial V}{\partial y} + \overline{u^2} - \overline{v^2} = \frac{\partial C}{\partial y};$$

$$UV + G - \nu\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \overline{uv} = \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial x}.$$

После проведенных преобразований зависимыми переменными, определяющими осредненное течение, являются U, V, W_0, W_1, Π, A, C, ξ, η аргументов x, y, t.

Имеем

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x}dx + \frac{\partial \xi}{\partial y}dy + \frac{\partial \xi}{\partial t}dt;$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -U - \frac{\partial A}{\partial y};\ \frac{\partial \xi}{\partial y} = -V;\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = \Pi + V^2 + H - \nu W_1 +$$

$$+ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \xi_x\frac{\partial \eta}{\partial \xi} + 2\nu V\frac{\partial V}{\partial \xi} + \overline{v^2}. \qquad (7)$$

Исключим $\xi = \xi(x, y, t)$ из числа искомых функций посредством перекрестного дифференцирования (7):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(U + \frac{\partial A}{\partial y}\right);$$

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\Pi + V^2 + H - \nu W_1 + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \xi_x\frac{\partial \eta}{\partial \xi} + 2\nu V\frac{\partial V}{\partial \xi} + \overline{v^2}\right);$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(U + \frac{\partial A}{\partial y}\right) = \frac{\partial \xi_t}{\partial x},$$

среди этих трех уравнений независимыми являются только два: третье есть их дифференциальное следствие; в дальнейшем будем работать с первыми двумя уравнениями.

Применяя (7), сделаем замену переменных x, y, t на новые независимые переменные x, ξ, t:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} + \xi_x\frac{\partial}{\partial \xi},\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + \xi_t\frac{\partial}{\partial \xi},\ \frac{\partial}{\partial y} = -V\frac{\partial}{\partial \xi}; \qquad (8)$$

$$D(x, \xi, t)/D(x, y, t) = -V \neq 0.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Оператор осреднения по времени оставляем в прежней форме: из структуры предлагаемого решения будет видно, что замена переменной на него не повлияла.

Далее предположим, что функции

$$U,\ V,\ W_0\ W_1,\ \Pi,\ \eta,\ A,\ C,$$
$$\overline{u^2},\ \overline{uv},\ \overline{v^2},\ \overline{w_0w_1},\ \overline{uw_i},\ \overline{vw_i},\ \overline{w_i^2},\ i=0,\ 1,$$

характеризующие осредненное течение, в новых переменных не зависят явно от времени, аргументами для них являются x, ξ. Учитывая проведенные преобразования уравнений Рейнольдса, получаем для осредненных скоростей и давления следующую систему:

$$\frac{\partial V}{\partial x}+\xi_x\frac{\partial V}{\partial \xi}+V\frac{\partial \xi_x}{\partial \xi}=0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\xi_x\frac{\partial U}{\partial x}-V\frac{\partial V}{\partial \xi}+W_1=0;$$

$$UV-\varkappa_{xy}+V\frac{\partial \eta}{\partial \xi}=0;\ U^2-V^2+\varkappa_{yy}-\varkappa_{xx}-\frac{\partial \eta}{\partial x}-\xi_x\frac{\partial \eta}{\partial \xi}+V\frac{\partial C}{\partial \xi}=H;$$

$$V\frac{\partial \eta}{\partial \xi}+\gamma V\frac{\partial A}{\partial \xi}-\frac{\partial C}{\partial x}-\xi_x\frac{\partial C}{\partial \xi}=G;$$

$$\gamma V\frac{\partial W_0}{\partial \xi}+\frac{\partial \Lambda_0}{\partial x}+\xi_x\frac{\partial \Lambda_0}{\partial \xi}-V\frac{\partial E_0}{\partial \xi}+2\left(W_0W_1+\overline{w_0w_1}\right)=0;$$

$$\gamma V\frac{\partial W_1}{\partial \xi}+\frac{\partial \Lambda_1}{\partial x}+\xi_x\frac{\partial \Lambda_1}{\partial \xi}-V\frac{\partial E_1}{\partial \xi}+2\left(W_1^2+\overline{w_1^2}\right)=0;$$

$$\Lambda_i=UW_i-\nu\frac{\partial W_i}{\partial x}-\nu\xi_x\frac{\partial W_i}{\partial \xi}+\overline{uw_i};$$

$$E_i=VW_i+\nu V\frac{\partial W_i}{\partial \xi}+\overline{vw_i},\ i=0,\ 1;$$

$$\Pi=\gamma V+\nu W_1-V^2-H-\frac{\partial \eta}{\partial x}-\xi_x\frac{\partial \eta}{\partial \xi}-2\nu V\frac{\partial V}{\partial \xi}-\overline{v^2}.$$

Как видим, давление жидкости здесь подсчитывается по формуле, автономной от остальных уравнений, после отыскания скорости. Взаимно однозначное соответствие между старыми и новыми переменными дается зависимостью

$$y=t\gamma+\int\frac{d\xi}{V(x_0,\ \xi)}+\int\left(\frac{U}{V}-\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)dx=\text{const},\ \gamma=\gamma(x),\ V\neq 0, \tag{10}$$

которая есть результат интегрирования (7), $\gamma(x)$ — произвольная функция. Пульсации u, v, w_0, w_1, p', зависящие от аргументов x, ξ, t, определяются уравнениями (6), причем операции дифференцирования производятся по формулам (8). Запись уравнений пульсации в новых переменных опускаем.

Построение функциональных рядов, представляющих течение в окрестности оси симметрии

Пусть линия $x=0$, $z=0$ является центральной осью прямолинейного трехмерного канала. Для уравнений осредненного турбулентного движе-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ния и уравнений пульсаций укажем частное решение вида (3), удовлетворяющее на оси канала условиям симметрии:

$$\overline{v}_x = 0;\ \frac{\partial \overline{v}_y}{\partial x} = 0;\ \overline{v_z} = 0;$$

$$\frac{\partial v_x'}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial v_y'}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial v_z'}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial v_x'}{\partial z} = 0;\ \frac{\partial v_y'}{\partial z} = 0;\ \frac{\partial v_z'}{\partial x} = 0.$$

При этих условиях компоненты интенсивности пульсаций, отнесенные к осредненной продольной скорости v_y, принимают на оси экстремальные значения [5, с. 78, 301]. В классе решений (3) условия на центральной оси в новых переменных имеют вид

$$x = 0;\ U = 0;\ \frac{\partial V}{\partial x} = 0;\ W_0 = 0;\ W_1 = 0;\ \frac{\partial A}{\partial \xi} = 0; \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0;\ w_1 = 0.$$

Для осредненного и пульсационного течений, определяемых уравнениями (6), (8), (9), построим разложения искомых функций в степенные ряды:

$$U = \left(\int_0^x \frac{dU_{\alpha+1}}{\partial x}\,dx\right)\xi^{\alpha+1},\ \alpha \geqslant 2;$$

$$V = \left(\int_0^x \frac{\partial V_{\alpha+2}}{\partial x}\,dx\right)\xi^{\alpha+2} + r_\alpha \xi^\alpha;$$

$$W_0 = x a_{\alpha+1}\xi^{\alpha+1} + \left(\int_0^x \frac{\partial W_{\alpha+2}^{(0)}}{\partial x}\,dx\right)\xi^{\alpha+2};\ W_1 = x b_{\alpha+1}\xi^{\alpha+1} + \left(\int_0^x \frac{\partial W_{\alpha+2}^{(1)}}{\partial x}\,dx\right)\xi^{\alpha+2};$$

$$C = 2\nu V_2 \xi^2 + \nu s_{\alpha+1}\xi^{\alpha+1} + \left(\int_0^x \frac{\partial C_{\alpha+2}}{\partial x}\,dx\right)\xi^{\alpha+2};$$

$$A = x s_{\alpha+1}\xi^{\alpha+1} + \left(\int_0^x \frac{\partial A_{\alpha+1}}{\partial x}\,dx\right)\xi^{\alpha+1};\ G = G_{\alpha+3}\xi^{\alpha+3};\ H = H_{\alpha+2}\xi^{\alpha+2};$$

$$u = \varkappa_{\alpha+1}(t)\,\xi^{\alpha+1} + \left(\int_0^x \frac{\partial u_{\alpha+2}}{\partial x}\,dx\right)\xi^{\alpha+2};\ \eta = \eta_{\alpha+1}\xi^{\alpha+1};$$

$$v = v_{\alpha+1}(x,\ t)\,\xi^{\alpha+1};\ w_i = w_{\alpha+2}^{(i)}(x,\ t)\,\xi^{\alpha+2},\ i = 0,\ 1; \tag{12}$$

$$p' = \varepsilon_{\alpha+1}(t)\,\xi^{\alpha+1} + \left(\int_0^x \frac{\partial \pi_{\alpha+1}}{\partial x}\,dx\right)\xi^{\alpha+1},$$

где повторяющийся индекс α означает суммирование; величины $a_{\kappa+1}$, $b_{\kappa+1}$, r_κ, $s_{\kappa+1}$, $\kappa \geqslant 2$ есть произвольные постоянные; $\varepsilon_{\kappa+1}(t)$, $\varkappa_{\kappa+1}(t)$ — произвольные функции. Рекуррентные формулы общих членов этих рядов здесь не приводятся. Запишем выражения, нужные для подсчета нескольких первых коэффициентов разложений:

$$V_2 = \text{const};\ V_3 = \text{const};\ \frac{\partial V_4}{\partial x} = -V_2 U_3;\ \frac{\partial V_5}{\partial x} = 6A_3 V_2^2 - 2V_2 U_4;$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$\frac{\partial V_6}{\partial x} = 12(A_4V_2^2 + A_3V_2V_3) - 3V_2U_5 - V_3U_4 + V_4U_3;\ \frac{\partial U_3}{\partial x} = 2V_2^2 + W_3^{(1)};$$

$$\frac{\partial U_4}{\partial x} = 5V_2V_3 + W_4^{(1)};\ \frac{\partial U_5}{\partial x} = 3(U_3^2 + V_3^2) + 6V_2V_4 + W_5^{(1)};\ \eta_3 = -2\nu U_3;$$

$$\frac{\partial U_6}{\partial x} = 7(U_3U_4 + V_2V_5 + V_3V_4) - 9A_3V_2U_3 + W_6^{(1)};$$

$$4\eta_4 = 12\nu A_3V_2 - 8\nu U_4 - U_3;$$

$$5V_2\eta_5 + U_4V_2 + 10\nu U_5V_2 - 20\nu A_4V_2^2 - 15\nu A_3V_2V_3 + \overline{u_3v_3} = 0;\ C_2 = 2\nu V_2;$$

$$3V_2C_3 = 6\nu V_2V_3 + \frac{1}{2}V_2^2 + 3\nu V_2\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{1}{4}W_3^{(1)} + H_4;$$

$$\frac{\partial C_4}{\partial x} = 3V_2(\eta_3 + \gamma A_3) + 2C_2U_3;$$

$$4V_2C_4 = 2\left[V_2V_3 + \nu(6V_2V_4 + 3V_3^2) + \nu\frac{\partial U_5}{\partial x} - C_2V_4\right] +$$

$$+ \frac{\partial\eta_5}{\partial x} + H_5 - 3(\eta_3U_3 + 2\nu U_3^2 + C_3V_3);$$

$$\frac{\partial C_5}{\partial x} = 3\eta_3V_3 + 4\eta_4V_2 + \frac{\partial A_5}{\partial t} + 3(\gamma V_3A_3 + C_3U_3) - 2C_2\xi_x^{(4)} - G_5,$$

$$\xi_x^{(4)} = 3A_3V_2 - U_4;$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial u_4}{\partial x} = 3v_3V_2 - w_4^{(1)};\ \frac{\partial u_5}{\partial x} = 3(v_3V_3 + u_3U_3) + 4V_2v_4 - w_5^{(1)};$$

$$\frac{\partial u_6}{\partial x} = 3v_3V_4 + 4u_4U_3 - 3u_3(3A_3V_2 - U_4) + 4v_4V_3 + 5v_5V_2 - w_6^{(1)};$$

$$\frac{\partial\pi_3}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2u_3}{\partial x^2} - \frac{\partial u_3}{\partial t};\ \frac{\partial\pi_4}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2u_4}{\partial x^2} - \frac{\partial u_4}{\partial t} - 3\gamma u_3V_2;$$

$$\frac{\partial\pi_5}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2u_5}{\partial x^2} - \frac{\partial u_5}{\partial t} - 3\left[\gamma u_3V_3 + 3\nu\frac{\partial}{\partial x}(u_3U_3) - U_3\left(\pi_3 - \nu\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\right] +$$

$$+ 12\nu V_2^2u_3;$$

$$\frac{\partial v_{\kappa+1}}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2v_{\kappa+1}}{\partial x^2} + \lambda_{\kappa+1};\ \frac{\partial w_{\kappa+2}^{(i)}}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2w_{\kappa+2}^{(i)}}{\partial x^2} + \mu_{\kappa+2}^{(i)},\ \kappa \geqslant 2,\ i = 0,1; \qquad (13)$$

$$\lambda_3 \equiv 0;\ \lambda_4 = 3(V_2\pi_3 - \gamma V_2v_3);\ \mu_4^{(i)} \equiv 0;\ \mu_5^{(1)} = -4\gamma V_2w_4^{(1)};\ \Gamma = \int_0^x x\gamma\,dx;$$

$$\lambda_5 = 3\left(V_3\pi_3 - \nu U_3\frac{\partial v_3}{\partial x} - \gamma v_3V_3\right) + 4V_2(\pi_4 + 3\nu v_3V_2) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}(V_2u_3 + 3\nu v_3U_3);$$

$$4H_4 = -W_3^{(1)};\ 5H_5 = -W_4^{(1)};\ 5G_5V_2 = -U_3W_3^{(1)};\ \frac{\partial W_3^{(1)}}{\partial x} = \partial_3;\ \frac{\partial W_3^{(0)}}{\partial x} = a_3;$$

$$6G_6V_2 = -(5G_5V_3 + U_4W_4^{(1)} + U_4W_3^{(1)});\ \nu\frac{\partial W_4^{(1)}}{\partial x} = 3\Gamma V_2b_3;$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$\nu \frac{\partial W_4^{(0)}}{\partial x} = 3\Gamma V_2 a_3;$$

$$\nu \frac{\partial W_5^{(1)}}{\partial x} = 3\Gamma V_3 b_3 + 4V_2 \int_0^x \gamma W_4^{(1)} dx + 3\nu b_3 \int_0^x U_3 dx + 3\nu (U_3 W_3^{(1)} + 2V_2^2 b_3 x^2);$$

$$\nu \frac{b W_5^{(0)}}{\partial x} = 3\Gamma V_3 a_3 + 4V_2 \int_0^x \gamma W_4^{(0)} dx + 3\nu a_3 \int_0^x U_3 dx + 3\nu (U_3 W_3^{(0)} + 2V_2^2 a_3 x^2).$$

Как видим, в данном решении условие $du/dx|_{x=0}=0$ удовлетворяется с точностью до величин $O(\xi^4)$, остальные условия симметрии выполняются точно.

Определение гидродинамических величин, удовлетворяющих правилам осреднения Рейнольдса

Применим построенное решение для локального (по координатам x, y, z и времени) описания турбулентного течения жидкости в окрестности оси симметрии канала. Прежде всего произвольную функцию $\gamma(x)$ в (10) следует выбирать так, чтобы иметь $\gamma(0)=0$, и тогда вдоль оси

$$\overline{\xi} = \xi, \ \overline{V} = V, \ \overline{\Pi} = \Pi, \ \overline{U} = 0, \ \overline{W}_0 = 0.$$

По правилам Рейнольдса осредненные пульсации должны быть нулевыми, т. е.

$$\overline{v_x'} = 0; \ \overline{v_y'} = 0; \ \overline{v_z'} = 0; \ \overline{p'} = 0. \tag{14}$$

Отсюда следует, что если применяется правило осреднения (2), то компоненты тензора турбулентных напряжений $\overline{v_x'^2}$, $\overline{v_x' v_y'}$ и т. д. при определенных условиях не зависят от времени. В самом деле, пусть имеются пульсации $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ (координаты входят сюда как параметры) такие, что $\varphi'=0$, $\psi'=0$. Если наряду с этими уравнениями справедливы их дифференциальные следствия

$$\frac{\partial \overline{\varphi'}}{\partial t} = 0, \ \frac{\partial \overline{\psi'}}{\partial t} = 0,$$

т. е., согласно (2)

$$\frac{1}{\tau}[\varphi'(t+\tau) - \varphi'(t)] = 0; \ \frac{1}{\tau}[\psi'(t+\tau) - \psi'(t)] = 0,$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\psi'\varphi'}) = \frac{1}{\tau}\{[\varphi'(t+\tau) - \varphi'(t)]\psi'(t+\tau) + [\psi'(t+\tau) - \psi'(t)]\varphi'(t)\} = 0$$

Значит, согласно терминологии, принятой в [4], имеем квазистационарное турбулентное течение.

Теперь займемся построением функций, характеризующих пульсации в потоке. Коэффициенты разложений (12) отыскиваются из линейных параболических уравнений вида (13), причем $\lambda_{\kappa+1}$, $\mu_{\kappa+2}^{(i)}$ зависят от коэффициентов v_{r+1}, $w_{r+2}^{(i)}$ с номерами, меньшими соответственно $\kappa+1$ и $\kappa+2$, характер этой зависимости согласно (6) такой, что

$$\overline{\lambda}_{\kappa+1} = 0, \ \overline{\mu_{\kappa+2}^{(i)}} = 0. \tag{15}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Отметим также, что с учетом (11) должны выполняться условия

$$x = 0;\ \frac{\partial v_{\kappa+1}}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial w^{(0)}_{\kappa+2}}{\partial x} = 0;\ w^{(1)}_{\kappa+2} = 0;\ \kappa \geqslant 2. \tag{16}$$

Построим частные решения для (13), удовлетворяющие (16) и такие, чтобы $v_{\kappa+1}$, $w^{(0)}_{\kappa+2}$ содержали еще по одной произвольной функции. Для этого в малой ε окрестности оси возьмем зависимости

$$v_{\kappa+1} \approx v_{\kappa+1,0} + \int_0^t \lambda_{\kappa+1}(0,\ t)\,dt;\ w^{(0)}_{\kappa+2} \approx w^{(0)}_{\kappa+2,0} + \int_0^t \mu^{(0)}_{\kappa+2}(0,\ t)\,dt,\ x \in [0,\ \varepsilon), \tag{17}$$

в которых нижним нулевым индексом отмечены решения однородных уравнений, соответствующих (13), (16). Решение для $w^{(1)}_{\kappa+2}$ здесь приводить не станем, потому что, как нетрудно видеть, эти функции и их производные не входят в формулы пульсаций на оси. Для однородных уравнений решение представим посредством дифференциальных операторов [6]:

$$v_{\kappa+1,0} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\kappa+1)}(x)\,\frac{\partial^n \Phi^{(\kappa+1)}(x+t)}{\partial t^n};\ w^{(0)}_{\kappa+1,0} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(\kappa+2)}(x)\,\frac{\partial^n \Psi^{(\kappa+2)}(x+t)}{\partial t^n},$$

$$\ddot{g}_0^{(\kappa+1)} = 0;\ \nu \ddot{g}_1^{(\kappa+1)} = g_0^{(\kappa+1)};\ g_1^{(\kappa+1)} = \nu(2\dot{g}_1^{(\kappa+1)} + \ddot{g}_2^{(\kappa+1)});$$

$$g_{n-1}^{(\kappa+1)} = \nu(g_{n-2}^{(\kappa+1)} + 2\dot{g}_{n-1}^{(\kappa+1)} + \ddot{g}_n^{(\kappa+1)}),\ n \geqslant 3.$$

Интегрируем эти рекуррентные формулы, приняв во внимание (16):

$$g_0^{(\kappa+1)} = 1,\ g_1^{(\kappa+1)} = \frac{x^2}{2\nu} - x + m_1^{(\kappa+1)};$$

$$g_2^{(\kappa+1)} = \frac{x^4}{24\nu^2} - \frac{x^3}{2\nu} + \left(\frac{m_1^{(\kappa+1)}}{\nu} + 2\right)\frac{x^2}{2} - m_1^{(\kappa+1)}x + m_2^{(\kappa+1)},$$

$$g_n^{(\kappa+1)}(0) = m_n^{(\kappa+1)}.$$

Коэффициенты $h_n^{(\kappa+2)}(x)$ определяются по аналогичным формулам, причем $h_n^{(\kappa+2)}(0) = s_n^{(\kappa+2)}$. Здесь $\Phi^{(\kappa+1)}(x+t)$, $\Psi^{(\kappa+2)}(x+t)$ — произвольные функции; $m_n^{(\kappa+1)}$, $s_n^{(\kappa+2)}$, $\kappa \geqslant 2$, — произвольные постоянные. Далее достаточно взять $m_j^{(\kappa+1)} = 0$, $s_j^{(\kappa+2)} = 0$, $j \geqslant 1$, так что $v_{\kappa+1}(0,\ t) = \Phi^{(\kappa+1)}(t)$, $w^{(0)}_{\kappa+2}(0,\ t) = \Psi^{(\kappa+2)}(t)$. В нашем случае требование (14) будет выполнено, если

$$\bar{x}_{\kappa+1}(t) = 0;\ \bar{\varepsilon}_{\kappa+1}(t) = 0;\ \overline{\Phi^{(\kappa+1)}}(t) = 0;\ \overline{\Psi^{(\kappa+2)}}(t) = 0, \tag{18}$$

причем последние два равенства получены с учетом (15), (17).

Пользуясь формулой Тейлора, оператор осреднения (2) можно приближенно представить в виде

$$\bar{\varphi} \approx S[\varphi],\ S = \sum_{n=1}^{N} \frac{\tau^{n-1}}{n!}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}; \tag{19}$$

погрешность этой формулы равна по абсолютной величине

$$\left|\frac{\partial^N \varphi(c,\ t)}{\partial t^N}\,\frac{\tau^N}{(N+1)!}\right|,\ 0 < c < 1, \tag{20}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

N — целое число, его следует задавать так, чтобы правило осреднения типа $\varphi'=0$ выполнялось с заданной точностью в исследуемой пространственно-временной области. Период осреднения τ является в данном случае параметром согласования данных теории и эксперимента.

Применяя оператор осреднения в форме (19), получаем на основе (18) уравнения

$$S[\varkappa_{\kappa+1}]=0,\ S[\varepsilon_{\kappa+1}]=0,\ S[\Phi^{(\kappa+1)}]=0,\ S[\Psi^{(\kappa+2)}]=0$$

или, что то же

$$\frac{d^{N-1}\chi}{dt^{N-1}}+\sum_{j=1}^{N-2}c_j\frac{\partial^j\chi}{\partial t^j}+\frac{N!}{\tau^N}\chi=0,\ c_j=\frac{N!}{(j+1)!\,\tau^{N-j-1}};\qquad(21)$$

$$t=0;\ \chi=0;\ \frac{d^\delta\chi}{dt^\delta}=\chi_\delta(0);\ \delta=\overline{1,\ N-2},\qquad(22)$$

где под $\chi(t)$ понимается одна из функций, фигурирующих в (18).

Решение задачи (21), (22) может быть найдено с помощью преобразования Лапласа [7, с. 119]. Более простые формулы для расчета пульсаций получаются, если взять частный случай начальных условий (22):

$$t=0;\ \frac{d^\delta\chi}{dt^\delta}=0;\ \delta=\overline{0,\ N-3};\ \frac{d^{N-2}\chi}{dt^{N-2}}=\chi_{N-2}(0),\qquad(23)$$

где $\chi_{N-2}(0)$ есть произвольные постоянные, равные соответственно $l_{\kappa+1}$, $m_{\kappa+1}$, $n_{\kappa+1}$, $q_{\kappa+2}$, $\kappa\geqslant 2$. Тогда однородные уравнения вида (21) имеют решение

$$\varkappa_{\kappa+1}=l_{\kappa+1}f,\ \varepsilon_{\kappa+1}=m_{\kappa+1}f,\ \Phi^{(\kappa+1)}=n_{\kappa+1}f,\ \Psi^{(\kappa+2)}=q_{\kappa+2}f,\qquad(24)$$

$$f(t)=\sum_{r=0}^{\infty}f_r\frac{t^{N+r-2}}{(N+r-2)!},\ f_0=1,$$

в котором f_r определяются как коэффициенты степенного ряда [7, с. 130]:

$$(1+c_{N-2}s+\ldots+c_0s^{N-1})^{-1}=1+f_1s+f_2s^2+\ldots,$$

$$c_0=\frac{N!}{\tau^N};\ c_j=\frac{N!}{(j+1)!\,\tau^{N-j+1}}.$$

Производные от решения (24) также удовлетворяют (21), поэтому условие типа (14) выполняется в рамках приближения (19), (20). Следовательно, обеспечивается выполнение тех ограничений, при которых были получены системы уравнений (6), (7), (9).

Пульсации на оси, соответствующие решению (12), таковы:

$$u=fl_{\alpha+1}\xi^{\alpha+1};\ p'=fm_{\alpha+1}\xi^{\alpha+1},\ \alpha\geqslant 2;$$

$$v=fn_{\alpha+1}\xi^{\alpha+1}+L_{\alpha+1}\xi^{\alpha+1};\ w_0=fq_{\alpha+2}\xi^{\alpha+2}+M_{\alpha+2}\xi^{\alpha+2};$$

$$L_{\kappa+1}(t)=\int_0^t\lambda_{\kappa+1}(0,\ t)\,dt;\ M_{\kappa+2}(t)=\int_0^t\mu_{\kappa+2}^{(0)}(0,\ t)\,dt,\ \kappa\geqslant 2.$$

Здесь $l_{\alpha+1}\xi^{\alpha+1}$, $m_{\alpha+1}\xi^{\alpha+1}$, $n_{\alpha+1}\xi^{\alpha+1}$, $q_{\alpha+2}\xi^{\alpha+2}$ — произвольные аналитические функции. Осредненное течение вдоль оси

$$\overline{v_y}=r_\alpha\xi^\alpha;\ \overline{v_x}=0;\ \overline{v_z}=0;$$

$$y=-\int\frac{d\xi}{r_\alpha\xi^\alpha}+\text{const};\ 0<\xi\leqslant\xi_1<1;$$

$$\overline{p}_{\overline{\rho}}=B(t)-\left(V^2+\frac{\partial\eta}{\partial x}+2\nu V\frac{\partial V}{\partial\xi}+\overline{v^2}\right);$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$\xi \to 0;\ y \to -\infty;\ \bar{v}_y \to 0;\ \frac{\bar{p}}{\rho} \to B(t),$$

где $r_\alpha \xi^\alpha$, $B(t)$ — произвольные функции.

Таким образом, для уравнений гидродинамики получено локальное решение, характеризующее квазистационарное турбулентное течение вдоль оси симметрии канала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Струминский В. В. Об одном новом направлении исследования проблемы турбулентности. — В кн.: Турбулентные течения. М.: Наука, 1977, с. 20—24.
2. Струминский В. В. Основные направления теоретических исследований проблемы турбулентности. — В кн.: Механика турбулентных потоков. М.: Наука, 1980, с. 28—44.
3. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Гостехиздат, 1955. — 520 с.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1970. — 904 с.
5. Бай Ши-и. Турбулентное течение жидкостей и газов.— М.: ИЛ, 1962.— 344 с.
6. Назаров Г. И. Точное решение уравнений газовой динамики. — Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1968, № 3, с. 113—120.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971. — 576 с.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

О РАСПЫЛИВАНИИ ЖИДКОСТИ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ФОРСУНКОЙ ПРИ НИЗКИХ ПЕРЕПАДАХ ДАВЛЕНИЯ

В. П. Волков

В диапазоне давлений от 0,01 до 0,4 МПа предлагается уточненная формула для определения коэффициента расхода центробежной форсунки.

Процессы превращения топлива в химических реакторах, работающих по схеме жидкость—жидкость или жидкость—газ, иногда сопровождаются аномальным поведением основных параметров системы (заброс давления, колебания давления и температуры и т. п.), в результате чего возможны режимы работы центробежных форсунок, обеспечивающих подачу одного или более компонентов в жидкой фазе, в условиях, далеких от стабильных и надежных, в частности, в условиях пониженных перепадов давления на них. В литературе [1]—[3] такие ситуации, как правило, не рассматриваются, а экстраполяция результатов для номинальных перепадов на низкие их значения не обоснована.

В статье излагаются экспериментальные результаты исследования работы центробежной форсунки в указанных условиях, приводится их анализ и сравнение с имеющимися теоретическими [1] и эмпирическими [2, 3] зависимостями.

Коэффициент расхода центробежной форсунки μ для идеальной жидкости определяется через геометрическую характеристику, введенную Н. Г. Абрамовичем. В случае вязкой жидкости используют понятие эквивалентной геометрической характеристики

$$A_э = A/[1+(\lambda/2)(B^2\sin\beta/i - A)], \qquad (1)$$

где $\lambda = 1{,}05/\mathrm{Re}_{вх}^{0.3}$ — коэффициент трения (возможны и другие выражения для λ [5]). Однако в реальных случаях очень часто для определения коэффициента расхода используют эмпирические зависимости, например [2]:

$$\mu = 12{,}9\,\mu_0 (R_к/r_s)^{0{,}5}\,\mathrm{Re}_э^{-1/3}; \qquad (2)$$

здесь $\mathrm{Re}_э = \dfrac{2v_э r_c}{\nu_ж}$ — число Рейнольдса; $v_э = G_ф/\pi r_c^2 \rho_ж$ — эффективная скорость истечения жидкости из сопла. Формула (2) справедлива для значений числа Рейнольдса, удовлетворяющих неравенству $\mathrm{Re}_э \leqslant 10^4$ (в опытах число Re изменялось в пределах от 1000 до 10^4).

Экспериментально исследовалась зависимость расхода форсунки от перепада давления на ней, поэтому для сравнения результатов использовалась формула

$$G_ф = \mu f_c \sqrt{2\Delta p_ф \rho_ж}. \qquad (3)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Расчеты и эксперимент проводились для шнековой центробежной форсунки со следующими геометрическими характеристиками: $R_к = 2{,}55 \cdot 10^{-3}$ м; $f_i = 1{,}3 \cdot 10^{-6}$ м^2; $r_c = 0{,}45 \cdot 10^{-3}$ м; $i = 2$, $\beta = 75{,}7°$.

При этих значениях для идеальной жидкости $A = 1{,}08$; $\mu_0 = 0{,}425$. Зависимости расхода жидкости от перепада давления на форсунке ($\Delta p_ф = 0{,}02 \div 0{,}6$ МПа) приведены на рис. 1. В качестве распыливаемой

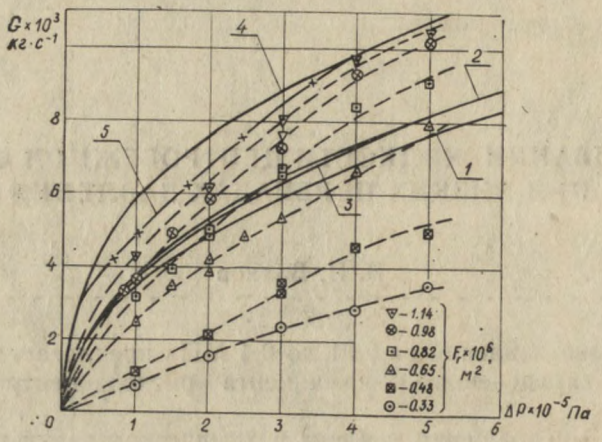

Рис. 1. Графики зависимостей расхода жидкости $C_ф$ (кг · с$^{-1}$) от перепада давления на форсунке (для теоретических кривых) и от перепада давления на всей системе подачи жидкости Δp (Па) (для экспериментальных кривых)

жидкости рассматривался керосин ($\rho_ж = 8{,}19$ кг · м$^{-3}$, $\nu_ж = 1{,}82 \cdot 10^{-6}$ м^2 · с$^{-1}$ [4]). На этом рисунке кривая *1* соответствует идеальной жидкости и расположена ниже всех остальных расчетных (проведены сплошными линиями). Кривые *2* и *3* соответствуют расчету с учетом сил трения, причем их несовпадение обусловлено различными выражениями для гидравлического сопротивления λ. Кривая *4* отвечает закономерности, определяемой формулой (2). Она дает более сильную зависимость $G_ф$ от $\Delta p_ф$. Следует заметить, что формула (2) получена для значений $\Delta p_ф > 0{,}5$ МПа, поэтому ее экстраполяция на значения $\Delta p_ф < 0{,}5$ МПа требует проверки.

Экспериментальные результаты были получены на холодных проливках жидкостной магистрали химического реактора, схема которой представлена на рис. 2.

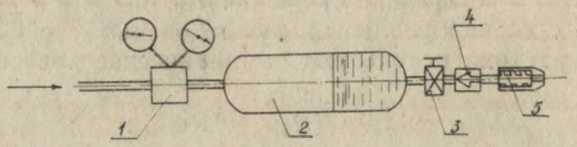

Рис. 2. Схема системы подачи жидкости

Воздух из ресивера через редуктор *1* наддувает бак *2*, в котором находится распыливаемый компонент (керосин). Последний через регулятор расхода *3* и обратный клапан *4* попадает в центробежную шнековую форсунку *5* и распыливается в объеме реактора при атмосферном давлении. Перепад давления определяется между давлением наддува бака *2* и давлением в выходном сечении сопла форсунки, равном атмосферному. Общее падение давления $\Delta p_б$ на рассматриваемой магистрали обуслов-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

лено ее постоянным сопротивлением и переменным сопротивлением на конусе регулятора расхода *3*, причем постоянная составляющая системы подачи не зависит от общего перепада давления $\Delta p_б$ в силу малых значений скоростей потока жидкости, обусловливающих постоянство коэффициента гидравлического сопротивления [5], в диапазоне изменений $\Delta p_б$ от 0,01 МПа до 0,4 МПа.

Опытные зависимости расхода жидкости от $\Delta p_б$ при различных значениях площадей проходного сечения регулятора расхода ($F_г$) приведены на рис. 1 (пунктирные линии), из которых видно, что единственной кривой из рассчитанных ранее и охватывающей все экспериментальные является кривая *4*, определяемая с помощью эмпирической зависимости (2). Она и была принята за основу при определении перепада давления на форсунке $\Delta p_ф$ и постоянной составляющей падения давления на магистрали жидкости ($\Delta p_м$).

Из динамики поведения экспериментальных кривых также видно, что по мере увеличения $F_г$ при любых $\Delta p_б$ пунктирные кривые сближаются и при $F_г \geqslant 1{,}14 \cdot 10^{-6}$ м^2 лежат в пределах ошибки опыта ($\varepsilon \approx 8{,}0\%$), т. е. переменная составляющая падения давления на конусе регулятора расхода, обусловленная его движением ($\Delta p_п$), при $F_г = 1{,}14 \cdot 10^{-6}$ м^2 практически равна нулю. В таком случае разность $\Delta p_б|^{F_г = 1{,}14 \cdot 10^{-6}\ м^2} - \Delta p_ф$ при заданном расходе жидкости будет определять потери давления на магистрали $\Delta p_м$ без учета этой переменной составляющей. Следовательно

$$\Delta p_м = \Delta p_б|^{F_г = 1{,}14 \cdot 10^{-6}\ м^2} - \Delta p_ф = \text{const}. \qquad (4)$$

Тогда $\Delta p_п$ при $F_г < 1{,}14 \cdot 10^{-6}$ м^2 можно определить выражением

$$\Delta p_п = \Delta p_б|^{F_г = 1{,}14 \cdot 10^{-6}\ м^2} - \Delta p_ф - \Delta p_м.$$

Из сравнения поведения кривой *4* и экспериментальной кривой при $F_г = 1{,}14 \cdot 10^{-6}$ м^2 видно, что по мере роста $\Delta p_б$ они сближаются и при $\Delta p_б > 0{,}4$ МПа для любого заданного расхода жидкости имеют практически постоянную разность по перепаду давления, которая и была принята за значение постоянной составляющей потерь давления в системе подачи жидкости. Для используемой в опытах форсунки при распыливании керосина постоянная в (4) оказалась равной

$$\Delta p_м|\Delta p_б > 0{,}4\ \text{МПа} \approx 0{,}022\ \text{МПа}.$$

Это обстоятельство подтверждается и расчетами местного гидравлического сопротивления: при $F_г > 1{,}14 \cdot 10^{-6}$ м^2 разница между перепадами давления в рассматриваемом диапазоне расходов лежит в пределах ошибки опыта, а так как $\Delta p_м$ во всем указанном диапазоне постоянно, то полученное значение найденной константы было перенесено на все интересующие значения $\Delta p_б$, лежащие в области 0,01 ÷ 0,4 МПа. Выражение $\Delta p_ф = \Delta p_б|^{F_г = 1{,}14 \cdot 10^{-6}\ м^2} - \Delta p_м|$ позволяет получить новую кривую *5* (штрихпунктирная линия с крестиками на рис. 1), которую можно рассматривать в качестве продолжения кривой *4* в область пониженных перепадов давления. Эту новую зависимость легко аппроксимировать формулой

$$G_ф = B\sqrt{2\Delta p_ф \rho_ж}, \qquad (5)$$

где B — некоторая величина, вообще говоря, переменная, зависящая сама от $\Delta p_ф$ и связанная с коэффициентом расхода μ выражением

$$B = \mu f_c. \qquad (6)$$

Анализ поведения величины B, а следовательно и μ, показывает, что формула (2) не совсем точно описывает динамику изменения коэффициента расхода μ, если считать показатель степени числа Рейнольдса постоянным и равным — 1/3. В связи с этим представляется более точным использовать вместо (2) зависимость

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$\mu = 12{,}9\,\mu_0\,(R_к/r_c)^{0{,}5}\,\mathrm{Re}_э^{-\kappa},$$

где зависимость показателя степени числа $\mathrm{Re}_э$ для керосина представлена на рис. 3. Она получена с помощью аппроксимационной формулы (5) и связи (6).

В общем случае характер изменения κ можно задать формулой

$$\kappa = 1/3 + a/\Delta p_ф^n,$$

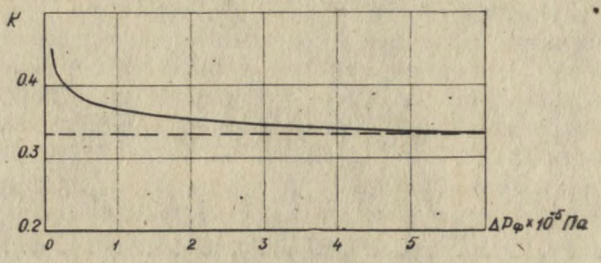

Рис. 3. График зависимости показателя степени числа Рейнольдса κ от перепада давления на форсунке $\Delta p_ф$ (Па)

где a, n — константы, зависящие от свойств распыливаемой жидкости и определяемые экспериментально по результатам холодных проливок. В частности, для керосина

$$\kappa = 1/3 + 0.03044/(\Delta p_ф)^{0{,}738},$$

где значения $\Delta p_ф$ выражены в атмосферах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добровольский М. В. Жидкостные ракетные двигатели. Основы проектирования. — М.: Машиностроение, 1968. — 396 с.

2. Витман Л. Н. и др. Распыливание жидкости форсунками. — М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962. — 264 с.

3. Баранаев М. К., Теняков В. И. Размер капель центробежной форсунки в широком диапазоне свойств диспергируемой жидкости. — Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа, 1970, № 3, с. 155—161.

4. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. — М.: Наука, 1972. — 720 с.

5. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. — М.-Л.: Госэнергоиздат, 1960. — 464 с.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

О ПРИМЕНЕНИИ СКВОЗНОГО СЧЕТА ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Н. А. Новгородцев

В работе [1] рассматривалось численное решение задачи о метании свободного тела газовым потоком, причем метаемое тело в [1] заменялось вводом импульса в газовый поток. В результате применения такого подхода появляется возможность сквозного численного расчета задачи без постановки граничных условий на метаемом теле, поэтому представляет интерес рассмотреть задачу о метании тела, когда оно полностью перекрывает площадь сечения пусковой трубы, но метаемый элемент заменить вводом импульса. Применение такого приема при решении одномерных задач газовой динамики позволит отказаться от постановки граничных условий на метаемом теле. Подобная постановка даст возможность значительно уменьшить трудоемкость при разработке и отладке программ, когда требуется решать задачи, связанные с движением твердых тел по каналу переменного сечения. Имеются в виду задачи, когда метаемое тело, двигаясь по трубе переменного сечения, может как полностью перекрывать пусковую трубу, так и частично [1].

1-345080

В данной работе исследовалась возможность применения сквозного счета, когда метаемое тело, которое полностью перекрывает канал пусковой установки, заменяется вводом импульса в газовый поток, причем вводимый импульс эквивалентен по величине сопротивлению тела этому потоку. Задача решалась в одномерной постановке. Уравнения, описывающие течение невязкого теплоизолированного газа по пусковой трубе, будут иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U S) = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U S) + \frac{\partial}{\partial x}[(P + \rho U^2) S] = P\frac{\partial S}{\partial x} - \chi; \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e S) + \frac{\partial}{\partial x}[(P + \rho e) US] = 0, \tag{3}$$

где ρ — плотность; U — скорость; P — давление; e — внутренняя энергия единицы массы газа; S — площадь сечения трубы; χ — функция, учитывающая наличие тела в газовом потоке и определяемая как ввод импульса в этот поток. Она задается так же как и в [1]:

$$\chi = \begin{cases} 0, & x < x_m - l; \\ \dfrac{R}{l^2}(x - x_m + l), & x < x_m; \\ -\dfrac{R}{l^2}(x - x_m - l) & x \leqslant x_m + l; \\ 0, & x > x_m + l, \end{cases} \tag{4}$$

ЧИТАЛЬНАЯ БИБЛИОТЕКА ДЛЯ КНИГ

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

где x — текущая координата; x_m — координата левого торца тела; $2l$ — величина зоны влияния тела на газовый поток; R — сила сопротивления тела. Величину R определяем по формуле

$$R = P_m S_m, \tag{5}$$

где P_m — давление слева от тела; S_m — площадь сечения тела. Давление слева от тела определяется по формуле

$$P_m = \begin{cases} P_* + v/\left(\frac{1}{\rho_*} - \alpha'\right)\left(\frac{\gamma+1}{4}v + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}v\right)^2 + \gamma P_*\left(\frac{1}{\rho_*} - \alpha'\right)}\right), & v > 0; \\ P_*\left(1 + v/\left(\frac{2}{\gamma-1}\sqrt{\gamma P_*\left(\frac{1}{\rho_*} - \alpha'\right)}\right)\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, & v \leqslant 0, \end{cases} \tag{6}$$

где γ — отношение теплоемкостей; $v = U_* - U_m$ — относительная скорость; P_* — давление; ρ_* — плотность газа; U_m — скорость метаемого элемента. Газодинамические параметры, отмеченные звездочкой, определяются как параметры набегающего потока газа.

Вычисление этих параметров строилось следующим образом.

а) Для $x_m - l \leqslant x \leqslant x_m$ определялись масса, импульс и энергия газа по формулам:

$$M = \int_{x_m-l}^{x_m} \rho S dx; \quad J = \int_{x_m-l}^{x_m} \rho U S dx; \quad \varepsilon = \int_{x_m-l}^{x_m} \rho e S dx;$$

$$\int_{x_m-l}^{x_m} f dx \approx (f_l + f_i)\frac{x_i - x_m + l}{2} + \sum_{i}^{i+\kappa-1}(f_i + f_{i+1})\frac{x_{i+1} - x_i}{2} +$$

$$+ (f_{i+\kappa} + f_m)\frac{x_m - x_{i+\kappa}}{2}, \tag{7}$$

i — номер текущей расчетной точки разностной схемы; κ — количество точек, попадающих в указанную область. Газодинамические параметры в точках с координатами $x_m - l$, x_m определялись линейной интерполяцией по значениям в соседних точках.

б) После вычисления массы M, импульса I и энергии ε определяем

$$\rho_* = M/W, \quad U_* = J/(\rho_* W), \quad P_* = \frac{(\gamma+1)\varepsilon}{\left(\frac{1}{\rho_*} - \alpha'\right)}/(\rho_* W),$$

где $W = \int_{x_m-l}^{x_m} S dx.$

Отметим, что $e = \frac{P}{\gamma+1}\left(\frac{1}{\rho} - \alpha'\right)$.

Формула (6) определяет «полураспад разрыва» и взята из [2].

Численная реализация данной задачи осуществлялась методом предиктор—корректор. Разностная схема для уравнений (1)—(3) записывалась аналогично [1]. Задача решалась в безразмерных величинах. За характерные величины берем длину камеры высокого давления, плотность и скорость звука в начальный момент времени. Граничные условия выбирались следующим образом: на неподвижной левой стенке пусковой трубы $U = 0$; на срезе пусковой трубы параметры течения газа определялись из условия «распада разрыва» [3].

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Начальные условия определялись: в камере высокого давления

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\ t=0,\ U=0,\ P=\frac{1}{\gamma},\ \rho=1;$$

справа от тела

$$t=0,\ U=0,\ P=\frac{\varepsilon_1}{\gamma},\ \rho=\varepsilon_2;$$

скорость метаемого элемента бралась из условия

$$\frac{dU_m}{dt}=\sigma R, \tag{8}$$

σ — отношение массы метаемого газа к массе метаемого элемента.

Заметим, что при $t=0$,

$$U_m=0,\ R=0.$$

Численные результаты решения данной задачи показали, что предложенный метод сквозного расчета может быть использован при решении одномерных задач газовой динамики, когда метаемый элемент движется по каналу переменного сечения. Это позволит, когда нет необходимости рассматривать процессы, происходящие в метаемом элементе или на его поверхности, упростить логику составляемых программ и сократить время их счета на ЭВМ.

Данная методика расчета сравнивалась с аналитическим решением задачи Лагранжа из [4]. На рис. 1 изображены относительные погрешности в определении скорости метаемого элемента в зависимости от пройденного им пути. Относительная погрешность определялась в виде

$$|\delta U|=\frac{U_r-U_a}{U_a}100\ \%,$$

где U_r — численное решение; U_a — аналитическое решение из [4]. Исследовалось также влияние протяженности зоны ввода импульса на точность решения задачи. Так, на рис. 1 кривая *1* соответствует случаю $l=h$, кривая *2* — случаю $l=3h$, где h — шаг разностной сетки по x. Дальнейшее увеличение количества точек, где вводится импульс, не приводит к повышению точности решения. Решение, представленное на рис. 1, проведено при $\gamma=1{,}4$; $\sigma=4$; $\varepsilon_1=10^{-5}$; $\varepsilon_2=1/600$; $\alpha'=0$.

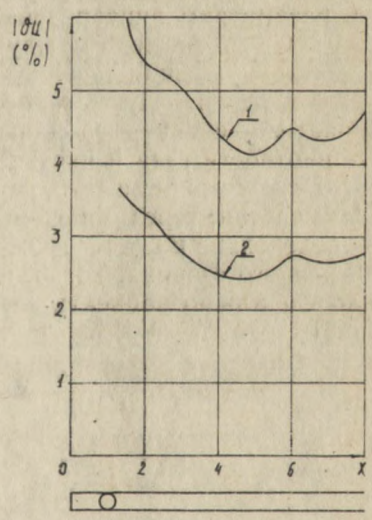

Рис. 1

ЛИТЕРАТУРА

1. Комаровский Л. В., Новгородцев Н. А., Хоменко Ю. П. Численное решение задачи о метании свободного тела газовым потоком. — В кн.: Аэродинамика быстропротекающих процессов, Томск: Изд-во ТГУ, 1982, с. 10—16.

2. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. — М.: Наука, 1968. — 592 с.

3. Дмитриева С. Л., Хоменко Ю. П. О граничном условии на открытом конце трубы. — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1977, с. 33—35.

4. Златин Н. А., Красильщиков А. П., Мишин Г. И., Попов Н. Н. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях. — М.: Наука, 1974. — 344 с.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ОБ АЛГОРИТМАХ РАСЧЕТА ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ В СОПЛАХ

Т. В. Болтрукевич, И. М. Васенин, А. А. Глазунов

Уравнения двухфазного течения при определенных условиях представляют собой уравнения с малыми параметрами при производных [1]. Это приводит к значительным трудностям при построении алгоритмов для их численного интегрирования. Чтобы выяснить особенности проблемы, рассмотрим линеаризованные уравнения квазиодномерного течения без учета теплообмена между фазами.

Невозмущенное течение будем считать одномерным, стационарным и равновесным. Пусть $s_0 = \text{const}$ — площадь сечения невозмущенного потока; $u_0 = \text{const}$ — его скорость; $\rho_0 = \text{const}$ и $\rho_{s0} = \text{const}$ — невозмущенные плотности газа и частиц; $a_0 = \text{const}$ — скорость звука в газовой фазе. Обозначим, кроме того, через u и u_s размерные возмущения скоростей газа и частиц; через ρ и ρ_s — размерные возмущения их плотности; через p — поделенное на $\rho_0 a_0^2$ возмущение давления, через s — возмущение поперечного сечения. Тогда, пренебрегая величинами высшего порядка малости, можно записать следующую систему линеаризованных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_0 u + a_0 p) = \frac{w}{\alpha}(u_s - u);\\
&\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(a_0 u + u_0 p) = -\frac{u_0 a_0}{s_0}\frac{\partial s}{\partial x};\\
&\frac{\partial u_s}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_s}{\partial x} = \frac{1}{\alpha}(u - u_s);\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + a_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\rho_0}{a_0}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p}{\partial x}\right);\\
&\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho_s}{\partial x} + \rho_{s0}\frac{\partial u_s}{\partial x} = -\frac{\rho_{s0} u_0}{s_0}\frac{\partial s}{\partial x},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $w = \frac{\rho_{s0}}{\rho_0}$; $\frac{1}{\alpha} = \frac{c_R}{m}$ — отнесенный к единице массы коэффициент сопротивления частицы.

В качестве модельной задачи рассмотрим сначала задачу о распространении краевого режима в слабовозмущенной тонкой двухфазной

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

струе. Если давление вне струи постоянно, то, пренебрегая его перепадом поперек струи, в уравнениях (1) можно положить

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

В этом приближении получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{w}{\alpha}(u_s - u);$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_s}{\partial x} = \frac{1}{\alpha}(u - u_s) \tag{2}$$

и

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho_s}{\partial x} + \rho_{s0} \frac{\partial u_s}{\partial x} = -\frac{\rho_{s0} u_0}{s_0} \frac{\partial s}{\partial x}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial (s_0 u + u_0 s)}{\partial x} = 0.$$

Подсистема уравнений (2) с параметром α не содержит возмущений ρ, ρ_s, s, поэтому ее можно решать независимо от подсистемы (3).

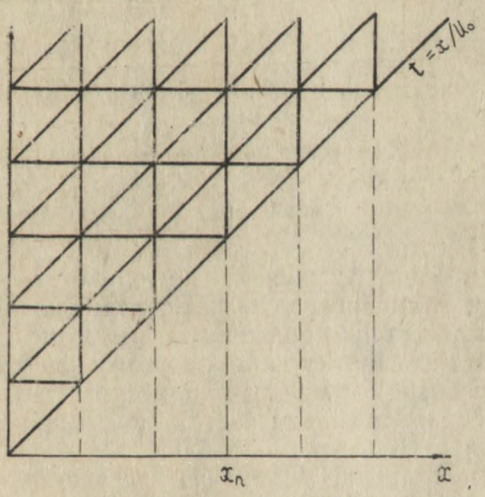

Рис. 1. Расчетная область

Решение (2) будем искать в секторе, ограниченном осью и характеристикой $t = x/u_0$ (рис. 1), с граничными условиями для возмущений

$$u(0, t) = u_H = \text{const};$$
$$u_s(0, t) = u_{sH} = \text{const}. \tag{4}$$

Точное решение поставленной задачи

$$u = \frac{u_H + w u_{sH}}{1 + w} - w \frac{u_{sH} - u_H}{1 + w} e^{-\frac{1+w}{\alpha} \frac{x}{u_0}};$$

$$u_s = \frac{u_H + w u_{sH}}{1 + w} + \frac{u_{sH} - u_H}{1 + w} e^{-\frac{1+w}{\alpha} \frac{x}{u_0}}. \tag{5}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Проанализируем с его помощью нескольких простейших разностных схем. Сначала запишем разностную схему метода характеристик, аппроксимировав правые части уравнений (2) явным образом:

$$u_{n+1}^{i+1} - u_n^i = (u_{sn}^i - u_n^i)\, w \frac{\Delta x}{\alpha u_0};$$
$$u_{sn+1}^{i+1} - u_{sn}^i = (u_n^i - u_{sn}^i) \frac{\Delta x}{\alpha u_0}. \tag{6}$$

Решение этой задачи с граничными условиями $u_0^{i-n} = u_H$, $u_{s0}^{i-n} = u_{sH}$ имеет вид

$$u_n^i = \frac{u_H + w u_{sH}}{1+w} - w \frac{u_{sH} - u_H}{1+w} \left[1 - (1+w)\frac{\Delta x}{\alpha u_0}\right]^n;$$
$$u_{sn}^i = \frac{u_H + w u_{sH}}{1+w} + \frac{u_{sn} - u_H}{1+w} \left[1 - (1+w)\frac{\Delta x}{\alpha u_0}\right]^n, \tag{7}$$

$x \leqslant u_0 t$.

Когда $(1+w)\frac{\Delta x}{\alpha u_0} \ll 1$, разница между решением разностной задачи и точным решением имеет порядок $(1+w)\frac{\Delta x}{\alpha u_0}$. Если $(1+w)\times$ $\times \frac{\Delta x}{\alpha u_0} < 2$, то решение (7) при $i \to \infty$, $n \to \infty$ и решение (5) при $t \to \infty$, $x \to \infty$ стремятся к одному и тому же пределу. В случае $(1+w)\frac{\Delta x}{\alpha u_0} > 2$ решение разностной задачи расходится. Таким образом, когда параметр $\frac{\alpha u_0}{1+w}$ мал, для получения хорошей точности в случае явной разностной схемы (6) необходимо выбирать и малый шаг интегрирования.

Существенно, что шаг Δx зависит не только от скорости u_0 и параметра α, но также и от концентрации w. Последняя зависимость обусловлена тем, что при достаточно больших w уравнение движения газовой фазы содержит малый параметр α/w, поэтому необходимые меры для интегрирования уравнений с малым параметром должны применяться не только к уравнениям движения частиц, но и к уравнениям движения газа.

В упрощенной постановке задачи (1) не принимался во внимание теплообмен между фазами. Исследования математической модели двухфазного потока с учетом теплообмена показывают, что одновременно с уравнениями движения малые параметры входят в уравнения энергии газа и частиц. В этом случае упомянутые выше меры должны применяться также и к этим уравнениям.

Пусть теперь в задаче о распространении краевого режима в двухфазной тонкой струе давление во внешней среде меняется по известному закону. Обозначив через $f(x, t)$ известную функцию $-a_0 \frac{\partial p}{\partial x}$, вместо системы (2) получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{w}{\alpha}(u_s - u) + f(x, t); \tag{8}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_s}{\partial x} = \frac{1}{\alpha}(u - u_s),$$

которую, как и прежде, будем решать в области

$$0 < x < u_0 t,\ t > 0,$$

с граничными условиями (4).

Точное решение задачи (8), (4) имеет вид

$$u_s = \frac{u_H + w u_{sH}}{1+w} + \frac{u_{sH} - u_H}{1+w} e^{-\frac{1+w}{\alpha}\cdot\frac{x}{u_0}} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha u_0^2} \int_0^x e^{-\frac{1+w}{\alpha u_0}(x-\zeta)} (x-\eta)\, d\eta \int_0^\eta f\left(\xi,\ t - \frac{x-\xi}{u_0}\right) d\xi; \qquad (9)$$

$$u = u_H + w u_{sH} + \frac{1}{u_0} \int_0^x f\left(\xi,\ t - \frac{x-\xi}{u_0}\right) d\xi - w u_{sH}.$$

Запишем для этой задачи разностную схему метода характеристик, в которой правые части аппроксимируем неявным образом

$$u_{n+1}^{i+1} - u_n^i = \frac{w}{\alpha}(u_{sn+1}^{i+1} - u_{n+1}^{i+1})\,\Delta t + f(x_{n+1},\ t_{i+1})\,\Delta t;$$

$$u_{sn+1}^{i+1} - u_{sn}^i = \frac{\Delta t}{\alpha}(u_{n+1}^{i+1} - u_{sn+1}^{i+1}); \qquad (10)$$

$$u_0^{i-n} = u_H,\ u_{s0}^{i-n} = u_{sH}.$$

Ее решение

$$u_{sn}^i = \frac{u_H + w u_{sH}}{1+w} + \frac{u_{sH} - u_H}{1+w} \frac{1}{\left[1 + (1+w)\frac{\Delta x}{\alpha u_0}\right]^n} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha u_0^2} \sum_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{1+w}{\alpha}\frac{\Delta x}{u_0}\right)^{-(n-m+1)} \Delta x \sum_{\kappa=1}^{m} f\left(x_\kappa,\ t_i - \frac{x_n - x_\kappa}{u_0}\right)\Delta x; \qquad (11)$$

$$u_n^i = u_H + w u_{sH} - w u_{sn}^i + \sum_{\kappa=1}^{n} f\left(x_\kappa,\ t_i - \frac{x_n - x_\kappa}{u_0}\right)\frac{\Delta x}{u_0}.$$

$$0 \leqslant n \leqslant i$$

При малых $\frac{(1+w)\Delta x}{\alpha u_0}$, как и в случае явной схемы, разница между точным решением и решением разностной задачи имеет порядок $(1+w)\frac{\Delta x}{\alpha u_0}$. Однако в отличие от (7) решение (11) остается ограниченным при любых значениях этой величины.

Пусть $\frac{\alpha u_0}{(1+w)\Delta x} \ll 1$, тогда, разлагая (11) в ряд по малому параметру $\frac{\alpha u_0}{(1+w)\Delta x}$ с точностью до членов второго порядка малости

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

при $n \geqslant 2$, получим

$$u_{sn}^{i} = \frac{u_H + w u_{sH}}{1+w} + \frac{1}{(1+w)\,u_0} \sum_{\kappa=1}^{n} f\left(x_\kappa,\ t_i - \frac{x_n - x_\kappa}{u_0}\right) \Delta x - \\ - \frac{\alpha}{(1+w)^2} f(x_n,\ t_i) + \theta_1; \tag{12}$$

$$u_{n}^{i} = \frac{u_H + w u_{sH}}{1+w} + \frac{1}{(1+w)\,u_0} \sum_{\kappa=1}^{n} f\left(x_\kappa,\ t_i - \frac{x_n - x_\kappa}{u_0}\right) \Delta x + \\ + \frac{\alpha w}{(1+w)^2} f(x_n,\ t_i) + \theta_2,$$

где θ_1 и θ_2 — члены второго порядка малости.

Аналогичное разложение точного решения имеет вид

$$u_s(x,\ t) = \frac{u_H + w u_{sH}}{1+w} + \frac{1}{(1+w)\,u_0} \int_0^x f\left(\eta,\ t - \frac{x-\eta}{u_0}\right) d\eta + \\ + \frac{u_{sH} - u_H}{1+w} e^{-(1+w)/\alpha u_0 x} - \frac{\alpha}{(1+w)^2}\left[f(x,\ t) - e^{-(1+w)/\alpha u_0 x} f\left(0,\ t - \frac{x}{u_0}\right)\right] + \theta_3; \tag{13}$$

$$u(x,\ t) = \frac{u_H + w u_{sH}}{1+w} + \frac{1}{(1+w)\,u_0} \int_0^x f\left(\eta,\ t - \frac{x-\eta}{u_0}\right) d\eta - \\ - w \frac{u_{sH} - u_H}{1+w} e^{-(1+w)/\alpha u_0 x} + \frac{\alpha w}{(1+w)^2}\left[f(x,\ t) - e^{-(1+w)/\alpha u_0 x} f\left(0,\ t - \frac{x}{u_0}\right)\right] + \theta_4,$$

откуда следует, что при малых $\frac{\alpha u_0}{1+w}$ вне пограничного слоя $\left(x \gg \frac{\alpha u_0}{1+w}\right)$ разностное решение (11) с ошибкой порядка Δx, а не $\frac{\Delta x\,(1+w)}{\alpha u_0}$, аппроксимирует ассимптотическое разложение точного решения. Когда $f(x,\ t) \equiv 0$, из (11) получается решение задачи (2), которое при $i \to \infty$, $n \to \infty$ стремится к точному

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ i\to\infty}} u_n^i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ i\to\infty}} u_{sn}^i = \frac{u_H + w u_{sH}}{1+w}. \tag{14}$$

Таким образом, неявная по правым частям разностная схема (10) для уравнений двухфазного течения с малыми параметрами при производных обладает по сравнению с явной схемой рядом преимуществ. Как показали исследования других схем, эти преимущества обусловлены неявной аппроксимацией правых частей уравнений и не связаны с рассмотренными в данной статье методом характеристик и модельной системой уравнений.

В случае наличия в уравнениях двухфазного течения малых параметров нужно осторожно подходить к их аппроксимации. Без тщательного исследования соответствующих схем при их использовании можно получить результаты, не соответствующие действительности. Рассмотрим, например, для задачи (2), (4) разностную схему псевдоустановления, основанную на подходе, разработанном в [2]. В этой работе исход-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ная система уравнений была разделена на две группы: уравнения для газа и уравнения для частиц. Первая группа уравнений решалась методом установления (в [2] она решалась с использованием разностной схемы С. К. Годунова). Для расчета параметров частиц применялись стационарные уравнения.

Воспользовавшись этим подходом для нашей задачи, распишем уравнение движения газа по явной схеме метода характеристик, а для стационарного уравнения частиц возьмем неявную разностную схему

$$\begin{aligned} &u_{n+1}^{i+1} - u_n^i = w\frac{\Delta t}{\alpha}(u_{sn}^i - u_n^i);\\ &u_{sn+1}^{i+1} - u_{sn}^{i+1} = \frac{\Delta x}{\alpha u_0}(u_{n+1}^{i+1} - u_{sn+1}^{i+1}); \qquad (15)\\ &u_0^{i-n} = u_H = \text{const};\\ &u_{s0}^n = u_{sH} = \text{const}. \end{aligned}$$

Выстраивая решение разностной задачи (13) последовательно по слоям $x_1 = \Delta x = \text{const}$, $x_2 = 2\Delta x = \text{const}$ и т. д., заметим, что так как граничные условия не зависят от номера i, в области $t \geqslant x/u_0$ от него не зависит решение, поэтому разностную схему (13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &u_{n+1}^{i+1} - u_n^{i+1} = w\frac{\Delta x}{\alpha u_0}(u_{sn}^{i+1} - u_n^{i+1});\\ &u_{sn+1}^{i+1} - u_{sn}^{i+1} = \frac{\Delta x}{\alpha u_0}(u_{n+1}^{i+1} - u_{sn+1}^{i+1}); \qquad (16)\\ &u_0^{i+1} = u_H;\\ &u_{s0}^{i+1} = u_{sH}, \end{aligned}$$

где $\Delta t = \dfrac{\Delta x}{u_0}$.

При $i = \text{const}$, $0 \leqslant n \leqslant i$ она имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} u_n^i = &\frac{wu_{sH}\left(1 + \frac{\Delta x}{\alpha u_0}\right) + u_H\left(1 - w\frac{\Delta x}{\alpha u_0}\right)}{1 + w} - \\ &- w\frac{(u_{sH} - u_H)\left(1 + \frac{\Delta x}{\alpha u_0}\right)}{1 + w}\left(\frac{1 - w\frac{\Delta x}{\alpha u_0}}{1 + \frac{\Delta x}{\alpha u_0}}\right)^n; \qquad (17)\\ u_{sn}^i = &\frac{wu_{sH}\left(1 + \frac{\Delta x}{\alpha u_0}\right) + u_H\left(1 - w\frac{\Delta x}{\alpha u_0}\right)}{1 + w} + \\ &+ \frac{(u_{sH} - u_H)\left(1 + \frac{\Delta x}{\alpha u_0}\right)}{1 + w}\left(\frac{1 - w\frac{\Delta x}{\alpha u_0}}{1 + \frac{\Delta x}{\alpha u_0}}\right)^n. \end{aligned}$$

Если $\left|\dfrac{1 - w\frac{\Delta x}{\alpha u_0}}{1 + \frac{\Delta x}{\alpha u_0}}\right| < 1$, то последовательности (17) имеют предел

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ i\to\infty}} u_n^i = \lim_{\substack{n\to S\\ i\to\infty}} u_{sn}^i = \frac{wu_{sH}\left(1+\frac{\Delta x}{au_0}\right)+u_H\left(1-w\frac{\Delta x}{au_0}\right)}{1+w},$$

который, однако, отличается от точного значения (14).

Чтобы записать схему псевдоустановления, позволяющую получить верный результат при любых $\frac{\Delta x}{au_0}$ и w, рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u_0\frac{\partial(u+wu_s)}{\partial x}=0; \qquad (18)$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial x}=\frac{1}{au_0}(u-u_s),$$

в которой уравнение движения газа заменено его линейной комбинацией со стационарным уравнением движения частиц. Первое уравнение этой системы распишем по схеме

$$u_{n+1}^{i+1}-u_{n+1}^i+\frac{u_0\Delta t}{\Delta x}[(u_{n+1}^i+wu_{sn+1}^i)-(u_n^i+wu_{sn}^i)]=0, \qquad (19)$$

второе заменим разностным соотношением

$$u_{sn+1}^{i+1}-u_{sn}^{i+1}=\frac{\Delta x}{au_0}(u_{n+1}^{i+1}-u_{sn+1}^{i+1}). \qquad (20)$$

Решая с помощью (19) и (20) задачу о распространении краевого режима, найдем

$$u_n^i=\frac{u_H+wu_{sH}}{1+w}-w\frac{u_{sH}-u_H}{1+w}\frac{1}{\left[1+(1+w)\frac{\Delta x}{au_0}\right]^n};$$

$$u_{sn}^i=\frac{u_H+wu_{sH}}{1+w}+\frac{u_{sH}-u_H}{1+w}\frac{1}{\left[1+(1+w)\frac{\Delta x}{au_0}\right]^n}. \qquad (21)$$

Сравнивая (21) и (11), видим, что полученный результат полностью совпадает с решением, найденным с помощью неявной схемы (10), если положить в ней $f(x, t)\equiv 0$.

Сделанные на основании решения модельных задач выводы полностью подтверждаются при численном интегрировании уравнений двухфазного течения в соплах. Сравнение между собой различных алгоритмов проводилось на решениях квазистационарной задачи установления для сопла. Контур до трансзвуковой части описывается уравнением

$$y=3{,}125-0{,}625\cos\frac{\pi}{3{,}75}x.$$

Диаметр критического сечения этого сопла 5 см. Задача решалась для уравнений монодисперсного двухфазного потока с учетом скоростной и температурной неравновесности. На входе в сопло задавались энтальпия и энтропия, а течение предполагалось равновесным. Начальные значения параметров рассчитывались путем решения задачи для замороженого двухфазного течения.

Сравнивались четыре разностные схемы:

1. Схема I — классическая схема Маккормака [3].

2. Схема II — схема Маккормака, в которой выражения для сопротивления частиц и тепловых потоков между фазами записывались на

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

верхнем слое по времени так, как это сделано при решении модельной задачи (10).

3. Схема III — схемы псевдоустановления, аналогичные схеме (15).

4. Схема IV — схема псевдоустановления, построенная по принципу схемы (18). В этой схеме вместо уравнений движения и энергии газовой фазы использовались их линейные комбинации со стационарными уравнениями движения и энергии газа и частиц соответственно. Они интегрировались по схеме Маккормака. Стационарные уравнения движения и теплообмена частиц решались с помощью неявной по правым частям разностной схемы второго порядка точности.

В качестве параметра, характеризующего установление, было взято отношение $\frac{G-G_p}{G_p}$, в котором через G обозначена величина расхода неравновесного двухфазного потока, а через G_p — расход стационарного равновесного течения через это же сопло. За единицу времени бралась величина $r_{кр}/a_*$, где a_* — скорость звука торможения газовой фазы, $r_{кр}$ — радиус критического сечения сопла. Расчетная область разбивалась по координате x на 50 расчетных ячеек. На рис. 2 приведены резуль-

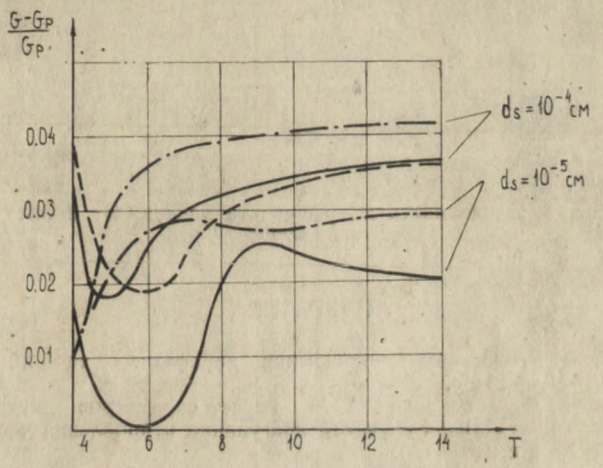

Рис. 2. Зависимость отношения расходов от времени установления: схемы I и II —.; схема III —.—.; схема IV———

таты расчетов отношения расходов как функции безразмерного времени $tr_{кр}/a_*$ в процессе установления для частиц диаметром $d_s = 10^{-4}$ см при $w = 0.5$. Видно, что величины безразмерных поправок к коэффициенту расхода на неравновесность в двухфазном потоке, рассчитанные по схемам I, II и IV, стремятся к одному и тому же пределу $\frac{G-G_p}{G_p} = 0{,}036$.

Расчет по схеме III приводит к ошибке в 17%. Для частиц диаметром $d_s = 10^{-5}$ см эта ошибка становится равной 45%. Хотя схема I и позволяет получить правильные значения параметров потока, но для расчетов течения с малыми частицами и большими концентрациями конденсированной фазы она требует мелкой сетки и много машинного времени. Так например, в рассмотренной выше задаче с помощью схемы I удается устойчиво рассчитывать течения с диаметром частиц более $0{,}8 \cdot 10^{-4}$ см. Схемы II и IV позволяют проводить расчеты с частицами любых диаметров и при любых концентрациях. Из рис. 3 видно, что рассчитанный по схеме IV коэффициент расхода с уменьшением диаметра частиц стремится к коэффициенту расхода равновесного потока. Анало-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

гичные результаты дает схема II, поэтому с точки зрения диапазонов параметров устойчивого счета схемы II и IV равноценны. Однако если иметь в виду использование этих схем для расчета полидисперсных двухфазных течений с большим числом фракций, то схема II менее удобна, так как при вычислениях требует совместного решения больших систем линейных уравнений в каждом узле сетки и на каждом слое по времени. С другой стороны, схему IV нельзя применять для расчетов многомерных потоков, когда в поле течения образуются замкнутые вихревые линии.

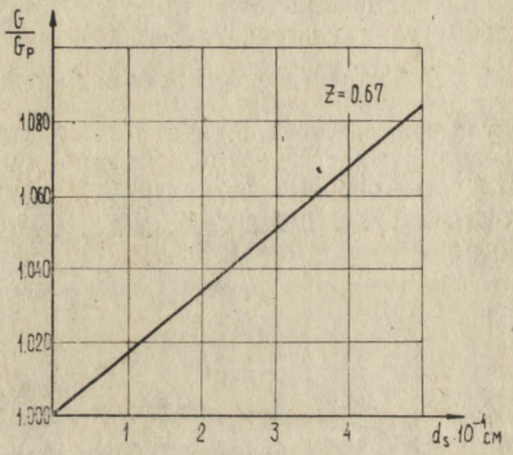

Рис. 3. Зависимость коэффициента расхода от диаметра частиц

ЛИТЕРАТУРА

1. Стернин Л. Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. — М.: Машиностроение, 1974. — 212 с.

2. Кисаров Ю. Ф., Липанов А. М. Расчет параметров двухфазного течения в осесимметричном сопле Лаваля с учетом коагуляции и дробления частиц. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 4, с. 161—165.

3. Mac Cormack R. W. The Effect of viscosity in Hypervelocity Jmpact Cratering, AIAA Paper, NO 69—354, Cincinalti, Ohio, 1969, pp. 6.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

РАСЧЕТ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ НА ОСНОВЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. В. Старченко

Интенсивное развитие современной теплотехники и ядерной энергетики требует углубленного изучения нестационарных процессов, происходящих при турбулентном неустановившемся движении жидкости в трубах и каналах, и создания адекватных им математических моделей [1].

Следует отметить, что нестационарные турбулентные течения практически не исследовались, специальные модели для них не создавались. В единичных теоретических работах по данной проблеме делались попытки распространить имеющиеся методики по расчету установившихся турбулентных течений на неустановившиеся [2—5]. В связи с этим встает вопрос о границах применимости такого подхода, поскольку в моделях турбулентности [2—5] на некотором этапе используются эмпирические стационарные константы.

Целью данной работы является сопоставление некоторых полуэмпирических моделей турбулентности различного уровня замыкания для описания стабилизированного течения в круглой трубе и сравнение полученных результатов с имеющимися экспериментальными данными.

Рассматривается турбулентное течение вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе далеко от входного и выходного сечений. Предполагается, что течение осесимметричное в среднем. Уравнение движения и краевые условия имеют вид

$$\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Sh}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(1+\varepsilon_\tau\right)\frac{\partial u}{\partial r}\right]-\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1}$$

$$t=0: u=u_0(r);\ r=1: u=0;\ r=0: \frac{\partial u}{\partial r}=0. \tag{2}$$

В (1) и (2) все величины осредненные и обезразмеренные. Здесь $u=u'/u_{\mathrm{ср}}$; $r=r'/r_0$; $\varepsilon_\tau=\nu_T/\nu$; $p=p'/\rho u_{\mathrm{ср}}^2$; $x=x'/(\mathrm{Re}\cdot r_0)$; $t=t'/t_0$; $\mathrm{Re}=\frac{u_{\mathrm{ср}}\cdot r_0}{\nu}$; $\mathrm{Sh}=\frac{r_0}{u_{\mathrm{ср}}\cdot t_0}$, где $u_{\mathrm{ср}}$ — средняя скорость; r_0 — радиус трубы; p' — давление; ρ = плотность; ν, ν_T — коэффициенты молекулярной и турбулентной вязкости соответственно; t_0' — характерный масштаб времени.

При исследовании нестационарного течения предполагается, что расход изменяется по гармоническому закону $Q(t)=Q_0(1+\alpha\sin 2\pi t)$, где Q_0 — значение расхода при $t=0$; α — относительная амплитуда колебаний расхода; $t_0=2\pi/\omega$, где ω — частота колебаний расхода.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Для замыкания (1)—(2), т. е. для задания коэффициента турбулентной вязкости ε_τ, использовались следующие модели турбулентности.

1. Модель Рейхардта [6], где

$$\varepsilon_\tau = \begin{cases} \frac{\varkappa}{3} y_{+0}(1-r^2)(0{,}5+r^2), & y_+ \geqslant 50; \\ \varkappa[y_+ - 11\,\mathrm{th}\,(y_+/11)], & y_+ \leqslant 50, \end{cases} \tag{3}$$

$$\varkappa = 0{,}4;\ y_+ = \mathrm{Re}\sqrt{\frac{c_f}{2}}(1-r);\ y_{+0} = \mathrm{Re}\sqrt{\frac{c_f}{2}};\ c_f = \frac{2\tau_w}{\rho u_{\mathrm{ср}}^2}.$$

Здесь τ_w — мгновенное значение трения на стенке.

2. Модель Васильева-Квона [3] — однопараметрическая модель турбулентности

$$\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Sh}\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r(1+\varkappa\varepsilon_\tau)\frac{\partial e}{\partial r}\right] + \varepsilon_\tau\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \frac{c(1+\varkappa\varepsilon_\tau)e}{L^2}; \tag{4}$$

$$L = 0{,}37 - 0{,}24r^2 - 0{,}13r^4; \tag{5}$$

$$\varepsilon_\tau = \alpha_0 \mathrm{Re}_T\{1 - \exp(-\sigma_1 \mathrm{Re}_T^2) + \sigma_3 \mathrm{Re}_T^{1/2}\exp(-\sigma_2 \mathrm{Re}_T^2)\}; \tag{6}$$

$$t = 0: e = e_0(r);\ r = 1: e = 0;\ r = 0: \frac{\partial e}{\partial r} = 0. \tag{7}$$

Здесь $e = e'/u_{\mathrm{ср}}^2$ — энергия турбулентности; L — безразмерный масштаб турбулентности; $\varkappa = 0{,}4$; $c = 3{,}93$; $\alpha_0 = 0{,}2$; $\sigma_1 = 4\cdot10^{-4}$; $\sigma_2 = 2{,}1\cdot10^{-4}$; $\sigma_3 = 0{,}02$; $\mathrm{Re}_T = \mathrm{Re}\sqrt{e}\,L$.

3. Модель «e—ε» — двухпараметрическая модель турбулентности, в которой ε_τ определяется на основе решения двух дифференциальных уравнений для энергии турбулентности e и для ее диссипации ε:

$$\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Sh}\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(1+\frac{\varepsilon_\tau}{\sigma_e}\right)\frac{\partial e}{\partial r}\right] + \varepsilon_\tau\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \varepsilon - D; \tag{8}$$

$$\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Sh}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(1+\frac{\varepsilon_\tau}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\right] + \frac{c_1 f_1 \varepsilon\cdot\varepsilon_\tau}{e}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \frac{c_2 f_2 \varepsilon(\varepsilon - B)}{e} + E; \tag{9}$$

$$t = 0: e = e_0(r);\ \varepsilon = \varepsilon_0(r);\ r = 1: e = 0;\ \varepsilon = A;\ r = 0: \frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0. \tag{10}$$

$$\varepsilon = \varepsilon'/(\nu u_{\mathrm{ср}}^2/r_0^2);\ \varepsilon_\tau = c_\mu f_\mu \mathrm{Re}_{T1};\ \mathrm{Re}_{T1} = \mathrm{Re}^2 e^2/\varepsilon. \tag{11}$$

В данной работе было проведено сопоставление пяти модификаций модели «e—ε» [7—11]. Значения констант и функций представлены в табл. 1.

4. Модель Г. С. Глушко [12] — двухпараметрическая модель турбулентности, в которой коэффициенты турбулентной вязкости определяются на основе решения уравнений для энергии турбулентности e и для $\lambda = L^2/2$, где L — масштаб турбулентности.

$$\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Sh}\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r(1+\varkappa\varepsilon_\tau)\frac{\partial e}{\partial r}\right] + \varepsilon_\tau\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \frac{c(1+\varkappa\varepsilon_\tau)e}{2\lambda}; \tag{12}$$

$$\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Sh}\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \lambda}{\partial r}\right) - \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial r}\right)^2 + \frac{2+\varkappa\varepsilon_\tau}{e}\frac{\partial e}{\partial r}\frac{\partial \lambda}{\partial r} -$$

Таблица 1

Константа, функции	Модификация				
	Джонса—Лаундера	Акаи и др.	Хоффмана	Чена	Лэма—Брэмхорста
σ_e	1,0	1,0	2,0	1,0	1,0
σ_ε	1,3	1,3	3,0	1,3	1,3
c_1	1,44	1,44	1,81	1,35	1,44
c_2	1,92	1,92	2,0	1,8	1,92
c_μ	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09
f_1	1,0	1,0	1,0	1,0	$1+\left(\frac{0,05}{f_\mu}\right)^3$
f_2	$1-0,3\,e^{-\mathrm{Re}_{\tau 1}^2}$	$1-0,3\exp(-\mathrm{Re}_{\tau 1}^2)$	$1-0,3\,e^{-\mathrm{Re}_{\tau 1}^2}$	$1-\frac{0,4}{1,8}e^{-\frac{\mathrm{Re}_{\tau 1}^2}{36}}$	$1-e^{-\mathrm{Re}_{\tau 1}^2}$
f_μ	$e^{\frac{-2,5}{1+\mathrm{Re}_{\tau 1/50}}}$	$e^{\frac{-2,5}{1+\mathrm{Re}_{\tau 1/50}}}$	$e^{\frac{-1,75}{1+\mathrm{Re}_{\tau 1/50}}}$	$1-e^{-0,011y+}$	$(1+20,5/\mathrm{Re}_{\tau 1})\times$ $\times(1-e^{-0,0165\mathrm{Re}_e^2})$
A	0,0	$2\left(\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial r}\right)^2_{r=1}$	0,0	0,0	$\left(\frac{\partial^2 e}{\partial r^2}\right)_{r=1}$
B	0,0	$2\left(\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial r}\right)^2$	0,0	0,0	0,0
D	$2\left(\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial r}\right)^2$	0,0	$\frac{2}{1-r}\frac{\partial e}{\partial r}$	$\frac{2e}{(1-r)^2}$	0,0
E	$2\varepsilon_\tau\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)^2$	$2\varepsilon_\tau\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)^2$	0,0	$\frac{-2\varepsilon}{(1-r)^2}e^{-\frac{y+}{2}}$	0,0

Электронная библиотека (репозиторий) Томского государственного университета

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$-c_3\frac{\varepsilon_\tau}{e}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\lambda+c_4\cdot c\left\{1-\left[\frac{2\lambda}{(1-r)^2}\right]^\xi\right\}(1+\varkappa\varepsilon_\tau); \qquad (13)$$

$$\varepsilon_\tau=\alpha_0\mathrm{Re}_T\{1-\exp(-\sigma_1\mathrm{Re}_T^2)+\sigma_3\mathrm{Re}_T^{1/2}\exp(-\sigma_2\mathrm{Re}_T^2)\}, \qquad (14)$$

$\mathrm{Re}_T=\mathrm{Re}\sqrt{e}\,L$, $c_3=0{,}075$; $c_4=0{,}2$; $\xi=0{,}7$; $\varkappa=0{,}4$; $c=3{,}93$; $\alpha_0=0{,}2$;

$$t=0: e=e_0(r);\ \lambda=\lambda_0(r);\ r=1: e=\lambda=0;\ r=0:\frac{\partial e}{\partial r}=\frac{\partial\lambda}{\partial r}=0.$$

Задача решалась численно методом конечных разностей. Дифференциальные уравнения аппроксимировались неявными конечно-разностными аналогами со вторым порядком точности по координате и первым — по времени. Для иллюстрации вышесказанного возьмем уравнение

$$\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Sh}\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\text{Д}\frac{\partial f}{\partial r}\right)+Af+B+C\frac{\partial f}{\partial r} \qquad (15)$$

и запишем его в конечно-разностном виде

$$\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Sh}\frac{f_\kappa^{n+1}-f_\kappa^n}{\tau}=\frac{1}{r_\kappa h}\left(E_{\kappa+1/2}^{n+1}\frac{f_{\kappa+1}^{n+1}-f_\kappa^{n+1}}{h}-E_{\kappa-1,2}^{n+1}\frac{f_\kappa^{n+1}-f_{\kappa-1}^{n+1}}{h}\right)+$$

$$+A_\kappa^{n+1}f_\kappa^{n+1}+B_\kappa^{n+1}+C_\kappa^{n+1}\frac{f_{\kappa+1}^{n+1}-f_{\kappa-1}^{n+1}}{2h}, \qquad (16)$$

$n=0,\ 1,...;\ \kappa=1,...,\ N-1;\ E_\kappa^{n+1}=r_\kappa\text{Д}_\kappa^{n+1};\ E_{\kappa\pm1/2}^{n+1}=\frac{E_\kappa^{n+1}+E_{\kappa\pm1}^{n+1}}{2}$; h — шаг по r; N — число узлов; τ — шаг по времени. Считается, что значения A, B, C, Д известны. Граничные условия $f=0$ при $r=1$ и $\frac{\partial f}{\partial r}=0$ при $r=0$ расписывались со вторым порядком аппроксимации по r. Полученная система уравнений решалась методом прогонки [13]. В силу того, что в функции A, B, C, Д входят также и искомые величины, применялись итерации на каждом слое по времени.

В качестве условия окончания итераций было выбрано условие

$$|c_f^{i+1}-c_f^i|/c_f^i<\varepsilon_1,$$

где i — номер итерации, $\varepsilon_1=10^{-5}$.

В уравнении движения неизвестными являются скорость и градиент давления. Для их нахождения применялся метод Симуни [14]. Его суть заключается в представлении значений скорости в конечно-разностном аналоге уравнения движения (1) в виде $u_\kappa^{n+1}=w_\kappa^{n+1}+\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{n+1}z_\kappa^{n+1}$ и использовании условия постоянства расхода

$$2\int_0^1 urdr=1+\alpha\sin 2\pi t$$

для определения градиента давления.

Распределение искомых величин в начальный момент времени находилось из решения соответствующих уравнений методом установления. Оценивая эффективность достижения стационарного решения при использовании различных моделей турбулентности, следует отметить, что модели Глушко и Васильева—Квона в этом смысле оказываются на порядок эффективнее, чем модели «e—ε». Это объясняется структурой дифференциальных уравнений, которая в случае моделей Глушко и Васильева—Квона позволяет интегрировать систему уравнений с большим шагом τ, чем для моделей «e—ε». Среди модификаций модели «e—ε» более эффективными для численного счета являются модификации Чена и

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Хоффмана. Число итераций, необходимое для получения стационарного решения по модификации Чена, обычно в 3—5 раз меньше итераций, затраченных для получения стационарного решения по модификации Джонса—Лаундера, которая требует наименьшего шага интегрирования из всех моделей.

Как известно, при течении жидкости вблизи твердого тела наибольшие градиенты искомых величин имеют место в пристеночной области, поэтому для исследования течения в круглой трубе предварительно применялось преобразование вида $\eta=\ln(1-r+\delta)$, где параметр δ выбирался таким образом, чтобы в области $0<y_+<10$ было не менее семи узловых точек.

Были проведены расчеты установившегося течения по двухпараметрическим моделям при различных числах Рейнольдса ($Re=2{,}5\cdot10^3\div5\cdot10^5$) для сравнения с имеющимися экспериментальными данными. На рис. 1 изображены профили скорости, полученные по различным

Рис. 1. Сопоставление расчетов профиля скорости по различным двухпараметрическим моделям с экспериментальными данными [5]

модификациям «e—ε» и модели Глушко, и экспериментальные данные Букреева—Шахина [5] ($Re=16000$). Видно, что все модели достаточно хорошо предсказывают распределение скорости по радиусу трубы. Расчеты по модификациям модели «e—ε» дают заниженные значения скорости вблизи оси трубы (отличие до 3%), в то время как расчеты по модели Глушко дают завышенные значения скорости в области равновесного турбулентного течения вдали от стенки и оси трубы.

Рис. 2. Сравнение экспементальных данных Букреева и Шахина с рассчитанными значениями энергии турбулентности $e_+=e/(c_f/2)$

Для проверки адекватности представления турбулентной структуры потока были рассчитаны значения энергии турбулентности и сравнены с экспериментальными данными Букреева—Шахина для турбулентного ядра потока (рис. 2) и Креплина—Экельмана [15] для пристеночной

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

области (рис. 3). Видно, что все модели хорошо предсказывают поведение энергии турбулентности в области $0{,}2<r<0{,}8$. Несколько худшее соответствие между расчетами и измерениями имеет место на оси трубы. Здесь более близкие результаты к экспериментальным данным дают модификация Хоффмана и модель Глушко. В пристеночной области ($y_+<100$) плохо предсказывают пик энергии турбулентности при $y_+\approx 20$ модели Хоффмана и Акаи, лучше — модели Лэма—Брэмхорста, Чена, несколько заниженные значения энергии турбулентности представляет

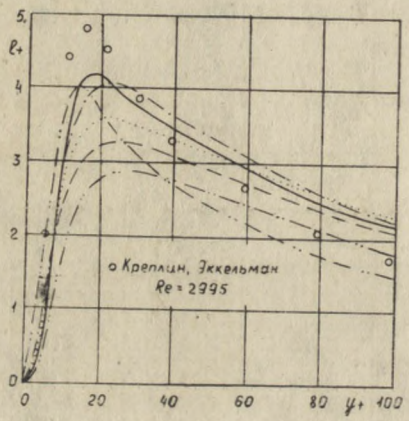

Рис. 3. Сравнение расчетов энергии турбулентности по различным моделям турбулентности с экспериментальными данными [15] (обозначения те же, что и на рис. 2)

модель Глушко. Кроме этого, проводились сопоставления рассчитанных и вычисленных по формуле Блазиуса [16] значений коэффициента трения на стенке для чисел Рейнольдса 2995 и 16000 (табл. 2).

$c_f \cdot 10^2$ Таблица 2

Re	Модель						
	[11]	[7]	[9]	[8]	[10]	[12]	Формула Блазиуса
2995,0	0,89	0,95	0,90	0,84	0,94	0,90	0,90
16000,0	0,54	0,61	0,58	0,56	0,62	0,60	0,59

Более близкие значения получаются у модели Глушко и Чена. Обобщая все сказанное о расчетах установившегося течения, можно рекомендовать модели Чена и Глушко как наиболее эффективные из рассмотренных для изучения стационарного стабилизированного течения в круглой трубе.

Также были проведены расчеты неустановившегося пульсирующего течения в трубе с использованием различных моделей турбулентности. Пульсации вызваны наложением синусоидальных колебаний на первоначально постоянный расход. Расчеты сравнивались с экспериментальными данными Института гидродинамики СО АН СССР [5]. На рис. 4 представлено изменение отношения мгновенного значения касательного напряжения на стенке к его стационарному значению в течение одного цикла колебаний для $Sh=0{,}068$. При таком значении числа Струхаля большинство используемых моделей турбулентности хуже предсказывает изменение трения на стенке, чем при более низких частотах колебания жидкости (рис. 5), где наблюдается достаточно хорошее согласование с экспериментом. Из приведенных сравнений видно, что модель Джонса—Лаундера лучше других предсказывает изменение структуры потока вблизи стенки при больших частотах колебаний. Однако необходимо бо-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

лее широко тестировать эту модель, что в данное время невозможно из-за недостатка экспериментальных данных.

Для проверки адекватности описания нестационарной турбулентной структуры потока на рис. 6 представлены графики зависимости энергии турбулентности от фазы колебаний для различных расстояний от стенки. В приосевой области течения энергия турбулентности практически не зависит от колебаний жидкости, что хорошо подтверждается экспериментальными данными. С ростом частоты колебаний расхода величина этой области увеличивается. Ближе к стенке наблюдаются более резкие изменения энергии турбулентности с течением времени, которые хорошо предсказывают модели Джонса—Лаундера и Акаи.

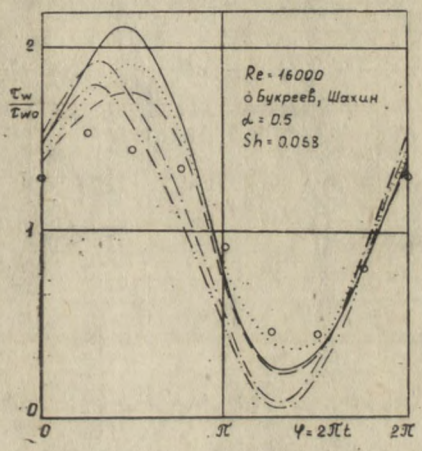

Рис. 4. Изменение трения на стенке в зависимости от фазы колебаний, полученное с использованием различных модификаций модели «e—ε»: τ_w — стационарное напряжение трения на стенке; Sh = =0,068

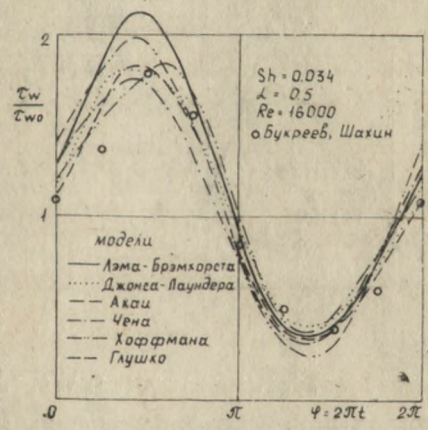

Рис. 5. Сопоставление изменения трения на стенке за период колебаний с экспериментальными данными [5] при Sh=0,034

На рис. 7 представлены расчеты неустановившегося течения по моделям различного уровня замыкания: Рейхардта, Васильева—Квона и Джонса—Лаундера. Видно, что существенно нестационарное течение жидкости в круглой трубе точнее описывает модель более высокого порядка.

Таким образом, при некоторых условиях неустановившегося движения жидкости для правильного описания полной картины течения необходимы модели турбулентности более высокого уровня замыкания, чем модели, основанные на теории Прандтля о длине пути смешения или использующие алгебраический закон для коэффициента турбулентной вязкости.

В данной работе проводился расчет неустановившегося турбулентного течения в круглой трубе по моделям турбулентности, ранее приме-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

нявшимся для исследования стационарного движения. Найдено, что из этих моделей наиболее эффективными для численного счета являются модели Глушко и Чена, наиболее точной для расчета стабилизированного установившегося течения — модель Чена, а наиболее точной для расчета неустановившегося стабилизированного течения — модель Джонса—Лаундера.

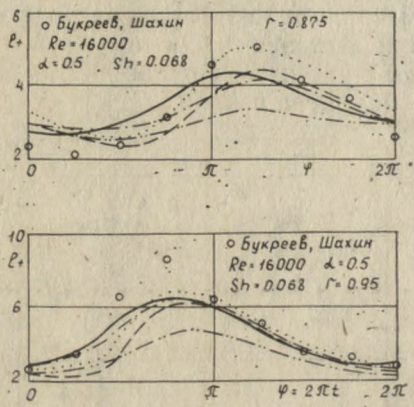

Рис. 6. Сравнение расчетов энергии турбулентности в пристеночной области в зависимости от фазы колебаний по различным модификациям модели «e—ε» и данных Букреева и Шахина [5]

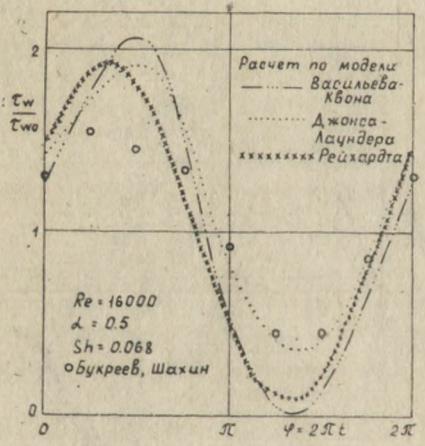

Рис. 7. Сопоставление расчетов изменения напряжения трения на стенке за период колебаний по моделям турбулентности различного уровня замыкания

ЛИТЕРАТУРА

1. Петухов Б. С. Актуальные проблемы теплообмена в атомной энергетике. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1979, № 1, с. 3—13.

2. Ohmi M., Kyomen S., Usui T. Analisis of velocity distribution in pulsating turbulent pipe flow with time — dependent friction velocity. — Bulletin of the JSME, 1978, V. 21, N. 157, pp. 1137—1143.

3. Васильев О. Ф., Квон В. И. Неустановившееся турбулентное течение в трубе. — Ж. прикл. механики и техн. физики, 1971, № 6, с. 132—140.

4. Кирмсе. Исследование пульсирующего турбулентного течения в трубе. — Теор. основы инженерных расчетов, 1979, т. 101, № 4, с. 139—146.

5. Букреев В. И., Шахин В. М. Статистически нестационарное течение в трубе. — Новосибирск, 1981. — 77 с. Рукопись представлена Институтом гидродинамики СО АН СССР. Деп. в ВИНИТИ 16 февраля 1981, № 866—81.

6. Reichardt H. Voll ständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen.— Z. Math. und Mech., 1951, Bd. 31, S. 208.

7. Jones W. P., Launder B. E. The calculation of low—Reynoldsnumber phenomena with a two—equation model of turbulence.— Int. J. Heat and Mass Transfer, 1973. V. 16, № 3, pp. 1119—1130.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

8. Hoffman G. H. Tmproved form of the low — Reynolds — number κ—ε turbulence model.— The Physics of Fluids, 1975, V. 18, № 3, pp. 309—312.
9. Chien K.-Y. Predictions of channel and boundary layer flows with a low—Reynolds — number two equation model of turbulence. — AIAA Paper, 1980, № 134, 6 p.
10. Лэм, Брэмхорст. Модифицированная форма модели κ—ε для расчета пристенной турбулентности. — Теоретические основы инженерных расчетов, 1981, т. 103, № 3, с. 154—160.
11. Akai M., Inoue A., Aoki S. The prediction of stratified two—phase flow with a two — equation model of turbulence. — Int. J. of multiphase Flow, 1981, V. 7, pp. 21—39.
12. Глушко Г. С. Дифференциальное уравнение для масштаба турбулентности и расчет турбулентного пограничного слоя на плоской пластине. — В кн.: Турбулентные течения: М.: Наука, 1970, с. 37—44.
13. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. — М.: Наука, 1977. — 439 с.
14. Симуни Л. М. Численное решение некоторых задач движения жидкости с переменной вязкостью. — В кн.: Тепло- и массоперенос. Минск, 1963, т. 5, с. 216—222.
15. Kreplin H.-P., Eckelmann H. Behavior of the three fluctuating velocity components in the wall region of a turbulent channel flow.— The Physics of Fluids, V. 22, 1979, pp. 1233—1239.
16. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1973. — 848 с.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

К ПРИМЕНЕНИЮ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПРОФИЛИРОВАНИЯ СОПЛ

Г. И. Афонин, В. Г. Бутов

В [1] изложен прямой метод решения вариационных задач газовой динамики путем сведения их к задачам нелинейного программирования.

В данной работе приводятся дальнейшие рекомендации по применению прямого метода [1], полученные путем численного эксперимента на задачах оптимального профилирования сопл. Основной задачей этих рекомендаций является сокращение времени расчета оптимального решения. Для этого в описанном в [1] вычислительном алгоритме прямого метода детально проанализированы вопросы аппроксимации искомого контура, необходимой точности расчета компонент градиента целевой функции и точности расчета поля течения.

1. Рассмотрим вариационную задачу о построении сверхзвуковой части контура осесимметричного сопла максимальной тяги в случае течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа. Пусть заданы: длина сопла X, отнесенная к радиусу минимального сечения; показатель адиабаты $\varkappa$; внешнее противодавление P_+; ограничение на кривизну контура.

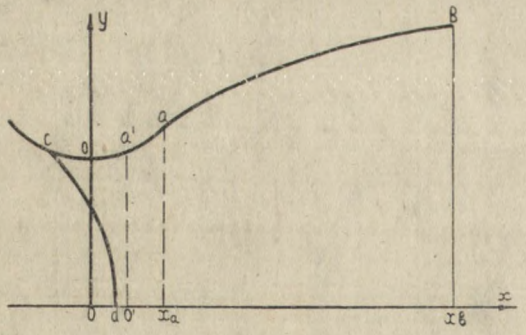

Рис. 1. Форма оптимального профиля: oa — линия заданной кривизны; ab — искомый контур; cd — звуковая линия; $o'a'$ — начальное сечение; x_a, $x_в$ — начальная и конечная абсцисса контура

Распределение параметров в некотором начальном сечении $o'a'$ (рис. 1), где течение сверхзвуковое, находилось методом установления. Расчеты поля течения в сверхзвуковой области проводились по схеме второго порядка точности, предложенной Мак-Кормаком [2].

Оптимальная конфигурация приведена на рис. 1. Здесь oa — участок максимально допустимой кривизны; ob — искомый контур. Длина участка oa заранее неизвестна и находится в процессе решения задачи. Если сечение с абсциссой x_a в процессе поиска пересекает звуковую линию cd, то расчет сверхзвукового течения проводится от некоторого сечения $o'a'$, в котором скорость газа всюду больше скорости звука. До этого сечения расчет проводится методом установления при известных неизме-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

няющихся параметрах в сечении 00. Возможность такого подхода обусловлена сверхзвуковым характером течения в окрестности контура *oa*. Так же, как и в [1], будем аппроксимировать искомый контур отрезком некоторого разложения по системе ортогональных полиномов Чебышева.

Зададим искомый контур в виде

$$y(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} c_\kappa T_\kappa \left(\frac{2x - x_a - x_b}{x_b - x_a} \right), \qquad (1)$$

где $\{T_\kappa\}$ — система ортогональных полиномов Чебышева на промежутке $[-1, 1]$; c_κ — коэффициенты; x_a и x_b — начальная и конечная точки контура; x — текущая абсцисса контура. Из (1) видно, что промежуток ортогональности полиномов совпадает с промежутком рассмотрения исходного контура. Как показывает опыт расчетов, нарушение этого условия ведет к значительному увеличению времени решения задачи.

Функционал тяги, создаваемый контуром $a'b$ с учетом (1), обращается в функцию

$$I_n = I_n(x_a, c_2, \ldots, c_n) \quad n \geqslant 2. \qquad (2)$$

Поиск экстремума этой функции проводится методом нелинейного программирования [3]. Коэффициенты c_0 и c_1 находятся из условия гладкого сопряжения участков *oa* и *ab*:

$$y(x_a) = c_0 - c_1 + c_2 - \ldots + (-1)^n c_n;$$

$$y'(x_a) = [c_1 - 4c_2 + \ldots + (-1)^{n+1} n^2 c_n] \frac{2}{x_b - x_a}, \qquad (3)$$

где штрихом обозначена производная по x.

Были выполнены расчеты при следующих исходных параметрах: $X = 8$; $\varkappa = 1{,}4$; $P^+ = 0$; радиус скругления в области горловины равен радиусу минимального сечения. Форма дозвуковой части определялась радиусно-коническим соплом.

Таблица 1

n	x_a	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	y_b	I_n
1	0,333	2,412	1,354	0	0	0	0	3,766	5,1199
2	0,445	2,513	1,252	—0,156	0	0	0	3,609	5,1550
3	0,472	2,528	1,234	—0,162	0,015	0	0	3,617	5,1557
4	0,451	2,515	1,238	—0,162	0,012	0,005	0	3,608	5,1559
5	0,477	2,530	1,235	—0,162	0,011	0,003	0,002	3,619	5,1561

В табл. 1 приведены для различного числа n коэффициентов c_κ значение x_a, степень расширения на выходе y_b и значение полного импульса сопла I_n, рассчитанного по безразмерным параметрам. Таблица свидетельствует о достаточно быстрой сходимости последовательности $\{I_\kappa\}$, а также о монотонном характере убывания абсолютной величины коэффициентов c_κ. Последнее является характерной особенностью оптимальных сверхзвуковых частей сопл. Из таблицы видно, что при $n \geqslant 3$ все контуры и их основные характеристики совпадают. Этот факт позволяет в качестве оптимального профиля выбрать контур, соответствующий $n = 3$. Потери полного импульса за счет приближенного профилирования при этом оказываются в пределах 0,01%.

Сделанный вывод подтверждается также практическим совпадением контуров, рассчитанных данным методом, с оптимальными профилями, полученными методом контрольного контура в [4].

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Заметим, что при переходе от n к $n+1$ предыдущие коэффициенты слабо изменяются. Это является следствием применения полиномов в (1), ортогональных на промежутке, совпадающем с промежутком задания оптимального контура.

В данной работе исследовался вопрос о влиянии точности расчета поля на оптимальный контур. С этой целью были приведены расчеты при различном числе точек в поперечном сечении сопла, результаты которых помещены в табл. 2. Строки таблицы соответствуют 20, 40 и 60 точкам. В последнем столбце приведены значения полного импульса сопла, которые получены для соответствующих контуров в пересчете на 60 точек.

Таблица 2

n	x_a	C_0	C_1	C_2	C_3	$y_в$	I_3	I
20	0,471	2,527	1,234	—0,161	0,015	3,616	5,1557	5,1528
40	0,470	2,526	1,235	—0,161	0,014	3,616	5,1531	5,1530
60	0,468	2,526	1,237	—0,160	0,013	3,616	5,1530	5,1530

Из таблицы видно, что точность расчета слабо влияет на форму оптимального контура, отличие по импульсу не превышает 0,01%.

Консервативность формы оптимального профиля от точности расчета прежде всего связана с вычислением направления поиска. При расчете компонент градиента целевой функции $I(x_a, c_2, ..., c_n)$ вычисляется два значения функции с разными малыми приращениями аргумента. Так как знак погрешности расчета значения функции не меняется при достаточно малом приращении аргумента, то эта погрешность при указанном выше вычитании уничтожается.

Существенное влияние на эффективность решения вариационной задачи методом нелинейного программирования оказывает точность вычисления компонент градиента функции I. Требования высокой точности расчета компонент градиента делает предпочтительной формулу второго порядка аппроксимации [1] по сравнению с формулой первого порядка при одном и том же шаге $\Delta c_к$. Однако, как показали многочисленные расчеты, можно существенно уменьшить $\Delta c_к$ и достичь требуемой точности по формуле первого порядка аппроксимации. Нахождение компонент градиента функции I по формуле первого порядка точности требует меньше обращений к расчету поля течения по сравнению с формулой второго порядка. Тем самым ее использование значительно повышает эффективность прямого метода.

С учетом вышесказанного удалось довести время решения данной вариационной задачи на ЭВМ БЭСМ-6 до 15 мин. Приведенные в данной работе рекомендации по применению методов нелинейного программирования для оптимального профилирования сопл могут быть использованы для решения вариационных задач в случае более сложных течений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутов В. Г., Васенин И. М., Шеидуха А. И. Применение методов нелинейного программирования для решения вариационных задач газовой динамики. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 1, с. 59—64.

2. Mac-Cormack R. W. The Effect of Viscosity in Hyper velocity Impact Cratering. AIAA paper, 1969, No. 354, pp. 1—6.

3. Fletcher R. A New approach to variable metric allgorithms Computer Journal 13, 1970, pp. 317—322.

4. Тилляева Н. И. О профилировании сверхзвуковых частей осесимметричных сопл для неравномерных и закрученных течений. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 3, с. 124—131.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

СТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ДВИЖЕНИИ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРУБЕ

В. А. Дубовик

В рамках двухскоростной и двухтемпературной модели сплошной среды приводится решение задачи о теплообмене при течении смеси двух вязких несжимаемых жидкостей в трубе прямоугольного сечения. Течение и теплообмен считаются полностью развитыми. Методом конечного интегрального синус-преобразования Фурье получено распределение скоростей и температур по сечению трубы. Приводятся результаты расчетов безразмерного коэффициента теплоотдачи и среднемассовой температуры смеси в зависимости от отношения сторон поперечного сечения и объемной концентрации фаз.

Рассматривается теплообмен в области тепловой и гидродинамической стабилизации потока. В этой области течение происходит параллельно стенке, и скорости не изменяются по длине трубы. Считается, что физические свойства фаз, их концентрации и истинные плотности постоянны, а количество тепла, выделяющееся вследствие диссипации энергии и вязкостного взаимодействия между фазами, пренебрежимо мало. При этом предполагается отсутствие фазовых превращений и поверхностных эффектов на границе между фазами. Последнее допускает при описании смеси использование «однодавленческой» модели [1], т. е. равенство давлений в фазах.

При сформулированных предположениях уравнения движения и энергии фаз [2, 3] принимают вид

$$\mu_i\varphi_i\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W_i}{\partial z}\right)-(-1)^i\kappa_0(W_2-W_1)=\varphi_i\frac{dP}{dx}; \qquad (1)$$

$$\rho_i c_{pi}\varphi_i W_i\frac{\partial T_i}{\partial x}=\lambda_i\varphi_i\left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2}\right)-(-1)^i\alpha_0(T_2-T_1),$$

$$\varphi_1+\varphi_2=1;\ (i=1, 2),$$

где W_i — скорость; T_i — температура; φ_i — объемная концентрация; ρ_i — истинная плотность; c_{pi} — коэффициент удельной теплоемкости при постоянном давлении; μ_i и λ_i — эффективные коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности i-й фазы; κ_0 и α_0 — коэффициенты динамического и теплового взаимодействия между фазами; P — давление.

Оси y, z декартовой системы координат направлены по сторонам прямоугольного сечения длиной b и шириной h. В области тепловой стабилизации потока разности температур не изменяются по длине

$$T_i-T_w=\vartheta_i(y, z)\ \ (i=1, 2), \qquad (2)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

а продольные градиенты температур в каждой точке потока, в том числе и на стенке, являются постоянными

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{\partial T_w}{\partial x} = A = \text{const}. \tag{3}$$

Кроме того, считается, что температура стенки по периметру не изменяется, т. е.

$$T_w = Ax + \text{const}.$$

Для удобства дальнейших вычислений система (1) с учетом (2), (3) записывается в безразмерной форме

$$\varphi_i a_i \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial \eta^2}\right) - (-1)^i \kappa (U_2 - U_1) = \varphi_i N; \tag{4}$$

$$\varphi_i b_i \,\mathrm{Pr}\, U_i = \varphi_i c_i \left(\frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial \eta^2}\right) - (-1)^i \alpha (\Theta_2 - \Theta_1),$$

где введены следующие обозначения:

$$U_i = \frac{\rho_1 h}{\mu_1} W_i;\ \Theta_i = \frac{1}{Ah}\vartheta_i,\ (i = 1,2);$$

$$\xi = \frac{y}{h};\ \eta = \frac{z}{h};\ N = \frac{\rho_1 h^3}{\mu_1^2}\frac{dP}{dx};$$

$$\kappa = \frac{h^2}{\mu_1}\kappa_0;\ \alpha = \frac{h^2}{\lambda_1}\alpha_0;\ a_1 = 1;$$

$$a_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1};\ \mathrm{Pr} = \frac{\mu_1 c_{p_1}}{\lambda_1};\ b_1 = 1;$$

$$b_2 = \frac{\rho_2 c_{p_2}}{\rho_1 c_{p_1}};\ c_1 = 1;\ c_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к интегрированию системы уравнений (4) при граничных условиях:

$$\begin{aligned} &U_i = \Theta_i = 0, && (i = 1,2); \\ &\xi = 0,\ b/h, && 0 < \eta < 1; \\ &\eta = 0,\ 1, && 0 < \xi < b/h. \end{aligned} \tag{5}$$

Решение краевой задачи (4), (5), получаемое методом конечного интегрального синус-преобразования Фурье, имеет вид

$$U_i = -\frac{16N}{\pi^2}\sum_{m,n=1,3,\ldots}^{\infty} U_{mn}^i \sin m\pi\gamma\xi \cdot \sin n\pi\eta; \tag{6}$$

$$\Theta_i = \frac{16N}{\pi^2}\sum_{m,n=1,3,\ldots}^{\infty} \Theta_{mn}^i \sin m\pi\gamma\xi \cdot \sin n\pi\eta;$$

$$U_{mn}^1 = [\varphi_1(\varphi_2 a_2 \omega_{mn} + \kappa) + \varphi_2\kappa]/d_{mn};$$

$$U_{mn}^2 = [\varphi_1\kappa + \varphi_2(\varphi_1\omega_{mn} + \kappa)]/d_{mn};$$

$$\Theta_{mn}^1 = [\varphi_1 U_{mn}^1(\varphi_2 c_2\omega_{mn} + \alpha) + \varphi_2 b_2 \alpha U_{mn}^2]/\delta_{mn};$$

$$\Theta_{mn}^2 = [\varphi_2 b_2 U_{mn}^2(\varphi_1\omega_{mn} + \alpha) + \varphi_1\alpha U_{mn}^1]/\delta_{mn}.$$

Здесь ω_{mn}, γ, d_{mn}, δ_{mn} определяются выражениями:

$$\omega_{mn} = \pi^2(m^2\gamma^2 + n^2),\ \gamma = h/b;$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$d_{mn} = mn[\varphi_2 a_2 \omega_{mn}(\varphi_1 \omega_{mn} + \kappa) + \varphi_1 \kappa \omega_{mn}];$$

$$\delta_{mn} = \varphi_1 \omega_{mn}(\varphi_2 c_2 \omega_{mn} + \alpha) + \varphi_2 c_2 \alpha \omega_{mn}.$$

Если физические свойства фаз одинаковые, т. е. $a_2 = b_2 = c_2 = 1$, или концентрация второй фазы равна нулю, то в этих случаях из (6) получается распределение температур по сечению прямоугольной трубы при течении в ней однородной жидкости [4].

Используя полученное решение (6), вычисляются безразмерный коэффициент теплоотдачи (число Нуссельта), определяемый через эквивалентный диаметр и коэффициент теплопроводности первой фазы, и безразмерная среднемассовая температура смеси по формулам:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 4F\bar{q}/L\lambda_1(T_w - \bar{T});\ \bar{\Theta} = (\bar{T} - T_w)/Ah\,\mathrm{Pr}\,N. \qquad (7)$$

Здесь F и L — площадь и периметр поперечного сечения трубы; $\bar{q}$ и $\bar{T}$ — средний по периметру тепловой поток от стенки к двухфазной среде и среднемассовая температура смеси.

Последние величины для двухфазной среды согласно [5, 6] имеют вид

$$\bar{q} = -\frac{1}{L}\int_L \left(\varphi_1\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n}\bigg|_{n=0} + \varphi_2\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}\bigg|_{n=0}\right) dL; \qquad (8)$$

$$\bar{T} = \frac{\int_F (\varphi_1\rho_1 c_{p_1} T_1 W_1 + \varphi_2\rho_2 c_{p_2} T_2 W_2)\, dF}{\int_F (\varphi_1\rho_1 c_{p_1} W_1 + \varphi_2\rho_2 c_{p_2} W_2)\, dF},$$

где n — нормаль к стенке, направленная в сторону жидкости.

Вычисляя $\overline{\mathrm{Nu}}$ и $\bar{\Theta}$ (7) с учетом (8) и (6), получаем

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{64}{\pi^2(1+\gamma)^2} \sum_{m,n=1,3,\ldots}^{\infty} A_{mn} \cdot \sum_{m,n=1,3,\ldots}^{\infty} B_{mn} \Big/ \sum_{m,n=1,3,\ldots}^{\infty} C_{mn}; \qquad (9)$$

$$\bar{\Theta} = \sum_{m,n=1,3,\ldots}^{\infty} C_{mn} \Big/ \sum_{m,n=1,3,\ldots}^{\infty} B_{mn};$$

$$A_{mn} = (\varphi_1 U^1_{mn} + \varphi_2 c_2 \Theta^2_{mn}) \cdot (m^2\gamma^2 + n^2)/mn;$$

$$B_{mn} = (\varphi_1 U^1_{mn} + \varphi_2 b_2 U^2_{mn})/mn;$$

$$C_{mn} = \varphi_1 U^1_{mn}\Theta^1_{mn} + \varphi_2 b_2 U^2_{mn}\Theta^2_{mn}.$$

В пределе при $\varphi_2 \to 0$, а также при равенстве физических свойств фаз выражение (9) принимает значение числа Нуссельта для однородной жидкости, которое приведено в [4].

По формулам (9) были проведены расчеты при значениях коэффициентов динамического и теплового взаимодействия между фазами, соответствующих стоксовскому режиму обтекания каждой частицы. Эти коэффициенты согласно [6, 7] брались в виде

$$\kappa_0 = \frac{9}{2}\frac{\mu_1}{r^2}\varphi_2,\ \alpha_0 = 3\frac{\lambda_1}{r^2}\varphi_2,$$

где r — радиус частиц второй фазы. Отсюда безразмерные комплексы κ и α вычислялись по формулам:

$$\kappa = \frac{9}{2}\left(\frac{h}{r}\right)^2\varphi_2;\ \alpha = 3\left(\frac{h}{r}\right)^2\varphi_2.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

На рис. 1 и 2 показаны зависимости $\overline{Nu}$ и Θ от γ и φ_2 при двух значениях c_2 и следующих константах:

$$h/r=10^2;\ b_2=0{,}381;\ a_2=11{,}9.$$

Кривые *1—3* соответствуют $\varphi_2=0{,}2;\ 0{,}4;\ 0.6$ при $c_2=1{,}5$, а *4—6*—$\varphi_2=0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6$ при $c_2=0{,}17$. Кривая 0 соответствует однородной жидкости ($\varphi_2=0$).

Из рис. 1, 2 видно, что концентрация примеси и отношение теплопроводностей фаз смеси оказывают сильное влияние на величину среднего числа Нуссельта и среднемассовой температуры при любом отношении сторон прямоугольного сечения трубы. Так, при $c_2=1{,}5$ число Нуссельта для смеси больше, чем для однородного потока, а при $c_2=0{,}17$ — меньше. С увеличением концентрации примеси при фиксированном γ для первого значения c_2 величина $\overline{Nu}$ возрастает, а для второго убывает. Среднемассовая температура при этих значениях c_2 и любом γ для смеси меньше, чем для однородного потока, и с увеличением концентрации примеси убывает. Из дополнительных расчетов следует, что при рассматриваемых c_2 и $a_2=0{,}5$ значение $\overline{\Theta}$ для смеси больше, чем для однородной жидкости, и с ростом концентрации примеси увеличивается.

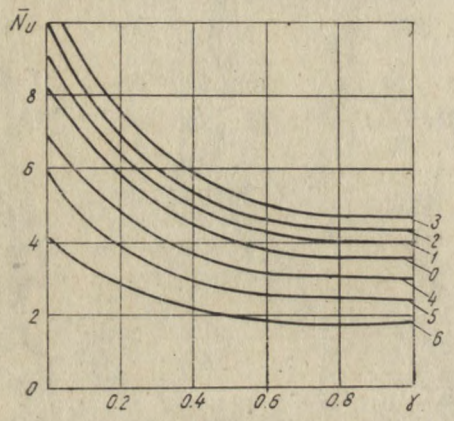

Рис. 1

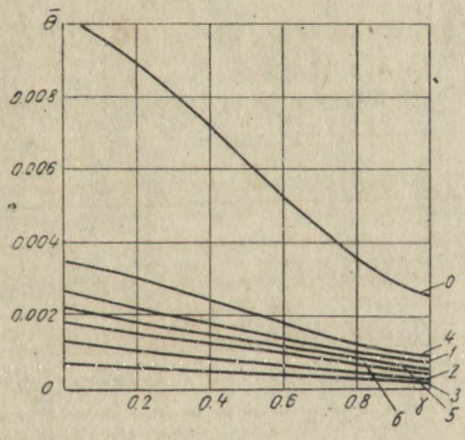

Рис. 2

Таким образом, приведенные расчеты показывают, что теплообмен при течении смеси в прямоугольной трубе с ростом концентрации примеси увеличивается или уменьшается (в зависимости от рода физических свойств компонент двухфазной среды) по сравнению с теплообменом при течении однородной жидкости. Этот факт для теплообмена при течении смеси в трубе круглого сечения подтверждается экспериментальными данными, которые приводятся в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978. — 336 с.

2. Файзуллаев Д. Ф. Гидромеханические модели движения смесей. — Ташкент: Фан, 1972. — 200 с.

3. Нигматулин Р. И. Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей. — ПММ, 1970, 34, в. 6, с. 1097—1112.

4. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. — М.: Энергия, 1967. — 411 с.

5. Горбис З. Р. Теплообмен и гидромеханика дисперсных сквозных потоков. — М.: Энергия, 1970. — 423 с.

6. Дейч М. Е., Филиппов Г. А. Газодинамика двухфазных сред. — М.: Энергия, 1969. — 423 с.

7. Салтанов Г. А., Ткаленко Р. А. Обтекание клина сверхзвуковым двухфазным потоком. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 2, с. 83—88.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

НЕКОТОРЫЕ НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Е. Д. Томилов

В данной работе для плоского уравнения Лапласа использован метод получения частных несепарабельных решений однородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных, предложенный в [1]. Рассмотрены также частные решения, полученные из предыдущих дифференцированием по параметру. Затем суммированием полученных решений при определенном выборе коэффициентов у членов сумм получаются решения, имеющие гидродинамическое истолкование.

Некоторые несепарабельные решения уравнения Лапласа

Возьмем уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

для некоторой функции ψ декартовых координат x, y. Как всякое линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных оно имеет частное сепарабельное решение (то есть решение, полученное известным методом Фурье)

$$\psi^{(0)}=e^{\nu x+\mu y}. \tag{2}$$

При этому в силу (1)

$$F(\mu,\ \nu)=\nu^2+\mu^2=0. \tag{3}$$

Тогда согласно [1] выражение

$$\psi^{(1)}=\lambda\left(F_\mu\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial\nu}-F_\nu\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial\mu}\right), \tag{4}$$

где F_μ, F_ν — соответствующие частные производные от функции (3), тоже явится решением уравнения (1).

Подставляя в (4) значения производных из (2) и (3), найдем

$$\psi^{(1)}=2\lambda(\mu x-\nu y)\,e^{\nu x+\mu y}. \tag{5}$$

Но из (3) следует, что $\mu=\pm i\nu$. Подставляя в (5) это значение μ, полагая $2\lambda\nu=1$ и разделяя вещественные и мнимые части, приходим к следующим двум частным решениям уравнения (1):

$$\psi_1=-e^{\nu x}(x\sin\nu y+y\cos\nu y); \tag{6}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$\psi_2 = e^{\nu x}(x\cos\nu y - y\sin\nu y). \tag{7}$$

Эти решения не имеют вида решений типа Фурье и поэтому являются несепарабельными.

Как показано в [1], процесс получения несепарабельных решений можно продлить и дальше. Вообще, если $\psi^{(r-1)}$ есть какое-то решение уравнения (1), то

$$\psi^{(r)} = \lambda\left(F_\mu \frac{\partial\psi^{(r-1)}}{\partial\nu} - F_\nu \frac{\partial\psi^{(r-1)}}{\partial\mu}\right) (r = 1,\ 2,\ldots) \tag{8}$$

есть тоже несепарабельное решение того же уравнения, причем $\psi^{(0)}$ есть решение (2). При $r = 2$ имеем

$$\psi^{(2)} = \lambda\left(F_\mu \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\nu} - F_\nu \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\mu}\right),$$

откуда с помощью (3) и (5) получим тем же путем два несепарабельных решения второго порядка

$$\psi_3 = e^{\nu x}[-\{x + \nu(x^2 - y^2)\}\cos\nu y + y(1 + 2\nu x)\sin\nu y]; \tag{9}$$

$$\psi_4 = e^{\nu x}[y(1 + 2\nu x)\cos\nu y + \{x + \nu(x^2 - y^2)\}\sin\nu y]. \tag{10}$$

Можно также рассмотреть решения, получающиеся дифференцированием по параметру ν решений, вычисленных указанным выше способом. Таким путем, например, из (6) и (7) получим несепарабельные решения вида

$$\psi_5 = -e^{\nu x}[2xy\cos\nu y + (x^2 - y^2)\sin\nu y]; \tag{11}$$

$$\psi_6 = e^{\nu x}[(x^2 - y^2)\cos\nu y - 2xy\sin\nu y]. \tag{12}$$

Эти решения получаются и из предыдущих, ибо

$$\psi_3 = -\nu\psi_6 - \psi_2; \quad \psi_4 = -\nu\psi_5 - \psi_1.$$

Ограничимся только этими решениями. Вообще же составление подобных решений можно было бы продлить сколь угодно далеко, а также рассмотреть линейные комбинации таких решений.

Решения 1-го порядка более общего вида

Искомая функция ψ как удовлетворяющая уравнению (1) может рассматриваться как функция тока плоского безвихревого движения идеальной несжимаемой жидкости. Однако, как легко убедиться, полученные выше частные решения оказываются функциями тока для течений, не имеющих реального смысла. Такой смысл, как мы далее покажем, имеют функции, представляющие собой бесконечные суммы соответствующих частных решений при некотором подборе коэффициентов этих сумм.

Полагая $\nu = -mn$, где m — произвольное положительное фиксированное число, а n пробегает все целочисленные положительные значения, умножая каждое решение (6) на соответствующий коэффициент A_n и производя суммирование по n, получим

$$\psi_1 = x\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-mnx}\sin mny - y\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-mnx}\cos mny. \tag{13}$$

Возьмем сначала все $A_n = 1$. Для полученных сумм будем иметь из [2] при $x > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-mnx}\sin mny = \frac{1}{2}\frac{\sin my}{\operatorname{ch} mx - \cos my}; \tag{14}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-mnx}\cos mny = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sh} mx}{\operatorname{ch} mx - \cos my} - 1\right).$$

Подставляя эти значения в (13) и добавляя еще линейную комбинацию от y, получаем в области $x > 0$ решение уравнения (1) в виде

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\frac{x\sin my - y\operatorname{sh} mx}{\operatorname{ch} mx - \cos my} + A + By. \tag{15}$$

Легко показать, что при $x = 0$ функция (15) стремится к определенному пределу при любом y. в том числе и при $y=0$. Таким образом, эта функция имеет смысл всюду при $x \geqslant 0$.

Будем трактовать выражение (15) как безразмерную функцию тока некоторого безвихревого течения несжимаемой жидкости, выраженную тоже в безразмерных координатах x, y. Для размерных величин ψ', x' и y' будем иметь

$$\psi' = Q\psi,\ x' = hx,\ y' = hy, \tag{16}$$

где Q — некоторый расход жидкости; h — величина, имеющая размерность длины.

Задаваясь на оси $x = 0$ условиями

$$\psi = 1\ (\psi' = Q);\ y = 1\ (y' = h);$$
$$\psi = -1\ (\psi' = -Q);\ y = -1\ (y' = -h), \tag{17}$$

найдем $A = 0$, $B = 1$. Таким образом, окончательно будем иметь

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\frac{x\sin my - y\operatorname{sh} mx}{\operatorname{ch} mx - \cos my} + y. \tag{18}$$

Видим, что $\psi_1(x, -y) = -\psi_1(x, y)$. Следовательно, (18) определяет в области $x \geqslant 0$ течение, симметричное относительно оси x. Рассматривая линии тока $\psi = 1$ и $\psi = -1$ как крайние, получаем струю с расходом $2Q$, имеющую на оси y сечение шириной $2h$.

Скорости в течении найдутся из соотношений

$$v_x = \frac{\partial\psi'}{\partial y'} = \frac{Q}{h}\frac{\partial\psi}{\partial y};\ v_y = -\frac{\partial\psi'}{\partial x'} = -\frac{Q}{h}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{19}$$

Производя вычисления, найдем

$$v_x = \frac{Q}{h}\left[\frac{1}{2}\frac{mx(\operatorname{ch} mx\cos my - 1) - \operatorname{sh} mx(\operatorname{ch} mx -}{(\operatorname{ch} mx - \cos my)^2}\right.$$
$$\left.\frac{-\cos my - my\sin my)}{(\operatorname{ch} mx - \cos my)^2} + 1\right]; \tag{20}$$

$$v_y = -\frac{Q}{2h}\frac{my(\operatorname{ch} mx\cos my - 1) + \sin my(\operatorname{ch} mx - \cos my - mx\operatorname{sh} mx)}{(\operatorname{ch} mx - \cos my)^2}.$$

Отсюда находим, что на оси y, то есть при $x = 0$:

$$v_x = \frac{Q}{h} = \text{const};\ v_y = \frac{Q}{2h}\frac{my - \sin my}{1 - \cos my}.$$

Следовательно, течение идет в сторону возрастания x, причем первое равенство соответствует смыслу Q, а из второго следует, что при $y > 0$ $v_y > 0$, а при $y < 0$ $v_y < 0$. Раскрытие неопределенности показывает, что в сечении $x = 0$ $v_y|_{y=0} = 0$. Из (18) предельным переходом находим, что при $x \to \infty$ крайние линии тока $\psi = 1$ и $\psi = -1$ асимпто-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

тически стремятся к линиям $y = \pm 2$, в соответствии с чем из (20) находим

$$\lim_{x\to\infty} v_x = \frac{Q}{2h}, \quad \lim_{x\to\infty} v_y = 0.$$

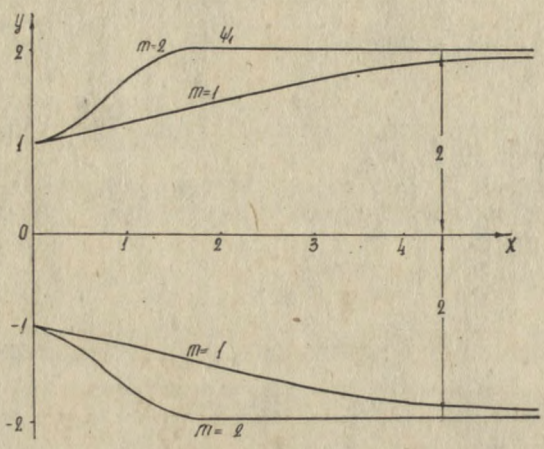

Рис. 1

Следовательно, в бесконечности вниз по потоку струя превращается в однородную струю шириной $4h$.

Произведенный расчет позволил установить вид граничных линий тока при $m=1$ и $m=2$, указанный на рис. 1. Это могут быть как свободные границы струи при переменном давлении на них, отвечающем скоростям (20), так и твердые стенки при том же распределении давления.

Обратимся далее к решению (7). Составляя (при том же выборе коэффициентов A_n) сумму, аналогичную (13), и применяя опять формулы (14), найдем решение

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x \operatorname{sh} mx + y \sin my}{\operatorname{ch} mx - \cos my} - x\right) + A + By. \tag{21}$$

Определяя постоянные из тех же условий, найдем

$$A = -\frac{1}{2}\frac{\sin m}{1-\cos m}; \quad B = 1.$$

Следовательно, данное решение будет иметь вид

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x \operatorname{sh} mx + y \sin my}{\operatorname{ch} mx - \cos my} - x - \frac{\sin m}{1-\cos m}\right) + y. \tag{22}$$

Это течение в отличие от предыдущего не будет симметричным. Опять можем убедиться, что функция (22) имеет смысл и при $x = 0$.

Для скоростей по (22) получим

$$v_x = \frac{Q}{2h}\left[\frac{\sin my\,(\operatorname{ch} mx - \cos my - my \operatorname{sh} mx) + }{(\operatorname{ch} mx - \cos my)^2}\right.$$
$$\left.\frac{+ my\,(\operatorname{ch} mx \cos my - 1)}{(\operatorname{ch} mx - \cos my)^2} + 2\right]; \tag{23}$$
$$v_y = -\frac{Q}{2h}\left[\frac{\operatorname{sh} mx\,(\operatorname{ch} mx - \cos my - my \sin my) - }{(\operatorname{ch} mx - \cos my)^2}\right.$$
$$\left.\frac{- mx\,(\operatorname{ch} mx \cos my - 1)}{(\operatorname{ch} mx - \cos my)^2} - 1\right].$$

Отсюда находим, что на оси y

$$v_x = \frac{Q}{2h}\left(2 - \frac{my - \sin my}{1 - \cos my}\right), \quad v_y = \frac{Q}{2h}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Следовательно, здесь постоянной оказалась боковая составляющая скорости. Составляя выражение расхода через начальное сечение

$$\int_{-h}^{h} v_x dy' = \frac{Q}{2}\int_{-1}^{1}\left[2 - \frac{my - \sin my}{1 - \cos my}\right]dy$$

и вычисляя интеграл, убеждаемся, что этот расход равен $2Q$, как и должно быть.

Делая расчет при $m=1$ и $m=2$ для линий тока $\psi=0{,}1, -1$; приходим к картине течений, представленных на рис. 2. Переходя в (23) к пределу $x\to\infty$, убеждаемся, что в бесконечности вниз по потоку $v_x=Q/h$, $v_y=0$ и опять струя становится однородной. Ее ширина, независимо от значений m, оказывается равной $2h$, как и в начальном сечении. Это видно из того, что при $x\to\infty$ и при $m=1$ для $\psi=-1$ $y\to-0{,}084755$, а для $\psi=1$ $y\to1{,}915245$; при $m=2$ эти пределы равны соответственно $-0{,}678953$ и $1{,}321047$. Из рис. 2 видно, что при $m=1$ линии тока оказались более смещенными в направлении оси y, чем при $m=2$.

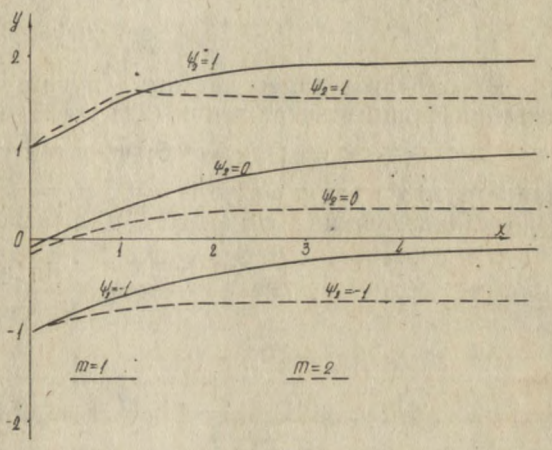

Рис. 2

Другие течения могут быть получены при ином выборе коэффициентов A_n в (13) и соответствующей сумме для ψ_2. Возьмем, например

$$A_n = \frac{\cos mn\delta}{n}.$$

Тогда из (13)

$$\psi_1 = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-mnx}\sin mny\cos mn\delta}{n} - y\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-mnx}\cos mny\cos mn\delta}{n} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-mnx}\sin mn(y+\delta)}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-mnx}\sin mn(y-\delta)}{n}\right\} -\right.$$

$$\left. - y\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-mnx}\cos mn(y+\delta)}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-mnx}\cos mn(y-\delta)}{n}\right\}\right].$$

Заменяя здесь тригонометрические функции через показательные и производя вычисления всех сумм, получаем функцию тока ψ_1 в виде

$$\psi_1 = A_1 + B_1 y + \frac{1}{2}x\left[\operatorname{arctg}\frac{\sin m(y+\delta)}{e^{mx} - \cos m(y+\delta)} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arctg}\frac{\sin m(y-\delta)}{e^{mx} - \cos m(y-\delta)}\right] + \frac{1}{4}y\ln\left[\{1 - 2e^{-mx}\cos m(y+\delta) + \right.$$

$$\left. + e^{-2mx}\}\{1 - 2e^{-mx}\cos m(y-\delta) + e^{-2mx}\}\right]. \qquad (24)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Беря для ψ_2 по (7) сумму, аналогичную (13), и делая ту же замену коэффициентов A_n, придем после аналогичных вычислений к функции тока

$$\psi_2 = A_2 + B_2 y + \frac{1}{2} y \left[\operatorname{arctg} \frac{\sin m(y+\delta)}{e^{mx} - \cos m(y+\delta)} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{arctg} \frac{\sin m(y-\delta)}{e^{mx} - \cos m(y-\delta)} \right] - \frac{1}{4} x \ln [\{1 - 2e^{-mx} \cos m(y+\delta) +$$
$$+ e^{-2mx}\} \{1 - 2e^{-mx} \cos m(y-\delta) + e^{-2mx}\}]. \qquad (25)$$

Рассмотрим далее частный случай, полагая $\delta = \pi/2$. Подставляя преобразованные выражения (24) и (25) в условия при $x = 0$

$$\psi = 1, \; y = 0{,}5; \; \psi = -1, \; y = -0{,}5. \qquad (26)$$

найдем, что при $m = 1$, $A_1 = 0$, $B_1 = 1{,}718718$, $A_2 = 0{,}125$, $B_2 = 2$. Обозначая функции ψ как $\psi(x, y, m)$, найдем из (24) и (25), что

$$\psi_1(x, y; 1) = -\frac{x}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sin 2y}{e^{2x} + \cos 2y} + \frac{1}{4} y \ln (1 +$$
$$+ 2e^{-2x} \cos 2y + e^{-4x}) + B_1 y; \qquad (27)$$
$$\psi_2(x, y; 1) = \frac{1}{4} x \ln (1 + 2e^{-2x} \cos 2y + e^{-4x}) +$$
$$+ \frac{1}{2} y \operatorname{arctg} \frac{\sin 2y}{e^{2x} + \cos 2y} + 0{,}125 + 2y.$$

Для функций тока при $m = 2$ будем иметь

$$\psi_1(x, y; 2) = 2[\psi_1(x, y; 1) - y], \; \psi_2(x, y; 2) = 2[\psi_2(x, y; 1) - y].$$

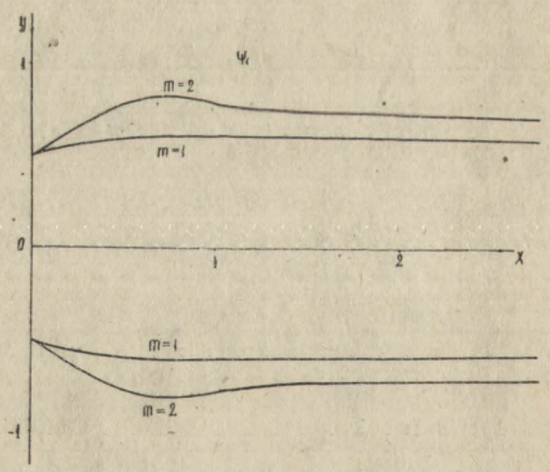

Рис. 3

Расчет показал, что симметричные течения с функцией тока ψ_1 можно представить рис. 3, а несимметричные с функцией тока ψ_2 — рис. 4, причем на последнем нанесены только линии тока для $m = 1$, для $m = 2$ линии тока идут близко к соответствующим линиям для $m = 1$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Скорости для течения с функцией тока ψ_1, согласно (19) и (27), при m = 1 будут

$$v_x = \frac{Q}{h}\left[\frac{1}{4}\ln(1+2e^{-2x}\cos 2y+e^{-4x}) - \right.$$
$$\left. - \frac{x(\cos 2y+e^{-2x})+y\sin 2y}{e^{2x}+2\cos 2y+e^{-2x}} + B_1\right];$$

$$v_y = \frac{Q}{h}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sin 2y}{e^{2x}+\cos 2y} - \frac{x\sin 2y - y(\cos 2y+e^{-2x})}{e^{2x}+2\cos 2y+e^{-2x}}\right],$$

откуда находим, что в начальном сечении струи ($x = 0$)

$$v_x = \frac{Q}{2h}[\ln(2\cos y) - y\operatorname{tg} y + 2B_1],\ v_y = \frac{Q}{h}y,$$

а в бесконечности вниз по потоку

$$v = v_x = \frac{Q}{h}B_1,\ v_y = 0. \qquad (28)$$

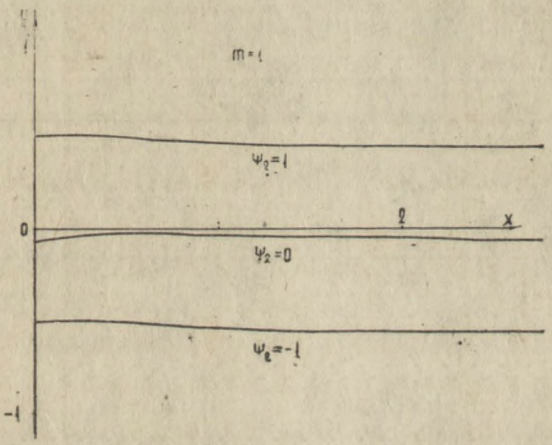

Рис. 4

В бесконечности вниз по потоку границы струи асимптотически стремятся к прямым $y = \pm 0{,}581829$. Таким образом, струя, имевшая в начальном сечении ширину h, в бесконечности переходит в однородную струю шириной 1,16366 h, движущуюся со скоростью v, определяемой по (28).

Пользуясь (27), легко найти характерные параметры струи и при $m = 2$. Однородная струя, получающаяся в бесконечности, будет иметь ширину 1,39136 h и скорость $v = 1{,}43744\ Q/h$.

Скорости, отвечающие функции тока ψ_2, окажутся равными

$$v_x = \frac{Q}{h}\left[\frac{x\sin 2y - y(\cos 2y+e^{-2x})}{e^{2x}+2\cos 2y+e^{-2x}} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sin 2y}{e^{2x}+\cos 2y} + 2\right];$$

$$v_y = \frac{Q}{h}\left[\frac{1}{4}\ln(1+2e^{-2x}\cos 2y+e^{-4x}) - \frac{x(\cos 2y+e^{-2x})+y\sin 2y}{e^{2x}+2\cos 2y+e^{-2x}}\right].$$

Отсюда для начального сечения $x = 0$ получим

$$v_x = \frac{Q}{h}\left(2-\frac{y}{2}\right),\ v_y = \frac{Q}{2h}[\ln(2\cos y) - y\operatorname{tg} y].$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

В бесконечности вниз по потоку линии тока $\psi_1 = 1$ и $\psi_1 = -1$ имеют асимптоты $y=0{,}4375$ и $y=-0{,}5625$. Следовательно, получим однородную струю той же ширины h, что и в начальном сечении, а скорость в ней будет $v = 2\,Q/h$. Последний результат имеет место и для течения с функцией тока ψ_2 при $m = 2$, только асимптотами будут прямые $y = 0{,}375$ и $y = -0{,}625$.

Обобщенные решения второго порядка

Применяя тот же метод, полагаем в формулах (9) и (10) $\nu = -mn$ и суммируем полученные выражения по n, считая коэффициенты всех членов сумм равными единице. Получим

$$\psi_3 = -x\sum_{n=1}^{\infty} e^{-mnx}\cos mny + (x^2 - y^2)\sum_{n=1} mne^{-mnx}\cos mny +$$

$$+ 2xy\sum_{n=1}^{\infty} mne^{-mnx}\sin mny - y\sum_{n=1}^{\infty} e^{-mnx}\sin mny,$$

$$\psi_4 = y\sum_{n=1}^{\infty} e^{-mnx}\cos mny - 2xy\sum_{n=1}^{\infty} mne^{-mnx}\cos mny +$$

$$+ (x^2 - y^2)\sum_{n=1}^{\infty} mne^{-mnx}\sin mny - x\sum_{n=1}^{\infty} e^{-mnx}\sin mny. \qquad (29)$$

Используя соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} mne^{-mnx}\cos mny = -\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-mnx}\cos mny;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} mne^{-mnx}\sin mny = -\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-mnx}\sin mny$$

и применяя равенства (14), можем из (29) получить

$$\psi_3 = \frac{1}{2}\left[A_1 + B_1 y + x - \frac{x\,\mathrm{sh}\,mx + y\sin my}{\mathrm{ch}\,mx - \cos my} - \right. \qquad (30)$$

$$\left. - m\frac{(x^2 - y^2)(1 - \mathrm{ch}\,mx\cos my) - 2xy\,\mathrm{sh}\,mx\sin my}{(\mathrm{ch}\,mx - \cos my)^2}\right];$$

$$\psi_4 = \frac{1}{2}\left[A_2 + B_2 y + \frac{y\,\mathrm{sh}\,mx - x\sin my}{\mathrm{ch}\,mx - \cos my} + \right. \qquad (31)$$

$$\left. + m\frac{(x^2 - y^2)\,\mathrm{sh}\,mx\sin my + 2xy(1 - \cos my\,\mathrm{ch}\,mx)}{(\mathrm{ch}\,mx - \cos my)^2}\right].$$

Определяя постоянные A_1 и B_1 из условий (26), найдем, что

$$A_1 = -\frac{m - 2\sin\dfrac{m}{2}}{4\left(1 - \cos\dfrac{m}{2}\right)},\quad B_1 = 4, \qquad (32)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Скорости для этого течения, определяемые по (19), выражаются громоздкими формулами, запись которых мы опускаем. Из них найдем, что в начальном сечении ($x=0$, $-0{,}5 \leqslant y \leqslant 0.5$) эти скорости представятся в виде

$$v_x|_{x=0} = \frac{Q}{2h}\left[\frac{my\,(2-\cos my)-\sin my}{1-\cos my} - \right.$$
$$\left. - \frac{my\sin my\,(my-\sin my)}{(1-\cos my)^2} + 4\right]; \qquad (33)$$
$$v_y|_{x=0} = -\frac{Q}{2h}.$$

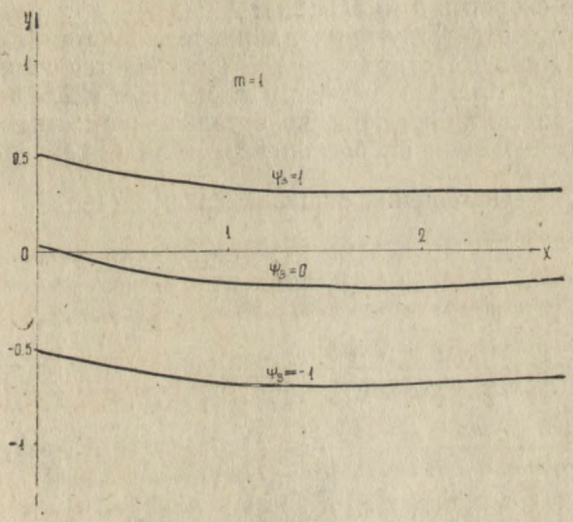

Рис. 5

Раскрытие неопределенностей, появляющихся в первой формуле (33) при $y=0$, показывает, что переменные члены в ней обращаются в нуль, так что $v_x\,(0,0) = 2Q/h$.

На рис. 5 представлен результат расчета трех линий тока $\psi_3=1$, $\psi_3=0$, $\psi_3=-1$ при $m=1$, которые в бесконечности вниз по потоку стремятся соответственно к асимптотам $y=0{,}52101$, $y=0{,}02101$, $y=-0{,}47899$. Следовательно, ширина струи в бесконечности будет тоже равна h как и в начальном сечении, и скорости будут $v_x=v=2Q/h$, $v_y=0$, и струя опять оказывается однородной.

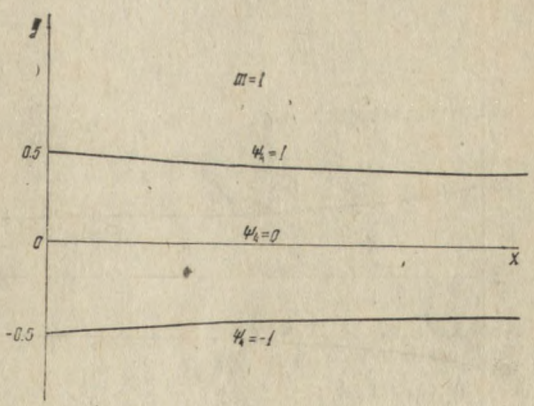

Рис. 6

При $m=2$ линии тока располагаются немного выше, чем при $m=1$, и будут иметь асимптоты $y=0{,}54311$, $y=0{,}04311$, $y=-0{,}45689$ соответственно.

Определение постоянных A_2, B_2, входящих в (31), при тех же условиях (26) дает $A_2=0$, $B_2=4$. Течение, представляемое функцией

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

тока ψ_4, оказывается симметричным относительно оси x, а сама эта ось есть линия тока $\psi_4=0$. Скорости в начальном сечении будут

$$v_x\Big|_{x=0}=\frac{2Q}{h},\quad v_y\Big|_{x=0}=-\frac{Q}{2h}\left[\frac{3my-\sin my}{1-\cos my}-\frac{m^2y^2\sin my}{(1-\cos my)^2}\right]. \tag{34}$$

Раскрытие неопределенности при $y=0$ дает, что $v_y(0,0)=0$.

Вниз по потоку на бесконечности оказалось, что

$$v_x=v=\frac{5Q}{2h},\quad v_y=0. \tag{35}$$

Картина линий тока представлена на рис. 6. В бесконечности вниз по потоку линии тока $\psi_4=1$ и $\psi_4=-1$ будут иметь асимптоты $y=\pm 0{,}4$. Таким образом, в бесконечности получаем однородную струю шириной $0{,}8\,h$, имеющую скорость $v=5Q/(2h)$.

При $m=2$ соответствующие линии тока будут близки к линиям тока для $m=1$, причем струя сначала оказывается немного более узкой, а затем линии тока при значении x, близком к 2,5, пересекают изображенные на рис. 6 линии тока, но в дальнейшем стремятся к тем же самым асимптотам, имея на бесконечности те же скорости (35).

Обобщение решений (11) и (12)

Повторяя ту же процедуру суммирования этих решений при $\nu=-mn$ и опять полагая коэффициенты членов сумм равными единице, придем к решениям вида

$$\psi_5=\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2-y^2)\sin my-2xy\,\mathrm{sh}\,mx}{\mathrm{ch}\,mx-\cos my}+2xy+A_1+B_1y\right]; \tag{36}$$

$$\psi_6=\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2-y^2)\,\mathrm{sh}\,mx+2xy\sin my}{\mathrm{ch}\,mx-\cos my}-x^2+y^2+A_2+B_2y\right]. \tag{37}$$

Определение постоянных A_1 и B_1 из условий (26) дает

$$A_1=0;\ B_1=4+\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{m}{2}}{1-\cos\frac{m}{2}}=4+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{m}{4}.$$

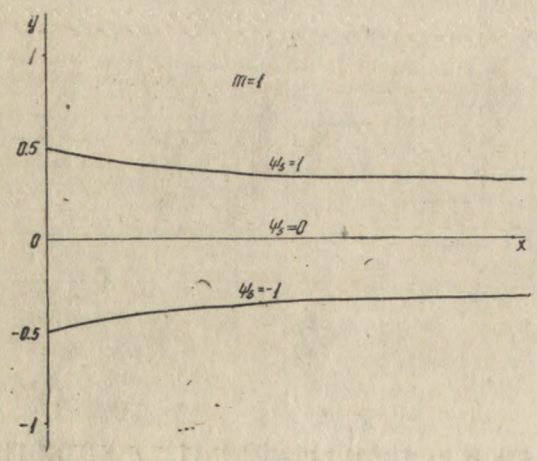

Рис. 7

Течение с функцией тока (36) оказалось симметричным относительно оси x. Расчет показал, что при $m=1$ характерные линии тока представятся рис. 7, причем крайние линии тока $\psi_5=1$ и $\psi_5=-1$ в бесконечности вниз по потоку имеют асимптоты $y_1=\pm 0{,}33567$ соответственно. При $m=2$ характер течения остается тем же самым, только струя получается немного более широкой, а асимптотами в бесконечности вниз по потоку являются прямые $y_2=\pm 0{,}40690$.

Скорости в «начальном» сечении струи $x=0$ оказались равными

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$v_x\Big|_{x=0} = \frac{Q}{2h}\left[-y\frac{2\sin my + my\cos my}{1-\cos my} + \right.$$
$$\left. + \frac{my^2\sin^2 my}{(1-\cos my)^2} + B_1\right],\ v_y = -\frac{Q}{h}y,$$

а в бесконечности

$$v_x = \frac{1}{2}\frac{Q}{h}B_1;\ v_y = 0. \tag{38}$$

Таким образом, на бесконечности струя становится однородной, имея скорость $v = v_x$, определяемую по (38), и ширину $2|y_1|h$ при $m = 1$ и $2|y_2|h$ при $m = 2$.

Для функции тока (37) из тех же условий (26) найдем не зависящие от m значения постоянных:

$$A_2 = -0{,}25;\ B_2 = 4.$$

Результаты расчета линий тока даны на рис. 8. Как видим, течения при $m = 1$ и $m = 2$ довольно сильно отличаются друг от друга. Тем не менее в бесконечности вниз по потоку линии тока $\psi_6 = 1$, $\psi_6 = 0$, $\psi_6 = -1$ для обоих течений стремятся к одним и тем же асимптотам $y = 0{,}5625$, $y = 0{,}0625$, $y = -0{,}4375$ соответственно. Ширина струи оказывается той же самой, что и в начальном сечении, и равна h.

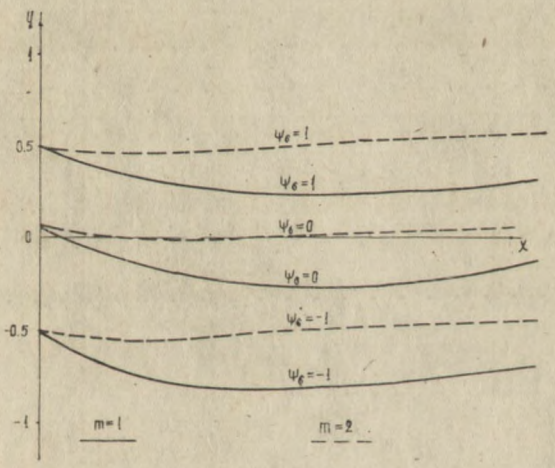

Рис. 8

Скорости в начальном сечении $x = 0$ будут

$$v_x\Big|_{x=0} = \frac{Q}{h}(2+y),\ v_y\Big|_{x=0} = \frac{Q}{2h}y\ \frac{-2\sin my + my}{1-\cos my},$$

а в бесконечности

$$v_x = 2\frac{Q}{h},\ v = 0. \tag{39}$$

Следовательно, при $m = 1$ и при $m = 2$ получаем однородную струю шириной h, движущуюся со скоростью $v = v_x$, определяемую по (39).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ЛИТЕРАТУРА

1. Aloknath Chakrabarti. A note on non-separable solutionis of linear partial differential equationis Gournal of Math. Anal. and Appic., 1973, v. 42, p. 198—204.

2. Градштейн И. С., Рыжик П. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1962, с. 56.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О МЕТАНИИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА ГАЗОВЫМ ПОТОКОМ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Л. И. Дубровская

В работе рассматривается задача об устойчивости движения крутового цилиндра в нестационарном потоке газа, когда между стенками канала и метаемым телом существует зазор. Будем называть движение «устойчивым, если газодинамические силы и моменты. действующие на тело, таковы, что после полученного телом внезапного изменения направления движения они стремятся вернуть тело к тому направлению движения, которое было до возмущения» [1, с. 214]. В работе [2] методом распада произвольного разрыва [3] исследовалась задача об устойчивости кругового цилиндра в нестационарном потоке газа, когда цилиндр обладал способностью перемещаться под действием аэродинамических сил только поперек канала. Настоящая работа является продолжением [2]. Вопрос о стабилизирующем действии потока рассматривается для цилиндра, который обладает способностью перемещаться также и вдоль канала.

Как известно, несимметричность потока возникает как из-за неравномерного и немгновенного раскрытия диафрагмы, так и из-за начального отклонения тела от плоскости симметрии. Будем считать, что в начальный момент диафрагма мгновенно убирается, а первоначальное возмущение создается за счет несимметричного расположения тела относительно стенок канала. В плоском канале шириной D помещается круговой цилиндр диаметром d. Ось симметрии цилиндра перпендикулярна плоскости течения (рис. 1). Поток, набегающий на тело, образуется в результате движения поршня, либо в результате разрыва диафрагмы (сечение $x = x_1$). Газ рассматривается идеальный, нетеплопроводный, сила тяжести цилиндра не учитывается.

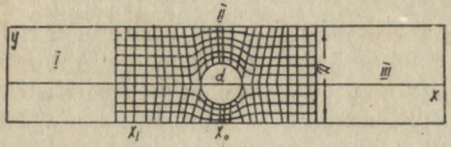

Рис. 1

Система уравнений, описывающая нестационарное плоское течение газа, записывается в дивергентном виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0;$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial (p + \rho v^2)}{\partial y} = 0; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho u (e + p/\rho)}{\partial x} + \frac{\partial \rho v (e + p/\rho)}{\partial y} = 0,$$

где p — давление; ρ — плотность; u, v — компоненты вектора скорости, e — полная энергия единицы массы газа; t — время; x, y — декартовы координаты. Система (1) замыкается уравнением состояния совершенного газа. Поскольку течение существенно неодномерно в сравнительно небольшой окрестности метаемого тела, то система (1) решалась в двумерной области II длиной ≈ 7—8 D. Эти размеры подбирались так, чтобы в ячейках, прилегающих к одномерным областям, выполнялось условие $v \leqslant 0{,}001$ u. Римскими цифрами I и III на рис. 1 отмечены области одномерного расчета. Склеивание решения на границах двумерной и одномерных областей производилось с выполнением законов сохранения массы, продольной составляющей импульсов и энергии. Однако при вычислении потока энергии через границу не учитывалась составляющая скорости v в силу ее малости.

В любой момент времени по рассчитанному полю давлений можно определить силы, действующие на цилиндр:

$$F_x = \sum (pl)_{i,j} \sin \varphi_{i,j};$$
$$F_y = \sum (pl)_{i,j} \cos \varphi_{i,j}. \qquad (2)$$

На каждом временном шаге криволинейная сетка двумерной области деформируется, и закон ее изменения определяется перемещением цилиндра в направлении оси oy. Зная это перемещение и считая неизменным число ячеек в верхней и нижней частях канала, легко найти новое разбиение сетки. При движении цилиндра вверх размеры ячеек в верхней половине уменьшаются, а в нижней увеличиваются и наоборот. Горизонтальная составляющая вектора скорости тела определяет смещение всей двумерной области как жесткой системы вдоль оси ox. Таким образом, происходит «скольжение» двумерной области вдоль одномерной, так как длины одномерных областей I и III корректируются на каждом временном шаге величиной смещения Δx центра масс цилиндра. Длина последней одномерной ячейки области I при $t = 0$ равна h_x. В процессе счета она может растягиваться до $2\ h_x$. Когда длина этой ячейки станет равной $2\ h_x$, происходит деление ее на две одинаковые ячейки. Суммарная длина двух граничащих с двумерной областью одномерных ячеек области III при $t = 0$ равна $l = 2\ h_x$. Эта величина в процессе счета может уменьшаться до $l = h_x$. При $l = h_x$ происходит слияние этих двух ячеек в одну. Граничные условия для системы (1) ставились обычным образом. На стенках канала и на круговом цилиндре выполнялось условие непротекания (в последнем случае с учетом подвижности границы). Левая граница области I и правая области III брались достаточно далеко, чтобы условие отсутствия градиентов на них не вносило большой погрешности в расчет. Задача решалась в безразмерных переменных. За основные величины принимались ширина канала, давление за фронтом падающей ударной волны или (в случае диафрагмы) в области высокого давления, плотность в той же области.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Перепад давления на фронте ударной волны $p_{12} = p_1/p_2 = 1000$, скорость частиц газа за фронтом ударной волны $u = 2$, ширина канала $D = 1$, диаметр кругового цилиндра $d = 0{,}4$, длина области I — 5 D, области II — 5,3 D, области III — 6 D. Цилиндр в начальный момент времени имел координаты $x_0 = 8{,}5\ D$, $y_0 = 0{,}35\ D$. Начальное положение фронта ударной волны $x_1 = 6{,}5\ D$. Начало системы координат в численном расчете совмещалось с левым нижним углом расчетной области. Продольная составляющая вектора скорости центра масс цилиндра практически во все время движения на порядок выше поперечной составляющей, а вследствие перераспределения энергии эта поперечная составляющая скорости в случае полностью подвижного цилиндра (штриховая линия на рис. 2) ниже соответствующих значений для случая цилиндра с ограничением свободы передвижения вдоль оси канала (сплошная линия). Здесь приводятся результаты сравнения с работой [2] для небольших моментов времени, так как для уменьшения времени расчета был взят канал небольшой протяженности, и ко вре-

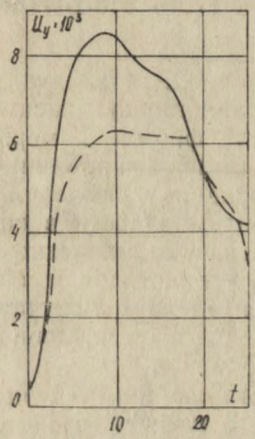

Рис. 2

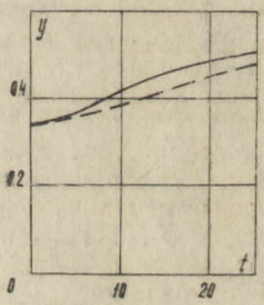

Рис. 3

мени $t = 25$ цилиндр практически вылетает из канала. На рис. 3 приводятся кривые $y(t)$ перемещения центра масс цилиндра для рассматриваемых выше двух случаев. Отличия в поведении показанных зависимостей легко объясняются уменьшением скорости набегающего потока относительно цилиндра в случае, когда цилиндр имеет две степени свободы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фабрикант Н. Я. Аэродинамика. — М.: Наука, 1964. — 814 с.
2. Дубровская Л. И., Ким А. В., Комаровский Л. В. О взаимодействии нестационарного течения газа со свободным цилиндрическим телом в канале. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 2, с. 180—184.
3. Численное решение многомерных задач газовой динамики./Под ред. С. К. Годунова и др./ М.: Наука, 1976.— 400 с.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ КВАЗИОДНОМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Е. И. Погорелов, Т. Г. Погорелова, Г. М. Никульчикова

В работе рассматривается одна вариационная задача внутренней газовой динамики о метании тела нестационарно расширяющимся газом. Оптимизируемой функцией служит форма камеры высокого давления, содержащая газ в начальный момент времени, а целевым функционалом — скорость тела в фиксированном сечении пусковой трубы. Получены необходимые условия оптимальности в виде уравнения, связывающего искомую функцию, газодинамические параметры потока и множители Лагранжа, которые удовлетворяют сопряженной краевой задаче. Исследованы некоторые предельные случаи. Построение конкретных оптимальных форм осуществляется численно с использованием методов нелинейного программирования.

1. Рассмотрим следующую схему метания тела (поршня) нестационарно расширяющимся газом [1, 2]. В камере высокого давления находится легкий газ. Камера стыкуется с пусковой трубой постоянного сечения, в месте стыковки помещается поршень. В начальный момент времени поршень освобождается и метается газом. Требуется, сохраняя постоянными начальные термодинамические параметры газа, массу поршня и газа, найти такую форму камеры, при которой скорость тела в фиксированном сечении канала была бы максимальной [3, 4].

Неустановившееся течение невязкого нетеплопроводного газа рассматриваем в квазиодномерном приближении, которое хорошо описывает реальную картину течения в длинных каналах с гладкими образующими и малыми перепадами сечений. Уравнения течения в переменных Эйлера запишем в виде [1]:

$$L_1 \equiv \frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma p u\frac{d\ln s(x)}{dx} = 0; \tag{1}$$

$$L_2 \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \tag{2}$$

$$P\rho^{-\gamma} = p_0\rho_0$$

где t — время; x — координата Эйлера; p — давление; u — скорость; ρ — плотность газа; $s(x)$ — площадь канала; γ — отношение удельных теплоемкостей. Граничные условия на поршне, дне камеры и начальные условия имеют вид

$$L_3 \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sigma p = 0; \tag{3}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$L_4 \equiv \frac{dx}{dt} - u = 0; \tag{4}$$

$$u(x_c, t) = 0; \tag{5}$$

$$u(x, 0) = 0, \; p(x, 0) \equiv p_0 = \frac{1}{\gamma}, \; \rho(x, 0) \equiv \rho_0 = 1. \tag{6}$$

В (1)—(6) использованы безразмерные переменные [3, 4] и обозначения: σ — отношение массы газа к массе поршня; x_c — координата дна камеры. В качестве управляющей функции $g(x)$ для аналитических исследований удобно взять следующее выражение:

$$g(x) = \begin{cases} \ln s(x), & x_c \leqslant x \leqslant x_0; \\ 0, & x > x_0. \end{cases} \tag{7}$$

В заданном сечении $x = x_0$ камера непрерывным образом стыкуется с пусковой трубой, искомое управление (7) имеет закрепленный правый и свободный левый конец. Ограничения на управляющую функцию определим из условий, обеспечивающих квазиодномерность и гладкость течения

$$g_1 \leqslant \frac{dg(x)}{dx} \leqslant g_2. \tag{8}$$

Это ограничение перепишем в виде равенства, вводя дополнительное управление $\beta(x)$:

$$L_5 \equiv \left(\frac{dg}{dx} - g_1\right)\left(g_2 - \frac{dg}{dx}\right) - \beta^2(x) = 0. \tag{9}$$

Изопериметрическое ограничение, выражающее условие постоянства объема камеры, представим в виде

$$\int_{x_c}^{x_0} e^{g(x)} dx - W_0 = 0, \tag{10}$$

где W_0 — объем камеры. В качестве целевого функционала J_0 выберем величину скорости поршня в фиксированном сечении канала x_b. Тогда с учетом (3)

$$J_0 = \sigma \int_0^{t_b} p dt, \tag{11}$$

где t_b — время достижения заданного сечения x_b.

Построим далее функционал Лагранжа, включая в него наряду с (11) все связи (1)—(4), (9), (10) с соответствующими множителями Лагранжа $\eta_1(x, t)$, $\eta_2(x, t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\mu_1(x)$, μ_2^0 в области G, ограниченной характеристиками od, ab, линией поршня ob и стенкой da (рис. 1). Пока не принимаем во внимание возможные линии разрыва множителей Лагранжа и разрыв производной управления в $x = x_0$:

$$J = J_0 + \int_0^{t_b} [\lambda_1(t) L_3 + \lambda_2(t) L_4] dt + \int_{x_c}^{x_0} [\mu_1(x) L_5 + \mu_2^0 e^{g(x)}] dx +$$

$$+ \int_G \int [\eta_1(x, t) L_1 + \eta_2(x, t) L_2] dx dt.$$

Используя обычную технику варьирования [5], построим вариацию функционала δI, учитывая, что $g(x)$ — функция одной переменной; пол-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ная вариация $g(x_0)$ равна нулю $\Delta g(x_0)=0$; вариация $\delta u=0$ на стенке в силу (5); на характеристике od $\delta u=\delta p=0$; вариация δ в области G связана с вариацией δ_t на $0b$ зависимостью $\delta=\delta_t-\mathrm{d}/\mathrm{d}x(\delta x)$. Выбор множителей $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\eta_1(x, t)$, $\eta_2(x, t)$ позволяет при любых (в том числе и не оптимальных) управлениях обратить в выражении для δI в нули коэффициенты перед вариациями δu, δp, δx, кроме вариаций управлений δg и $\delta\beta$. Тогда в областях непрерывности η_1 и η_2 должны удовлетворять следующей сопряженной системе уравнений гиперболического типа, имеющей те же характеристики, что и основная система (1), (2):

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial t}+u\frac{\partial\eta_1}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\eta_2}{\partial x}=\eta_1\left[(\gamma-1)\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma u\frac{dg}{dx}\right];$$

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial t}+u\frac{\partial\eta_2}{\partial x}+\gamma p\frac{\partial\eta_1}{\partial x}=-\eta_1\left[(\gamma-1)\frac{\partial p}{\partial x}-\gamma p\frac{dg}{dx}\right]. \tag{12}$$

Граничные условия для этой системы имеют следующий вид:
на линии поршня

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\eta_2}{\rho}\right)=\sigma\gamma p\eta_1-\sigma\lambda_2(t),\ (\eta_2)_b=-\sigma\rho_b;$$

$$\frac{d\lambda_2}{\partial t}=-\frac{\eta_2}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\gamma p\eta_1\frac{\partial u}{\partial x},\ (\lambda_2)_b=\sigma\frac{p_b}{u_b}; \tag{13}$$

на стенке

$$\eta_2(x_c, t)=0; \tag{14}$$

на замыкающей характеристике ab

$$\eta_2-\rho a\eta_1=0,\ a^2=\frac{\gamma p}{\rho}. \tag{15}$$

После проделанных преобразований в выражении для δI останутся следующие члены:

$$\delta I=\left[-\mu_2^0 e^{g(x)}+\left(g_2-2\frac{dg}{dx}+g_1\right)\mu_1\frac{dg}{dx}\right]_c\Delta x_c-$$

$$-\left[\mu_1\left(g_2-2\frac{dg}{dx}+g_1\right)\right]_c\Delta g_c+\int_{x_c}^{x_0}\left\{\left[\mu_2^0 e^{g(x)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{d}{dx}\left(\mu_1\left(g_2-2\frac{dg}{dx}+g_1\right)\right)\right]\delta g-\mu_1\delta\beta^2\right\}dx+\sum_i\int\limits_{G_i}\int\gamma pu\eta_1\frac{d\delta g(x)}{dx}\,dxdt.$$

Здесь двойной интеграл рассматривается по области *окаdo*, где $\delta g\neq 0$. Отметим, что множители Лагранжа η_1 и η_2, определенные из решения задачи (12)—(15), могут терпеть разрыв в области G, причем в силу линейности системы (12) линиями разрыва могут быть только характеристики этой системы.

Нетрудно получить соотношения, выполняющиеся на разрывах:

$$a\rho[\eta_1]-[\eta_2]=0;\ \ dx/dt=u+a;$$
$$a\rho[\eta_1]+[\eta_2]=0;\ \ dx/dt=u-a,$$

где $[\eta_i]$ — величина разрыва η_i. На любой линии в плоскости x, t, не являющейся характеристикой, на которой производная управления терпит

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

разрыв, выполняются условия непрерывности множителей Лагранжа $[\eta_1]=[\eta_2]=0$. Учитывая это и анализируя уравнения (12), (13) и условия (15), получим, что на замыкающей характеристике ab η_1 и η_2 отличны от нуля, в том числе и в точке a. В то же время на стенке по (14) имеем $(\eta_2)_a=0$. Следовательно, в точке a имеет место разрыв множителей Лагранжа, который распространяется по характеристике ap, отражается от ob и далее распространяется по характеристике pe. Преобразуем теперь двойной интеграл в выражении для δJ с учетом различных вариантов прохождения разрыва по области $\{x, t\}$ таким образом, чтобы можно было воспользоваться основной леммой вариационного исчисления и получить условия, при которых $\eta J=0$.

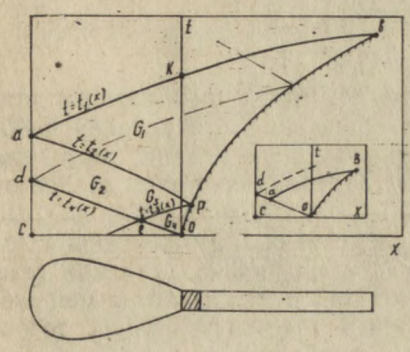

Рис. 1

Отбросим прямые ограничения (8) и рассмотрим задачу с одним изопериметрическим ограничением (10). Пусть допустимое управление таково, что $t_a>t_d$ и $x_a=x_c$, и реализуется волновая конфигурация, изображенная на рис. 1. Покажем, что она не соответствует оптимальному варианту. Введем обозначения:

$$\Phi_1(x)=\int_{t_2(x)}^{t_1(x)}\gamma\eta_1 p u dt,\ x_c\leqslant x\leqslant x_0;\ \Phi_2(x)=\int_{t_4(x)}^{t_3(x)}\gamma\eta_1 p u dt,\ x_c\leqslant x\leqslant x_e;$$

$$\Phi_3(x)=\int_{t_3(x)}^{t_2(x)}\gamma\eta_1 p u dt,\ x_e\leqslant x\leqslant x_0;\ \Phi_4(x)=\int_{t_4(x)}^{t_0(x)}\gamma\eta_1 p u dt,\ x_e\leqslant x\leqslant x_0,$$

где $t=t_i(x)$ — уравнение характеристики. Переходя далее к повторным интегралам в областях G_1, G_2, G_3, G_4, получим следующее выражение для δJ:

$$\delta J=\ldots+\int_{x_c}^{x_0}\left(\mu_2^0 e^{g(x)}-\frac{d\Phi_1}{dx}\right)\delta g dx-\int_{x_c}^{x_e}\frac{d\Phi_2}{dx}\delta g dx-$$

$$-\int_{x_e}^{x_0}\left(\frac{d\Phi_3}{dx}+\frac{d\Phi_4}{dx}\right)\delta g dx.$$

В этом выражении множители перед δg в двух последних интегралах отличны от нуля и, следовательно, вариация функционала $\delta_J\neq 0$.

Пусть теперь допустимое управление таково, что $x_c<x_a$, т. е. отраженное от стенки возмущение не успевает догнать поршень. Волновая картина для этого случая показана на рис. 1 в правом нижнем углу. Тогда

$$\delta J=\ldots+\int_{x_c}^{x_a}\mu_2^0 e^{g(x)}\delta g dx+\int_{x_a}^{x_0}\left(\mu_2^0 e^{g(x)}-\frac{d\Phi_1}{dx}\right)\delta g dx.$$

Первое слагаемое в этом выражении не равно нулю, поэтому и $\delta_J\neq 0$.

Таким образом, в двух рассмотренных случаях можно улучшить значение целевого функционала при выполнении (10). В первом необходимо удлинять камеру так, чтобы $t_a\to t_d$, во втором — укорачивать и $x_a\to x_c$. В оптимальном варианте точка a на замыкающей характеристи-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ке должна совпасть с точкой d, а разрыв η_1, η_2 распространится по характеристике do (рис. 2), при этом вариация $\delta J=0$, если выполняются условия

$$\mu_2^0 s(x) - \frac{d}{dx}\int_{t_2(x)}^{t_1(x)} \gamma\eta_1 p u dt = 0, \qquad (16)$$

$$s(x_c)=0.$$

Здесь мы перешли от управления $g(x)$ к $s(x)$ по (7).

Таким образом, в оптимальном случае искомая форма камеры должна удовлетворять уравнению (16). Для проверки этого условия необходимо совместно решать основную и сопряженную задачи, при этом оптимальная форма камеры должна быть такова, что отраженное от стенки первое элементарное возмущение (волна разрежения) должно догонять поршень в сечении x_b. Если отраженная волна разрежения догоняет поршень раньше, то это приводит к уменьшению давления газа на модель, и в результате скорость поршня в x_b оказывается меньше, чем в оптимальном случае. Если же камера длинее оптимальной, то отраженная волна не догоняет его, следовательно, не весь газ принимает участие в метании, и запасенная энергия используется не полностью. На рис. 1 траектория отраженной волны показана пунктиром.

Если отбросить изопериметрическое ограничение и рассматривать только прямые ограничения (8), то можно показать, что для неограниченной по объему камеры искомое управление всегда лежит на границе допустимой области, поэтому чем больше перепад сечений между трубой и камерой, тем выше скорость поршня. В пределе «оптимальной» будет камера с «бесконечным» уширением в сечении $x=x_0$ (предельная задача Лагранжа [6]). Хотя в этом случае квазиодномерные уравнения не описывают действительное течение, но скорость поршня в предельной задаче будет больше, чем в задачах с конечным уширением. Это подтверждают и численные расчеты работы [7], где в осесимметричной постановке решена задача Лагранжа для камер с различными уширениями. В общем случае задания ограничений (8) и (10) оптимальный профиль будет состоять из участков краевого и внутреннего экстремумов.

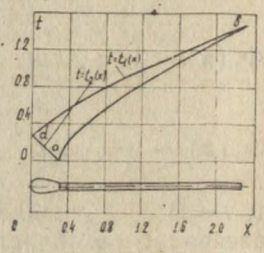

Рис. 2

2. Построение конкретной оптимальной формы камеры можно осуществить только численно, при этом необходимо совместно интегрировать прямую (1)—(6) и сопряженную (12)—(15) задачи и организовать итерационный процесс в пространстве управлений с учетом условий вида (16). В данной работе применяется прямой подход, в котором управление представляется в виде разложения по некоторой системе базисных функций, а коэффициенты в разложении определяются с помощью методов нелинейного программирования.

Поместим начало координат на дне камеры $x_c=0$, в качестве управляющей возьмем функцию $s(x)$ и представим ее в виде

$$s(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\kappa 1-} \alpha_i \left[T_i^*\left(\frac{x}{x_0}\right) - 1 \right],$$

где T_i^* — смещенные многочлены Чебышева. Целевой функционал (11) будет зависеть тогда от κ параметров

$$J_0 = J_0(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\kappa-1}, x_0),$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

а задача оптимизации становится конечномерной. Представим изопериметрическое ограничение в виде

$$g_0(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\kappa-1}, x_0) \equiv \frac{1}{W_0}\int_0^{x_0} s(x)\,dx - 1 = 0$$

и введем прямые ограничения

$$g_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\kappa-1}, x_0) \equiv -\min s(x) + h_1 \leqslant 0;$$
$$g_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\kappa-1}, x_0) \equiv \max s(x) - h_2 \leqslant 0;$$
$$g_3(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\kappa-1}, x_0) \equiv \max \left|\frac{ds}{dx}\right| - h_3 \leqslant 0,$$

где h_1, h_2, h_3 — нижние и верхние границы, g_i — функции κ переменных

При численном расчете процесса метания используем систему уравнений в лагранжевых координатах [1] и сквозную разностную схему [8], при этом результаты расчета интерполируем на эйлерову сетку. Задачу нелинейного программирования с алгоритмическим способом задания целевой функции J_0 и ограничениями типа равенства g_0 и неравенства g_1, g_2, g_3 решаем с помощью метода скользящего допуска [9], в котором поисковый симплексный алгоритм распространен на случай общих ограничений на область поиска. В процессе поиска осуществляется поочередное движение сначала в сторону возрастания функции, а затем в сторону допустимой области.

Приведем некоторые результаты численных расчетов. Положим $\sigma=10$; $\gamma=1{,}4$; $x_b-x_0=2$ и рассмотрим задачу оптимизации только с изопериметрическим ограничением g_0. Поиск начинался в четырехмерном пространстве $\kappa=4$, т. е. бралось три члена в разложении $s(x)$, а затем размерность задачи увеличивалась до $\kappa=5$ и $\kappa=6$. На рис. 3 приведены оптимальные профили I—III камер высокого давления. Для наглядности показаны кривые изменения радиуса $R(x)$. На этом же рисунке даны значения оптимизируемого функционала J_0. Для контроля правильности найденного оптимального управления в программе расчета параметров течения газа предусмотрена процедура построения тех характеристик в переменных x, t, которые являются линиями слабого разрыва для данной задачи.

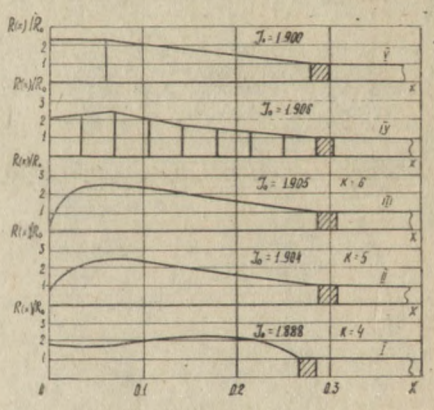

Рис. 3

Как следует из вариационного анализа, проведенного выше, в оптимальном случае линии слабого разрыва должны совпадать с линиями разрыва множителей Лагранжа и с замыкающей характеристикой. На рис. 2 приведены результаты расчета распространения слабого разрыва в оптимальном варианте при $\kappa=6$, где ob — линия поршня; od, db — характеристики второго и первого семейства соответственно. Хорошо видно, что отраженный от дна камеры разрыв догоняет поршень как раз у конца пусковой трубы.

На рис. 3 показана оптимальная форма камеры (кривая IV), полученная в работе [4] при другом способе дискретизации управляющей функции, когда $R(x)$ аппроксимировалась ломаной с вершинами в точках (R_i, x_i), изопериметрическое ограничение учитывалось точно, а за-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

дача оптимизации решалась методом вращающихся координат. Сравнение показывает, что рассматриваемые способы аппроксимации дают практически одинаковые результаты как по форме камеры, так и по значению J_0. Профиль V на рис. 3 получен в работе [3] из предположения, что камера высокого давления представляет из себя цилиндр, соединенный с трубой конусом. Видно, что даже при такой грубой аппроксимации удалось получить качественно правильную форму камеры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. — М.: Наука, 1971. — 856 с.

2. Бетехтин С. А., Виницкий А. М., Горохов М. С., Станюкович К. П., Федотов И. Д. Газодинамические основы внутренней баллистики. — М.: Оборонгиз, 1957. — 218 с.

3. Жаровцев В. В., Комаровский Л. В., Погорелов Е. И. Определение оптимальных геометрических характеристик камеры высокого давления в задаче Лагранжа. — Труды НИИПММ при ТГУ, 1977, т. 7, с. 47—54.

4. Погорелова Т. Г. Оптимизация формы камеры высокого давления в задаче о метании тела газовым потоком. — В сб.: Аэродинамика быстропротекающих процессов. Томск, 1982, с. 17—20.

5. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики. — М.: Наука, 1979. — 448 с.

6. Комаровский Л. В. О решении предельной задачи Лагранжа. — Уч. зап. Томск. ун-та, 1973, № 73, с. 35—38.

7. Нарежнев Л. С. Численное решение некоторых обобщений задачи Лагранжа. — Аэродинамика. Томск, 1979, с. 77—80.

8. Куропатенко В. Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики. —. Тр. матем. ин-та им. В. П. Стеклова, 1966, т. 74, № 5, с. 107—137.

9. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975. — 834 с.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА В ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ О МЕТАНИИ ТЕЛА ГАЗОВЫМ ПОТОКОМ

Т. Г. Погорелова

Высокие темпы развития науки и техники выдвигают большое количество задач, связанных с оптимальным управлением процессами в сплошных средах. Для их решения разработано большое количество методов, среди которых принцип максимума, вариационное исчисление, прямая численная оптимизация. В данной работе рассматривается вариационная задача о метании тела в канале переменного сечения неизэнтропически движущимся газом, когда управление осуществляется скоростью поршня с целью максимизации функционала, отражающего требование поддержания давления на метаемом теле, близкого к заданному при минимальных затратах кинетической энергии поршня. В условиях невязкости и нетеплопроводности газа, течение которого описывается квазиодномерными уравнениями газовой динамики, с помощью метода множителей Лагранжа получены необходимые условия стационарности заданного функционала, выявлена возможная структура оптимального решения.

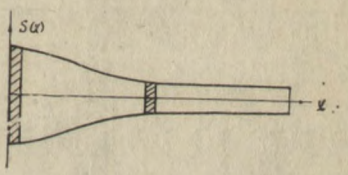

Рис. 1

Пусть в канале переменного сечения находится газ, ограниченный слева поршнем, а справа метаемым телом (рис. 1), движение которых начинается одновременно. Квазиодномерное течение невязкого нетеплопроводного газа по каналу переменного сечения описывается системой [1] в переменных Лагранжа, которую после некоторых преобразований можно представить в виде

$$L_1 \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + s(x)\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} = 0; \tag{1}$$

$$L_2 \equiv \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \xi}[s(x)\,u] = 0;$$

$$L_3 \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + p\frac{\partial v}{\partial t} = 0;$$

$$L_4 \equiv \frac{\partial x}{\partial t} - u = 0,$$

где t — время; ξ — Лагранжева координата; x — Эйлерова координата; u — скорость; p — давление; v — удельный объем; ε — удельная внут-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ренняя энергия; $s(x)$ — закон изменения площади поперечного сечения. Система (1) замыкается уравнением состояния $\varepsilon = \varepsilon(p, v)$. После перехода к безразмерным переменным обычным образом [2] система (1) не меняется, начальные и граничные условия принимают вид

$$t = 0,\ u(0,\ \xi) = 0,\ v(0,\ \xi) = 1,\ p(0,\ \xi) = p_0(\xi); \tag{2}$$

$$L_5 = \frac{\partial x}{\partial t}(t,\ -1) - g(t) = 0; \tag{3}$$

$$L_6 = \frac{\partial u}{\partial t}(t,\ 0) - \sigma s p(t,\ 0) = 0, \tag{4}$$

где $p_0(\xi)$ — заданная функция; $g(t)$ — скорость движения поршня; σ — отношение массы газа к массе метаемого тела. Область течения газа в переменных t, ξ имеет вид G: $\{-1 \leqslant \xi \leqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, где время T окончания процесса определяется в момент достижения телом заданного сечения x_T канала

$$L_7 \equiv \frac{\partial x}{\partial t}(t,\ 0) - u(t,\ 0) = 0,\ x(T,\ 0) = x_T. \tag{5}$$

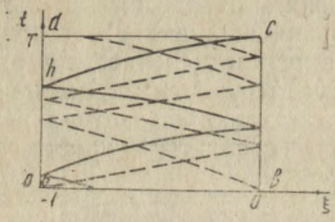

Рис. 2

Предполагается, что начальные и граничные условия задачи таковы, что в неустановившемся движении газа ударных волн не возникает. Волновую картину течения газа при данных предположениях в переменных t, ξ можно представить в виде, изображенном на рис. 2, где схематично штриховой линией показаны линии слабого разрыва параметров течения. Сформулируем экстремальную задачу. Среди непрерывных функций $g(t)$ найти такую, которая максимизирует целевой функционал

$$J_0[g(t)] = -\int_0^T \{[p(t,\ 0) - p_0(t)]^2 + \varkappa [g(t)]^2\}\, dt \tag{6}$$

(здесь $p_0(t)$ — заданная функция; $\varkappa$ — константа) при условии, что параметры течения удовлетворяют дифференциальным и конечным связям (1)—(5) в заданной области течения $abcd$ (см. рис. 2). Наложим дополнительное ограничение на ускорение поршня $|dg/dt| \leqslant K$ (K — заданная константа) и запишем его в виде равенства, введя новую переменную $\beta(t)$:

$$L_8 \equiv \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 - K^2 + \beta^2(t) = 0. \tag{7}$$

Вариационный анализ рассматриваемой экстремальной задачи проведем путем построения и исследования первой вариации функционала (6) методом множителей Лагранжа. Построим вспомогательный функционал J, в который наряду с J_0 включим все связи (1), (3)—(5), (7) с соответствующими множителями $\eta_i(t, \xi)$, $i = 1, \ldots, 4$; $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$:

$$J = J_0 + \int\int_G [\eta_1(t,\ \xi) L_1 + \ldots + \eta_4(t,\ \xi) L_4]\, dt d\xi +$$

$$+ \int_0^T [\lambda_1(t) L_5 + \lambda_2(t) L_8]\, dt + \int_0^T [\mu_1(t) L_6 + \mu_2(t) L_7]\, dt.$$

Предполагая множители Лагранжа непрерывными функциями своих аргументов, применяя правила техники варьирования и проведя ряд

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

преобразований аналогично тому, как это делается, например в [3], получим следующую развернутую форму для первой вариации δJ вспомогательного функционала:

$$\delta J = \int_G \int \left\{ \left(\eta_1 s_x \frac{\partial p}{\partial \xi} + u s_x \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta_4}{\partial t} \right) \delta x + \right.$$

$$+ \left[\eta_3 \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial (\eta_1 s)}{\partial \xi} - \varepsilon_p \frac{\partial \eta_3}{\partial t} \right] \delta p + \left(s \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} - \eta_4 - \frac{\partial \eta_1}{\partial t} \right) \delta u -$$

$$\left. - \left[\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \frac{\partial (\eta_3 p)}{\partial t} + \varepsilon_v \frac{\partial \eta_3}{\partial t} \right] \delta v \right\} dt d\xi + \int_0^T \left\{ \left[- 2 \frac{d}{dt} \left(\lambda_2 \frac{dg}{dt} \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \lambda_1 - 2 \varkappa g + \eta_2 s \right] \delta g + \lambda_2 \delta \beta^2 + \left(\eta_2 s_x g - \frac{d \lambda_1}{dt} \right) \delta x - \eta_1 s \delta p \right\}_{\xi = -1} dt +$$

$$+ \int_0^T \left[\left(- \eta_2 s_x u - \mu_1 \sigma p s_x - \frac{d \mu_2}{dt} \right) \delta x + \left(- \eta_2 s - \frac{d \mu_1}{dt} - \mu_2 \right) \delta u + \right.$$

$$\left. + (\eta_1 s - \mu_1 \sigma s p) \delta p \right]_{\xi = 0} dt + \int_{-1}^{0} [\eta_1 \delta u + \eta_4 \delta x + \eta_3 \varepsilon_p \delta p + (\eta_2 + \eta_3 \varepsilon_v +$$

$$+ \eta_3 p) \delta v]_{t=T} d\xi - \{ [p(T, 0) - p_0(T)]^2 + \varkappa g^2(T) \} \Delta T + \lambda_1 \delta x (T, -1) +$$

$$+ 2 \lambda_2 (T) \frac{dg(T)}{dt} \delta g(T) + \mu_1 (T) \Delta u (T, 0) -$$

$$- \left[\mu_1 (T) \frac{du(T, 0)}{dt} + \mu_2 (T) u (T, 0) \right] \Delta T. \qquad (8)$$

Здесь ΔT — приращение времени процесса $\varepsilon_p = \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial p}$; $\varepsilon_v = \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial v}$;

$s_x = ds/dx$; учтено, что при $t = 0$ $\delta x = \delta u = \delta p = \delta v = 0$, полное приращение $\Delta x(T, 0) = 0$, а также очевидная связь между полным приращением $\Delta \varphi$ произвольной функции $\varphi(t)$ и ее вариацией $\delta \varphi$ в конечный момент времени $\Delta \varphi = \delta \varphi - (d\varphi/dt) \Delta T$.

Необходимое условие стационарности целевого функционала $\delta J = \delta J = 0$. Для обеспечения этого воспользуемся произволом множителей Лагранжа и выберем их такими, чтобы исчезли выражения перед вариациями параметров течения в интегралах (8). В результате получим систему дифференциальных уравнений относительно $\eta_i(t, \xi)$, $i = 1, \ldots, 4$, которую после некоторых преобразований можно представить в виде

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - s \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} - \eta_4 = 0;$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{p + \varepsilon_v}{\varepsilon_p} \frac{\partial (\eta_1 s)}{\partial \xi} = 0; \qquad (9)$$

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial t} - \left(\eta_1 \frac{\partial p}{\partial \xi} + u \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} \right) s_x = 0;$$

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial t} + \frac{1}{p + \varepsilon_v} \frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{\eta_3}{\varepsilon_p} \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Для множителей $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ при $\xi = 0$ будем иметь

$$\begin{cases} \eta_2 s_x u + \mu_1 \sigma s_x p + \dfrac{d\mu_2}{dt} = 0; \\ \eta_2 s + \mu_2 + \dfrac{d\mu_1}{dt} = 0; \\ \eta_1 s - 2(p - p_0) - \mu_1 \sigma s = 0 \end{cases} \tag{10}$$

с конечными условиями, определяемыми из требования равенства нулю выражений перед ΔT и $\Delta u(T, 0)$:

$$\mu_1(T) = 0, \ \mu_2(T) = -\frac{[p(T, 0) - p_0(T)]^2 + \varkappa g^2(T)}{u(T, 0)}. \tag{11}$$

Аналогично при $\xi = -1$

$$\begin{cases} 2\lambda_2 \dfrac{d}{dt}(\lambda_2 dg/dt) + \lambda_1 + 2\varkappa g - \eta_2 s = 0; \\ \lambda_2 \delta\beta^2 = 0; \\ -\dfrac{d\lambda_1}{dt} + \eta_2 s_x g = 0, \end{cases} \tag{12}$$

$$\eta_1(t, -1) = 0. \tag{13}$$

Если $\delta\beta^2 \neq 0$, то есть имеет место внутренний экстремум, $\beta \neq 0$. тогда выберем $\lambda_2(t) = 0$, $\lambda_1(t)$ найдется из решения третьего уравнения в (12) с конечным условием $\lambda_1(T) = 0$. Следовательно, условие

$$\lambda_1(t) + 2\varkappa g(t) - \eta_2(t, -1)s = 0; \ \xi = -1 \tag{14}$$

является необходимым условием внутреннего экстремума функционала (6). Если $\delta\beta^2 = 0$, то есть реализуется краевой экстремум $\beta = 0$.

$$\left|\frac{dg}{dt}\right| = K, \tag{15}$$

тогда $\lambda_1(t)$ выбирается по-прежнему, $\lambda_2(t)$ — как решение первого уравнения в (12) при $\lambda_2(T) = 0$. Кроме того, в (8) полагаем

$$\eta_1(T) = \eta_2(T) = \eta_3(T) = \eta_4(T) = 0. \tag{16}$$

Таким образом, оптимальный закон движения поршня должен удовлетворять условиям (14) или (15), определенным на решениях новой краевой задачи для системы (9) с конечными (16) и граничными (10), (11), (13) условиями. Анализ сопряженной системы (9) показывает, что она является линейной системой гиперболического типа, заданной на решениях исходной системы (1), и для уравнения состояния

$$\varepsilon = \frac{pv}{\gamma - 1}, \tag{17}$$

где γ — отношение удельных теплоемкостей, имеет следующие характеристики:

$$c^0 : \frac{d\xi}{dt} = 0; \ c^+ : \frac{d\xi}{dt} = \frac{sa}{v}; \ c^- : \frac{d\xi}{dt} = -\frac{sa}{v}; \ (a^2 = \gamma pv). \tag{18}$$

Вдоль них выполняются соотношения:

$$c^0 : \frac{us_x}{s}\frac{d\eta_1}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt} = \frac{us_x}{s}\eta_4 - \eta_1 s_x \frac{\partial p}{\partial \xi};$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$\frac{d\eta_2}{dt}+\frac{a^2}{(\gamma-1)v}\frac{d\eta_3}{dt}=-\eta_3\frac{\partial p}{\partial t};$$

$$c^+:\ \frac{a}{v}\frac{d\eta_1}{dt}-\frac{d\eta_2}{dt}=\frac{a}{v}\eta_4-\frac{a^2}{v^2}\eta_1 s_x\frac{\partial x}{\partial\xi}; \qquad (19)$$

$$c^-:\ \frac{a}{v}\frac{d\eta_1}{dt}+\frac{d\eta_2}{dt}=-\frac{a}{v}\eta_4+\frac{a^2}{v^2}\eta_1 s_x\frac{\partial x}{\partial\xi}.$$

Система сопряженных уравнений получена в предположении непрерывности множителей Лагранжа во всей области G. Условия (10), (11), показывают, что в точке $c(T, 0)$ имеет место разрыв множителя η_1, и, следовательно, сопряженная краевая задача неразрешима в классе непрерывных функций. Отметим, что задачи с разрывными множителями Лагранжа при непрерывных и непрерывно-дифференцируемых параметрах течения часто встречаются в вариационных задачах сверхзвуковой газодинамики. Впервые на это обстоятельство обратил внимание А. Н. Крайко. Выкладки, проведенные с учетом линий разрыва η_i для системы (9), показывают, что линиями разрыва служат характеристики (18), и вдоль них выполняются условия следующего вида:

$$c^0:\ [\eta_1]=[\eta_2]=0;$$

$$c^+:\ [\eta_2]+\frac{a}{v}[\eta_1]=0,\ [\eta_4]-\frac{us_x}{s}[\eta_1]=0,\ [\eta_1]-\frac{a}{\gamma-1}[\eta_3]=0; \qquad (20)$$

$$c^-:\ [\eta_2]-\frac{a}{v}[\eta_1]=0,\ [\eta_4]-\frac{us_x}{s}[\eta_1]=0,\ [\eta_1]+\frac{a}{\gamma-1}[\eta_3]=0,$$

где $[\eta_i]$, $i=1, \ldots, 4$, означает скачок величины η_i на разрыве. При анализе распространения разрыва необходимо совместно рассматривать (18)—(20). Как видно из (20), вдоль c^0 могут терпеть разрыв только η_3 и η_4. Интегрируя первое и второе уравнения в (19) вдоль c^0 и учитывая, что $[\eta_1]=[\eta_2]=0$, получим

$$[\eta_4]=\frac{s_{0^*}}{s}[\eta_4]_{0^*},\ [\eta_3]=(p_{0^*}/p)^{\gamma-1/\gamma}[\eta_3]_{0^*},$$

где 0^* — любая точка на c^0. Так как при $t=T[\eta_3]=[\eta_4]=0$, то и всюду в области течения отсутствуют скачки η_3 и η_4. Все приведенные выше рассуждения предполагали непрерывную дифференцируемость функции $g(t)$. Если теперь предположить наличие угловых точек $g(t)$, то варьирование последних приводит к дополнительным слагаемым в (8):

$$\delta J=\ldots+\sum_i(\lambda_{1i}^- -\lambda_{1i}^+)\delta x_i+\sum_i[\lambda_{2i}^-(dg/dt)_i^- -\lambda_{2i}^+(dg/dt)_i^+]\delta g_i,$$

где i — номер точки излома, верхние индексы $+$ и $-$ соответствуют величинам по разные стороны угловой точки. Отсюда следует условие, которое должно выполняться в угловых точках в оптимальном случае

$$\lambda_{1i}^-=\lambda_{1i}^+,\ \lambda_{2i}^-(dg/dt)_i^-=\lambda_{2i}^+(dg/dt)_i^+. \qquad (21)$$

Для $s(x)=\text{const}$ система сопряженных уравнений (9), конечные и граничные условия (10)—(13) примут вид

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta_1}{\partial t} - \dfrac{\partial \eta_2}{\partial t} = 0; \\ \dfrac{\partial \eta_2}{\partial t} - \dfrac{a^2}{v^2}\dfrac{\partial \eta_1}{\partial \xi} = 0; \\ \dfrac{\partial \eta_2}{\partial t} + \dfrac{a^2}{v^2}\dfrac{\partial \tilde{\eta}_3}{\partial t} + \dfrac{\gamma}{v}\eta_3\dfrac{\partial p}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{22}$$

где $\eta_3 = \eta_3 \varepsilon_p$. Первые два уравнения можно рассматривать независимо от третьего, что является следствием неизэнтропичности течения

$$\eta_1(T, \xi) = \eta_2(T, \xi) = 0, \ \eta_1(t, -1) = 0,$$

$$\xi = 0; \ \frac{\partial \eta_1}{\partial t} = -\sigma\eta_2 + 2\frac{\partial (p - p_0)}{\partial t} + \sigma\left[\frac{(p-p_0)^2 + \varkappa g^2}{u}\right]_c,$$

$$\eta_1(T, 0) = 2(p - p_0)_c.$$

Индекс c означает точку c области интегрирования $absd$. Необходимое условие внутреннего экстремума

$$\eta_2(t, -1) - 2\varkappa g(t) = 0. \tag{23}$$

Конечные и граничные условия таковы, что они определяют тривиальное решение в области $hcdh$ (см. рис. 2), где ch — замыкающая характеристика. Учитывая соотношения на характеристиках (19) и линиях разрыва (20), можно получить аналитические выражения для η_1 и η_2 на ch и использовать их в качестве граничных условий для системы (22). Из условия стационарности (23) следует, что в точках разрыва $\eta_2(t, -1)$ функция $g(t)$ также должна терпеть разрыв, в частности, для участка $t > t_h$, если не ограничивать ускорение, то поршень следует мгновенно остановить в момент t_h, на поршне в это время образуется центрированная волна разрежения, которая, однако, не влияет на давление на метаемом теле. Так как мы рассматриваем непрерывные функции $g(t)$, то, следовательно, в точках разрыва должен реализовываться краевой экстремум. В общем случае структура оптимального решения должна содержать угловые точки, в которых осуществляется переход с внутреннего экстремума на краевой. На рис. 3 схематично изображена возможная структура оптимального решения, когда длина канала такова, что имеют место два отражения разрыва η_2 на границе $\xi = -1$. Если учесть условие (21) и (12), то можно получить связь между координатами начала и конца участков краевого экстремума. Решение рассматриваемой вариационной задачи зависит, в первую очередь, от задания течения при $t = 0$, функции $p_0(t)$ и коэффициента $\varkappa$. В общем случае найти оптимальное решение можно лишь численно, однако, используя некоторые упрощения, можно найти частные решения сформулированных задач, которые полезны при апробировании численных методов. Выделим два предельных случая, соответствующих решениям при $\varkappa = 0$ и $\varkappa \to \infty$. В первом случае мы не требуем минимизации кинетической энергии поршня, во втором — наоборот, требуется минимизировать ее за счет любых потерь по первому слагаемому в функционале, поэтому здесь оптимальным будет случай неподвижного левого поршня, то есть $g(t) = 0$ для $0 \leqslant t \leqslant T$. Если положить $\varkappa = 0$ и не задавать ограничение на ускорение, то условие оптимальности будет иметь вид $\eta_2(t, -1) = 0$, следовательно, в точке h, а зна-

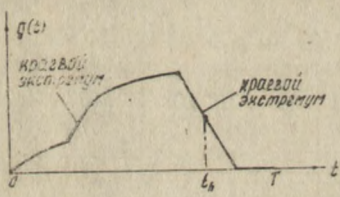

Рис. 3

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

чит, и в точке c, $\eta_1 = \eta_2 = 0$, то есть $p(T) = p_0(T)$, давление на метаемом теле должно совпадать в момент $t = T$ с заданным. В частности, если существует такое управление $g(t)$, которое обеспечивает во все время выполнение условия $p(t, 0) = p_0(t)$, то это особое управление обеспечивает точное попадание в нуль функционала. Подобные задачи относятся к классу вырожденных [4], оптимальное решение при этом определяется неоднозначно, вообще говоря, в то время, как сопряженная система имеет тривиальное решение $\eta_1 = \eta_2 = 0$ во всей области течения. Для функции указанного класса задача, по-существу, перестала быть оптимальной и превратилась в задачу определения любого допустимого управления, реализующего точное попадание решения на границе в заданную функцию. Задачу нетрудно сделать оптимальной, вводя в функционал дополнительное слагаемое $\varkappa g^2(t)$. Укажем некоторые частные особые решения вариационой задачи. Следуя [2], можно получить для канала $s(x) = \text{const}$ при заданном начальном фоне течения $t = 0$ $u(0, \xi) = 0$, $v(0, \xi) = 1$, $p(0, \xi) = \sigma p_0(1/\delta - \xi)$ частное решение вида $u(t, \xi) = \sigma p_0 t$, $p(t, \xi) = \sigma p_0(1/\delta - \xi)$, $v(t, \xi) = 1$, которое определяет однородное течение газа между двумя поршнями, движущимися с одинаковой скоростью, то есть $g(t) = \sigma p_0 t$, и во все время на метаемом поршне поддерживается постоянное давление, равное начальному давлению газа на поршень. Для канала переменного сечения вида $s(x) = 1/(1 + \alpha x)$, $\alpha > 0$ в [2] найдено следующее частное решение с постоянным давлением газа на метаемом поршне

$$u(t, \xi) = \frac{1}{\alpha}\Phi'(t)\, e^{\alpha\xi};\ p(t, \xi) = p_0\left[1 + \frac{\sigma}{2\alpha}(1 - e^{2\alpha\xi})\right];$$

$$v(t, \xi) = 1;\ \Phi'(t) = \sqrt{2\alpha\sigma p_0 \ln \Phi(t)}.$$

Приведенные решения могут использоваться в качестве тестовых для задания фона течения при апробировании приближенных численных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. — М.: Наука, 1971. — 856 с.

2. Комаровский Л. В. Аналитическое решение задачи об ускорении поршня в канале переменного сечения в случае неизэнтропического расширения газа. — Труды НИИ ПММ при ТГУ. Томск, 1974, т. 4, с. 123—132.

3. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики. — М.: Наука, 1979. — 448 с.

4. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. — М.: Наука, 1975. — 480 с.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА СГЛАЖИВАНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТА ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ В СХЕМЕ ЛАКСА-ВЕНДРОФФА ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. В. Жаровцев

Как правило, в разностных схемах сквозного счета, аппроксимирующих уравнения газовой динамики, имеется одна или несколько констант со своей областью определения, например число Куранта, коэффициент искусственной вязкости, параметр сглаживания и т. д. При проведении численных расчетов эти константы подбираются обычно экспериментальным путем, то есть проводится серия пробных расчетов исходной или тестовой задач и выбираются те значения свободных параметров, при которых получились наиболее приемлемые результаты. С другой стороны, на разностные уравнения, используемые для расчета течений газа, кроме аппроксимации и устойчивости часто накладываются дополнительные требования. Так, в [1] строятся полностью консервативные схемы, в [2] разностные уравнения удовлетворяют той же группе преобразований, что и исходная система дифференциальных уравнений, в [3] рассматриваются схемы с неотрицательно определенными матрицами и т. д. В данной работе имеющийся произвол в выборе параметра сглаживания и коэффициента запаса устойчивости используется для того, чтобы двухшаговая схема Лакса-Вендроффа с согласованным сглаживанием в некотором смысле приближалась к схемам с положительной аппроксимацией.

Для численного интегрирования одномерных уравнений газовой динамики в массовых лагранжевых переменных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0 \tag{1}$$

запишем на равномерной по пространственной координате разностной сетке двухшаговую схему Лакса-Вендроффа [4]:

$$\varphi_{i+0,5}^{n+0,5} = 0{,}5\,(\varphi_{i+1}^{n} + \varphi_{i}^{n}) - \frac{\Delta t}{2\Delta \xi}\,(\psi_{i-1}^{n} - \psi_{i}^{n});$$

$$\varphi_{i}^{n+1} = \varphi_{i}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta \xi}\,(\psi_{i+0,5}^{n+0,5} - \psi_{i-0,5}^{n+0,5}). \tag{2}$$

Здесь $\varphi = (u,\ v,\ E)^T$ $\psi = (p;\ -u,\ pu)^T$; t — время; ξ — массовая лагранжева координата; u — скорость; p — давление; v — удельный объем; $E = e + 0{,}5\,u^2$ — полная, а $e = e\,(p,\ v)$ — внутренняя энергия единицы массы газа; Δt и $\Delta \xi$ — шаги по времени и по пространственной координате.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Для подавления нефизических осцилляций, которые появляются, если по схеме (2) рассчитывать разрывные течения, будем использовать согласованное сглаживание по n-му слою, предложенное в [5]:

$$\bar{\varphi}_i^{n+1} = \varphi_i^{n+1} + D^*\varphi_i^n,$$

где $D^*\varphi_i^n = f^*_{i+0,5} - f^*_{i-0,5}$;

$$f^*_{i+0,5} = \begin{cases} f^n_{i+0,5}, & \text{если } (\Delta v^n_{i+1,5} \cdot \Delta v^n_{i+0,5} < 0)\ V\ (\Delta v^n_{i+0,5} \cdot \Delta v^n_{i-0,5} < 0); \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$f^n_{i+0,5} = \Theta \Delta \varphi^n_{i+0,5} = \Theta\,(\varphi^n_{i+1} - \varphi^n_i);$$

$\Theta > 0$ параметр сглаживания, значение которого будет определено ниже.

Для этого рассмотрим линейное приближение системы (1)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0;\ A = \begin{bmatrix} 001 \\ -100 \\ a_0^2 00 \end{bmatrix};\ U = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix}, \tag{4}$$

которое получается в предположении постоянства массовой скорости звука, т. е.

$$a_0 = \frac{e_v + p}{e_\rho} = \text{const}.$$

Двухшаговую схему Лакса-Вендроффа для (4) со сглаживанием (3), если обозначить через E единичную матрицу, можно записать в виде

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \left(\frac{\Delta t}{2\Delta\xi} A + \frac{\delta - \eta}{2} E\right)(U^n_{i+1} - U^n_{i-1}) +$$

$$+ \left(\frac{\Delta t^2}{2\Delta\xi^2} A^2 + \frac{\eta + \delta}{2} E\right)(U^n_{i+1} - 2U^n_i + U^n_{i-1}), \tag{5}$$

где при $\delta = \eta = 0$, $\delta = \eta = \Theta$; $\delta = 0$, $\eta = \Theta$; $\eta = 0$, $\delta = \Theta$ реализуются все четыре варианта схемы Лакса-Вендроффа с неоднородным сглаживанием. Далее будем пользоваться следующим обозначением $\mu = a_0 \Delta t/\Delta\xi$.

Найдем методом Фурье необходимые условия устойчивости схемы (5), когда $\eta = \delta = \Theta$. Для этого положим

$$U_j^n = \rho^n \xi^j U_0;\ \xi = \exp(i\Delta\xi\kappa);\ \rho = \exp(\omega\Delta t),\ \alpha = \Delta\xi \cdot \kappa,$$

k — вещественное число, а ω — комплексное число. После подстановки в (5) имеем следующее соотношение:

$$\left[(\rho - 1)E + i\frac{\Delta t}{\Delta\xi} A \sin\alpha + 2\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta\xi^2} A^2 + 2\Theta E\right)\sin^2\frac{\alpha}{2}\right] U_0 = 0.$$

Отсюда получаем характеристическое уравнение

$$\left(\rho - 1 + 4\Theta \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\left\{\left[\rho - 1 + 2(\mu^2 + 2\Theta)\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]^2 - (i\mu\sin\alpha)^2\right\} = 0,$$

корни которого имеют вид

$$\rho_1 = 1 - 4\Theta\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\rho_{2,3} = 1 - 2(\mu^2 + 2\Theta)\sin^2\frac{\alpha}{2} \pm i\mu\sin\alpha.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Легко видеть, что $|\rho_i|^2 \leqslant 1$, $(i = 1, 2, 3)$, если

$$\mu^2 + 2\theta \leqslant 1, \ \theta \leqslant 0{,}5. \tag{6}$$

Перепишем теперь (5) в виде

$$U_i^{n+1} = BU_i^n + CU_{i+1}^n + DU_{i-1}^n, \text{ где}$$

$$B = (1 - \eta - \delta)E - \frac{\Delta t^2}{\Delta \xi^2} A^2; \ C = \eta E - \frac{\Delta t}{2\Delta \xi} A + \frac{\Delta t^2}{2\Delta \xi^2} A^2;$$

$$D = \delta E + \frac{\Delta t}{2\Delta \xi} A + \frac{\Delta t^2}{2\Delta \xi^2} A^2.$$

Собственные значения матриц B, C, и D равны

$$\lambda_1(B) = 1 - \eta - \delta, \ \lambda_{2,3}(B) = 1 - \eta - \delta - \mu^2;$$

$$\lambda_1(C) = \eta, \ \lambda_{2,3}(C) = \frac{\mu^2}{2} + \eta \pm \frac{\mu}{2};$$

$$\lambda_1(D) = \delta, \ \lambda_{2,3}(D) = \frac{\mu^2}{2} + \delta \pm \frac{\mu}{2}.$$

Условия неотрицательности матриц B, C, и D позволяют в силу теоремы Фридрихса [6], когда $\eta = \delta = \Theta$, получить достаточные условия устойчивости схемы (5), поскольку известно, что система (4) допускает симметризацию.

Рассмотрим случай, когда $\eta = \delta = \Theta = \nu(\mu - \mu^2)$, где ν — положительное вещественное число. Тогда из (6) и (7) получаются следующие необходимые и достаточные условия устойчивости схемы (5):

$$\mu \leqslant 1, \ 0{,}5 \leqslant \nu \leqslant 1.$$

Заметим, что при $\nu = 0{,}5$ (5) совпадает со схемой С. К. Годунова [7]. Если $\delta = \eta = \Theta = \text{const}$, необходимые и достаточные условия устойчивости схемы (5) будут такими:

$$\mu \leqslant \sqrt{1 - 2\theta}; \ 0{,}125 \leqslant \theta \leqslant 0{,}5.$$

В многочисленных расчетах по схеме (2), когда $\Theta = \text{const}$, шаг по времени выбирался из соотношения

$$\Delta t = \min_i \beta \frac{\Delta t}{a_i^n} \sqrt{1 - 2\Theta},$$

где a — массовая скорость звука; $0 < \beta < 1$ — коэффициент запаса устойчивости.

Как видно из (7), остальные три варианта разностной схемы (5) являются схемами с отрицательно определенными матрицами, поэтому естественно использовать произвол в выборе Θ и β таким образом, чтобы в некотором смысле приблизить эти варианты к схемам с положительной аппроксимацией. В качестве меры близости возьмем в отличие от [8] и [9] модуль суммы отрицательных собственных значений матриц B, C и D, который обозначим через λ. Независимо от того, какой из вариантов разностной схемы (5) реализуется в рассматриваемой точке разностной сетки, λ имеет общий множитель $(\mu - \mu^2)$, зависящий от β и Θ, так как из (8) следует, что при расчетах

$$\mu = \beta \sqrt{1 - 2\Theta}.$$

Для практических расчетов представляет интерес случай, когда $\beta \simeq 1$; $\Theta = 0{,}125$.

Очевидно, что подобным образом мера близости к схемам с положительной аппроксимацией может быть определена для любой явной

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

разностной схемы, аппроксимирующей уравнения гиперболического типа.

Проведенные выше рассуждения справедливы только для линейных разностных уравнений (5). Для нелинейной разностной схемы (2) со сглаживанием (3) сделанные выводы проверялись на решениях тестовой задачи о движении по покоящемуся газу стационарной ударной волны, которая образуется, если в трубу, заполненную газом, вдвигать с постоянной скоростью поршень [1]. Газ считается идеальным ($\gamma=1{,}4$). Задача решалась в безразмерных переменных, в которых вид системы (1) не меняется, причем за основные были выбраны начальная скорость звука в газе, начальный удельный объем и начальная длина

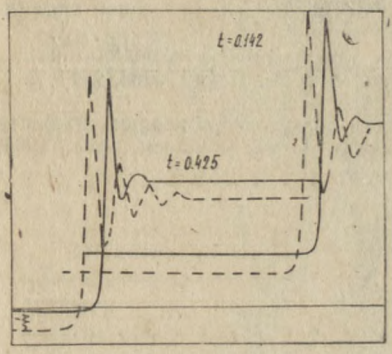

Рис. 1

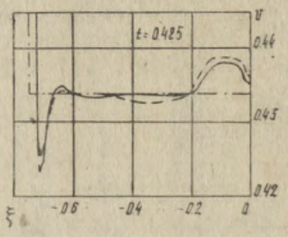

Рис. 2

трубы. Распределения некоторых искомых функций по массовой координате в фиксированные моменты времени представлены на рис. 1—3, причем сплошные кривые соответствуют расчетам, когда $\beta=0{,}9$, а штриховые — когда $\beta=0{,}5$, штрих-пунктирные линии — это точное решение задачи. На рис. 1 нанесены профили давлений, когда $\Theta=0$. Отметим, что кривые на этом рисунке сознательно смещены относительно друг друга, и если совместить штриховые и сплошные линии для одинаковых моментов времени, то видно, что осцилляции в распределении давления за фронтом ударной волны при $\beta=0{,}9$ меньше, чем при $\beta=0{,}5$. Это можно объяснить тем, что схема Лакса—Вендроффа без сглаживания в рассмотренном выше смысле ближе к схемам с положительной аппроксимацией при $\beta=0{,}9$, чем при $\beta=0{,}5$.

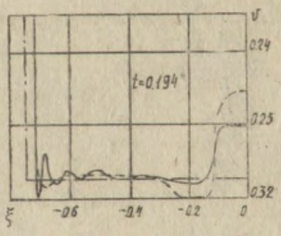

Рис. 3

На рис. 2—3 представлены профили удельного объема за фронтом ударной волны, когда $\Theta=0{,}125$, причем данные, приведенные на рис. 2, соответствуют расчетам, когда поршень вдвигается в трубу со скоростью, равной начальной скорости звука в газе, а на рис. 3 — трем начальным скоростям звука.

Как видно из рисунков, результаты расчетов со сглаживанием, когда $\beta=0{,}5$ и $\beta=0{,}9$ практически одинаковы, т. е. в этих случаях, по-видимому, реализуются варианты схемы, линейные аналоги которых являются схемами с неотрицательными матрицами.

Проведенные расчеты позволяют сделать заключение о том, что выводы, полученные для линейных разностных уравнений (по крайней мере на рассмотренном классе течений газа), справедливы и для нелинейной разностной схемы (2) с согласованным сглаживанием (3).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука, 1980. — 352 с.

2. Шокин Ю. И. Метод дифференциального приближения. — Новосибирск: Наука, 1973. — 222 с.

3. Холодов А. С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа. — Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1978, т. 18, № 6, с. 1476—1492.

4. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980. — 616 с.

5. Жмакин А. И., Фурсенко А. А. Об одной монотонной разностной схеме сквозного счета. — Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, № 4, с. 1021—1031.

6. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978. — 688 с.

7. Годунов С. К. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976. — 400 с.

8. Куропатенко В. Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики. — В кн.: Труды математического института им. В. А. Стеклова. М.: Наука, 1966, т. 74, ч. 1, с. 107—137.

9. Холодов А. С. О построении разностных схем повышенного порядка точности для уравнений гиперболического типа. — Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, № 6, с. 1601—1620.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СЛИЯНИЯ ВЯЗКИХ КАПЕЛЬ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Г. Р. Шрагер, В. А. Якутенок

Задача о слиянии двух вязких капель под действием сил поверхностного натяжения рассматривалась Я. И. Френкелем [1]. Им исследованы два предельных случая, касающихся поведения поверхности сливающихся капель в начальной и конечной стадии процесса. Экспериментальному исследованию процесса слияния вязких капель под действием сил поверхностного натяжения посвящена работа Я. Е. Гегузина [2], в которой представлены результаты по слиянию капель эпоксидной смолы и обсуждается кинетика слияния на всех стадиях процесса. До настоящего времени нет результатов, достаточно полно описывающих картину течения в процессе слияния, кинетику слияния в широком диапазоне изменения определяющих параметров.

В настоящей работе предлагается алгоритм решения данной задачи и приводятся результаты расчетов.

1. Рассматривается процесс слияния двух вязких капель под действием сил поверхностного натяжения, в предположении, что течение имеет осевую симметрию. В начальный момент времени капли имеют сферическую форму, за исключением окрестности контактного перешейка, которая является поверхностью вращения дуги, соприкасающейся с каплями окружности с задаваемым радиусом. Используется сферическая система координат, связанная с каплями так, что начало координат совпадает с центром контактного перешейка, а полярная ось направлена по оси симметрии. Уравнения Навы—Стокса, описывающие течения внутри капель,

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-2\frac{v_r}{r^2}-\frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2}v_\theta\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial_r v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}=-\frac{1}{\rho_r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\frac{\nu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\right. \qquad (2)$$
$$\left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right),$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

где r — радиальная координата; θ — полярный угол; v_r, v_θ — составляющие скорости; p — давление; μ — коэффициент вязкости, ρ — плотность.

К уравнениям движения присоединяется уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r} + \frac{2v_r}{r} = 0. \tag{3}$$

На свободной поверхности жидкости, граничащей с неподвижной средой, используются условия

$$p_{nn} = -p_0 + \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \tag{4}$$

$$p_{ns} = 0. \tag{5}$$

Здесь p_{nn} — нормальное напряжение на свободной поверхности; p_{ns} — касательное напряжение на свободной поверхности; σ — коэффициент поверхностного напряжения; r_1, r_2 — радиусы главных кривизн границы капель. Кроме перечисленных условий, граница капель подчиняется кинематическому условию

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{r}, \quad \frac{dr}{dt} = v_r. \tag{6}$$

На осях симметрии ($\theta = 0$, $\theta = \pi/2$) используем условия симметрии.

В качестве начальных условий принимаем равенство нулю составляющих скорости. Из уравнений (1), (2) с учетом (3) получаем уравнение Пуассона для давления

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{2\rho}{r}\left[\frac{\partial v_r}{dr}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \right. \tag{7}$$

$$\left. - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\operatorname{ctg}^2\theta\right) - v_r\left(\frac{v_r}{r} - \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r}\right)\right].$$

Вместо уравнений (1)—(3) для решения задачи будем использовать уравнения (1), (2), (7). Для эквивалентности решения используемой системы уравнений решению исходной системы требуем выполнения уравнения неразрывности на границах [3].

2. Условия (4), (5) записываются в локальной декартовой системе координат, связанной со свободной границей капель:

$$-p + 2\mu\frac{\partial v_n}{\partial n} = -p_0 + \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \tag{8}$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} = 0, \tag{9}$$

где v_n — нормальная составляющая скорости; v_s — касательная составляющая скорости.

Уравнение неразрывности в локальной декартовой системе координат на границе капель принимает вид

$$\frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{v_n}{r} + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{v_s}{r} = 0, \tag{10}$$

где φ — угол между нормалью к границе капель и полярной осью. Используя функции

$$Q = v_s + v_n, \quad R = v_s - v_n,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

перепишем условия (9), (10) в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial n}+\frac{\partial Q}{\partial s}+\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{v_n}{r}+\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{v_s}{r}=0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial R}{\partial s}-\frac{\partial R}{\partial n}+\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{v_n}{r}+\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{v_s}{r}=0. \tag{12}$$

В исходной системе координат условия (8), (11), (12) принимают вид

$$b\frac{\partial Q}{\partial r}+\frac{a}{r}\frac{\partial Q}{\partial\theta}+\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{v_n}{r}+\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{v_s}{r}=0, \tag{13}$$

$$\frac{b}{r}\frac{\partial R}{\partial\theta}-a\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{v_n}{r}+\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{v_s}{r}=0, \tag{14}$$

$$-p+2\mu\left(\cos\alpha\frac{\partial v_n}{\partial r}-\frac{\sin\alpha}{r}\frac{\partial v_n}{\partial\theta}\right)=-p_0+\sigma\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right), \tag{15}$$

где

$$\alpha=\theta-\varphi;$$

$$a=\cos\alpha-\sin\alpha;$$

$$b=\cos\alpha+\sin\alpha.$$

В процессе решения задачи производится преобразование координат вида

$$\theta=\theta,\ \xi=\frac{r}{\delta(\theta,\ t)}, \tag{16}$$

где $\delta(\theta, t)$ — функция, описывающая границу капель. В новых координатах граница капель представляет собой окружность единичного радиуса, а уравнения (1), (2), (7) принимают вид

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+c_1\frac{\partial v_r}{\partial\xi}+\frac{v_\theta}{\xi\delta}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{1}{\delta\xi}v_\theta^2=-\frac{1}{\rho\delta}\frac{\partial p}{\partial\xi}+$$

$$+\frac{\mu}{\delta^2\rho}\left(c_2\frac{\partial^2 v_r}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2}-\frac{2\delta_\theta'}{\xi\delta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\xi\partial\theta}+c_3\frac{\partial v_r}{\partial\xi}+\right. \tag{17}$$

$$\left.+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\xi^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{2}{\xi^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+2\frac{\delta_\theta'}{\delta\xi}\frac{\partial v_\theta}{\partial\xi}-\frac{2v_r}{\xi^2}-\frac{2\operatorname{ctg}\theta}{\xi^2}v_\theta\right);$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+c_1\frac{\partial v_\theta}{\partial\xi}+\frac{v_\theta}{\xi\delta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r v_\theta}{\xi\delta}=-\frac{1}{\rho\xi\delta}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{\delta_\theta'}{\rho\delta^2}\frac{\partial p}{\partial\xi}+$$

$$+\frac{\mu}{\delta^2\rho}\left(c_2\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2}-\frac{2\delta_\theta'}{\xi\delta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\xi\partial\theta}+c_3\frac{\partial v_\theta}{\partial\xi}+\right. \tag{18}$$

$$\left.+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\xi^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{2}{\xi^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{2\delta_\theta'}{\delta\xi}\frac{\partial v_r}{\partial\xi}-\frac{v_\theta}{\xi^2\sin^2\theta}\right);$$

$$c_2\frac{\partial^2 p}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2}-\frac{2\delta_\theta'}{\xi\delta}\frac{\partial^2 p}{\partial\xi\partial\theta}+c_3\frac{\partial p}{\partial\xi}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\xi^2}\frac{\partial p}{\partial\theta}=$$

$$=\frac{2\rho}{\xi}\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\xi}-\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\xi}+v_\theta\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\xi}-\frac{v_\theta}{\xi}\operatorname{ctg}^2\theta\right)-\right.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$- v_r\left(\frac{v_r}{\xi} - \frac{\partial v_r}{\partial \xi} + \frac{2v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{\xi}\right)\Bigg], \tag{19}$$

где

$$c_1 = \left(v_r - \frac{v_\theta \delta'_\theta}{\delta}\right)/\delta,$$

$$c_2 = 1 + \frac{\delta'^2_\theta}{\delta^2},$$

$$c_3 = \left(\frac{2\delta'^2_\theta}{\delta^2} - \frac{\delta''_{\theta\theta}}{\delta} + 2 - \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\delta}\delta'_\theta\right)/\xi.$$

Вместо условий (13)—(15) в новых переменных имеем

$$\left(b - \frac{a\delta'_\theta}{\delta}\right)\frac{\partial Q}{\partial \xi} + a\frac{\partial Q}{\partial \theta} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}v_n + \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}v_s = 0, \tag{20}$$

$$-\left(\frac{b\delta'_\theta}{\delta} + a\right)\frac{\partial R}{\partial \xi} + b\frac{\partial R}{\partial \theta} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}v_n + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}v_\xi = 0; \tag{21}$$

$$-p + \frac{2\mu}{\delta}\left[\left(\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\delta}\delta'_\theta\right)\frac{\partial v_n}{\partial \xi} - \sin\alpha\frac{\partial v_n}{\partial \theta}\right] = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - p_0. \tag{22}$$

3. Для решения поставленной задачи используется разностный метод. Расчетная сетка внутри области определяется следующим образом

$$\xi_i = ih_1;\ i = 0,\ldots,\ I;\ h_1 = \frac{1}{I};$$

$$\theta_j = jh_2;\ j = 0,\ldots,\ J;\ h_2 = \frac{\pi}{2J}.$$

Для решения уравнений (17), (18) используются схемы переменных направлений. Уравнение Пуассона (19) решается с помощью метода установления, основанного также на схеме переменных направлений. Для решения разностных уравнений на каждом полушаге используется метод прогонки. Расчет функций Q и R производится по схемам бегущего счета:

$$Q_{I,j}\left[\left(b_j - \frac{a_j\delta'_{\theta j}}{\delta_j}\right)\frac{1}{h_1} + \frac{a_j}{h_2}\right] = \frac{a_j}{h_2}Q_{I,j-1} + \frac{1}{h_1}\left(b_j - \frac{a_j\delta'_{\theta j}}{\delta_j}\right)Q_{I-1,j} -$$

$$- \frac{\sin\varphi_j}{\cos\theta_j}v_{nI,j} - \frac{\cos\varphi_j}{\cos\theta_j}v_{sI,j}, \tag{23}$$

$$R_{I,j}\left[-\frac{b_j}{h_2} - \left(\frac{b_j\delta'_{\theta j}}{\delta_j} + a_j\right)\frac{1}{h_1}\right] = -\frac{b_j}{h_2}R_{I,j+1} -$$

$$-\left(\frac{b_j\delta'_{\theta j}}{\delta_j} + a_j\right)\frac{1}{h_1}R_{I-1,j} - \frac{\sin\varphi_j}{\sin\theta_j}v_{nI,j} - \frac{\cos\varphi_j}{\sin\theta_j}v_{sI,j}. \tag{24}$$

Схемы (23), (24) позволяют устойчивым образом вести расчет $Q_{I,j}$ в направлении возрастания индекса j, $R_{I,j}$ — в направлении убывания индекса j. Поскольку функции в условиях (23), (24) определены в локальной декартовой системе координат, $Q_{I,j-1}$, $R_{I,j+1}$ необходимо

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

пересчитать в систему координат точки (I, j). Формулы пересчета имеют вид

$$\overline{Q}_{I,j-1} = Q_{I,j-1}\cos(\varphi_j - \varphi_{j-1}) + R_{I,j-1}\sin(\varphi_j - \varphi_{j-1}), \qquad (25)$$

$$\overline{R}_{I,j+1} = R_{I,j+1}\cos(\varphi_{j+1} - \varphi_j) + Q_{I,j+1}\sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j),$$

где

$\overline{Q}_{I,j-1}$, $\overline{R}_{I,j+1}$ — значения функций $Q_{I,j-1}$, $R_{I,j+1}$, пересчитанные в систему координат точки (I, j).

Подстановка пересчитанных значений $Q_{I,j-1}$, $R_{Ij,+1}$ в формулы (23), (24) приводит к необходимости организации итерационного процесса [4]. Общий порядок расчета заключается в следующем.

1) Из разностных аналогов уравнений (19) и (22) рассчитывается давление внутри и на границе расчетной области.

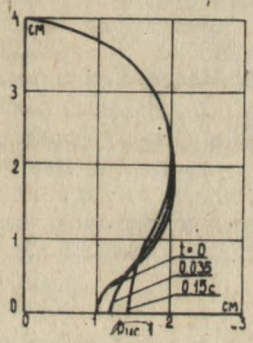

Рис. 1

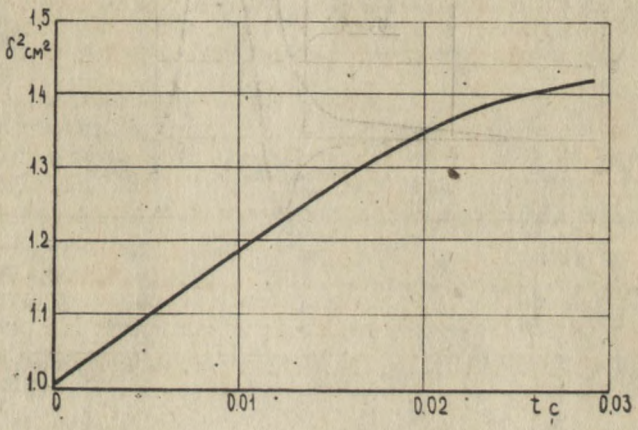

Рис. 2

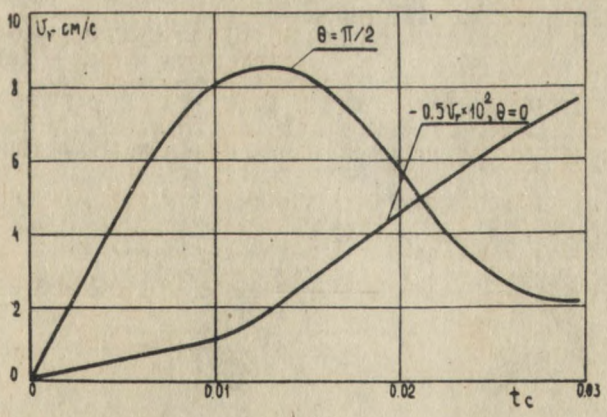

Рис. 3

2) С использованием разностных аналогов уравнений (17) и (18), а также уравнений (23), (24) рассчитываются скорости внутри и на границе области. Для согласования на каждом временном шаге решения уравнений (17), (18) с условиями (23), (24) организуется итерационный процесс.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

3) Из кинематического условия (6) находится новая форма капель.

4. В качестве примера было проведено исследование начального этапа слияния капель ртути. Начальные радиусы сфер имели значение, равное 2 см, радиус соприкасающейся окружности был выбран равным 0,5 см.

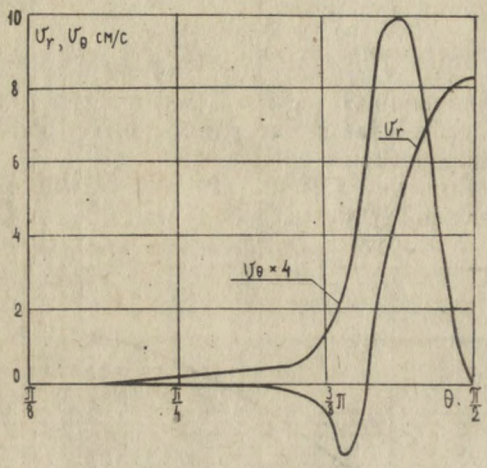

Рис. 4

На рис. 1 представлено изменение формы свободной поверхности в процессе слияния. Поведение площади контактного перешейка с течением времени иллюстрирует рис. 2. В начальный момент зависимость площади контактного перешейка от времени является линейной, далее она приобретает более сложный характер. Такое поведение площади контактного перешейка качественно согласуется с результатами работы [1]. Изменение скоростей в двух характерных точках на свободной поверхности ($\theta=0$, $\theta=\pi/2$) представлено на рис. 3. В точке $\theta=0$ скорость непрерывно растет. В точке $\theta=\pi/2$ (на контактном перешейке) скорость достигает максимального значения, а затем уменьшается. На рис. 4 показано распределение скоростей v_r, v_θ на свободной поверхности, откуда следует, что начальный этап слияния характеризуется интенсивным течением жидкости в области контактного перешейка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И. Вязкое течение в кристаллических телах. — Журнал ЭТФ, 1946, т. 16, вып. 1, с. 29—35.

2. Гегузин Я. Е. Слияние вязких сфер под влиянием сил поверхностного натяжения. — ДАН, 1971, т. 200, № 5, с. 1051—1054.

3. Васенин И. М., Сидонский О. Б., Шрагер Г. Р. Численное решение задачи о движении вязкой жидкости со свободной поверхностью. — ДАН, 1974, т. 217, № 2, с. 295—298.

4. Васенин И. М., Козлобродов А. Н., Шрагер Г. Р. Расчет течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. — Тр. V Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1975, ч. 1, с. 58—69.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

О. П. Кадиев, В. А. Лосев

Важность универсальности как характеристики систем автоматизированного проектирования объясняется широтой области их применения (радиотехника, оптика, трубопроводы, тепловые машины и т. д.).

Дело в том, что система, жестко ориентированная на конкретный объект проектирования, не тиражируется на другие. Более того, даже редактирование такой системы, неизбежное с началом эксплуатации, требует от пользователя серьезных усилий и глубокого понимания ее устройства. Что касается сугубо универсальных систем, то они отягощены наличием этапа генерации (настройка на конкретный объект), необходимостью разработки базы данных и программ, реализующих решение задач пользователя в соответствии с представлением информации в базе данных [1]. Иными словами, от пользователя такой системы требуются знания и действия, выходящие за рамки собственно проектирования.

Тем не менее идея универсальности весьма привлекательна, поскольку, базируясь на существующем единстве форм и методов проектирования, служит основным источником снижения трудозатрат на создание САПР отдельных видов изделий. Поэтому, приняв за неизбежное некоторое увеличение расходов на машинное время, приложим усилия по выбору такой системы, которая была бы в достаточной мере универсальна, но не возлагала на рядового проектировщика обязанностей, ему не свойственных.

Прежде всего откажемся от универсальной базы данных, заменив ее некоторой типовой, рассчитанной на более узкий, хотя и достаточно широкий класс задач. В качестве таковой используется традиционная организация информации, в соответствии с которой данные сведены в так называемые тома, имеющие постраничную и подокументную структуру.

Постраничная организация тома определена однозначно, а подокументная предусматривает наличие лишь трех характерных типов: текст, список, бланк. Что касается многообразия конкретных форм представления данных, то оно обусловлено многообразием используемых форматов (для сравнения: в ФОРТРАНе формирование различных по виду документов обеспечивается единственным оператором FORMAT).

Все последующие шаги по выбору степени универсальности системы жестко увязаны с разложением процесса ее создания на три по-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

следовательных этапа. Наличие первого из них вызвано делением матобеспечения САПР на множество объектно-независимых (инвариантных) и объектно-ориентированных (объектных) подсистем [2]. Инвариантные подсистемы не зависят от проектируемого изделия и связаны через служебные массивы системы. В их числе управляющая программа, процедуры диалога, информационного поиска и ряд других. Объективные подсистемы, напротив, ориентированы на конкретное изделие и работают независимо по отношению друг к другу. Возможность согласованного использования объектных подсистем основывается на применении при их создании принципа модульности — набора требований, обеспечивающих стандартность работы с ними в рамках системы автоматизированного проектирования. Поэтому объектные системы называются еще модулями. Что касается самих требований, то они определяются инвариантной частью матобеспечения. Работа по созданию подсистем САПР выполняется силами ее разработчиков и составляет содержание первого этапа.

Сущность второго этапа заключается в генерации САПР конкретного изделия путем компиляции соответствующего набора модулей и инвариантной составляющей матобеспечения. Процесс этот поддается полной автоматизации, поскольку в силу принципа модульности подключение объектных подсистем выполняется стандартно и не зависит от того, формируется ли система заново или редактируется (замена, вставка, исключение модуля).

Непосредственное содержание генерации составляет дозапись к управляющей программе строки с обращением ко вновь вводимому модулю и передачей управления на системный переключатель, сбор и сортировка относящейся к модулю служебной информации (имена используемых идентификаторов, их физический смысл, размерность и т. п.). Отсюда, в частности, следует, что традиционная классификация управляющей программы как инвариантной подсистемы не совсем верна, поскольку от объекта проектирования не зависит лишь ее структура, но не содержание. Контроль за осуществлением генерации возложен на группу матобеспечения того предприятия, где предполагается использование формируемой САПР.

Третий этап создания системы совпадает по времени с ее эксплуатацией. Его наличие вызвано тем, что до сих пор ее формирование велось по формальным правилам, следовательно, интересы отдельных пользователей (а они различны и даже меняются во времени) не учитывались, поэтому пока что в арсенале проектировщика лишь стандартный набор директив плюс некоторое количество модулей. Этого, однако, вполне достаточно, чтобы указать машине последовательность действий на проведение тех или иных работ, организацию информации и форму ее представления.

Такой последовательности (а по существу, алгоритму проектирования, составленному пользователем на языке директив) может быть присвоено имя, организовано ее хранение, а при необходимости повторный вызов с отправкой на счет. Именно выполнение перечисленных операций (формирование последовательностей и манипулирование ими) помимо операций по просмотру и преобразованию ранее накопленных данных и составляет основное содержание деятельности пользователя в процессе автоматизированного проектирования. Совершенно очевидно, что операции, не связанные с проектированием, в их число не входят. т. е. существует реальная возможность построения системы автоматизированного проектирования, универсальной по характеру, но лишенной традиционных недостатков. Положительный результат достигается заменой универсальной базы данных на типовую, поэтапным подходом к созданию САПР, продуманным распределением обязанно-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

стей между сторонами, участвующими в ее разработке и эксплуатации, автоматизацией процесса генерации и возможностью настройки САПР на конкретного пользователя-проектировщика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фатеев А. Е., Ройтман А. И., Фатеева Т. П. Прикладные программы в системе математического обеспечения ЕС ЭВМ.— М.: Статистика, 1976.— 183 с.
2. Общеотраслевые руководящие материалы по созданию систем автоматизированного проектирования (САПР). — М., 1978. — 46 с.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ЛАГРАНЖА, КОГДА В ОБЛАСТИ ТЕЧЕНИЯ ПРОИСХОДИТ СМЕШЕНИЕ ИЛИ РАЗДЕЛЕНИЕ ПОТОКОВ ГАЗА

В. В. Жолобов, В. В. Ефремов

Точное решение уравнений одномерной газодинамики с линейным распределением скорости [1] можно записать в виде

$$u = \varphi'_{(t)} z;\ p = \varphi''_{(t)} [F_{(z)} - zF'_{(z)}];\ \rho = F''_{(z)}/(b + \varphi_{(t)});$$

$$z = \frac{x + x^0}{b + \varphi_{(t)}} \tag{1}$$

(штрих означает производную по аргументу), при этом $F_{(z)}$ — произвольная функция своего аргумента, а $\varphi_{(t)}$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi'''_{(t)} (b + \varphi_{(t)}) + \gamma \varphi''_{(t)} \varphi'_{(t)} = 0; \tag{2}$$

b, x^0 — произвольные постоянные, остальные обозначения общепринятые. Полагая $u = 0$ при $t = 0$, решение уравнения (2) можно представить в виде

$$t = \int_0^{\varphi} \left\{ \frac{2b\varphi''_{(0)}}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{b}{b + \varphi} \right)^{\gamma - 1} \right] \right\}^{-1/2} d\varphi. \tag{3}$$

Выражая первую и вторую производные от φ через функцию, получим

$$\varphi'_{(t)} = \sqrt{\frac{2b\varphi''_{(0)}}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{b}{b + \varphi} \right)^{\gamma - 1} \right]};\ \varphi''_{(t)} = \varphi''_{(0)} \left(\frac{b}{b + \varphi} \right)^{\gamma}. \tag{4}$$

Соотношения (1), (3) используем для решения задачи о движении поршня под действием давления идеального газа, вытекающего из системы N-параллельных каналов. Будем считать, что канал с площадью поперечного сечения s_0 стыкуется в точке $x = 0$ с N другими каналами, у которых значения площадей сечения равны s_1, s_2, ..., s_N соответственно и $s_0 = \sum_{n=1}^{N} s_n$. Основные условия склеивания потоков 0, 1, .., N, которые являются следствием уравнений газовой динамики установившихся течений идеального газа в интегральной форме, имеют вид

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n s_n \rho_n u_n = 0;$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n s_n (p_n + \rho_n u_n^2) = 0;$$

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n s_n \rho_n h_n u_n = 0, \tag{5}$$

где

$$h = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + u^2; \; \alpha_n = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ -1 & n = 0 \end{cases}; \; u_n > 0. \tag{6}$$

Примем, что удельные теплоемкости результирующего течения аддитивны по массе смешивающихся потоков

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n s_n \rho_n u_n c_{pn} = 0, \; \sum_{n=0}^{N} \alpha_n s_n \rho_n u_n c_{vn} = 0. \tag{7}$$

В случае смешения газов различной природы удельные теплоемкости будут постоянными только вдоль траекторий, то есть

$$c_{v0} = c_{v0}(z_0); \; c_{p0} = c_{p0}(z_0).$$

Примем, что отношение удельных теплоемкостей смеси постоянно во во всем потоке

$$\gamma_0 = \frac{\sum_{n=1}^{N} c_{pn} \rho_n u_n s_n}{\sum_{n=1}^{N} c_{vn} \rho_n u_n s_n} = \text{const}. \tag{8}$$

В этом случае соотношение (1)—(4) будут справедливы и в области результирующего потока. Граничное условие на поршне имеет вид

$$M \frac{d^2}{dt^2} x_\text{п} = sp(x_\text{п}, t); \; \frac{d}{dt} x_\text{п} = u(x_\text{п}, t); \; (x_\text{п} = 0, \; t = 0). \tag{9}$$

Учитывая (1), (9) представим в виде

$$F_0(z_0) - z_0 (M/s_0 + F_0'(z_0)) = 0, \; (z_0 = x_0^0/b_0). \tag{10}$$

Таким образом, для получения частного решения поставленной задачи с помощью соотношений (1), (3) необходимо удовлетворить граничным условиям (5), (6), (8), (9). Пусть

$$y = x^0/(b + \varphi), \; \tilde{F}_{(t)} = F_{(y)} = F_{(z)}|_{x=0}.$$

Зная функцию $F(t)$ и зависимость $t(y)$

$$t = -\int_{x^0/b}^{y} \frac{x^0}{y^2} \left\{ \frac{2b\varphi'_{(0)}}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{b}{x^0} y \right)^{\gamma - 1} \right] \right\}^{-0.5} dy, \tag{11}$$

функцию $F(z)$ получим заменой y на z. Таким образом

$$F_{(z)} = \tilde{F}(t(y))|_{y=z}; \; \frac{d}{dz} F_{(z)} = \frac{d}{dy} \tilde{F}|_{y=z}; \; \frac{d^2}{dz^2} F_{(z)} = \frac{d^2}{dy^2} \tilde{F}|_{y=z}. \tag{12}$$

Переходя к производным по t, получим вместо (12)

$$\frac{d}{dz} F = \frac{d}{dt} \tilde{F} \cdot \frac{dt}{dy}; \; \frac{d^2}{dz^2} F = \frac{d^2}{dt^2} \tilde{F} \cdot \left(\frac{dt}{dy} \right)^2 + \frac{d}{dt} \tilde{F} \cdot \frac{d^2 t}{dy^2},$$

$$t = t(y); \; y = z. \tag{13}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Используя соотношения (13), граничные условия (5), (8) можно представить в виде

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n S_n \varphi_n' x_n^0 \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \tilde{F}_n \cdot \left(\frac{dt}{dy_n} \right)^2 + \frac{d}{dt} \tilde{F}_n \cdot \frac{d^2 t}{dy_n^2} \right\} / (b_n + \varphi_n)^2 = 0;$$

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n S_n \left\{ \varphi_n'(0) \left(\frac{b_n}{b_n + \varphi_n} \right)^{\gamma_n} \left[\tilde{F}_n - \frac{x_n^0}{b_n + \varphi_n} \cdot \frac{d}{dt} \tilde{F}_n \cdot \frac{dt}{dy_n} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{(\varphi_n' x_n^0)^2}{(b_n + \varphi_n)^3} \left[\frac{d^2}{dt^2} \tilde{F}_n \left(\frac{dt}{dy_n} \right)^2 + \frac{d}{dt} \tilde{F}_n \frac{d^2 t}{dy_n^2} \right] \right\} = 0;$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n S_n \varphi_n' x_n^0}{(b_n + \varphi_n)^2} \left\{ \frac{2\gamma b_n \varphi_n'(0)}{\gamma_n - 1} \left(\frac{b_n}{b_n + \varphi_n} \right)^{\gamma_n - 1} \cdot \left(\tilde{F}_n - \frac{x_n^0}{b_n + \varphi_n} \frac{d}{dt} \tilde{F}_n \cdot \frac{dt}{dy_n} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\varphi_n' x_n^0}{b_n + \varphi_n} \right)^2 \cdot \left[\frac{d^2}{dt^2} \tilde{F}_n \left(\frac{dt}{dy_n} \right)^2 + \frac{d}{dt} \tilde{F}_n \cdot \frac{d^2 t}{dy_n^2} \right] \right\} = 0; \qquad (14)$$

$$\sum_{n=1}^{N} S_n \frac{\varphi_n' x_n^0}{(b_n + \varphi_n)^2} \left[\frac{d^2}{dt^2} \tilde{F}_n \left(\frac{dt}{dy_n} \right)^2 + \frac{d}{dt} \tilde{F}_n \cdot \frac{d^2 t}{dy_n^2} \right] (c_{pn} - \gamma_0 c_{vn}) = 0.$$

Для определения $N+1$ функций F_h мы имеем только четыре соотношения (14). Остающийся произвол в $N-3$ функции можно использовать, например, для получения решений в элементарных функциях. Произвольным заданием $N-3$ функций, исходная задача, в математическом плане, сводится к решению задачи Коши для системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений.

При $N = 2$ система (14) в общем случае становится переопределенной, а при смешении газов одинаковой природы сводится к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям и является замкнутой. Частное решение системы (14) при $N = 2$ и $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2$ можно получить, полагая

$$y_1 = \kappa_1 y_0; \; y_1 = \kappa_2 y_0. \qquad (15)$$

Учитывая (15), из (11) получим

$$\frac{b_0}{x_0^0} = \frac{b_1}{x_1^0} \kappa_1; \; \frac{b_0}{x_0^0} = \frac{b_2}{x_2^0} \kappa_2; \; \frac{\varphi_{1(0)}''}{\varphi_{0(0)}''} = \frac{b_1}{b_0} \; ; \; \frac{\varphi_{2(0)}''}{\varphi_{0(0)}''} = \frac{b_2}{b_0}. \qquad (16)$$

Условия (14) принимают вид

$$\frac{d^2}{dy_0^2} \tilde{\Phi}_1 = 0;$$

$$\frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{x_0^0}{b_0} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{b_0}{x_0^0} y_0 \right)^{\gamma - 1} \right] \frac{d^2}{dy_0^2} \tilde{\Phi}_2 + \left(\frac{b_0}{x_0^0} y_0 \right)^{\gamma - 3} \left(\tilde{\Phi}_2 - y_0 \frac{d}{dy_0} \tilde{\Phi}_2 \right) = 0;$$

$$\left(\frac{x_0^0}{b_0} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{b_0}{x_0^0} y_0 \right)^{\gamma - 1} \right] \frac{d^2}{dy_0^2} \tilde{\Phi}_3 + \left(\frac{b_0}{x_0^0} y_0 \right)^{\gamma - 3} \left(\tilde{\Phi}_3 - y_0 \frac{d}{dy_0} \tilde{\Phi}_3 \right) = 0, \qquad (17)$$

где

$$\tilde{\Phi}_1 = \frac{S_1}{\kappa_1} \tilde{F}_1 + \frac{S_2}{\kappa_2} \tilde{F}_2 - S_0 \tilde{F}_0;$$

$$\tilde{\Phi}_3 = \left(\frac{x_1^0}{x_0^0} \right)^2 \frac{S_1}{\kappa_1} \tilde{F}_1 + \left(\frac{x_2^0}{x_0^0} \right)^2 \frac{S_2}{\kappa_2} \tilde{F}_2 - S_0 \tilde{F}_0;$$

$$\tilde{\Phi}_2 = \frac{x_1^0 S_1}{x_0^0 \kappa_1} \tilde{F}_1 + \frac{x_2^0 S_2}{x_0^0 \kappa_2} \tilde{F}_2 - S_0 \tilde{F}_0. \qquad (18)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Общее решение системы (17) записывается следующим образом:

$$\tilde{\Phi}_1 = c_1^1 y_0 + c_1^2;$$

$$\tilde{\Phi}_2 = c_2^1 y_0 + c_2^2 y_0 \int \left[1 - \left(\frac{b_0}{x_0^0} y_0\right)^{\gamma-1}\right]^{-1/2} \cdot \frac{1}{y_0^2}\, dy_0;$$

$$\tilde{\Phi}_3 = c_3^1 y_0 + c_3^2 y_0 \int \left[1 - \left(\frac{b_0}{x_0^0} y_0\right)^{\gamma-1}\right]^{-1/\gamma-1} \cdot \frac{1}{y_0^2}\, dy_0, \qquad (19)$$

где C_j^i $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3)$ — произвольные постоянные.

Подставляя соотношения (19) в (18) и разрешая систему линейных алгебраических уравнений (18), получим решения исходной задачи в квадратурах. Наиболее простое решение можно получить, полагая $C_2^2 = C_3^2 = 0$. В этом случае система. полученная двукратным дифференцированием (18), имеет нетривиальное решение при условии

$$x_1^0 = x_2^0 = x_0^0,$$

а в силу равенств (18) $c_1^2 = 0$; $c_1^1 = c_2^1 = c_3^1 = c_1$;

$$\frac{s_1}{\kappa_1} \tilde{F}_1 + \frac{s_2}{\kappa_2} \tilde{F}_2 - s_0 \tilde{F}_0 = c_1 y_0. \qquad (20)$$

Таким образом, соотношения (1), (10), (20) дают частное решение задачи о смешении двух параллельных потоков газа одинаковой природы с произволом в две функции одного аргумента.

В качестве иллюстрации зададим

$$\tilde{F}_0 = A_0 y_0^2 + B_0;\ \tilde{F}_1 = A_1 y_0^2 + B_1,$$

тогда

$$\tilde{F}_2 = \frac{\kappa_2}{s_2} [c_1 y_0 + (s_0 A_0 - s_1 A_1/\kappa_1)\, y_0^2 + s_0 B_0 - s_1 B_1/\kappa_1].$$

С помощью соотношений (10), (15), (12), (16) окончательно получим

$$F_0(z_0) = A_0 z_0^2 + B_0;\ A_0 = -\frac{M}{s_0} \frac{b_0}{x_0^0} + \left(\frac{b_0}{x_0^0}\right)^2 B_0;$$

$$F_1(z_1) = \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^2 A_1 z_1^2 + B_1;$$

$$F_2(z_2) = \frac{1}{s_2} \left[c_1 z_2 + \frac{b_2}{b_0} (s_0 A_0 - s_1 A_1 b_1/b_0)\, z_2^2 + \frac{b_0}{b_2} (s_0 B_0 - s_1 b_1 B_1/b_0)\right].$$

Подставляя полученные зависимости в (1), находим частное решение сформулированной ранее задачи с константным произволом

$$u_0 = \frac{\varphi_0'(t)(x + x_0^0)}{b_0 + \varphi_0(t)};\ u_1 = u_0;\ u_2 = u_0;$$

$$p_0 = \varphi_0''(t) \left[B_0 - A_0 \left(\frac{x + x_0^0}{b_0 + \varphi_0(t)}\right)^2\right];\ \rho_0 = \frac{2A_0}{b_0 + \varphi_0(t)};$$

$$p_1 = \varphi_0''(t) \left[B_1 - A_1 \left(\frac{x + x_0^0}{b_0 + \varphi_0(t)}\right)^2\right];\ \rho_1 = \frac{2b_1 A_1}{b_0 (b_0 + \varphi_0(t))}$$

$$p_2 = \varphi_0''(t) \left[B_2 - A_2 \left(\frac{x + x_0^0}{b_0 + \varphi_0(t)}\right)^2\right];\ \rho_2 = \frac{2b_2 A_2}{b_0 (b_0 + \varphi_0(t))};$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$A_2 = \frac{b_0}{b_2 s_2}(s_0 A_0 - s_1 b_1 A_1/b_0);\ B_2 = \frac{b_0}{b_2 s_2}(s_0 B_0 - s_1 b_1 B_1/b_0).$$

Следует отметить, что соотношения типа (1), (10), (20) дают частное решение задачи о разделении газового потока.

1. Рассмотрим задачу о разделении газового потока на два ему параллельных. Условие (6) в этом случае принимает вид

$$u_0 > 0,\ u_i > 0;\ u_2 < 0. \tag{21}$$

Для получения решения типа (21) положим

$$x_1^0 = x_0^0 = -x_2^0.$$

В случае разделения потоков к соотношениям (5) следует добавить условие сохранения энтальпии торможения [2]

$$h_0 = h_1. \tag{22}$$

Воспользуемся решением вида (20), тогда (22) перепишется в виде

$$\frac{d^2}{dy_0^2}\tilde{F}_1\left[\tilde{F}_0 - y_0\frac{d}{dy_0}\tilde{F}_0\right] = \frac{d^2}{dy_0^2}\tilde{F}_0\left[\tilde{F}_1 - y_0\frac{d}{dy_0}\tilde{F}_1\right]. \tag{23}$$

Таким образом, соотношения (1), (10), (20), (23) описывают движения газа, толкающего поршень, когда в области течения происходит разделение потоков типа (21), с произволом в функцию одного аргумента. Имеющийся произвол можно использовать для удовлетворения дополнительных условий (например, условия на открытом конце второго канала при его сообщении с атмосферой). Зависимости (23) можно представить в конечном виде

$$\tilde{F}_1 = A_1\tilde{F}_0 + B_1 y_0. \tag{24}$$

Примем дополнительное условие

$$p_2 = p_2^0 = \text{const};\ x = \tilde{x}^0. \tag{25}$$

Простой подстановкой легко проверить, что условию (25) удовлетворяет функция

$$F_2 = A_2 z_2 + \frac{1}{\gamma+1}\frac{p_2^0}{\varphi_2^*(0)}\left(\frac{b_2}{x_2^0 + \tilde{x}_2^0}z_2\right)^{-\gamma}.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{F}_2 = A_2\kappa_2 y_0 + \frac{1}{\gamma+1}\frac{p_2^0}{\varphi_2^*(0)}\left(\frac{b_2\kappa_2}{x_2^0 + \tilde{x}_2^0}y_0\right)^{-\gamma}. \tag{26}$$

Учитывая (20), (24), (26), находим

$$F_0 = \frac{\kappa_1}{s_0\kappa_1 - s_1 A_1}\left\{\left(\frac{s_1}{\kappa_1}B_1 + s_2 A_2 - c_1\right)z_0 - \right.$$
$$\left. - \frac{s_2 p_2^0}{(\gamma+1)\varphi_0^*(0)}\left(-\frac{b_0}{x_2^0 + \tilde{x}_2^0}z_0\right)^{-\gamma}\right\};$$

$$F_1 = \frac{b_1}{b_0}\left\{\left(\frac{s_1 b_1}{b_0}B_1 + s_2 A_2 - c_1\right)\frac{A_1 b_0}{b_1(s_0\kappa_1 - s_1 A_1)} + B_1\right\}z_1 -$$
$$- \frac{A_1 b_0 s_2 p_2^0}{b_1(s_0\kappa_1 - s_1 A_1)}\left(\frac{-b_1 z_1}{x_2^0 + x_2^0}\right)^{-\gamma}\cdot\frac{1}{\frac{\varphi_0^*(0)}{(\gamma+1)}}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Произвольная постоянная A_1 выбирается из условия

$$A_1 > s_0 b_0 / s_1 b_1,$$

которое является следствием очевидного неравенства

$$\rho_1 u_1 s_1 > \rho_0 u_0 s_0; \quad x = 0.$$

Учитывая (26), (1), окончательно получим

$$u_0 = \varphi_0'(t)\frac{x_0^0 + x}{b_0 + \varphi_0(t)}; \quad p_0 = \frac{b_0 s_2 p_2^0}{s_1 A_1 b_1 - s_0 b_0}\left(\frac{x + x_0^0}{x_0^0 - \tilde{x}_2^0}\right)^{-\gamma};$$

$$\rho_0 = \frac{b_0 s_2 \gamma p_2^0}{s_1 A_1 b_1 - s_0 b_0}\left(\frac{b_0}{x_0^0 - \tilde{x}_2^0}\right)^2 \times$$

$$\times \left[\frac{b_0 (x + x_0^0)}{(x_0^0 - \tilde{x}_2^0)(b_0 + \varphi_0(t))}\right]^{-\gamma-2} \Big/ \varphi_0''(0)(b_0 + \varphi_0(t));$$

$$\varphi_0''(0) = \frac{s_2 p_2^0 s_0 b_0^2}{x_0^0 M (s_1 A_1 b_1 - s_0 b_0)}\left(\frac{x_0^0}{x_0^0 - \tilde{x}_2^0}\right)^{-\gamma},$$

$$0 \leqslant x \leqslant x_0^0 \varphi_0(t)/b_0;$$

$$u_1 = u_0; \quad p_1 = A_1 b_1 p_0 / b_0; \quad \rho_1 = A_1 b_1 \rho_0 / b_0;$$

$$-x_0^0 \leqslant x \leqslant 0;$$

$$u_2 = -u_0; \quad p_2 = p_2^0\left(\frac{x_0^0 - x}{x_0^0 - \tilde{x}_2^0}\right)^{-\gamma}; \quad \tilde{x}_2^0 \leqslant x \leqslant 0;$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma p_2^0}{\varphi_0''(0)(b_0 + \varphi_0(t))}\left(\frac{b_0}{x_0^0 - \tilde{x}_2^0}\right)^2\left(\frac{x_0^0 - x}{b_0 + \varphi_0(t)}\right)^{-\gamma-2}. \qquad (27)$$

Соотношения (27) дают частное решение задачи о движении поршня под действием давления газа, вытекающего из канала 1 с частичным истечением через канал 2 в атмосферу.

2. Рассмотрим задачу о течении газа в канале со скачком площади поперечного сечения. Остановимся для определенности на случае

$$s_1 < s_0$$

и рассмотрим течение с запиранием потока при $M_0 \leqslant 1$. В этом случае основные условия склеивания потоков имеют вид [3]

$$\rho_1 u_1 s_1 = \rho_0 u_0 s_0; \quad h_1 = h_0; \quad M_1 = 1; \quad M^2 = \gamma p/\rho. \qquad (28)$$

Полагая $x_1^0 = x_0^0$, вместо (20) получим

$$\frac{s_1}{\kappa_1}\tilde{F}_1 - s_0 \tilde{F}_0 = c_1 y_0. \qquad (29)$$

В силу (23), (24), (29) условие (22) выполняется тождественно.

Последнее условие (28) можно представить следующим образом:

$$\tilde{F}_1 - y_0 \frac{d}{dy_0}\tilde{F}_1 = \frac{2}{\gamma(\gamma-1)}\frac{x_0^0}{b_0}\left\{\left(\frac{x_0^0}{b_0}\right)^{\gamma-1} y_0^{1-\gamma} - 1\right\} y_0 \frac{d^2}{dy_0^2}\tilde{F}_1. \qquad (30)$$

Общее решение уравнения (30) можно записать в квадратурах

$$\tilde{F}_1(y_0) = A_1 y_0 + A_2 y_0 \int \exp\left\{-\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\frac{b_0}{x_0^0}\int\left[\left(\frac{b_0}{x_0^0} y_0\right)^{1-\gamma} - 1\right]^{-1} dy_0\right\} dy_0.$$

Условие $M_0 \leqslant 1$ можно переписать в виде

$$\frac{d^2}{dy_0^2}\tilde{F}_1 \cdot \left[\tilde{F}_0 - y_0 \frac{d}{dy_0}\tilde{F}_0\right] \geqslant \frac{d^2}{dy_0^2}\tilde{F}_0\left[\tilde{F}_1 - y_0 \frac{d}{dy_0}\tilde{F}_1\right].$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

В силу (23) возможно только равенство, следовательно, рассматриваемое решение описывает течение газа на скачке сечения в режиме

$$M_0 = M_1 = 1, \quad x = 0.$$

Аналитические зависимости, как и ранее, легко получить из соотношений (1), (10), (12), (29), (30).

Помимо самостоятельного значения полученные решения представляют интерес с точки зрения апробации численных методов расчета течений газа в разветвляющихся каналах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1972. — 440 с.
2. Яушев И. К., Черешнев А. П. К задаче о распаде разрыва в разветвленных каналах. — Численные методы механики сплошной среды, 1971, т. 2, № 2, с. 93—103.
3. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Миллер Л. Г. К распаду произвольного разрыва на перфорированной перегородке. — ПМТФ, 1981, № 3, с. 103—109.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. В. Буров, Э. Е. Либин

При исследовании плоских течений идеальной несжимаемой жидкости широко применяется аппарат теории функций комплексного переменного. В настоящей статье предлагается использовать метод конформных отображений при решении как плоских, так и осесимметричных струйных задач гидродинамики. Оба типа задач решаются в рамках единого алгоритма, но в плоских задачах потенциал скорости представляется в аналитическом виде, а в осесимметричных определяется численно. Предлагаемый метод без существенных изменений используется для решения задач в ограниченной и неограниченной областях.

Рассмотрим задачу определения формы выемки выброса грунта при взрыве бесконечно длинного заглубленного заряда в рамках импульсной твердо-жидкостной модели явления взрыва [1], согласно которой в некоторой области вокруг заряда грунт считается идеальной несжимаемой жидкостью. Вне этой области грунт ведет себя абсолютно как твердое тело. На границе области скорость должна равняться заданной величине, определяемой прочностными свойствами грунта. В области Q (рис. 2) требуется определить комплексный потенциал $W=\varphi+i\Psi$, удовлетворяющий на границе области условиям

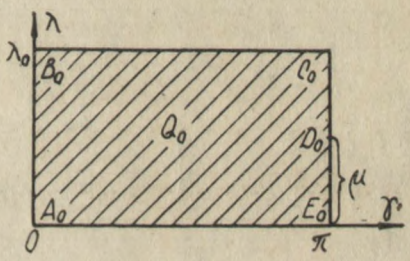

Рис. 1

$$\varphi = 0 \text{ на } BC;$$
$$\varphi = 1 \text{ на } AE; \qquad (1)$$
$$\psi = 0 \text{ на } BA \text{ и } EDC.$$

Кроме того, на неизвестной границе DC, которую требуется определить в процессе решения задачи, должно выполняться динамическое граничное условие

$$\left|\frac{dW}{dz}\right| = c_0 \text{ на } DC. \qquad (2)$$

Краевая задача (1), (2), следуя [1], записана в безразмерном виде. Константа c_0 определяет прочностные свойства грунта, а $\varphi = -\Pi/\rho$, где Π — импульсное давление; ρ — плотность грунта.

Конформно отобразим область течения Q в физической плоскости $z = x + iy$ на прямоугольник Q_0 со сторонами длиной λ_0 и π в плос-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

кости $\omega = \gamma + i\lambda$ (рис. 1). Обратное отображение Q_0 на Q можно выполнить с помощью следующей последовательности конформных отображений:

$$z_1 = sn\left[\frac{2K(m)}{\pi}\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right), m\right];$$

$$z_2 = 2\frac{z_1 - (C_1 + D_1)/2}{C_1 - D_1};$$

$$z_3 = \sqrt{z_2^2 - 1} - z_2;$$

$$z_4 = z_3\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_n z_3^n\right); \qquad (3)$$

$$z_5 = \frac{l_1(z_4 - D_4)}{D_4 - E_4};$$

$$z_6 = -z_5^2 + l_4,$$

$$z_7 = \frac{a(z_6 - c) + b\sqrt{(z_6 - c)^2 + (a+b)^2}}{a+b};$$

$$z = \sqrt{z_7 - B_7}.$$

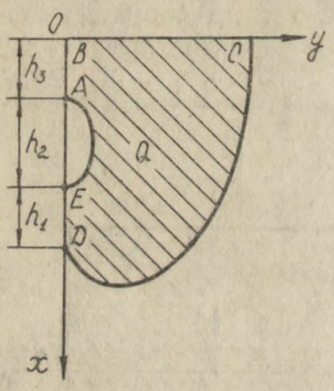

Рис. 2

Соответствующие точки при преобразованиях (3) в разных плоскостях обозначены одинаковыми буквами. При переходе из плоскости z_3 в плоскость z_4 вводится некоторый набор постоянных коэффициентов R_1, R_2, ..., изменяя которые можно получать различные формы кривой C_4D_4. Формулы (3) содержат также постоянные коэффициенты m, μ, l_1, l_4, a, b, c, которые легко определяются при заданных значениях h_1, h_2, h_3, R_1, R_2 ...

Легко показать, что в переменных γ, λ комплексный потенциал выражается линейной функцией

$$W(\omega) = 1 + i\frac{\omega}{\lambda_0}.$$

Зная W, в Q_0 можно найти комплексно-сопряженную скорость в физической плоскости

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{d\omega}\frac{d\omega}{dz} = \frac{\dfrac{dW}{d\omega}}{\dfrac{dz}{d\omega}}. \qquad (4)$$

Таким образом, соотношения (3) ставят в соответствие каждой точке в области Q_0 точку в области Q, а (4) позволяет в этой точке рассчитать компоненты скорости. Мы пока предполагали, что коэффициенты R_n заданы, однако при произвольном их задании для W останется невыполненным граничное условие (2). Так как $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = 0$ на C_0D_0, то (2) в плоскости ω примет следующий вид:

$$\left|\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}}{\dfrac{\partial z}{\partial\omega}}\right| = c_0 \text{ при } \mu \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0,\ \gamma = \pi. \qquad (5)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Граничное условие (5) будем использовать для определения коэффициентов R_n. На отрезке C_0D_0 распределим конечное число точек. Составим целевую функцию, равную модулю максимального отклонения скорости от c_0. Минимизируя полученную целевую функцию с помощью градиентного метода, определим коэффициенты R_n (ограничившись конечным числом R_n). На рис. 3 сплошной линией показана форма выемки выброса при взрыве бесконечно длинного цилиндрического заряда для $c_0=1$. Цилиндр имеет радиус, равный $0{,}1/\pi$, и помещен на глубину $h_3=0{,}2$. Пунктирной линией нанесена форма выемки выброса для данного заряда, полученная в [2] другим численным методом. Сравнение этих форм показывает, что по объему выемки результаты совпадают с точностью 2%.

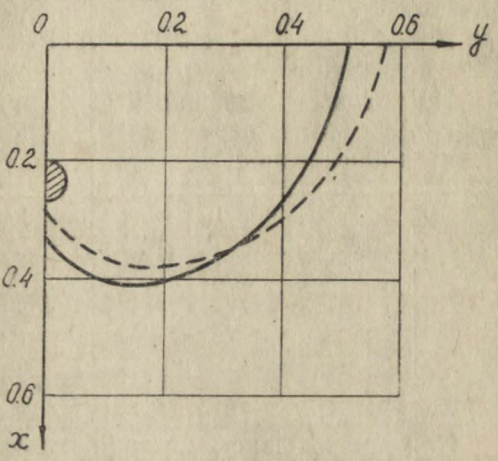

Рис. 3

Применение метода для неограниченных областей рассмотрим на примере решения задачи об осесимметричном струйном обтекании диска безграничным потоком невесомой жидкости. Задача решается в нелинейной постановке с использованием схемы Рябушинского. Перейдем к безразмерным переменным, приняв за характерный размер радиус диска, а за характерную скорость — скорость набегающего потока на бесконечности. Тогда для заданного числа кавитации σ требуется определить потенциал скорости $\Phi(x, r)$, удовлетворяющий во всей области течения уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=0,$$

подчиняющийся на границе ABCDEF условию непротекания и условию на бесконечности $\Phi=x$ при $z=x+ir\to\infty$. На неизвестной свободной границе CD должно выполняться динамическое граничное условие

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2=1+\sigma.$$

Меридианальное сечение картины обтекания показано на рис. 4.

Отобразим верхнюю половину области течения в физической плоскости $z=x+ir$ конформно на внутренность прямоугольника в плоскости $\omega=\gamma+i\lambda$. Обратное отображение можно осуществить с помощью следующей последовательности конформных отображений:

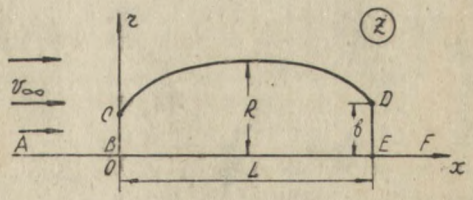

Рис. 4

$$z_1=2Asn\left[\frac{2\kappa(m)}{\pi}\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right),\ m\right],\quad m=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z_2=\frac{1}{2}(z_1+\sqrt{z_1^2-4A^2});$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$z_3 = z_2 + A\sum_{n=1}^{\infty} R_n \left(\frac{A}{z_2}\right)^n, \tag{6}$$

$$z_4 = \sqrt{(z_3 - d - b)(z_3 - d + b)} + \sqrt{(d - c + b)(d - c - b)};$$

$$z = \sqrt{z_4^2 - 1},$$

где $d = A\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_n\right)$; $c = -A\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n R_n\right]$; $\lambda_0 = \frac{\pi}{2}$.

Постоянные коэффициенты A, b, R_1, R_2, ... определяют форму обтекаемого тела. В переменных γ, λ краевая задача для потенциала скорости примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[r(\gamma, \lambda)\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right] + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[r(\gamma, \lambda)\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\right] = 0 \quad bQ_0;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = 0 \text{ при } \lambda = 0 \text{ и } \lambda = \lambda_0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} = 0 \text{ при } \gamma = 0 \text{ и } \gamma = \pi.$$

При произвольном задании коэффициентов A, b, R_n динамическое граничное условие остается невыполненным. Будем искать решение в виде $\Phi = \varphi + \Phi_1$, где $\varphi = \mathrm{Re}W = \mathrm{Re}z_1$ — решение соответствующей плоской задачи. Для Φ_1 получаем следующую краевую задачу:

$$\Delta\Phi_1 + \frac{(\nabla r\nabla\Phi_1)}{r} = -\frac{(\nabla r\nabla\varphi)}{r}, \quad bQ_0;$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\lambda} = 0 \text{ при } \lambda = 0 \text{ и } \lambda = \lambda_0: \tag{8}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\gamma} = 0 \text{ при } \gamma = 0 \text{ и } \gamma = \pi.$$

Решение краевой задачи (8) ищется в виде ряда Фурье

$$\Phi_1(\gamma, \lambda) = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} d_{nm}\cos(n\gamma)\cos\left(\frac{m\pi\lambda}{\lambda_0}\right). \tag{9}$$

Функция (9) удовлетворяет граничным условиям краевой задачи (8), но не удовлетворяет уравнению, поэтому постоянные коэффициенты d_{nm} с помощью метода моментов определяются таким образом, чтобы уравнение для Φ_1 выполнялось на прямоугольной e сетке

$$\gamma_i = \frac{\pi(2i+1)}{2N}; \quad \lambda_j = \frac{\lambda_0(2j+1)}{2N}, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

После определения $\Phi_1(\gamma, \lambda)$ можно определить значение скорости на свободной границе

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1 + \dfrac{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\gamma}}{\dfrac{\partial z_1}{\partial\omega}}}{\dfrac{dz}{dz_1}}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Для определения неизвестных коэффициентов A, b, R_1, R_2, ... R_M используется динамическое граничное условие. На свободной границе задаем конечное число точек и минимизируем максимальное отклонение модуля скорости от величины $1+\sigma$.

Отметим, что решение плоской задачи получается как частный случай решения соответствующей осесимметричной задачи, так как в этом случае не требуется решать краевую задачу (8). В табл. 1

Таблица 1

σ	$L/2$ числ. [3]	$L/2$ анал. [3]	$L/2$ числ. предл. метод	R числ. [3]	R анал. [3]	R числ. предл. метод	C_x числ. [3]	C_x анал. [3]	C_x числ. предл. метод
1,05	3,862	3,865	3,86	2,057	2,06	2,06	1,816	1,819	1,815
0,45	15,57	15,57	15,58	3,485	3,485	3,49	1,28	1,279	1,276
0,3	31,82	31,79	31,74	4,735	4,73	4,71	1,148	1,145	1,142

приведены результаты расчета размеров каверны и коэффициентов сопротивления c_x за пластинкой для различных значений σ. Для сравнения приведены результаты расчетов по методу интегральных уравнений и аналитическое решение из [3]. Полученные результаты совпадают с известными с точностью 0,5%. В табл. 2 приведены результаты

Таблица 2

σ	L числ. [4]	L числ. предл. метод	R числ. [4]	R числ. предл. метод	C_x числ. [4]	C_x числ. предл. метод
0,467	5	5,14	1,72	1,75	1,229	1,192
0,105	30	30,9	3,19	3,23	0,915	0,887
0,068	50	51,65	3,79	3,89	0,883	0,854

расчета размеров каверн и коэффициентов сопротивления c_x за диском для различных значений σ по предлагаемому методу и полученные в [4] с помощью метода интегральных уравнений. Соответствующие результаты совпадают с точностью 3%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. М. О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта. — ПМТФ, 1960, № 3, с. 152—156.

2. Данилова Г. В., Салимов Н. Б., Салимов Р. Б. Задача о взрыве заглубленного заряда. — В кн.: Тр. семинара по краев. задачам. Казань, 1977, вып. 14, с. 73—80.

3. Гузевский Л. Г. Численный анализ кавитационных течений.— Новосибирск, 1979. — 36 с. (препринт/Ин-т теплофиз. Сиб. отд. АН СССР: № 40—79).

4. Кожуро Л. А. Расчет осесимметричного струйного обтекания тел по схеме Рябушинского. — Уч. зап. Центр. аэрогидродинам. ин-та, 1980, т. 11, № 5, с. 109—115.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

О ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ПУЛЬСИРУЮЩИХ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙ

Г. П. Анисимов

В последнее время внимание исследователей привлекла указанная ранее [1] возможность эффективно управлять параметрами струи с помощью механических периодических воздействий. В результате этого появился ряд экспериментальных работ [2—4], в которых исследуются различные виды пульсаций. Так, например, Савченко Ю. Н. установил [2], что при «пилообразных» пульсациях скорости наблюдается неравномерное распределение импульса вдоль струи, а Бремхорст и Харч. исследуя «полностью» пульсирующую струю (скорость в конце цикла равна нулю) [3], пришли к выводу, что ее эжекционная способность существенно выше, чем у стационарных турбулентных струй.

Теоретический анализ пульсирующих струй сводится к решению нестационарной системы уравнений Рейнольдса, что представляет значительные трудности, связанные прежде всего с отсутствием моделей турбулентности для нестационарных свободных течений, позволяющих точно рассчитывать всю область, а также с большими затратами машинного времени. Однако не всегда требуется проводить исследование в полном объеме и рассчитывать все локальные параметры потока. Иногда достаточно бывает определить интегральные параметры, как, например, при расчете эжекционных характеристик струи.

В данной работе разработанный ранее метод расчета нестационарных струй [5] предлагается применить к расчету пульсирующих струй. Систему уравнений, описывающую процесс истечения несжимаемой жидкости из трубы в затопленное пространство или спутный поток в турбулентном режиме, будем рассматривать в приближении пограничного слоя (предполагается, что течение во всей области изобарическое)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho y}\frac{\partial}{\partial y}(y\tau_t); \qquad (1)$$

$$\frac{\partial uy}{\partial x} + \frac{\partial vy}{\partial y} = 0,$$

где u, v — проекции скорости на оси x, y соответственно; ρ — плотность жидкости; τ_t — касательное напряжение турбулентного трения.

Проведем преобразования системы (1), аналогичные преобразованиям [6]. Умножив почленно уравнение движения на $u^\kappa (\kappa = 0, 1, 2, \ldots)$,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

уравнение неразрывности на $u^{\kappa+1}-u_\delta^{\kappa+1}$, сложив их и проинтегрировав поперек струи, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{y_0}^{y_\delta}(u^{\kappa+1}-u_\delta^{\kappa+1})\,y\,dy+\frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y_\delta}(u^{\kappa+1}-u_\delta^{\kappa+1})\,u y\,dy+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[(u_m^{\kappa+1}-u_\delta^{\kappa+1})\frac{y_0^2}{2}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[u_m(u_m^{\kappa+1}-u_\delta^{\kappa+1})\frac{y_0^2}{2}\right]=$$

$$=-\kappa(\kappa+1)\int_{y_0}^{y_\delta}\frac{\tau_t}{\rho}u^{\kappa-1}\frac{\partial u}{\partial y}\,y\,dy. \qquad (2)$$

В результате экспериментальных исследований установлено [3, 4], что профиль осредненной продольной скорости автомоделен. Это позволяет ввести в рассмотрение функцию

$$f(\eta)=(u-u_\delta)/(u_m-u_\delta), \qquad (3)$$

где $\eta=(y-y_0)/\delta$ — безразмерная поперечная координата.

Для замыкания системы (2) воспользуемся другим экспериментальным результатом [4], заключающимся в том, что турбулентная вязкость в данном сечении постоянна. Это позволяет использовать полуэмпирическую формулу Прандтля для касательного напряжения турбулентного трения:

$$\tau_t=\rho\nu_t\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (4)$$

где ν_t — турбулентная вязкость.

Подставив (3) и (4) в (2) и положив κ равным 0 и 1, получим систему двух уравнений для определения δ — ширины струи на всем ее протяжении, а также y_0 — ширины потенциального ядра на начальном участке и u_m — осевой скорости на основном участке струи.

Начальный участок

$$A_{11}\frac{\partial\delta}{\partial t}+A_{21}\frac{\partial\delta}{\partial x}+A_{31}\frac{\partial y_0}{\partial t}+A_{41}\frac{\partial y_0}{\partial x}=A_{51};$$

$$B_{11}\frac{\partial\delta}{\partial t}+B_{21}\frac{\partial\delta}{\partial x}+B_{31}\frac{\partial y_0}{\partial t}+B_{41}\frac{\partial y_0}{\partial x}=B_{51};$$

$$\begin{aligned}
A_{11}&=2b_{11}\delta+a_{11}y_0;\\
A_{21}&=(2b_{11}\delta+a_{11}y_0)\,u_\delta+(2b_{21}\delta+a_{21}y_0)\,u_{1m};\\
A_{31}&=a_{11}\delta+y_0;\\
A_{41}&=(a_{11}\delta+y_0)\,u_\delta+(a_{21}\delta+y_0)\,u_{1m};\\
A_{51}&=0;\\
B_{11}&=2(2b_{11}\delta+a_{11}y_0)\,u_\delta+(2b_{21}\delta+a_{21}y_0)\,u_{1m};\\
B_{21}&=2(2b_{11}\delta+a_{11}y_0)\,u_\delta^2+3(2b_{21}\delta+a_{21}y_0)\,u_\delta u_{1m}+\\
&\quad+(2b_{31}\delta+a_{31}y_0)\,u_{1m}^2;\\
B_{31}&=2(a_{11}\delta+y_0)\,u_\delta+(a_{21}\delta+y_0)\,u_{1m};\\
B_{41}&=2(a_{11}\delta+y_0)\,u_\delta^2+3(a_{21}\delta+y_0)\,u_\delta u_{1m}+\\
&\quad+(a_{31}\delta+y_0)\,u_{1m}^2;\\
B_{51}&=-2\varkappa_{\text{н}}u_{1m}^2(b_{41}\delta+a_{41}y_0).
\end{aligned} \qquad (5)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Основной участок

$$A_{12}\frac{\partial \delta}{\partial t}+A_{22}\frac{\partial \delta}{\partial x}+A_{32}\frac{\partial u_m}{\partial t}+A_{42}\frac{\partial u_m}{\partial x}=A_{52};$$

$$B_{12}\frac{\partial \delta}{\partial t}+B_{22}\frac{\partial \delta}{\partial x}+B_{32}\frac{\partial u_m}{\partial t}+B_{42}\frac{\partial u_m}{\partial x}=B_{52};$$

$$\begin{aligned}
&A_{12}=2b_{12}u_{1m};\\
&A_{22}=2\left(b_{12}u_\delta+b_{22}u_{1m}\right)u_{1m};\\
&A_{32}=b_{12}\delta;\\
&A_{42}=\left(b_{12}u_\delta+2b_{22}u_{1m}\right)\delta;\\
&A_{52}=0;\\
&B_{12}=2\left(2b_{12}u_\delta+b_{22}u_{1m}\right)u_{1m};\\
&B_{22}=2\left(2b_{12}u_\delta^2+3b_{22}u_\delta u_{1m}+b_{32}u_{1m}^2\right)u_{1m};\\
&B_{32}=2\left(b_{12}u_\delta+b_{22}u_{1m}\right)\delta;\\
&B_{42}=\left(2b_{12}u_\delta^2+6b_{22}u_\delta u_{1m}+3b_{32}u_{1m}^2\right)\delta;\\
&B_{52}=-2\varkappa_0 b_{12}u_{1m}^3.
\end{aligned} \qquad (6)$$

В (5), (6) приняты следующие обозначения:

$$a_{ij}=\int_0^1 f^i(\xi)\,d\xi,\ b_{ij}=\int_0^1 f^i(\xi)\,\xi d\xi,\ i=1,\ 2,\ 3;$$

$$a_{4j}=\int_0^1 f'^2(\xi)\,d\xi,\ b_{4j}=\int_0^1 f'^2(\xi)\,\xi d\xi.$$

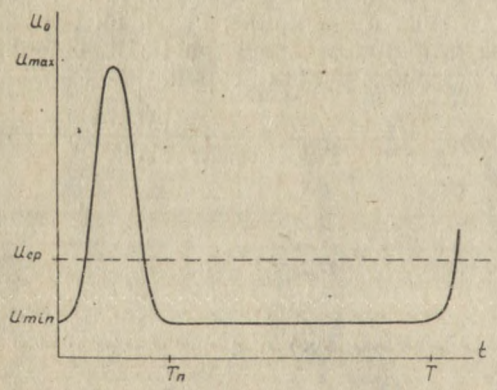

Рис. 1

Для $\varkappa=0$ коэффициенты обозначены A_{ej}, для $\varkappa=1$—B_{ej}, индекс $j=1$ соответствует начальному участку, $j=2$ — основному.

Система уравнений (5), (6) была применена для расчета пульсирующей струи. Вид пульсаций приведен на рис. 1. Струя с подобными пульсациями исследовалась Бремхорстом и Харчем [3]. Профиль осредненной продольной скорости в расчетах описывался формулой (3):

$$f(\zeta)=\left[1+0{,}44\left(\zeta/\zeta_{1/2}\right)^2\right]^{-2}, \qquad (7)$$

где $\eta_{1/2}$ — безразмерная поперечная координата, соответствующая половине скорости на оси.

На рис. 2 приведено распределение импульса вдоль струи в различные моменты времени. Видно, что импульс непостоянен. Возникающая в начале периода пульсации «волна» распространяется вниз по потоку, затухая со временем, и импульс в конце периода выравнивается.

На рис. 3 приведено изменение среднего расхода вдоль струи (частота пульсаций 10 и 25 Гц) в сравнении с расходом стационарной струи, скорость истечения которой бралась средней за период. Видно,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

что с повышением частоты пульсаций эжекционная способность струи увеличивается.

К сожалению, не представляется возможным провести количественное сравнение полученных результатов с экспериментальными результатами работы [3] ввиду того, что приведенный метод не приме-

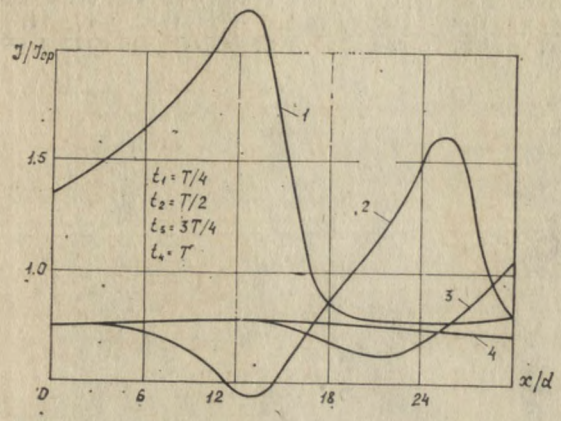

Рис. 2

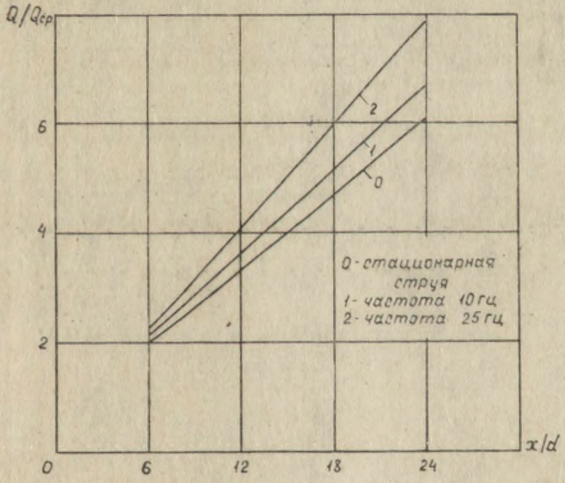

Рис. 3

ним для расчета струи с нулевой скоростью истечения. Однако качественное совпадение приведенных результатов с выводами работы [3] позволяет сделать заключение о применимости системы (5), (6) для расчета пульсирующих струй.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулис Л. А., Михасенко Ю. И., Хитриков В. А. Об эффективном управлении распространением свободной турбулентной струи. — Механика жидкости и газа, 1966, № 6, с. 173—177.

2. Савченко Ю. Н. Управление импульсом свободной струи. — Известия СО АН СССР. Технические науки, 1980, вып. 3, № 13, с. 104—110.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

3. Bremhorst K., Harch W. H. Near field velocity mearsurements in a fully pulsed subsonic air jet t. Turbulent Shear Flows. 1. Selected pap. 1 — st Int Symp. Pennsylvania State Univ. Pa, 1977. Berlin e. a. 1979, pp. 37—54.

4. Панчурин Н. А., Ройзман Д. Х., Шербаум В. М. Нестационарная турбулентная струя. Известия вузов. Строительство и архитектура, 1981, № 10, с. 96—101.

5. Анисимов Г. П., Мухаметов М. Х. Приближенный метод расчета нестационарных осесимметричных турбулентных струй. — В кн.: Аэрогазодинамика быстропротекающих процессов. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982, с. 40—44.

6. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. — М.: Машиностроение, 1969.— 400 с.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ОБТЕКАНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ ДУГИ ОКРУЖНОСТИ В КАНАЛЕ С ИСТОЧНИКОМ ЗА ОБТЕКАЕМЫМ КОНТУРОМ

В. И. Никитин, В. А. Штанько

Рассмотрим задачу о струйном обтекании плоскопараллельным безвихревым потоком идеальной невесомой несжимаемой жидкости плотности ρ дуги окружности длины $2l$ и радиуса R, расположенной в канале ширины $2L$ симметрично относительно его оси. За дугой окружности на оси канала на расстоянии h от центра дуги помещен источник мощности q. Течение симметрично в физической плоскости $z = x + iy$, поэтому его достаточно рассмотреть, например, в полуплоскости $Imz \geqslant 0$ (рис. 1). Величина вектора скорости набегающего потока в сечении SS канала равна v_∞, на бесконечности вниз по течению в сечении DD канала величина скорости обозначена через v_0. В точке C, где расположен источник, скорость равна бесконечности, а в точках B и E обращается в нуль. Вдоль EA и BA скорость возрастает от нуля до некоторого конечного значения, причем на контактной линии тока, выходящей из точки A, она не терпит разрыва. Задача состоит в установлении зависимости коэффициента сопротивления обтекаемого контура от отношения расходов в источнике и в канале при фиксированной геометрии течения.

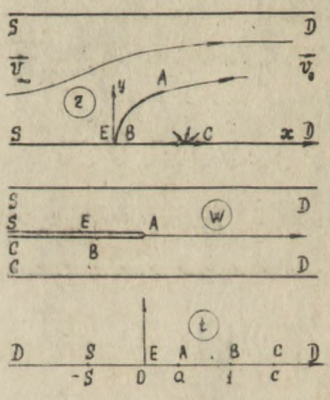

Рис. 1

Найдем общее решение задачи. Для этого область изменения комплексного потенциала w, соответствующую течению в полуплоскости $Imz \geqslant 0$, отобразим на полуплоскость $Imt \geqslant 0$ параметрического переменного t с соответствием точек, указанным на рис. 1. Тогда с помощью интеграла Кристоффеля-Шварца [1] будем иметь

$$\frac{dw}{dt} = \frac{N(t-a)}{(t+s)(t-c)}, \tag{1}$$

где N — некоторая константа.

Определим теперь функцию $\omega = \ln(v/v_0) - i\Theta$, где $v/v_0 = |dw/v_0 dz|$ и Θ — угол наклона вектора скорости к оси абсцисс. Значения $Im\omega(t) = -\Theta(t)$ известны на части границ области течения: на BC $(1 \leqslant t \leqslant c)$ $Im\omega(t) = -\pi$, на CD $(c \leqslant t \leqslant \infty)$ и DSE $(-\infty \leqslant t \leqslant 0)$ $Im\omega(t) = 0$. На дугах EA $(0 \leqslant t \leqslant a)$ и AB $(a \leqslant t \leqslant 1)$ зависимость

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$Im\omega$ от t неизвестна, однако на EA — $\pi/2 \leqslant Im\omega(t) \leqslant -(\pi/2 - l/R)$ и на AB — $(\pi/2 - l/R) \geqslant Im\omega(t) \geqslant -\pi/2$. Разобьем в параметрической области t отрезок $[0,1]$ на $2n$ частей точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = a < t_{n+1} < \ldots < t_{2n} = 1$ и на каждом отрезке $[t_{\kappa-1}, t_\kappa]$, $\kappa = 1, 2n$ будем приближенно задавать $\Theta(t) = -Im\omega(t)$ в виде

$$\theta(t) = \pi\left[c_{\kappa-1} + \frac{c_\kappa - c_{\kappa-1}}{t_\kappa - t_{\kappa-1}}(t - t_{\kappa-1})\right], \quad \kappa = \overline{1, 2n}, \tag{2}$$

где неизвестные коэффициенты c_κ определяются значениями $\Theta(t_\kappa) = \pi c_\kappa$ в точках t_κ. Функция $Im\omega(t)$ теперь определена на всей вещественной оси плоскости t, поэтому аналитическая в $Imt \geqslant 0$ функция $\omega(t)$ может быть определена с помощью интеграла Шварца [2] по значениям ее мнимой части

$$\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Im\omega(t)}{\tau - t}\,d\tau + \omega(\infty) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\sum_{\kappa=1}^{2n}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa} \pi\left[c_{\kappa-1} + \frac{c_\kappa - c_{\kappa-1}}{t_\kappa - t_{\kappa-1}}(\tau - t_{\kappa-1})\right]\frac{d\tau}{\tau - t} + \right.$$

$$\left. + \int_1^c \frac{-\pi}{\tau - t}\,d\tau\right\} + \omega(\infty).$$

Вычислим входящие сюда интегралы, получим

$$\omega(t) = -\left\{\sum_{\kappa=1}^{2n}\left[c_{\kappa-1} + \frac{c_\kappa - c_{\kappa-1}}{t_\kappa - t_{\kappa-1}}(t - t_{\kappa-1})\right]\cdot \ln\frac{t_\kappa - t}{t_{\kappa-1} - t} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\kappa=1}^{2n}(c_\kappa - c_{\kappa-1}) + \ln\frac{c - t}{c + t}\right\} + \omega(\infty).$$

Преобразуем это выражение, перегруппировывая члены первой суммы и учитывая, что $t_0 = 0$, $t_{2n} = 1$, $c_0 = c_{2n} = 1/2$, $\omega(\infty) = 0$. Тогда для значения $t > c$ функцию $\omega(t)$ можно переписать в виде

$$\omega(t) = \ln\frac{\sqrt{t(t-1)}}{t - c} - \sum_{\kappa=1}^{2n}\frac{c_\kappa - c_{\kappa-1}}{t_\kappa - t_{\kappa-1}}\left[(t - t_\kappa)\cdot\ln(t - t_\kappa) - \right.$$

$$\left. - (t - t_{\kappa-1})\cdot\ln(t - t_{\kappa-1})\right], \tag{3}$$

где выбраны ветви логарифмов вещественные при $t > c$. Формулы (1) и (3) дают общее решение задачи, так как с их помощью можно рассчитать геометрию течения и определить результирующую сил, действующих на обтекаемый контур.

Найдем с помощью (3) выражение для комплексно-сопряженной скорости

$$\frac{dw}{v_0 dz} = \frac{\sqrt{|t(t-1)|}}{|t - c|}\exp\{-f(c_\kappa, t_\kappa, t)\}\cdot\exp\{iIm\omega(t)\}, \tag{4}$$

где введено обозначение

$$f(c_\kappa, , t_\kappa, t) = \sum_{\kappa=1}^{2n}\frac{c_\kappa - c_{\kappa-1}}{t_\kappa - t_{\kappa-1}}\left[(t - t_\kappa)\cdot\ln|t - t_\kappa| - \right.$$

$$\left. - (t - t_{\kappa-1})\cdot\ln|t - t_{\kappa-1}|\right]. \tag{5}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Подставляя в (4) значение $t = -s$, для отношения характерных скоростей v_∞/v_0 получим формулу

$$\frac{v_\infty}{v_0} = \frac{\sqrt{s(s+1)}}{s+c} \exp\{f(c_к,\ t_к,\ -s)\}, \tag{6}$$

где

$$f(c_к,\ t_к,\ t) = \sum_{к=1}^{2n} \frac{c_к - c_{к-1}}{t_к - t_{к-1}} [(s+t_к)\cdot \ln(s+t_к) - (s+t_{к-1})\cdot \ln(s+t_{к-1})].$$

Для определения геометрических элементов течения найдем функцию dz/dt. С помощью (1) и (4) для значений $t > c$ будем иметь

$$\frac{dz}{dt} = \frac{N}{v_0} \cdot \frac{t-a}{\sqrt{t(t-1)}(t+s)} \exp\{f(c_к,\ t_к,\ t)\}. \tag{7}$$

Вычисляя вычет dz/dt в точке $t = \infty$, для определения ширины канала получим выражение

$$L = \pi N/v_0. \tag{8}$$

Можно получить еще одну формулу для L, вычисляя вычет функции dz/dt в точке $t = -s$. Из сравнения двух выражений для L найдем условие однозначности функции $z = z(t)$:

$$\frac{s+a}{\sqrt{-(s+1)}} \exp\{-f(c_к,\ t_к,\ -s)\} = 1. \tag{9}$$

Длина l обтекаемого контура определяется как интеграл от функции $|dz/dt|$ при $0 \leqslant t \leqslant a$, тогда для отношения l/L с учетом (7) и (8) получается формула

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{(a-t)\exp\{f(c_к,\ t_к,\ t)\}}{(t+s)\sqrt{t(1-t)}}\, dt. \tag{10}$$

Если определить еще длину l как интеграл от функции $|dz/dt|$ при $a \leqslant t \leqslant 1$ и приравнять два выражения для l, то получим условие однозначности функции $z = z(t)$, тождественное соотношению (9).

Расстояние h находится интегрированием функции $|dz/dt|$ на промежутке $[1, c]$. Величина отношения h/L в силу (7) и (8) будет находиться тогда по формуле

$$\frac{h}{L} = \frac{1}{\pi} \int_1^c \frac{(t-a)\exp\{f(c_к,\ t_к,\ t)\}}{(t+s)\sqrt{t(t-1)}}\, dt. \tag{11}$$

Течение в физической плоскости определяется отношениями l/L, h/L и величиной q (отношение расхода источника к расходу жидкости в канале). Учитывая, что $q = (Lv_0 - Lv_\infty)/Lv_\infty$ и используя (6), получим следующее выражение величины q через параметры общего решения:

$$q = \frac{s+c}{\sqrt{s(s+1)}} \exp\{-f(c_к,\ t_к,\ -s)\} - 1. \tag{12}$$

Результирующая X сил, действующих на обтекаемый контур, находится суммированием разности давлений слева и справа вдоль контура. Выражая с помощью интеграла Бернулли [1] давление через скорость и используя (4) и (7), получим

$$X = \frac{N\rho v_0}{2} \int_0^1 \frac{(t-a)\sqrt{t(1-t)}}{(c-t)^2(t+s)} \exp\{-f(c_к,\ t_к,\ t)\}\, dt. \tag{13}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Определив величину X, можно вычислить и коэффициент сопротивления обтекаемого контура

$$C_x = 2X/\rho v_0^2 l. \tag{14}$$

Общее решение задачи и расчетные формулы в качестве параметров содержат a, s, c и коэффициенты c_κ, $\kappa = 0,2n$. Связь их с величинами, характеризующими течение в физической плоскости, определяется соотношениями (9), (10), (11) и уравнениями для определения коэффициентов c_κ. Обозначим через l_κ длину дуги обтекаемого контура от точки E или B до некоторой его точки $z_\kappa = z(t_\kappa)$. Центральный угол, стягиваемый дугой l, обозначим через α. Тогда угол $\theta(t_\kappa)$ наклона вектора скорости к оси x в точке $z_\kappa = z(t_\kappa)$ можно выразить формулой $\theta(t_\kappa) = \pi/2 - (l_\kappa/l) \cdot \alpha$, а так как $\theta(t_\kappa) = \pi c_\kappa$, то

$$c_\kappa = 1/2 - (l_\kappa/l)\cdot(\alpha/\pi), \quad \kappa = \overline{0,2n}. \tag{15}$$

Формула (15) и служит для определения коэффициентов c_κ. В частности, при $\kappa = 0$, $\kappa = 2n$ отношение $l_\kappa/l = 0$ и при $\kappa = n$ $l_\kappa/l = 1$, поэтому $c_0 = c_{2n} = 1/2$, $c_n = 1/2 - \alpha/\pi$, то есть из $2n+1$ коэффициентов c_κ необходимо с помощью (15) определить еще $2n-2$.

Представление о характере зависимости величины C_x от q, h/L и l/L по рассматриваемой схеме течения можно получить, изучая обтекание полигонального контура. Для этого частного случая задачи все расчетные формулы упрощаются, так как для пластинки все $c_\kappa = 1/2$ и, как видно из (5), $f(c_\kappa, t_\kappa, t) = 0$. Тогда условие однозначности (9) преобразуется к виду

$$s = a^2/(1-2a). \tag{16}$$

Вычисляя в (10) интеграл, получим

$$\frac{l}{L} = \frac{2(a+s)}{\pi\sqrt{s(s+1)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a(1+s)}{s(1-a)}} + \frac{1}{\pi}\arcsin(1-2a) - \frac{1}{2}. \tag{17}$$

По формуле (11) при $f(c_\kappa, t_\kappa, t) = 0$ найдем

$$\frac{h}{L} = \frac{1}{\pi}\left[2\ln(\sqrt{c} + \sqrt{c+1}) - \frac{2(s+a)}{\sqrt{s(s+1)}} \times \right.$$
$$\left. \times \ln \frac{\sqrt{c(s+1)} + \sqrt{s(c-1)}}{\sqrt{c+s}}\right]. \tag{18}$$

Относительный расход q, как следует из (12), будет вычисляться по формуле

$$q = (c+s)/\sqrt{s(s+1)} - 1. \tag{19}$$

Наконец, из (13) и (14) для коэффициента сопротивления пластинки будем иметь выражение

$$C_x = \frac{1}{l/L}\left\{\frac{(2c-1)(c-a)}{2(c+s)\sqrt{c(c-1)}} + \frac{a+s}{(c+s)^2}\left[\sqrt{c(c-1)} + \sqrt{s(s+1)}\right] - 1\right\}. \tag{20}$$

При численном счете будем фиксировать ряд значений $l/L = m$, где $0 < m < 1$. Тогда, исключая с помощью (16) параметр s из (17), получим уравнение, из которого определим

$$a = 0,5 - 0,25\sqrt{4 - 2[1 + \sin(0,5 + l/L)\pi]} \tag{21}$$

и затем по (16) вычислим значение s. Придавая далее некоторую возрастающую последовательность значений параметру $c > 1$, вычислим по (18)—(20) последовательность величин h/L, q, C_x. Результаты счета

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

представлены в виде графиков на рис. 2, где по оси абсцисс отложены значения $h/l=(l/L)\cdot(1/m)$, по оси ординат — значения C_x и q, сплошные линии соответствуют C_x, пунктирные — q.

Отметим еще, что для неограниченного потока $(l/L=0)$ параметр $s=\infty$, тогда, как следует из (16) или (21), $a=0{,}5$ и расчетные формулы принимают вид

$$l=N/2v_0,\quad h/l=2\sqrt{c\,(c-1)};$$

$$C_x=\pi\,(\sqrt{c}-\sqrt{c-1})^2\cdot[(c-a)/\sqrt{c\,(c-1)}-1].$$

Зависимость C_x от h/l для неограниченного потока также приведена на рис. 2.

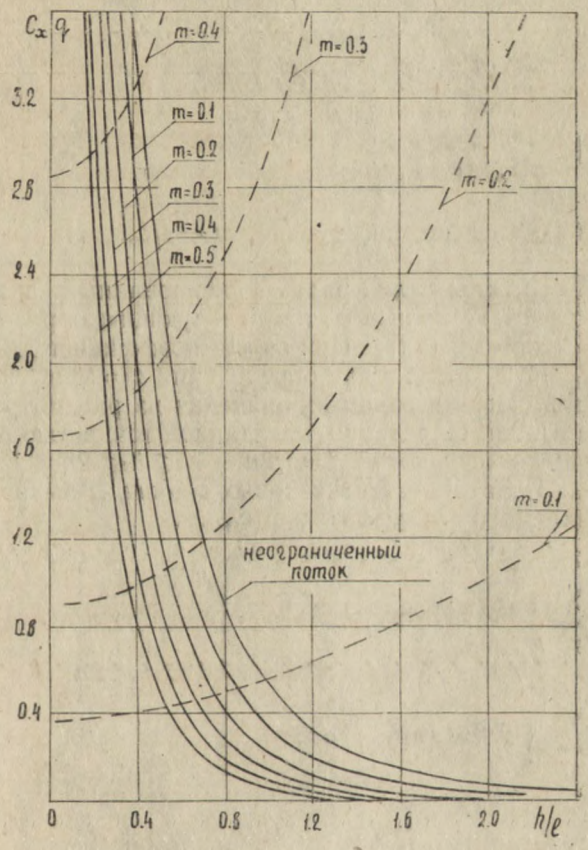

Рис. 2

В общем случае обтекания дуги окружности для определения параметров a, s, $c_к$ решается система уравнений, состоящая из (9), (10), (15), причем представляются эти уравнения в виде, удобном для использования метода простой итерации:

$$\left.\begin{aligned} &a=\sqrt{s\,(s+1)}\cdot\exp\{f(c_к,\ t_к,\ -s)\}-s\\ &s=-0{,}5\sqrt{0{,}25+u};\\ &c_к=1/2-(l_к/l)\cdot(\alpha/\pi),\ к=\overline{1,\ 2n-1,}\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

где

$$
\left.
\begin{aligned}
u &= \left\{ \frac{m\pi + \int\limits_{-\pi/2}^{\varphi_n} \exp\{f(c_\kappa,\ t_\kappa,\ t)\}\, d\varphi}{\int\limits_{-\pi/2}^{\varphi_n} [\exp\{f(c_\kappa,\ t_\kappa,\ t)\}/(t+s)]\, d\varphi} \cdot \exp\{-f(c_\kappa,\ t_\kappa,\ -s)\} \right\}^2; \\
\frac{l_\kappa}{l} &= \frac{1}{\pi m} \int\limits_{-\pi/2}^{\varphi_\kappa} \Phi(\varphi)\, d\varphi,\ 1 \leqslant \kappa \leqslant n; \\
\frac{l_\kappa}{l} &= \frac{1}{\pi m} \int\limits_{\varphi_\kappa}^{\pi/2} \Phi(\varphi)\, d\varphi,\ n+1 \leqslant \kappa \leqslant 2n-1; \\
\Phi(\varphi) &= \frac{|a-t|}{s+t} \exp\{f(c_\kappa,\ t_\kappa,\ t)\}; \\
t &= 0{,}5\,(1+\sin\varphi),\ \varphi_\kappa = \arcsin(2t_\kappa - 1),\ m = l/L.
\end{aligned}
\right\} \qquad (23)
$$

Численные расчеты для ряда фиксированных значений α и m ($0<\alpha<2\pi$, $0<m<1$) производятся следующим образом. Полагаем $n=1$ и решаем систему (22). При $n=1$ коэффициенты c_κ известны ($c_0=c_2=1/2$, $c_1=1/2-\alpha/\pi$), а для определения $a=t_n$ и s из (22) в качестве первого приближения берем их значения из рассмотренного случая обтекания пластинки. Определив с заданной точностью a и s, находим значения t_j, при которых $l_j/l=j/2n$, $1 \leqslant j \leqslant 2n$, $l_j/l=(2-j/2n)$, $2n+1 \leqslant j \leqslant 4n-1$. Затем в этих узловых точках t_j вычисляем координаты x_j, y_j обтекаемого контура по формулам.

$$
\left.
\begin{aligned}
x_j &= \frac{\alpha}{\pi m} \sum_{\nu=1}^{j} \int\limits_{\varphi_{\nu-1}}^{\varphi_\nu} \Phi(\varphi) \cos\theta(t)\, d\varphi, \\
y_j &= \frac{\alpha}{\pi m} \sum_{\nu=1}^{j} \int\limits_{\varphi_{\nu-1}}^{\varphi_\nu} \Phi(\varphi) \sin\theta(t)\, d\varphi,
\end{aligned}
\right\} \quad 1 \leqslant j \leqslant 2n;
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
x_j &= 1 - \cos\alpha - \frac{\alpha}{\pi m} \sum_{\nu=2n+1}^{j} \int\limits_{\varphi_{\nu-1}}^{\varphi_\nu} \Phi(\varphi) \cos\theta(t)\, d\varphi, \\
y_j &= \sin\alpha - \frac{\alpha}{\pi m} \sum_{\nu=2n+1}^{j} \int\limits_{\varphi_{\nu-1}}^{\varphi_\nu} \Phi(\varphi) \sin\theta(t)\, d\varphi,
\end{aligned}
\right\} \quad 2n+1 \leqslant j \leqslant 4n-1,
$$

где под x_j, y_j понимаются координаты обтекаемого контура, отнесенные к радиусу окружности R, выражение для $\theta(t)$ на каждом отрезке $[t_{\kappa-1}, t_\kappa]$, $\kappa=\overline{1,\ 2n}$ берется в форме (2) и t, φ_ν, $\Phi(\varphi)$ имеют значения, указанные в (23).

Вычисленные координаты y_j сравниваем с координатами окружности $\tilde{y}_j = \sqrt{1-(x_j-1)^2}$. При совпадении с заданной точностью ε коорди-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

нат y_j и $\widetilde{y_j}$ вычисляем по (11), (12), (14) для ряда значений $c>1$ величины h/L, q, C_x и строим соответствующие графики. Если $|y_j-\widetilde{y_j}|>\varepsilon$ хотя бы в одной узловой точке t_j, то по (15) для $\kappa=j=\overline{1,4n-1}$ вычисляем первые приближения к c_κ в узлах t_κ, удваиваем n и снова решаем уже расширенную систему (22). Процесс удвоения числа узлов t_κ и соответствующего увеличения числа уравнений (22) продолжаем до тех пор, пока удовлетворится неравенство $|y_\kappa-\widetilde{y_\kappa}|<\varepsilon$ во всех узлах. Вычисления показывают, что при $n=8$ $|y_\kappa-\widetilde{y_\kappa}|<0{,}02$ для $\kappa=\overline{1,15}$. Для некоторых α и m значения s, t_κ, при которых $l_\kappa/l\approx\kappa/8$, $\kappa=\overline{1,8}$, $l_\kappa/l\approx(2-\kappa/8)$, $\kappa=\overline{9,15}$, и соответствующие величины c_κ приведены в таблице. Зависимость C_x и q от $h/R=(h/L)\cdot(\alpha/m)$ отражена графиками на рис. 3, где приняты соглашения, использованные на рис. 2.

Из приведенных графиков видно, что для всякого фиксированного α и m и соответствующего расхода коэффициент сопротивления неограниченно возрастает, если источник приближается к обтекаемому контуру, и убывает до нуля при удалении источника на бесконечность.

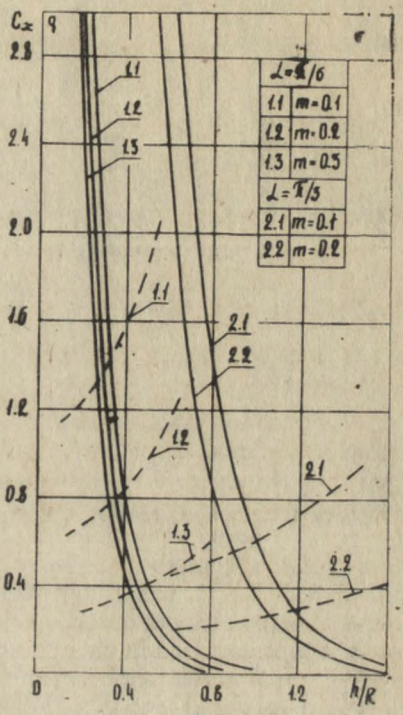

Рис. 3

t_κ	$\alpha=\pi/6$			c_κ	$\alpha=\pi/3$		c_κ
	$m=0.1$	$m=0.2$	$m=0.3$		$m=0,1$	$m=0,2$	
	$s=1,133$	$s=0,380$	$s=0,154$		$s=1,111$	$s=0,385$	
t_1	0,004	0,003	0,002	0,48	0,005	0,004	0,46
t_2	0,016	0,011	0,007	0,46	0,023	0,017	0,42
t_3	0,039	0,026	0,017	0,44	0,051	0,036	0,39
t_4	0,077	0,048	0,031	0,42	0,098	0,065	0,34
t_5	0,121	0,088	0,054	0,40	0,172	0,117	0,30
t_6	0,192	0,120	0,082	0,38	0,257	0,179	0,26
t_7	0,284	0,208	0,159	0,35	0,364	0,289	0,21
t_8	0,553	0,476	0,396	0,33	0,684	0,617	0,17
t_9	0,774	0,736	0,695	0,35	0,881	0,856	0,20
t_{10}	0,871	0,834	0,782	0,37	0,932	0,897	0,24
t_{11}	0,914	0,887	0,855	0,39	0,960	0,949	0,29
t_{12}	0,948	0,932	0,913	0,41	0,976	0,969	0,33
t_{13}	0,974	0,966	0,956	0,44	0,988	0,981	0,37
t_{14}	0,987	0,983	0,980	0,46	0,994	0,992	0,41
t_{15}	0,997	0,996	0,995	0,48	0,998	0,998	0,46

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979. — 536 с.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.—Л., 1951.— 736 с.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ЛАМИНАРНЫЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ЧАСТИЧНО ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. И. Бородин, С. В. Пейгин

Исследованию плоских и осесимметричных пограничных слоев посвящено большое количество работ, и к настоящему времени в понимании проблем, возникающих при решении этих задач, достигнут определенный прогресс. Значительно продвинуто вперед и решение задачи о течении газа в пространственном ламинарном пограничном слое на непроницаемой поверхности. В настоящее время имеется ряд работ как советских [1—3], так и зарубежных [4, 5] авторов, посвященных этому вопросу. Краткий обзор имеется в [6]. В то же время течение в трехмерном пограничном слое на проницаемой поверхности изучено значительно слабее, хотя актуальность таких исследований, особенно в связи с прикладными аспектами таких задач, несомненна.

В последнее время появился ряд работ [7—9], в которых асимптотическими и численными методами получено решение уравнений пространственного пограничного слоя в случае, когда вектор скорости вдува (отсоса) является непрерывной функцией координат поверхности. Данные исследования показали, что наличие массообмена на поверхности тела существенно влияет на основные характеристики потока и во многих случаях может качественно менять характер течения газа в пограничном слое.

В настоящей работе в широком диапазоне изменения определяющих параметров задачи проведено исследование течения в пространственном ламинарном пограничном слое с двумя плоскостями симметрии на частично проницаемой поверхности. Последнее обстоятельство связано с тем, что в ряде практически важных случаев вдув происходит на ограниченной площади поверхности обтекаемого тела. Показано, что наличие разрыва в граничных условиях приводит к существенному изменению характера течения в пограничном слое. В частности, получено, что в отличие от случая непрерывной зависимости вектора скорости вдува от координат поверхности максимум теплового потока смещается в окрестность линии разрыва граничных условий.

Постановка задачи

Рассмотрим стационарное течение в ламинарном пространственном пограничном слое на затупленном теле, обтекаемом сверхзвуковым потоком газа. Введем криволинейную систему координат (ξ, η, ζ), связанную с поверхностью тела так, что начало координат находится в точке

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

максимума давления, $\zeta=0$ — поверхность тела; $\zeta=\text{const}$ — семейство параллельных телу поверхностей; ξ и η — координаты на поверхности тела. Уравнения сжимаемого пространственного пограничного слоя имеют вид [6]:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\rho\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}\,u\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\rho\sqrt{\frac{g}{g_{22}}}\,w\right)+\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\rho v=0; \tag{1}$$

$$\frac{u}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{w}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial u}{\partial\eta}+v\frac{\partial u}{\partial\zeta}+A_1u^2+A_2w^2+A_3uw=$$
$$=\frac{A_4}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right),$$
$$\frac{\partial p}{\partial\zeta}=0;$$

$$\frac{u}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial w}{\partial\xi}+\frac{w}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial w}{\partial\eta}+v\frac{\partial w}{\partial\zeta}+B_1u^2+B_2w^2+B_3uw=$$
$$=\frac{B_4}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right);$$

$$c_p\frac{\rho u}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial T}{\partial\xi}+c_p\frac{\rho w}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial T}{\partial\eta}+c_p\rho v\frac{\partial T}{\partial\zeta}=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial\zeta}\right)+\frac{\mu}{\sigma}$$
$$+\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\frac{u}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial p}{\partial\xi}+\frac{w}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial p}{\partial\eta}\right)+2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)^2+\right.$$
$$\left.+2\cos\psi\,\frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right],$$

$$p=\rho T;\ \sigma=\mu c_p/\lambda;\ \mu=T^{\omega};\ g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2;$$

$$\cos\psi=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

Здесь $\xi=\xi^*/L$, $\eta=\eta^*/L$, $\zeta=\zeta^*(\mathrm{Re})^{1/2}/L$ — независимые переменные; u_mu, u_mw, $u_mv(\mathrm{Re})^{-1/2}$ — физические составляющие вектора скорости в направлениях ξ, η, ζ соответственно ($u_m=\sqrt{2c_pT_0}$); T_0T — температура; $\rho_0\rho$ — плотность; p_0p — давление; $\mu_0\mu$ — динамический коэффициент вязкости; c_p — коэффициент теплоемкости; σ — число Прандтля; $\mathrm{Re}=Lu_m\rho_0/\mu_0$ — число Рейнольдса; γ — показатель адиабаты; L — характерный размер тела; индекс 0 относится к параметрам в критической точке; g_{ij} — ковариантные составляющие основного метрического тензора. Коэффициенты A_i, B_i определяются следующим образом:

$$A_1=\frac{g_{12}}{g}\left[\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial\eta}+\frac{g_{12}}{g_{11}}\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial\xi}-\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial g_{12}}{\partial\xi}\right];$$

$$A_2=\frac{\sqrt{g_{11}}}{g}\left[\frac{\partial g_{12}}{\partial\eta}-\sqrt{g_{22}}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial\xi}-\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial\eta}\right];$$

$$A_3=\frac{1}{g}\left[\sqrt{g_{11}g_{22}}\left(1+\frac{g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}\right)\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial\eta}-2g_{12}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial\xi}\right];$$

$$A_4=-\frac{g_{22}\sqrt{g_{11}}}{g}\frac{\partial p}{\partial\xi}+\frac{g_{12}\sqrt{g_{11}}}{g}\frac{\partial p}{\partial\eta};$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$B_1 = \frac{\sqrt{g_{22}}}{g}\left[\frac{\partial g_{12}}{\partial \xi} - \sqrt{g_{11}}\frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \eta} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \xi}\right];$$

$$B_2 = \frac{g_{12}}{g}\left[\frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi} + \frac{g_{12}}{g_{22}}\frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \eta} - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial g_{12}}{\partial \eta}\right];$$

$$B_3 = \frac{1}{g}\left[\sqrt{g_{11}g_{22}}\left(1 + \frac{g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}\right)\frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi} - 2g_{12}\frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \eta}\right];$$

$$B_4 = -\frac{g_{11}\sqrt{g_{22}}}{g}\frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{g_{12}\sqrt{g_{22}}}{g}\frac{\partial p}{\partial \xi}.$$

Распределение давления p по поверхности обтекаемого тела считается в задачах пограничного слоя известным. Граничные условия для системы (1) следующие: на поверхности тела ($\zeta=0$) $u=0$, $w=0$, $\rho v = \rho_w v_w$, $T = T_w$: на внешней границе пограничного слоя должны быть заданы асимптотические условия ($\zeta\to\infty$): $u\to u_e(\xi, \eta)$, $w\to w_e(\xi, \eta)$, $T\to T_e(\xi, \eta)$.

Сведение системы уравнений трехмерного пограничного слоя к виду, удобному для численного интегрирования

Введем новые функции ψ_1 и ψ_2:

$\rho u\sqrt{\frac{g}{g_{11}}} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta}$; $\rho w\sqrt{\frac{g}{g_{22}}} = \frac{\partial \psi_2}{\partial \zeta}$, тогда из уравнения неразрывности следует $-\rho v\sqrt{g} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta}$.

Перейдем к переменным типа Дородницына по формулам:

$$\bar{u} = \frac{u}{u_e};\ \bar{w} = \frac{w}{w_e};\ \theta = \frac{T}{T_e};$$

$$\bar{\xi} = \xi;\ \bar{\eta} = \eta;\ \bar{\zeta} = \frac{u_e}{\xi}\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}\int_0^\zeta \rho d\zeta,$$

получим следующую систему (черту опускаем):

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(l\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) = \alpha_1(uu'_\xi - u'_\zeta\varphi'_{1\xi}) + \alpha_2(wu'_\eta - u'_\zeta\varphi'_{2\eta}) - u'_\zeta(\alpha_3\varphi_1 + \alpha_4\varphi_2) + \beta_1(u^2 - \rho_e/\rho) + \beta_2(w^2 - \rho_e/\rho) + \beta_3(uw - \rho_e/\rho);$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(l\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) = \alpha_1(uw'_\xi - w'_\zeta\varphi'_{1\xi}) + \alpha_2(ww'_\eta - w'_\zeta\varphi'_{2\eta}) - w'_\zeta(\alpha_3\varphi_1 + \alpha_4\varphi_2) + \beta_4(w^2 - \rho_e/\rho) + \beta_5(u^2 - \rho_e/\rho) + \beta_6(uw - \rho_e/\rho); \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{l}{\sigma}\frac{\partial \theta}{\partial \zeta}\right) + \alpha_5 l\left[(u'_\zeta u_e)^2 + (w'_\zeta w_e)^2 + 2g_{12}u_e w_e\frac{u'_\zeta w'_\zeta}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\right] = \alpha_1(u\theta'_\xi - \theta'_\zeta\varphi'_{1\xi}) + \alpha_2(w\theta'_\eta - \theta'_\zeta\varphi'_{2\eta}) - \theta'_\zeta(\alpha_3\varphi_1 + \alpha_4\varphi_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\varphi_1 = u;$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\varphi_2 = w.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Здесь введены следующие обозначения:

$$l=\frac{\mu\rho}{\mu_e\rho_e};\ \alpha_1=\frac{u_e}{A\sqrt{g_{11}}};\ \alpha_2=\frac{w_e}{A\sqrt{g_{22}}};\ \alpha_3=\frac{u_e}{\xi\sqrt{g_{11}}A};$$

$$\alpha_4=\alpha_3\alpha'_\eta;\ \alpha=\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\frac{\xi w_e}{u_e};\ \alpha_5=\frac{2}{T_e};$$

$$\beta_1=(A_1u_e+u'_{e\xi}/\sqrt{g_{11}})/A;\ \beta_2=\frac{B_2w_e^2}{Au_e};$$

$$\beta_3=(2A_3w_e+w'_eu'_{e\eta}/(u_e\sqrt{g_{22}}))/A;$$

$$\beta_4=(B_2w_e+w'_{e\eta}/\sqrt{g_{22}})/A;$$

$$\beta_5=\beta_1u_e^2/(w_eA),\ \beta_6=(2B_3u_e+u_ew'_{e\xi}/(w_e\sqrt{g_{11}})/A,$$

$$A=\frac{g}{g_{11}}\mu_e\rho^e\left(\frac{u_e}{\xi}\right)^2.$$

Граничные условия для системы (2) следующие:

$$\zeta=0:\ u=0,\ w=0,\ \theta=\theta_w,\ (\xi\varphi_1)'_\xi+(\alpha\varphi_2)'_\eta=-\sqrt{g}\rho_wv_w\equiv F_W;$$
$$\zeta\to\infty:\ u\to1;\ w\to1,\ \theta\to1. \tag{3}$$

Для численного решения системы уравнений (2) с граничными условиями (3) использовалась неявная четырехточечная разностная схема с точностью аппроксимации $0(\Delta\zeta^4)+0(\Delta\xi)+0(\Delta\eta)$, представляющая собой обобщение на пространственный случай схемы Петухова [10].

При конкретных расчетах ξ и η выбирались следующим образом. Пусть $z=\Phi(x,\ y)$ — уравнение поверхности обтекаемого тела в декартовой системе координат. Введем следующую параметризацию поверхности: $x=\xi;\ y=\eta;\ z=\Phi(\xi,\ \eta)$. При этом компоненты основного метрического тензора имеют вид

$$g_{11}=1+(\Phi'_\xi)^2;\ g_{22}=1+(\Phi'_\eta)^2;\ g_{12}=\Phi'_\xi\Phi'_\eta.$$

Рассматривалось течение однородного сжимаемого газа в ламинарном пограничном слое около эллиптических параболоидов (уравнение $z=\frac{1}{2}(R_1^2x^2+R_2^2y^2)$) и трехосных эллипсоидов $\left(\text{уравнение }\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right)$, обтекаемых под нулевым углом атаки.

На внешней границе пограничного слоя расчет параметров производился численно конечно-разностным методом. Давление задавалось по модифицированной формуле Ньютона $p=\cos^2\varphi$, где φ — угол между вектором скорости набегающего потока и вектором внешней нормали к телу.

Разрывный характер параметра $(\rho v)_w$ моделировался двумя способами следующим образом:

а) $(\rho v)_w=\begin{cases}e=\text{const}\neq0; & \xi\leqslant\xi(d),\ \eta\leqslant\eta(d);\\ 0, & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$

б) $(\rho v)_w=\begin{cases}e=\text{const}\neq0, & \xi\leqslant d,\ \eta-\text{любое;}\\ 0, & \xi>d,\ \eta-\text{любое,}\end{cases}$

где параметры e и d характеризовали удельный расход вдуваемого газа и геометрические размеры проницаемого участка поверхности соответственно.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Отметим, что в окрестности разрыва граничных условий обычные предположения теории пограничного слоя нарушаются. Однако аналогично работе [11] будем считать, что влияние разрыва граничных условий ограничено достаточно малой окрестностью линии разрыва. Это предположение подтверждается также и экспериментальными данными [12].

Результаты расчетов

Прежде всего рассмотрим случай течения однородного газа в окрестности критической точки двоякой кривизны. Единственным параметром, характеризующим геометрию тела, является величина $\kappa = R_2/R_1$ $(0 < \kappa < 1)$ — отношение радиусов главных кривизн в критической точке. Расчеты показали, что если абсолютные значения теплового потока $q = \lambda \dfrac{\partial T}{\partial \zeta}$ и компонент напряжения трения на поверхности $\tau_\xi = \dfrac{\mu}{\xi} \dfrac{\partial u}{\partial \zeta}$, $\tau_\eta = \dfrac{\mu}{\eta} \dfrac{\partial w}{\partial \zeta}$ сильно зависят от температуры поверхности θ_w и параметров F, κ, ω, γ, то относительные величины $q_0 = q/q|_{F_w=0}$, $\tau_{\xi^0} = \tau_\xi/\tau_\xi|_{F_w=0}$, $\tau_{\eta^0} = \tau_\eta/\tau_\eta|_{F_w=0}$ являются более консервативными и меняются в гораздо меньших пределах. Например, если величины q, τ_ξ, τ_η, подсчитанные при $\theta_w = 0{,}25$ и при $\theta_w = 0{,}05$ ($F_w = -0{,}25$), менялись на 7; 45; 40 %, то изменение q_0, τ_{ξ^0}, τ_{η^0} для этих же значений параметров составляло 1,5; 3; 1 % соответственно. Некоторое представление о полученных закономерностях дает рис. 1, где представлены распределения q_0 в зависимости от F_w для различных значений θ_w, κ, ω и γ. Здесь $\theta_w = 0{,}1$; $\omega = 0{,}5$; $\gamma = 1{,}4$; $\kappa = 0{,}183$; 0,5, 0,9 — линии 1 — 3 соответственно; $\theta_w = 0{,}1$; $\omega = 0{,}5$; $\gamma = 1{,}1$; $\kappa = 0{,}183$ — линия 4; $\theta_w = 0{,}25$; $\omega = 0{,}5$ $\gamma = 1{,}4$; $\kappa = 0{,}183$ — линия 5; $\theta_w = 0{,}1$; $\omega = 1$; $\gamma = 1{,}4$; $\kappa = 0{,}183$ — линия 6. Расчеты показали, что величина q_0 слабо зависит от температуры поверхности θ_w ($\theta_w < 0{,}3$). Зависимость же параметров τ_{ξ^0} и τ_{η^0} от θ_w является более сильной.

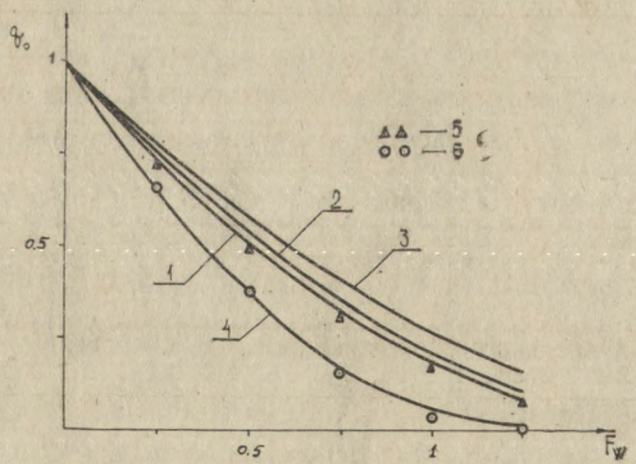

Рис. 1

Укажем теперь характерные особенности течения газа в пограничном слое на частично проницаемой поверхности затупленного тела с двумя плоскостями симметрии. Прежде всего расчеты показали, что разрыв-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ный характер граничных условий оказывает существенное влияние на основные характеристики течения и значительно усложняет структуру течения. Во-первых, необходимо отметить изменение характера вторичных течений внутри пограничного слоя при переходе с проницаемого участка поверхности на непроницаемый. Это видно, например, из рис. 2, где приведены профили безразмерной скорости $W = W^* V_e / (u_e w_e \sin\psi)$ поперек пограничного слоя в плоскости симметрии эллипсоида ($a = 0{,}3$;

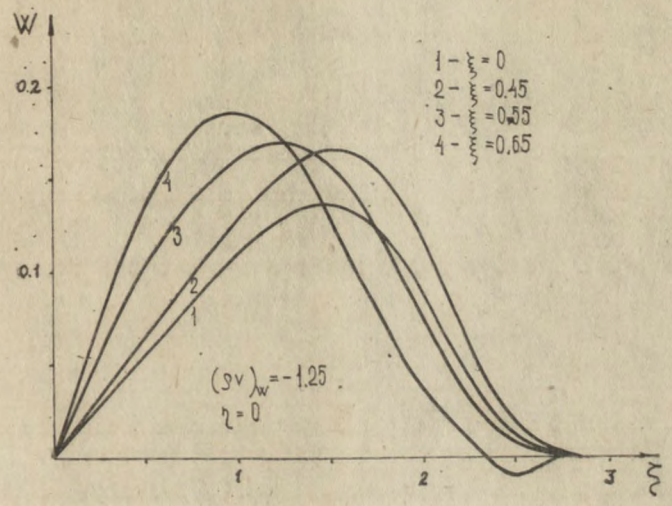

Рис. 2

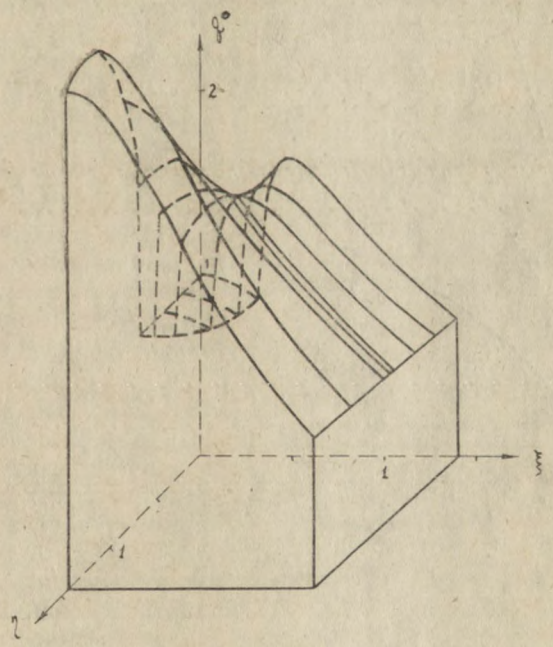

Рис. 3

$b = 0{,}7$; $c = 1$) для различных ξ. Здесь V_e — модуль вектора скорости на внешней границе пограничного слоя; W^* — проекция вектора скорости на нормаль к линии тока внешнего невязкого течения на поверхности тела. Во-вторых, в данном случае нарушается монотонный характер зависимости относительного теплового потока $q^0 = q_w(\xi, \eta)/q_w(0, 0)$ и отно-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

сительных компонент напряжения трения $\overset{\circ}{\tau_\xi} = \tau_\xi(\xi, \eta)/\tau_\xi(0, 0)$; $\overset{\circ}{\tau_\eta} = \tau_\eta(\xi, \eta)/\tau_\eta(0, 0)$, который имеет место при непрерывной зависимости па-

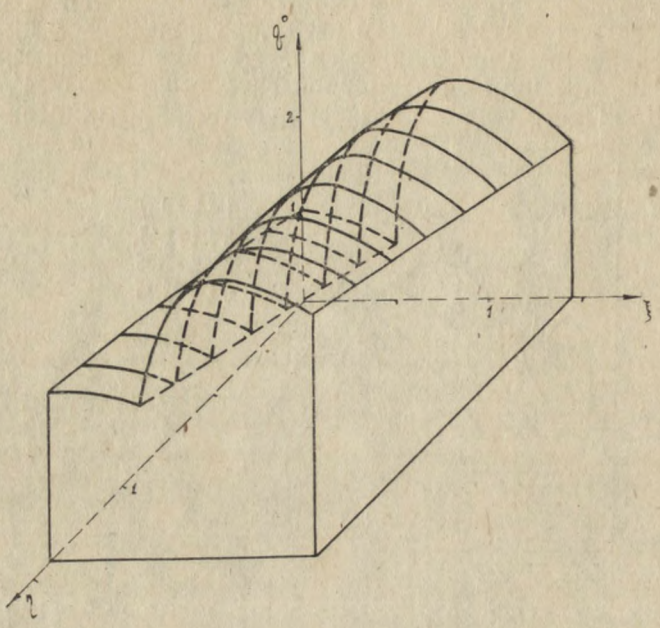

Рис. 4

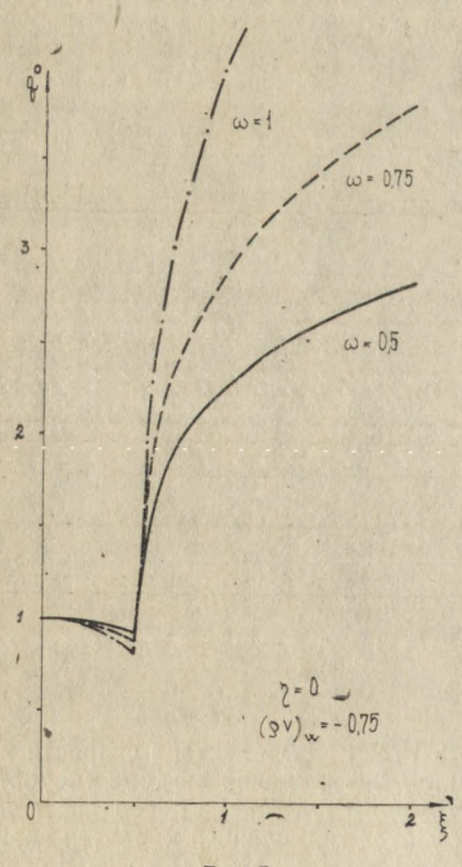

Рис. 5

раметра вдува от координат поверхности [9]. Характерные распределения q^0 вдоль поверхности эллиптического параболоида ($R_1=1$, $R_2=0{,}5$) для случая задания вдува в виде а) ($e=-0{,}75$; $d=0{,}5$) и б) ($e=-0{,}75$; $d=0{,}5$) приведены на рис. 3—4 соответственно. Из расчетов, проведенных в достаточно широком диапазоне изменения определяющих параметров задачи, видно, что в окрестности границы проницаемого участка в распределениях q^0, $\overset{\circ}{\tau}_\xi$, $\overset{\circ}{\tau}_\eta$ появляется локальный максимум. Величина этого максимума в сильной степени зависит от силы вдува, а также от геометрических размеров проницаемого участка поверхности.

Анализ полученных результатов показал, что при прочих равных условиях эффективность тепловой завесы увеличивается, если проницаемый участок находится там, где радиусы главных кривизн обтекаемой поверхности минимальны.

Ранее в работе [9] было показано, что на непроницаемой поверхности, а также при малых

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

и умеренных значениях вдува ($F_w = \text{const} > -0.2$) величины q^0, τ^0_ξ, τ^0_η слабо зависят от параметров θ_w ($\theta_w = \text{const} < 0{,}5$), ω и γ. В случае обтекания частично проницаемой поверхности такая зависимость становится уже существенной. Это наглядно показывает рис. 5, где приведено распределение q^0 вдоль плоскости симметрии эллипсоида ($a = 0{,}3$; $b = 0{,}7$; $c = 1{,}0$) для различных значений параметра ω. Видно, что тепловой поток при $\omega = 0{,}5$ и $\omega = 1{,}0$ может отличаться более чем в два раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Введенская Н. Д. О трехмерном ламинарном пограничном слое на затупленном теле. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 5, с. 36—40.

2. Андреев Г. Н., Шевелев Ю. Д. О пространственном пограничном слое на сегментальном теле при сверхзвуковых скоростях. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 3, с. 41—48.

3. Тирский Г. А., Шевелев Ю. Д. О методе последовательных приближений для задач трехмерного пограничного слоя (локальноавтомодельный случай). — ПММ, т. 37, № 6, 1973, с. 974—983.

4. Wang K. C. Three — dimensional boundary layer near the symmetry of a spheriod at incidence, J. Fluid Mech., 43, № 1, 1970.

5. Blottner F. G., Ellis Molly A. Finite — difference solution of the incompressible three — dimensional boundary layed equations for a blunt body, Comput. and Fluids, 1, № 2, 1973.

6. Шевелев Ю. Д. Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. — М.: Наука, 1977. — 224 с.

7. Тирский Г. А. Определение тепловых потоков в окрестности критической точки двоякой кривизны при обтекании тела диссоциирующим газом произвольного химического состава. — ПМТФ, 1965, № 1, с. 45—56.

8. Гершбейн Э. А. Асимптотическое решение уравнений трехмерного пограничного слоя при сильном вдуве.. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 2, с. 47—56.

9. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Исследование пространственного пограничного слоя на затупленных телах с проницаемой поверхностью. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 3, с. 49—58.

10. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. — В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964, с. 304—325.

11. Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Ламинарный пограничный слой на частично подвижной поверхности при наличии вдува или отсоса. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 5, с. 28—36.

12. Tennant T. S., Gang T. Turbulent bounlary — layer flow from stationary to moving surfaces, AIAA Journal, vol. 11, № 8.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

МЕТОД РАСЧЕТА ДВУМЕРНОГО ГИПЕРЗВУКОВОГО НЕВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ НА ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛАХ

С. В. Пейгин, В. В. Русаков, Г. А. Тирский

Предлагается приближенный экономичный метод расчета течений невязкого газа в двумерном ударном слое около гладких затупленных тел. Путем сравнения с результатами других авторов показано, что наряду с экономичностью предлагаемый метод обладает удовлетворительной точностью. В качестве примера приведены результаты расчета осесимметричного невязкого ударного слоя около тел различной формы.

Практическая важность и актуальность расчета обтекания затупленных тел сверхзвуковым потоком газа стимулировали интенсивное развитие разнообразных методов решения этой сложной в математическом отношении задачи, поэтому в настоящее время имеется ряд численных методов ее решения [1—3]. Достаточно полный обзор на эту тему приведен в работе [4]. Однако на практике при проведении конструкторских разработок, требующих расчета большого количества вариантов, применение данных методов ведет к неоправданно большим затратам машинного времени и является неэкономичным.

В данной работе решение уравнений невязкого ударного слоя вначале ищется в дозвуковой области течения. При этом используется приближенный метод, основанный на наличии в задаче малого параметра $\varepsilon=\rho_\infty/\rho_s$ и близости профилей скоростей поперек ударного слоя к линейным [5]. В сверхзвуковой части течения решение полных уравнений Эйлера ищется численно, с помощью программы, созданной на основе конечно-разностной схемы Мак-Кормака [6, 7].

1. Математическая постановка задачи

Введем криволинейную ортогональную систему координат $\{x, y\}$, нормальным образом связанную с поверхностью обтекаемого тела. Исследуемое течение в данной системе координат будет описываться системой уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^\nu \rho v_1)+\frac{\partial}{\partial y}(H_1 r^\nu \rho v_2)=0;$$

$$\rho\left(\frac{v_1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial x}+v_2\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{v_1 v_2}{RH_1}\right)=-\frac{1}{H_1}\frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\rho\left(\frac{v_1}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial x}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial y}-\frac{v_1^2}{RH_1}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}; \qquad (1)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$\frac{v_1^2+v_2^2}{2}+h=\text{const};$$

$$\frac{p}{\rho}=\frac{\gamma-1}{\gamma}h;$$

$$\frac{dy_s}{dx}=H_{1s}\operatorname{tg}\beta_s,\ \beta_s=\beta-\alpha,\ H_1=1+y_s/R.$$

Здесь $\rho_\infty\rho$, $\rho_\infty V_\infty^2 p$, $V_\infty v_1$, $V_\infty v_2$, $V_\infty^2 h$ — плотность, давление, энтальпия, компоненты вектора скорости в направлениях x и y соответственно. Линейные размеры отнесены к радиусу кривизны тела в критической точке R_0; γ — показатель адиабаты; $\nu\neq 0{,}1$ соответственно для плоского и осесимметричного случаев; r — расстояние от рассматриваемой точки течения до оси симметрии; $\alpha(x)$ — угол между касательной к контуру тела и осью симметрии; $\beta(x)$ — угол между касательной к контуру ударной волны и осью симметрии; R — радиус кривизны тела. Индексы s, w, ∞ относятся к параметрам за ударной волной, на поверхности тела и в набегающем потоке соответственно.

Граничные условия следующие:

$$v_{1s}=\cos\beta_s\cos\beta+\varepsilon\sin\beta\sin\beta_s;$$

$$v_{2s}=\cos\beta\sin\beta_s-\varepsilon\sin\beta\cos\beta_s;$$

$$p_s=\frac{1}{\gamma M_\infty^2}+(1-\varepsilon)\sin^2\beta,\ \varepsilon=\frac{1}{\rho_s};\qquad(2)$$

$$h_s+\frac{v_{1s}^2+v_{2s}^2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{(\gamma-1)M_\infty^2};$$

$$v_{2w}=0.$$

2. Решение в дозвуковой области

Поставленную задачу (1)—(2) будем решать отдельно в дозвуковой и сверхзвуковой областях. Перейдем в (1) к переменным Дородницына—Лиза [8]:

$$\xi=x,\ \eta=\frac{1}{\Delta}\int_0^y\rho\bar{r}^\nu dy;$$

$$\Delta(x)=\int_0^{y_s}\rho\bar{r}^\nu dy,\ \bar{r}=\frac{r}{r_w}=1+\frac{\cos\alpha}{r_w}y.\qquad(3)$$

Используя уравнение неразрывности, введем приведенную функцию тока $f(\xi,\eta)$:

$$f(\xi,\eta)=\frac{\psi(x,y)}{b(x)},\ d\psi=-\rho H_1 r^\nu v_2 dx+\rho r^\nu v_1 dy,$$

$$b(x)=e\cos\alpha r_w^\nu\Delta.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

В новых переменных основные уравнения и граничные условия примут вид

$$u=\frac{\partial f}{\partial \eta},\quad \rho(K_1u+K_2v)=-(\beta f+xf'_x),$$

$$\beta_1u^2+K_3uv+xu\frac{\partial u}{\partial x}-(\beta f+xf'_x)\frac{\partial u}{\partial \eta}=$$

$$=-\frac{1}{\rho e^2\cos^2\alpha}\left(x\frac{\partial p}{\partial x}+\rho K_1\frac{\partial p}{\partial \eta}\right);$$

$$\beta_2uv-\frac{1}{K_4}u^2+xu\frac{\partial v}{\partial x}-(\beta f+xf'_x)\frac{\partial v}{\partial \eta}=$$

$$=-\frac{1}{K_5}\frac{\partial p}{\partial \eta};\qquad (4)$$

$$\frac{p}{\rho}=\frac{\gamma-1}{2\gamma}(1-e^2\cos^2\alpha u^2-v_*^2v^2).$$

$$\frac{dy_s}{dx}=H_{1s}\operatorname{tg}\beta_s:\ v_w=0;$$

$$u_s=1;\ v_s=1;\ p_s=\frac{1}{\gamma M_\infty^2}+(1-\varepsilon)\sin^2\beta;$$

$$\frac{v_{1s}}{\cos\alpha}\equiv e=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta_s}(1+\varepsilon\operatorname{tg}^2\beta_s-(1-\varepsilon)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta_s);$$

$$\beta=\frac{d\ln b}{d\ln x};\ K_1=\frac{x}{\rho}\frac{\partial\eta}{\partial x}_y;\ K_2=\frac{xH_1\bar r^\nu}{\Delta}\cdot\frac{v_*}{e\cos\alpha};$$

$$v_*=e\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta_s-\varepsilon\frac{\sin\beta}{\cos\beta_s};\ u_*=e\cos\alpha;$$

$$\beta_1=\frac{d\ln u_*}{d\ln x}\ \beta_2=\frac{d\ln v_*}{d\ln x};\ K_3=\frac{xv_*}{Ku_*};$$

$$K_4=\frac{Rv_*}{xu_*};\ K_5=\frac{u_*v_*\Delta}{xH_1\bar r^\nu};$$

$$u=\frac{v_1}{v_{1s}};\ v=\frac{v_2}{v_{2s}}.$$

В дозвуковой области решение будем искать в виде

$$u=u_w+(1-u_w)\eta,\quad v=\eta,\qquad (5)$$

где $u_w=u_w(x)$ — неизвестная до решения задачи нормированная скорость течения на нулевой линии тока. Вместо уравнения импульсов в проекции на касательную к телу будем использовать соотношение для вихря скорости за ударной волной [9], которое в нашей системе координат примет вид

$$\frac{1}{H_{1s}}\left[\frac{\partial}{\partial y}(H_1v_1)-\frac{\partial v_2}{\partial x}\right]_s=-\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon}\cos\beta\frac{d\beta}{dx_s},\qquad (6)$$

x_s — расстояние до оси симметрии, измеряемое вдоль контура ударной волны.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

В переменных (3) соотношение (6) с учетом (5) примет вид

$$\frac{e\cos\alpha}{H_{1s}R}+\frac{(\nu+1)\,e^2\cos^2\alpha}{2\varepsilon\bar{r}_s r_w}(1-u_w^2)-\frac{v_*\beta_2}{H_{1s}x}-$$

$$-\frac{(\nu+1)\,e\cos\alpha}{\varepsilon\bar{r}_s r_w}\cdot v_*\operatorname{tg}\beta_s\frac{1+u_w}{2}=-\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon}\cos\beta\frac{d\beta}{dx_s},$$

$$\frac{d\beta}{dx_s}=\frac{\cos\beta_s}{H_{1s}}\left(\frac{-e_x'\cos\alpha+\dfrac{1}{R}(\sin\beta\cos\beta_s-\varepsilon\sin\beta_s\cos\beta-e\sin\alpha)}{(1-\varepsilon)(\sin\beta\cdot\cos\beta_s+\cos\beta\cdot\sin\beta_s)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{R}\right). \tag{7}$$

Наряду с граничными условиями будем использовать балансовое соотношение для массы, которое запишем в виде удобном для вычисления e:

$$e=\frac{2\omega(x,\ 1)}{(1-\bar{r}_s^{-(\nu+1)})(u_w+1)},\quad \omega(x,\ \eta)=\int_0^\eta\frac{d\eta}{\rho}. \tag{8}$$

Окончательно система основных уравнений и граничных условий запишется следующим образом:

$$\frac{dy_s}{dx}=H_{1s}\operatorname{tg}\beta_s; \tag{9}$$

$$\operatorname{tg}\beta_s=\frac{(\varepsilon-1)\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{(1-\varepsilon)^2\operatorname{tg}^2\alpha-4(e-\varepsilon)(e-1)}}{2(e-\varepsilon)}; \tag{10}$$

$$u=u_W+(1-u_W)\eta; \tag{11}$$

$$v=\eta; \tag{12}$$

$$C_2=\frac{(\nu+1)\,e^2\cos^2\alpha}{2\varepsilon\bar{r}_s r_w};\quad C_1=\frac{(\nu+1)\,e\cos\alpha v_*\operatorname{tg}\beta_s}{\varepsilon\bar{r}_s r_w};$$

$$C_0=C_1-C_2-\frac{e\cos\alpha}{H_{1s}R}+\frac{v_*\beta_2}{H_{1s}x}-\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon}\cos\beta\frac{d\beta}{dx_s}; \tag{13}$$

$$u_w=\frac{-C_1+\sqrt{C_1^2-4C_2C_0}}{2C_2};$$

$$\frac{p}{K_5}=\frac{(1-\varepsilon)\sin^2\beta}{K_{5s}}-(\beta f+xf_x')(1-v)- \tag{14}$$

$$-\frac{x}{b}\frac{\partial}{\partial x}\int_\eta^1(1-v)\,bu\,d\eta+\beta_2\int_\eta^1 uvd\eta-$$

$$-\frac{x}{Ru_*u_*}\int_\eta^1 N\frac{p}{\rho}d\eta-\frac{1}{K_4}\int_\eta^1 u^2d\eta;$$

$$\rho=\left[\frac{\gamma-1}{2\gamma}\cdot\frac{(1-e^2\cos^2\alpha u^2-v^2{}_*v^2)}{p}\right]^{-1}; \tag{15}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$e = \frac{2\int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\rho}}{(1-\bar{r}_s^{-(\nu+1)})(u_w+1)}. \qquad (16)$$

Неизвестными являются функции $y_s(x)$, $u_w(x)$, $l(x)$, $\mathrm{tg}\beta_s$, $p(x, \eta)$, $\rho(x, \eta)$, $v(x, \eta)$, $u(x, \eta)$. Для их определения имеем систему из 8 уравнений (9)—(16).

Решение данной системы в дозвуковой области проводилось следующим образом. Функция $l(x)$ искалась в виде

$$e = e_0 + e_2 x^2. \qquad (17)$$

При заданных e_0 и e_2, считая $M_\infty \gg 1$, решение данной системы на критической линии $x=0$ находилось отдельно и служило начальным для определения решения во всей области $x>0$. Отметим, что при этом уравнение (9) для определения положения ударной волны интегрировалось отдельно. Решение велось до тех пор, пока течение на последнем луче $x_N^* = N\Delta x$ не становилось сверхзвуковым. В процессе решения вычислялась невязка

$$\tilde{f}_i = e(x_i) - \frac{2\omega(x_i, 1)}{(1-\bar{r}_s^{-(\nu+1)}(x_i))(u_w(x_i)+1)}$$

и определялась функция

$$\Phi(e_0, e_2) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \tilde{f}_i}{N}.$$

Окончательное значение параметром e_0 и e_2 определялось путем минимизации функции $\Phi(e_0, e_2)$. Расчеты показали, что двух неопределенных коэффициентов в (17) достаточно, чтобы по окончании процесса оптимизации получить $e(x)$ с точностью, при которой невязка в (16) ни на одном из шагов по x не превышает единицы третьего знака.

3. Течение в сверхзвуковой области

Для решения уравнений невязкого ударного слоя в сверхзвуковой области использовались полные уравнения газовой динамики, записанные в консервативной форме в следующем матричном виде:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = F. \qquad (19)$$

Здесь $G = G_0$, $Q = gG_0 + qQ_0$, $F = F_0 - \frac{y'_{0s}}{y_{0s}} G_0$;

$$g = -y\frac{y'_{0s}}{y_{0s}}, \quad q = \frac{1}{y_{0s}}, \quad y = \frac{y_0}{y_{0s}}, \quad x = x_0;$$

$$G_0 = \begin{Vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \end{Vmatrix}; \quad Q_0 = H_1 \begin{Vmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ p + \rho v^2 \end{Vmatrix}; \quad F_0 = \begin{Vmatrix} -\rho A \\ -\rho u(xv + A) \\ xp - \rho x u^2 - \rho v A \end{Vmatrix}; \qquad (20)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$A = u\frac{\partial \ln r^{\nu}}{\partial x} + H_1 v\frac{\partial \ln r^{\nu}}{\partial y};$$

$$\rho = \rho_0;\ p = p_0\frac{\gamma\rho_\infty V_\infty^2}{\gamma p_\infty} = p_0\gamma M_\infty^2;\ \varkappa = \frac{1}{R};$$

$$u = V_\infty\sqrt{\frac{\rho_\infty}{p_\infty}}v_{10};\ v = V_\infty\sqrt{\frac{\rho_\infty}{p_\infty}}v_{20},$$

где переменные, введенные в системе (1), обозначены индексом 0.

Интегрирование уравнений (19) производилось численно на основе схемы Мак-Кормака [6, 7] по следующему алгоритму:
предиктор

$$G_l^{(1)} = G_l^m - \frac{\Delta x}{\Delta y}[(1-\varepsilon)\,Q_{l+1}^m - (1-2\varepsilon)\,Q_l^m - \varepsilon Q_{l-1}^m] - \Delta x F_l^m;$$

корректор

$$G_l^{m+1} = 0{,}5\,(G_l^m + G_l^{(1)}) - 0{,}5\left\{\frac{\Delta x}{\Delta y}[\varepsilon Q_{l+1}^{(1)} - (1-2\varepsilon)\,Q_l^{(1)} + (\varepsilon-1)\,Q_{l-1}^{(1)}] - \Delta x H_l^{(1)}\right\}. \qquad (21)$$

Здесь

$$G_l^m = G(x_m,\ y_l),\ Q(G_l^m = Q(G_l^m,\ x_m,\ y_l);$$
$$F_l^m = F(G_l^m,\ x_m,\ y_l),\ Q_l^{(1)} = Q(G_l^{(1)},\ x_{m+1},\ y_l);$$
$$F_l^{(1)} = F(G_l^{(1)},\ x_{m+1},\ y_l),\ x_m = x_n^* + m\Delta x;$$
$$y_l = l\Delta y;\ m \geqslant 0;\ 0 \leqslant l \leqslant L.$$

Параметр ε равнялся либо нулю, либо единице, причем при счете на поверхности тела или ударной волны он выбирался так, чтобы не выйти за пределы счетной области.

В процессе решения определялось значение вектора G в каждом сечении по x, после чего по конечным формулам, следующим из (20), производился расчет u, v, p, ρ. После вычисления по предиктору и нахождения давления p_L^1 на волне с помощью условий Рэнкина — Гюгонио находились другие параметры течения, в том числе и угол наклона скачка α_m^1, после чего отход ударной волны находился по формуле

$$y_s^{(1)}\,y_{sm} + \Delta x\,\mathrm{tg}\,\alpha_m^{(1)}$$

и шаг, связанный с предиктором, считался законченным. Вслед за этим осуществлялся шаг, связанный со схемой «корректор», в котором все параметры пересчитывались в соответствии с давлением p_L^{m+1}, а отход определялся по формуле

$$y_s^{m+1} = y_s^m + 0{,}5\cdot\Delta x\,(\mathrm{tg}\,\alpha_m^{(1)} + \mathrm{tg}\,\alpha_{m+1}).$$

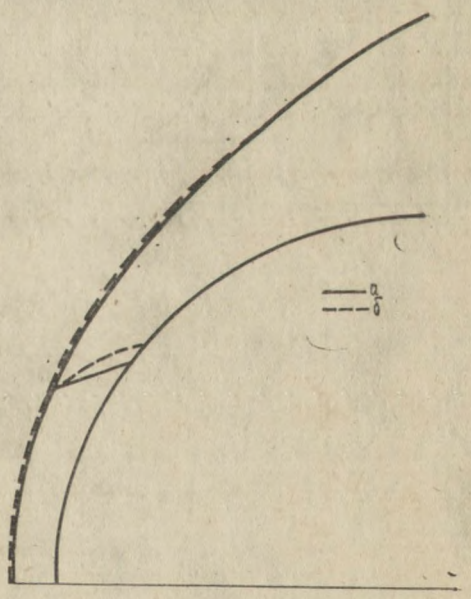

Рис. 1

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Отметим, что после совершения схемы предиктор—корректор вектор скорости на поверхности, вообще говоря, не удовлетворял условию непротекания, поэтому его доворачивали на угол $\Delta\theta = \operatorname{arctg}(v/u)$, а изменение давления в потоке рассчитывалось по формуле

$$\frac{p_{\text{нов}}}{p_{\text{ст}}} = 1 - \frac{\gamma \overline{M}^2}{(\overline{M}^2 - 1)^{1/2}} \Delta\theta + \gamma \overline{M}^2 (\Delta\theta)^2 \times \frac{(\gamma + 1)\overline{M}^2 - 4(\overline{M}^2 - 1)}{4(\overline{M}^2 - 1)},$$

$$\overline{M} = \frac{|V_{\text{ст}}|}{\sqrt{\gamma \frac{p_{\text{ст}}}{\rho_{\text{ст}}}}}.$$

Далее, в предположении равенства энтропии на теле ее значению на линии тока, прошедшей через прямой скачок, находилось новое значение

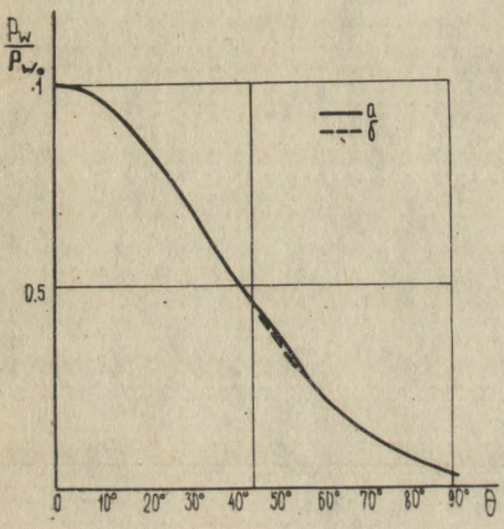

Рис. 2

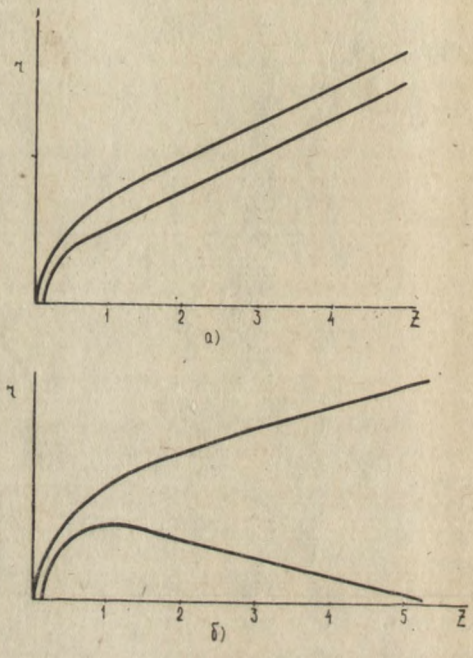

Рис. 3

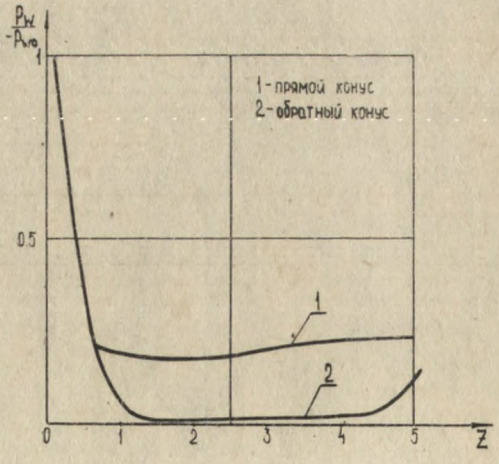

Рис. 4

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

плотности, а затем из интеграла Бернулли касательная составляющая вектора скорости на теле.

Соотношение между шагами интегрирования определялось на основании условия Куранта.

4. Обсуждение результатов

Сравнение решений уравнений невязкого ударного слоя, полученных с помощью предложенного метода, с результатами точных расчетов работы [10] показало их хорошее совпадение. В качестве примера приведем результаты расчета течения в ударном слое около сферы, прямого и обратного конусов, затупленных по сфере, обтекаемых под нулевым углом атаки гиперзвуковым потоком совершенного газа. На рис. 1 приведено сравнение формы ударной волны и звуковой линии с результатами работы [10] (линия *а*). Линия *б* здесь и на рис. 2 — результат настоящей работы. Отметим, что в малой окрестности сопряжения решений в дозвуковой и сверхзвуковой областях наблюдается небольшой всплеск p_w по сравнению с точным численным решением. Вне достаточно малой окрестности точки сопряжения основная интегральная характеристика (распределение давления по поверхности тела) определяется с погрешностью не более 1%. Это видно из рис. 2, где приведено распределение p_w вдоль поверхности сферы, совпадающее с известными результатами [10] вне указанной выше окрестности точки сопряжения с графической точностью.

На рис. 3 приведен отход ударной волны при обтекании затупленных по сфере прямого (рис. 3, *а*) и обратного (рис. 3, *б*) конусов. На рис. 4 показано распределение относительного давления по поверхности этих конусов. Всплеск давления на поверхности обратного конуса вблизи $z=5$ объясняется влиянием близости точки срыва потока с кормовой части тела. Особенностью обтекания прямого конуса является существование локального максимума p_w вблизи точки $z=5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П. Численный метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. — ЖВМиМФ, 1961, т. 1, № 6, с. 1051—1060.

2. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. — ЖВМиМФ, 1961, т. 1, № 6, с. 1020—1050.

3. Белоцерковский О. М. Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной. — ПММ, 1958, т. 22, № 2, с. 206—219.

4. Воскресенский Г. П., Чушкин П. И. Численные методы решения задач сверхзвукового обтекания тел. — В кн.: Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа, 1958, т. 11, с. 5—44.

5. Русаков В. В. Развитие метода глобальных итераций решения уравнений ударного слоя. — Томск, 1982. — 60 с.

6. Mac-Cormac R. W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. AIAA Paper, 69—354, Cincinati, Ohio, 1969, p. 6.

7. Сахаров В. И., Шевелев Ю. Д. Численное исследование сверхзвукового обтекания тел сложной формы.— Москва, 1978.— 57 с. (Препринт/Институт проблем механики АН СССР: № 116).

8. Тирский Г. А. К теории обтекания затупленных тел вязким химически реагирующим многокомпонентным потоком газа при наличии вдува. — В кн.: Научные труды Института механики МГУ, М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975, № 39, с. 106.

9. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. — М.: ИЛ, 1962. — 607 с.

10. Любимов А. Н., Русанов В. В. Течение газа около тупых тел. Т. 2. — М.: Наука, 1970. — 379 с.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА РАСПАДА РАЗРЫВА ПРИ РАСЧЕТЕ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА СО СЛОЖНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

В. З. Касимов

При численном интегрировании системы уравнений газовой динамики методом С. К. Годунова [1] массовой операцией является решение автомодельной задачи о распаде произвольного разрыва [2]. Наиболее общий подход к ее решению в случае произвольного уравнения состояния газа приведен в [3], а его конкретизация для случая, когда задано калорическое уравнение состояния $e=e(p, \rho)$, описана в [4]. В обоих случаях производится численное интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений, когда хотя бы одна из волн является волной разрежения. Решение может быть получено с любой точностью, но это требует существенно больше машинного времени по сравнению с тем случаем, когда существует аналитическое выражение для адиабаты Пуассона. В качестве компромиссного может быть предложен подход [5], когда газ слева и справа считается совершенным с эффективным показателем адиабаты $\gamma_э$, выбираемым каким-либо образом с учетом реального уравнения состояния. Точность этого подхода может быть оценена путем сравнения численного решения тестовой задачи с ее точным решением. В настоящей статье оно проводится на примере плоской задачи о распаде разрыва в продуктах детонации взрывчатого вещества, уравнение состояния которых выбирается в виде [6]:

$$p=[\gamma(\rho)-1]\rho e+\varphi(\rho),$$

$$\gamma=\begin{cases}\gamma_* & z>1,\\ \gamma_0+(\gamma_*-\gamma_0)\,z\,(3-3z+z^2), & z\leqslant 1,\end{cases} \qquad (1)$$

$$\varphi=\begin{cases}\rho_{0к}D_к^2A\,(\delta-\delta_*)^m, & z>1,\\ 0 & z\leqslant 1,\end{cases}$$

где $\delta=\dfrac{\rho}{\rho_{0к}}$, $z=\dfrac{\rho}{\rho_{0к}\delta_*}$, $A=0{,}1533$,

$m=2{,}284$, $\gamma_*=1{,}67$, $\gamma_0=1{,}375$- $\delta_*=0{,}35$.

Пусть в начальный момент $t=0$ в области $x<0$ находится газ с состоянием $p=p_1$, $\rho=\rho_1$, $u=0$, в области $x>0-p=p_2$, $\rho=\rho_2$, $u=0$. Численный расчет возникающей при распаде разрыва конфигурации для значений $\rho_{0к}=1{,}735$, $D_к=783$ производился методом С. К. Годунова на неподвижной равномерной сетке с шагом по пространству $\Delta x=0{,}1$. При расчете „больших" величин по параметрам на нижнем временном слое $u_{i+1/2}$, $p_{i+1/2}$, $\rho_{i+1/2}$ принималось, что в каж-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

дой расчетной ячейке находится совершенный газ с эффективным показателем адиабаты $\gamma_э(p_{i+1/2}, \rho_{i+1/2})$, который определялся из условия равенства скоростей звука в газе с уравнением состояния (1) и в совершенном газе

$$\gamma_э(p, \rho) = \frac{\rho}{p} \frac{\frac{p}{\rho^2} - \frac{\partial e}{\partial \rho}}{\frac{\partial e}{\partial p}}.$$

Параметры p_1, p_2, ρ_1, ρ_2 выбирались такими, чтобы конфигурация распада разрыва состояла из волны разрежения налево и ударной волны направо ($p_1=250000$; $\rho_1=2{,}25$; $p_2=1$; $\rho_2=0{,}0013$). Точное решение было получено с помощью алгоритма расчета данной конфигурации из [4]. Интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений производилось методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности с шагом по переменной u $\Delta u=0{,}1$. Профили $u(x)$, $p(x)$, $\rho(x)$ для момента $t=0{,}005$, соответствующие численному (штриховые кривые) и точному (сплошные кривые) решениям, показаны на рис. 1. Видно удовлетворительное совпадение точного и численного решений, несмотря на большой перепад давлений, что, по-видимому, является достаточным обоснованием для применения описанного подхода при решении более сложных задач.

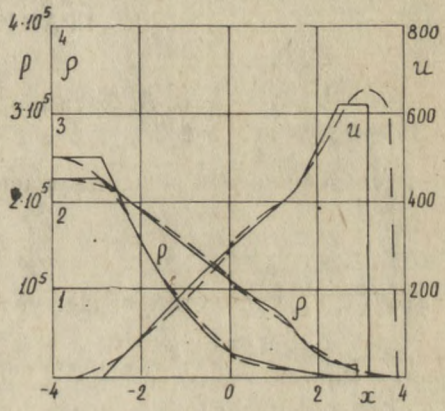

Рис. 1

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М., 1976. — 400 с.

2. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. — М., 1978. — 688 с.

3. Алалыкин Г. Б., Годунов С. К., Киреева И. Л., Плинер Л. А. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. — М., 1970. — 112 с.

4. Шустов Ю. М. Расчет распада разрыва для произвольных уравнений состояния. — Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1978, т. 9, № 4, с. 131—138.

5. Фортова Т. Н., Шкадинский К. Г., Дремин А. Н., Фортов В. Е. Расчет развития детонационных волн. — Физика горения и взрыва, 1977, т. 13, № 1, с. 69—77.

6. Куропатенко В. Ф. Уравнение состояния продуктов детонации конденсированных ВВ. — Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1977, т. 8, № 6, с. 68—71.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ОБ ОДНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПЛОСКИХ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ С ПОСТОЯННЫМ ПО МОДУЛЮ ГРАДИЕНТОМ

В. З. Касимов, Ю. П. Хоменко

Рассматривается решение уравнения

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{D^2}, \tag{1}$$

где $f=f(x, y)$, удовлетворяющее условию

$$x=\xi;\ y=0;\ f=\psi(\xi);\ -\infty<\xi<\infty \tag{2}$$

(задача Коши). Решение этой задачи определяет плоское скалярное поле с постоянным по модулю градиентом, имеющее заданные значения на некоторой прямой. Оно может быть записано в параметрическом виде [1]

$$x=\eta+2\tau\psi(\eta);$$

$$y=-\frac{2\tau}{D}\sqrt{1-[\psi'(\eta)D]^2};$$

$$f=\psi(\eta)+\frac{2\tau}{D^2}.$$

После исключения τ имеем

$$x=\eta+D^2\psi'(\eta)[f-\psi(\eta)];$$

$$y=-D[f-\psi(\eta)]\sqrt{1-[\psi'(\eta)D]^2}. \tag{3}$$

Для простейших зависимостей $\psi(\eta)$ решение может быть получено в явном виде, для более сложных $\psi(\eta)$ необходимо численное построение решения.

Нетрудно убедиться, что задача (1), (2) допускает физическую интерпретацию. Пусть x, y — декартовы координаты; t — время. Для скорости перемещения N кривой $\varphi(x, y, t)=0$ в направлении своей нормали имеем формулу [2]:

$$N=-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Полагая в ней $\varphi(x, y, t)=f(x, y)-t$ и $N=D=\text{const}>0$, получим уравнение (1). Таким образом, решение задачи Коши (1), (2) описывает движение кривой $f(x, y)-t=0$, перемещающейся в направлении своей

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

нормали со скоростью D. При этом точка пересечения этой кривой с прямой $y=0$ движется по закону

$$t=\psi(x);\ |\psi'(x)|\leqslant\frac{1}{D}.$$

Обозначим через A однопараметрическое семейство линий в плоскости (x, y) $f(x, y)-t=0$. Представляет практический интерес [3] построение семейства B линий, пересекающих линии семейства A под постоянным углом α. При этом, очевидно, точка пересечения будет перемещаться со скоростью $D_1=D/\sin\alpha$. Будем искать линию семейства B, исходящую из произвольной точки (x_0, y_0), для значений $x\leqslant x_0$. Определим значение параметра η, соответствующее точке (x_0, y_0) как решение трансцендентного уравнения, получающегося из (3) исключением f:

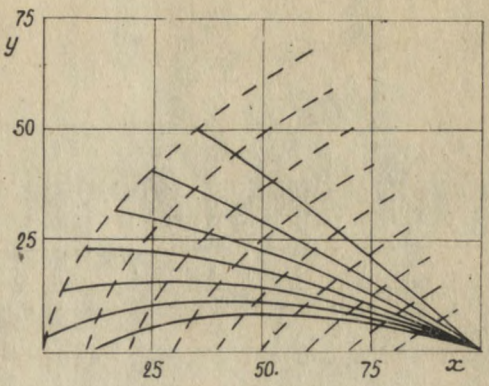

Рис. 1

$$y_0 D\psi'(\eta)+(x_0-\eta)\sqrt{1-[\psi'(\eta)D]^2}=0.$$

Затем находим значение $t_0=f(x_0, y_0)$:

$$t_0=\psi(\eta_0)+\frac{x_0-\eta_0}{D^2\psi'(\eta_0)}$$

и $\xi=\psi^{-1}(t_0)$.

Построение семейства B производим слоями с шагом $\Delta\xi<0$. При этом параметр η в формулах (3) для линий семейства A считаем изменяющимся от ξ до η_0, а $f=\psi(\xi)$. На рис. 1 показаны кривые семейства A (штриховые) и семейства B (сплошные) для следующего варианта: $D=500$; $x_0=100$; $y_0=0$; $\psi(x)=\dfrac{1}{500+0{,}05x^2}$; $\Delta\xi=-1$. Линии семейства B соответствуют значениям $D_1=675$; 650; 625; 600; 575; 550; 525 (считая снизу вверх).

Полученное решение может быть использовано для отыскания конфигурации заряда ВВ, обеспечивающего заданный заранее закон скольжения детонационной волны по плоской граничной поверхности в тех случаях, когда скорость распространения детонации можно считать постоянной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. — М.: Наука, 1966. — 260 с.

2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II. — М.: Физматгиз, 1963. — 728 с.

3. Waldron H. F., Moore E. T., Steel G. B., Godfrey C. S. A mechanism for the conversion of the chemjcal energy of explosives to the kinetic and internal energy of a gas.— AIAA Paper, No. 67—178, p. 11.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕЛ ПО ДИСКРЕТНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ ЗА ИХ СВОБОДНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

В. И. Вознюк

Представление аэродинамических коэффициентов тела в виде нелинейных функций его фазовых координат и времени с неизвестными параметрами-константами позволяет построить гипотетическую структуру уравнений движения тела, параметры которой доопределяются так, чтобы выполнялось условие наилучшего в смысле некоторого критерия соответствия экспериментальным данным. Если достигнутое соответствие не позволяет считать исходное представление адекватным, то выбирается новое, доопределяются параметры и т. д. Отметим, что наблюдаемые переменные являются (в общем случае нелинейными) функциями лишь некоторых фазовых координат.

Для решения такого рода задач в технической кибернетике широко используется алгоритм чувствительности (АЧ) [1], основанный на последовательной линеаризации измеряемых переменных с использованием функций чувствительности и уточнении оценок параметров и в виде $\Delta C=\gamma(A^{\tau}A)^{-1}A^{\tau}(\eta^{*}-\eta)$ или (при необходимости) $\Delta C=\gamma(A^{\tau}A)^{+}A^{\tau}(\eta^{*}-\eta)$ (модификации АЧ1 и АЧ2), где $A(C)$ — матрица эксперимента; η^{*}, η — векторы, составленные из измерений выхода объекта и расчетных значений выхода модели; γ — параметр управления сходимостью. В 1969 г. АЧ1 был впервые применен для определения нелинейных аэродинамических коэффициентов по аэробаллистическим данным [2]. Основная цель, которую преследовали авторы [2], — обеспечить возможность проверки любых предположений о функциональной структуре аэродинамических коэффициентов — не всегда достижима при использовании АЧ1, так как могут не выполняться необходимые для работы алгоритма условия: а) принадлежность исходных оценок параметров области притяжения; б) полнота ранга и достаточно хорошая обусловленность матрицы A. Ограничение *а* может быть несколько ослаблено при использовании модификаций АЧ1 [3—5], основанных на методе продолжения. При наличии большой избыточности экспериментальных данных может быть ослаблено и условие *б*, [6] если применять АЧ1 последовательно для расчетов с некоторой упорядоченной системой подматриц матрицы A. Алгоритм АЧ2 в принципе свободен от этих ограничений, но (поскольку операция $(\quad)^{+}$ применяется к матрице $A_{\tau}A$) имеет те же недостатки, что и способ нахождения псевдорешений системы $Ax=b$ сведением ее к $A_{\tau}Ax=A_{\tau}b$. Актуальной, следовательно, является разработка алгоритма, свободного от указанных недостатков. Такая попытка и предпринята в данной работе.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Предлагаемый алгоритм в значительной степени основан на [7, 8]. Характерными его чертами являются использование локальной нормировки, техники сингулярного анализа для вычисления эффективной псевдообратный к A матрицы, контроль вычислительных ошибок, явный учет и контроль ошибок, обусловленных линеаризацией, явный учет экспериментальных ошибок, глобальная сходимость и др., что обеспечивает его применимость для расчетов с любыми матрицами эксперимента. Для минимизации возможного смещения оценки алгоритм следует применять последовательно для расчетов с упорядоченной системой подматриц полной матрицы эксперимента. Построение такой системы в значительной степени связано со спецификой конкретных объектов и в данной статье не рассматривается.

Ниже везде без особых оговорок предполагается наличие у функций свойств, требуемых для корректности выполнимых действий. Указывать размерности векторов и матриц также нет необходимости: все выводы справедливы при произвольных конечных размерностях. Дифференцирование вектора по вектору понимается в смысле Якоби: $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора; $\|\cdot\|_E$ — евклидова норма матрицы; A_τ^+ — матрица эффективная псевдообратная к A с допуском τ в норме $\|\cdot\|_E$.

Предполагая, что параметрические представления для аэродинамических коэффициентов выбраны, запишем уравнения математической модели движения в виде

$$\frac{dy}{dt} = f(y, C, t), \quad y(t_0) = y_0(C), \tag{1}$$

где y — вектор фазовых переменных; C — вектор, составленный из начальных условий, параметров аэродинамических коэффициентов, любых неизвестных параметров.

Дифференцирование (1) по C дает так называемые уравнения чувствительности [1]:

$$\frac{dW}{dC} = \frac{\partial f}{\partial y} W + \frac{\partial f}{\partial C}, \quad W(t_0) = \frac{\partial y_0}{\partial C}. \tag{2}$$

Здесь $W(C, t) = \dfrac{\partial y(C, t)}{\partial C}$ — матрица функций чувствительности.

Выходом объекта является некоторая вектор-функция $\eta(y, C, t)$. Ее измеренные значения (искаженные шумом) обозначим $\eta^*(t_i)$, $i = \overline{1, N}$. Выход модели — $\eta(y, C, t)$, где $y = y(C, t)$ удовлетворяет (1).

Предположим, что выбрано начальное приближение C^0 для C. Линеаризуем $\eta(y(C, t), C, t)$ в окрестности C^0 при $t = t_i$:

$$\eta(y(C^0 + \Delta C, t_i), C, t_i) = \eta(y(C^0, t_i), C, t_i) + A(C^0, t_i)\Delta C, \tag{3}$$

где $A(C^0, t_i) = \dfrac{\partial \eta(y(C^0, t_i), C^0, t_i)}{\partial y} W(C^0, t_i) + \dfrac{\partial \eta}{\partial C}(y\ C^0, t_i), \quad C^0, \ t_i)$

$y(C^0, t_i)$ и $W(C^0, t_i)$ — находятся совместным численным интегрированием (1), (2).

Введем обозначения:

$$\eta^* = (\eta^{*T}(t_1) \ldots \eta^{*T}(t_N))^T;$$

$$\eta(C^0) = (\eta^T y\ (C^0, t_1), C^0, t_1) \ldots \eta^T y\ (C^0, t_N), (C^0, t_N)^T;$$

$$A(C^0) = (A^T(C^0, t_1) \ldots A^T(C^0, t_N))^T.$$

Можно теперь попытаться найти ΔC из условия минимума некоторой нормы вектора $V = \eta^* - \eta - A\Delta C$ при естественном ограничении на

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ошибку линеаризации, т. е. как вектор, пропорциональный нормальному псевдорешению системы

$$A\Delta C = \eta^* - \eta \qquad (4)$$

с коэффициентом пропорциональности, определяемым из ограничений на ошибку линеаризации.

Отметим, что в АЧ ΔC определяется из условия минимума квадратичной формы V^TQV, построенной по аналогии (та же Q) с $(\eta^* - \eta)\,Q\,(\eta^* - \eta)$, которую должен минимизировать вектор оптимальной оценки. Это ведет к двум нежелательным следствиям. Во-первых, ΔC приходится определять как нормальное псевдорешение системы $A^TQA\Delta C = A^TQ(\eta^* - \eta)$. Во-вторых, критерий V^TQV может оказаться не естественным с вычислительной точки зрения, как например, евклидова норма в случае большого разброса модулей компонент, что может неблагоприятно отразиться на ходе итераций. Поэтому ниже будет введена локальная нормировка.

Следуя [8], преобразуем (4) к виду

$$\bar{A}x = b, \qquad (5)$$

где $\bar{A} = M_1AM_2;\ x = M_2^{-1}\Delta C;\ b = M_1(\eta^* - \eta);$ (6)

$$M_1 = diag\,(\mu_1,\ \mu_2,\ldots);\ \mu_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\|a_{i\cdot}\|}, & \|a_{i\cdot}\| \neq 0, \\ 1, & \|a_{i\cdot}\| = 0; \end{cases} \qquad (7)$$

$$M_2 = diag\,(\nu_1,\ \nu_2,\ldots);\ \nu_j = \begin{cases} \dfrac{1}{\|a_{\cdot j}\|}, & \|a_{\cdot j}\| \neq 0; \\ 1 & \|a_{\cdot j}\| = 0, \end{cases}$$

$a_{i\cdot}$, $a_{\cdot j}$ — строка i и столбец j матрицы A.

Решение (5) вычисляем используя технику сингулярного анализа [8]:

$$x = \gamma\bar{A}_\tau^+ b,$$

где τ — норма матрицы вычислительной ошибки матрицы $\bar{A}$; γ определяем из условия достаточной ограниченности ошибки линеаризации

$$\frac{\|M_1(\eta(C^0 + M_2x) - \eta(C^0)) - \bar{A}x\|}{\|b(C^0)\| - \|b(C^0) - \bar{A}x\|} = \delta,\ 0 < \delta < 1, \qquad (8)$$

которое более объективно, чем условие

$$\frac{\|M_1(\eta(C^0 + M_2x) - \eta(C^0)) - \bar{A}x\|}{\|\bar{A}x\|} = \xi,\ 0 < \xi < 1, \qquad (9)$$

построенное по аналогии с [7], так как последнее может привести к расходимости, когда $\dfrac{\|b - A\bar{x}/\gamma\|}{\|b\|}$ достаточно близко к 1.

Таким образом, $\Delta C^1 = M_2x$; $C^1 = C^0 + \Delta C^1$, и может быть организован итерационный процесс, который продолжается до выполнения при некотором κ условия

$$\|b(C^\kappa)\| - \|b(C^\kappa) - \bar{A}(C^\kappa)\,\bar{A}_\tau^+(C^\kappa)\,b(C^\kappa)\| \leqslant \max(\|\delta b_{выч}\|,\ \|\delta b_{эксп}\|). \qquad (10)$$

где $\|\delta b_{выч}\|$ — норма вектора вычислительной ошибки вектора b; $\|\delta b_{эксп}\|$ — норма вектора экспериментальных ошибок в векторе b.

Условие (10) выполняется при $\|b(C_\kappa)\| \to 0$, что равносильно сходимости в смысле $\|\eta^* - \eta\| \to 0$ или когда вектор $b(C_\kappa)$ почти ортогона-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

лен пространству столбцов матрицы $\bar{A}_\tau$, что свидетельствует о наличии смещения $\|\eta^* - \eta\|$ в пространстве измерений и соответствующего смещения в пространстве параметров. Так или иначе, но сходимость в смысле

$$\|\eta^* - \eta(C^{\kappa+1})\| \leqslant \|\eta^* - \eta(C^{\kappa})\|$$

всегда можно обеспечить выбором параметров алгоритма. Докажем это. Очевидно, что

$$b(C + M_2 x) = b(C) - \bar{A}x + t\delta(\|b(C)\| - \|b(C) - \bar{A}x\|)e,$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$; δ — параметр (8); e — неизвестный орт

$$\|\eta^* - \eta(C + M_2 x)\| = \|M_1^{-1} b(C + M_2 x)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|M_1^{-1}(I - \gamma \bar{A}\bar{A}_\tau^+) M_1\| \times \|\eta^* - \eta(C)\| + t\delta(\|b(C)\| -$$

$$- \|(I - \gamma \bar{A}\bar{A}_\tau^+) b(C)\|) \times \|M_1^{-1} e\|,$$

т. е $$\frac{\|\eta^* - \eta(C + M_2 x)\|}{\|\eta^* - \eta(C)\|} \leqslant 1 - \gamma + t\gamma\delta\, CONDM_1.$$

Для сходимости таким образом достаточно, чтобы $1 - \gamma + t\gamma\delta CONDM_1$ было $\leqslant 1$, т. е. $t\delta CONDM_1 \leqslant 1$. Выбором δ этому условию всегда можно удовлетворить.

Приведенное доказательство основано на достаточно грубых оценках и имеет теоретическое значение. На практике сходимость имеет место и при невыполнении условия $t\delta CONDM_1 \leqslant 1$.

В заключение рассмотрим следующий модельный пример. Был выбран конус с известными аэродинамическими коэффициентами вида

$$C_x = C_1 + C_2\alpha^2 + C_3\Delta M;$$

$$C_y = (C_4 + C_5\alpha^2)\alpha;\ m_z = \bar{m}_z^{\bar{\delta}} + m_z^{\alpha}\alpha;$$

$$\bar{m}_z^{\bar{\delta}} = C_6 + C_7\alpha^2 + C_8\Delta M;$$

$$m_z^{\alpha} = C_9 + C_{10}\alpha^2 + C_{11}\Delta M$$

и уравнения его продольного движения

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2,\ \frac{dy_3}{dx} = y_4,\ \frac{dy_5}{dx} = y_6;$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \kappa_1 y_2 \sqrt{1 + y_4^2}\,(C_x + C_y y_4);$$

$$\frac{dy_4}{dx} = \kappa_1 (1 + y_4^2)^{3/2} C_y - g y_2^2; \tag{11}$$

$$\frac{dy_6}{dx} = \sqrt{1 + y_4^2}\,[\kappa_1 (C_x + C_y y_4) + \kappa_2 \bar{m}_z^{\bar{\delta}} L]\, y_6 + \kappa_2 (1 + y_4^2)\, m_z^{\alpha}\alpha,$$

где $\alpha = y_5 - \operatorname{arctg} y_4$; $\Delta M = \dfrac{v - v_{\text{ср}}}{a}$; $v = \dfrac{\sqrt{1 + y_4^2}}{y_2}$; $\kappa_1 = \dfrac{\rho S}{2m}$; $\kappa_2 = \dfrac{\rho S L}{2 I_z}$.

Уравнения численно интегрировались при начальных условиях

$$y(0) = (C_{12},\ C_{13},\ C_{14},\ C_{15},\ C_{16},\ C_{17})^T.$$

	C^0	C^{10}	C точн	l S_1	S_3	S_5	S	||b||	ν
1	0,36	0,316	0,3	0 10330	601,2	29,26	10960	4,23	1
2	0	1,325	1,5	1 9318	21,37	16,15	9356	3,96	0,36
3	0	—0,089	—0,2	2 6912	18,44	22,40	6953	2,43	0,104
4	1,2	0,967	1	3 6217	18,66	20,75	6256	2,83	0,5
5	0	—0,965	—1	4 2685	12,84	21,72	2719	2,198	0,156
6	—0,48	—0,405	—0,4	5 2150	18,01	16,82	2184	1,946	0,324
7	0	—0,366	—0,4	6 1224	9,16	8,67	1242	0,829	0,434
8	0	0,082	0,1	7 504,9	2,85	3,57	511,3	0,21	0,7557
9	—0,24	—0,2	—0,2	8 91,69	1,78	0,36	93,93	0,029	1
10	0	0,077	0,08	9 4,776	0,559	0,052	5,387	0,018	1
11	0	—0,019	—0,02	10 1,33	0,547	0,027	1,9	0,007	
12	$3{,}3\times10^{7}$	$3{,}3\times10^{-7}$	0						
13	$1{,}7\times10^{-3}$	$1{,}4\times10^{-3}$	$1{,}4\times10^{-3}$						
14	$3{,}3\times10^{-7}$	$3{,}3\times10^{-4}$	0						
15	0,018	$-2{,}1\times10^{-4}$	0						
16	0,306	0,3	0,3						
17	—0,34	—0,286	—0,286						

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

В качестве экспериментальных данных были взяты значения

$$y_1,\ y_3,\ y_5 \text{ при } x_i = iH;\ i = \overline{1,30};\ H = 0{,}7.$$

Было выбрано начальное приближение для параметров и произведено их уточнение в соответствии с предложенным алгоритмом.

В уравнениях (11) $\kappa_1 = 0,013$; $\kappa_2 = 2{,}513$; $L = 0{,}0754$; $v_{ср} = 680{,}44$; $a = 340{,}22$; $g = 9{,}81$. Результаты расчета представлены в таблице, где C^0, C^{10} — начальное приближение и оценка после 10 итераций;

$$S_\nu = \frac{1}{\sigma_\nu}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{30}[y_\nu^*(x_i) - y_\nu(x_i)]^2}{30}},\ \nu = 1,\ 3,\ 5;\ S = S_1 + S_3 + S_5:$$

$\sigma_1 = 0{,}33 \times 10^{-6}$; $\sigma_3 = 0{,}33 \times 10^{-3}$; $\sigma_5 = 0{,}003$; l — номер итерации;

$\|b\| = \|M_1(y^* - y)\|$, γ — коэффициент, определяемый из (8) ($\delta = 0{,}3$).

Таким образом, исходя из весьма грубого начального приближения, удалось получить неплохую конечную оценку, в то время как итерации по алгоритмам [2] и [5] расходятся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубан А. И. Идентификация нелинейных динамических объектов на основе алгоритма чувствительности.— Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1975.— 270.

2. Chapman G. T. and Kirk D. B. A new method for extracting aerodynamic coefficients from free — flight data. — AIAA Paper, 1969, № 134.

3. Вассерштром Е. Идентификация параметров методом возобновления. — Ракетная техника и космонавтика, 1973, т. 11, № 8.

4. Киршенблат А., Четрит М. Оценка параметров по методу наименьших квадратов с использованием метода продолжения. — Ракетная техника и космонавтика, 1974, № 12, с. 167—169.

5. Киршенблат А., Четрит М. Идентификация параметров системы методом продолжения. — Ракетная техника и космонавтика, 1975, № 10, с. 151—152.

6. Cohen Ch., Clare T. Analysis of the nonlinear rolling motion ob finned missiles. — AIAA Paper, 1972, № 980.

7. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.— 488 с.

8. Lawson Ch., Hanson R. Solving least squares problems. Prentice — Hall, Inc., 1974.— 340 pp.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ОБ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО СПУСКА ЛЕТАЛЬНОГО АППАРАТА (ЛА)

И. Т. Скородинский

Как известно, спуск ЛА в атмосфере сопровождается большими тепловыми и силовыми нагрузками. В связи с этим управление должно обеспечить приемлемые величины этих нагрузок как для конструкции, так и для экипажа в случае пилотируемого полета. При этом одними из основных характеристик являются интегральные нагрузки [1].

В работе исследуются особые управления [2] в задаче управляемого спуска с минимальными тепловыми и ограниченными среднеинтегральными силовыми нагрузками. Движение ЛА предполагается плоским, с нулевой тягой. Управление осуществляется путем изменения геометрии ЛА (в конечном итоге характерной площади S) и подъемной силы L (родственные задачи рассматривались в [3], [4]).

1. Задача формулируется следующим образом. Требуется обеспечить минимум функционала

$$I(S, L) = h(T)$$

на траекториях системы

$$\dot{v} = f_1 = -Q(v, y, c_x, S, L)/m - g\sin\theta;$$

$$\dot{\theta} = f_2 = (L - mg'\cos\theta)/mv + v\cos\theta/(r+y);$$

$$\dot{x} = f_3 = v\cos\theta;\ \dot{y} = f_4 = v\sin\theta;$$

$$\dot{h} = \kappa\rho(y)^{0.5}v^3;\ \kappa = \text{const} > 0;$$

$$\dot{n}_x = f_5 = (-n_x + Q/mg)/t;$$

$$\dot{n}_y = f_6 = (-n_y + |L|/mg)/t,\ t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

при заданных начальных значениях v_0, θ_0, x_0, y_0, $h(t_0) = n_x(t_0) = n_y(t_0) = 0$, и ограничениях на конце траектории:

$$v(T) \leqslant v_1;\ x(T) = x_1;\ y(T)\ y_1;$$

$$n_x(T) \leqslant n_x;\ n_y(T) \leqslant \bar{n}_y.$$

Здесь x — дальность вдоль проекции траектории на поверхность планеты; y — высота; θ — угол наклона вектора скорости к горизонту; g — ускорение силы тяжести; Q — величина силы аэродинамического сопротивления; C_x — коэффициент лобового сопротивления; m — масса ЛА; r — радиус планеты; $\rho(y)$ — плотность атмосферы; h — количество тепла, переходящее от пограничного слоя к площади ЛА. примыкающей

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

критической зоне: $n_x(T)$, $n_y(T)$ — соответственно среднеинтегральные тангенциальная и нормальная перегрузки.

На основании принятых в аэродинамике представлений считаем

$$Q = SQ_1(v,\ y)\,c_x;\ c_x = c_{x0} + c_{x1}(c_y);$$
$$C_y = Lm/[SQ_2(v,\ y)],$$

где Q_1, Q_2 — положительно определенные функции v; y, c_{x0} — коэффициент «активного» сопротивления, при прочих равных условиях зависящий от S; c_{x1} — коэффициент «индуктивного» сопротивления, обусловленный $L \neq 0$.

Считаем зависимость c_x от L (от c_y) выпуклой, причем

$$\left(\frac{\partial^2 c_x}{\partial L^2}\right)\Big|_{L=0} > 0. \tag{1}$$

Принятые допущения полностью удовлетворяются для квадратичной поляры. Считаем, что $S \in D$, где D — замкнутое множество; $D = \{S : S_1 \leqslant S \leqslant S_p\}$ либо $D = \{S : S = S_1,\ S = S_2,\ \ldots,\ S = S_p\}$.

В дальнейшем полагаем $L > 0$. Такой режим является типичным для крылатых ЛА [1], изменение S для которых может соответствовать изменению эффективной площади крыла переменной геометрии (при дополнительном ограничении на L «сверху», $L \leqslant L_1$ в структуре оптимального управления возможны участки с $L = L_1$, которые не являются особыми и в дальнейшем не рассматриваются).

2. Анализ оптимального режима проведем с помощью принципа максимума [5]. Пусть

$$H = -\kappa\rho^{0,5} v^3 + \sum_{i=1}^{6} \psi_i f_i;$$

$$\dot\psi_1 = -\partial H/\partial v;\ \dot\psi_2 = -\partial H/\partial\theta;$$
$$\dot\psi_3 = -\partial H/\partial x = 0;\ \dot\psi_4 = -\partial H/\partial y;$$
$$\dot\psi_5 = -\partial H/\partial n_x;\ \dot\psi_6 = -\partial H/\partial n_y$$

суть гамильтониан и уравнения для сопряженных переменных. В таком случае искомое оптимальное управление S^*, L^* удовлетворяет

$$H(z,\ \psi,\ S^*,\ L^*) = \max_{L,S\in D} H(z,\ \psi,\ S,\ L); \tag{2}$$

$$z = [v,\ \Theta,\ x,\ y,\ h,\ n_x,\ n_y],\ \psi = [\psi_1\ \ldots,\ \psi_6].$$

Учитывая, что L не связана локальными ограничениями, из (2) следует

$$\frac{\partial H}{\partial L} = -\frac{1}{m} M_1 \left(\frac{\partial Q}{\partial L} - M_2\right) = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial L^2} = -M_1 \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} \leqslant 0; \tag{4}$$

$$-M_1 \Delta Q(\Delta S) \leqslant 0\ \ \forall (S^* + \Delta S) \in D. \tag{5}$$

Здесь $M_1 = \psi_1 + \psi_5/gt$; $M_2 = \psi_2/v + \psi_6/gt$;

$$\Delta Q(\Delta S) = Q(v,\ y,\ S^* + \Delta S,\ L^*) - Q(v,\ y,\ S^*,\ L^*).$$

Покажем, что при сделанных предположениях чаще всего следует ожидать, что вдоль исследуемого режима

$$M_1 = M_2 = 0 \tag{6}$$

Действительно, если найдется, по крайней мере, одно допустимое

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$\Delta S = \Delta S_1$, при котором $\Delta Q(\Delta S_1) < 0$, то (6) следует из (1), (3)—(5). В противном случае $(\Delta Q(\Delta S) \geqslant 0 \ \forall (S^* + \Delta S) \in D)$ при $M_1 \neq 0$ из (1), (4) следует $M_1 > 0$. Тогда из (5) заключаем, что при фиксированных v, y, L^* оптимальное значение S выбирается из условия минимума Q, т. е. из условия минимального торможения ЛА, поэтому такой режим при спуске с минимальным нагревом, естественно предполагающим значительное сопротивление, трудно отнести к оптимальному.

3. Исследуем подробнее режим управления, соответствующий (6). В данном случае принцип максимума вырождается, т. е. исследуемое управление является особым. Для его анализа воспользуемся необходимым условием оптимальности из [6]. В нашем случае оно приобретает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial L^2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial L}\right) = \frac{\psi_2}{m^2 v^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = 0,$$

откуда в силу (1), (6) следует $\psi_2 = \psi_6 = 0$. Поскольку $\psi_5(t) = \psi_5(T)\,t/T$ (в этом легко убедиться расчетом), из условия $M_1 = 0$ заключаем, что вдоль особого режима $\psi_1 = 0$, $\psi_1 = c_1 = \text{const}$. Тогда из представления для имеем

$$(\psi_3 \cos\theta + \psi_4 \sin\theta)\, v = 3\kappa\rho^{0,5} v^3 = 3\kappa\dot{h}$$

Введем расширенную функцию Гамильтона

$$H_1 = H + \psi_t;$$

$$\dot{\psi}_t = -\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{t^2}\left[\psi_5\left(\frac{Q}{mg} - n_x\right) + \psi_6\left(\frac{L}{mg} - n_y\right)\right].$$

Отметим, что вдоль оптимальной траектории $H_1 = 0$ и $\psi_t(T) = 0$ при неограниченном T [5]. Нетрудно видеть, что в нашем случае условие $H_1 = 0$ можно записать так:

$$2\kappa\rho^{0,5} v^3 = c_1 g \sin\theta + \psi_5 n_x/t + \psi_6 n_y/t - \psi_t.$$

Расчетом убеждаемся, что

$$\psi_5 n_x/t + \psi_6 n_y/t - \psi_t = c = \text{const},$$

т. е.

$$2\dot{h} = 2\kappa\rho^{0,5} v^3 = c + c_1 g \sin\theta. \qquad (7)$$

Таким образом, вдоль особого управления скорость теплопередачи пропорциональна синусу угла наклона вектора скорости к горизонту. Дальнейший анализ проведем, принимая те или иные упрощающие предположения.

4. Пусть участок управляемого полета происходит в таком диапазоне высот, где вполне допустимо предположение о постоянстве $\rho(y)$, т. е. $\rho(y) = \bar{\rho} = \text{const}$. Тогда $\psi_4 = c_2 = \text{const}$. Из условия $\dot{\psi}_2 = \psi_2 = 0$ (полагая, что $\psi_3 = c_3 = \text{const} \neq 0$) имеем $\operatorname{tg}\theta = (c_2 v - c_1 g)/c_3 v$ (в случае $c_3 = 0$ приведенные ниже выводы остаются неизменными). Отсюда

$$\sin\theta = \operatorname{tg}\theta\,(1 + \operatorname{tg}^2\theta)^{-0,5} = A(v)\,[1 + A^2(v)]^{-0,5}; \qquad (8)$$

$$A(v) = \frac{1}{c_3 v}(c_2 v - c_1 g).$$

Подставляя (8) в (7), находим

$$2\kappa\bar{\rho}^{0,5} v^3 = \frac{c + c_1 g\,(c_2 v - c_1 v)}{c_3 v\,[1 + A^2(v)]^{-0,5}}. \qquad (9)$$

Видим, что (9) есть алгебраическое уравнение относительно v, все коэффициенты которого постоянны. Следовательно, в случае одно-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

родной атмосферы ($\rho(y) = \text{const}$) движение ЛА вдоль особого режима происходит с постоянной величиной скорости, т. е. с постоянной скоростью теплопередачи. Из (8) следует, что в этом случае и $\theta(t) = \text{const}$. Кинематический характер траектории в данном случае очевиден: $x(t)$, $y(t)$ являются линейными функциями времени.

5. Для крылатых ЛА предельные значения $\bar{n}_x(T)$ во много раз превосходят предельные $\bar{n}_y(T)$, т. е. конструкции подобных ЛА наиболее чувствительны к нормальным нагрузкам. Для них последующий анализ проведем, исключив из уравнений связей уравнение для n_x, $\psi_5 = 0$ ($\rho(y)$, пока рассматриваем в общем виде). Тогда на особом режиме $\psi_1 = c_1 = 0$. Из (7) следует $\dot{h} = \kappa\rho^{0,5}v^3 = \text{const} = c$, причем $c = 0$, если время маневра T неограничено. Отсюда следуют выводы: а) движение на особом участке траектории происходит с постоянной скоростью теплопередачи; б) если время маневра T неограничено, особый режим неоптимален (поскольку $\dot{h} > 0$).

Интересно, что аналогичные выводы были получены *А.* Миеле в простейшей задаче вертикального спуска ЛА ($x = \theta = 0$) переменной геометрии с минимальным $h(T)$, где также пренебрегалось действием силы тяжести [4].

Для широко используемой в практике зависимости

$$\rho(y) = \rho(y_0)\exp[-\lambda(y - y_0)],\ \lambda = \text{const} > 0, \qquad (10)$$

получаем $\psi_4 = -0{,}5\lambda\dot{h} = c_4 = \text{const} < 0$, т. е. $\psi_4(t) = c_4 t + c_5$, $c_5 = \text{const}$. Учитывая, что $\psi_1 = \psi_2 = 0$, имеем

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\psi_4}{\psi_3} = \frac{1}{c_3}(c_4 t + c_5),$$

т. е. для зависимости (10) вдоль особого управления тангенс угла наклона вектора скорости к горизонту является линейной функцией времени.

Заметим, что в рассматриваемом случае условие Келли [2] приобретает вид

$$\frac{\kappa\rho^{0,5}v}{m^2}\left[2\left(\frac{\partial Q}{\partial L}\right)^2 + 1\right] \geqslant 0$$

и, очевидно, всегда выполняется, что является дополнительным аргументом в пользу оптимальности исследуемого управления при ограничении на время маневра.

6. Качественный анализ общей оптимальной программы в случае ограничения на T упрощается, если допустить, что ограничение на L обусловлено только заданием $\bar{n}_y$. Тогда $L^*(t)$ будет в общем случае состоять из участков, вдоль которых $\partial H/\partial L = 0$, разделенных точками, где $L^*(t)$ терпит разрывы второго рода (импульсное изменение L). Из уравнений движения легко заключить, что импульсное изменение L будет соответствовать разрывам первого рода $v(t)$, $\theta(t)$, причем предельные величины этих разрывов определяются ограничением на $n_y(T)$. Иными словами, оптимальная программа спуска ЛА в данном случае будет состоять из участков движения с постоянными скоростями теплопередачи (дальнейшая конкретизация которых зависит от вида $\rho(y)$ и приводится выше), разделенных точками, в которых $v(t)$, $\theta(t)$ претерпевают «скачки», причем одновременно, т. е. исходная задача при сделанных предположениях сводится к существенно более простой задаче параметрической оптимизации.

В заключение отметим, что полученные выше выводы в полной мере справедливы для более частного случая, когда изменение геометрии ЛА оставляет практически неизменной S, но существенно меняет

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

c_{x0} (например, при использовании в качестве аэродинамического тормоза закрылок). В этом случае анализ оптимальности пары c_{x0}, L проводится по схеме, которая аналогична рассмотренной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов В. И., Осин М. М. Посадка космических аппаратов на планеты. — М.: Машиностроение, 1978. — 159 с.

2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973. — 256 с.

3. Гурман В. И. Вырожденные задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1977. — 304 с.

4. Миеле А. Определение экстремумов криволинейных интегралов по теореме Грина. — В кн.: Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. М.: Наука, 1965, с. 100—129.

5. Математическая теория оптимальных процессов/Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкремудзе, Е. Ф. Мищенко. — М.: Наука, 1969. — 384 с.

6. Скородинский И. Т. Исследование третьей вариации функционала на особых управлениях. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 8, с. 1438—1445.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ОБ УРАВНЕНИЯХ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ПО КРИВОЛИНЕЙНОМУ КАНАЛУ

Л. И. Дубровская, Ю. П. Хоменко

Рассматривается адиабатическое неустановившееся движение невязкого нетеплопроводного газа по криволинейному каналу, симметричному относительно некоторой плоскости. В общем случае расчет такого течения сводится к интегрированию пространственных уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями. Решение этой задачи при современном уровне развития вычислительной техники чрезвычайно трудоемко, поэтому представляют интерес любые упрощения, заметно снижающие необходимые затраты машинного времени. В данной работе для каналов, поперечные размеры которых малы по сравнению с их протяженностью, предлагается приближенная одномерная система уравнений, полученная осреднением действительного потока по поперечному сечению канала. Для случая, когда действительное течение можно считать плоским, проведено сравнение одномерного решения с решением соответствующей плоской задачи, из которого делается вывод о границах применимости такого подхода.

Обозначим через M плоскость симметрии канала. На рис. 1 показаны линии L_1 и L_2 пересечения поверхности канала с плоскостью M. Проведем в плоскости M линию L_0 так, чтобы центры тяжести плоских

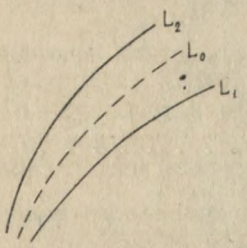

Рис. 1

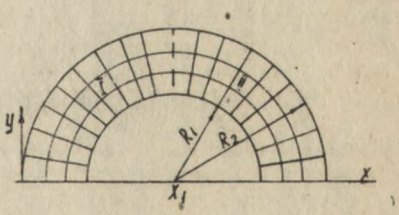

Рис. 2

сечений канала, нормальных к линии L_0, лежали на L_0. Пусть уравнения указанных кривых в плоскости M имеют вид

$$\vec{r} = \vec{r}_i(z). \quad i = 0,\ 1,\ 2, \tag{1}$$

где z — длина дуги кривой L_0. Будем считать, что вектор-функции $r_i(z)$ непрерывны и имеют непрерывные производные первого и второго порядка. Дополнительно предполагаем, что точки $r_i(z)$ $(i = 0, 1, 2)$ лежат

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

на одной прямой, нормальной к L_0 в точке $\vec{r}_0(z)$, и для радиусов кривизны R_i кривых L_i при каждом z выполняются неравенства

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| < \min_{i=0,1,2} R_i.$$

Обозначим площадь поперечного сечения канала плокостью, нормальной к L, через $F(z)$, а контур, ограничивающий F, через L. Применим законы сохранения массы, импульсов и энергии [1] к объему, ограниченному боковой поверхностью канала и двумя плоскими сечениями, нормальными к L_0 и проведенными в точках $\vec{r}_0(z)$ и $\vec{r}_0(z+dz)$. В качестве элементарного объема возьмем объем, образуемый вращением элементарной площадки dF вокруг оси, перпендикулярной к плоскости M и проходящей через центр кривизны L_0, соответствующий длине дуги z. Тогда очевидно

$$dV = \frac{\delta}{R_0} dz dF,$$

где δ — расстояние от dF до оси вращения. Таким образом, получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_F \rho\delta dF + R_0 \frac{\partial}{\partial z}\int_F \rho u dF = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_F \rho\vec{v}\delta dF + R_0 \frac{\partial}{\partial z}\int_F \rho\vec{v}u dF = -R_0\vec{\tau}\frac{\partial}{\partial z}\int_F p dF - \vec{\nu}\int_F p dF - \int_L p\vec{n}\delta dl;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_F \rho E\delta dF + R_0 \frac{\partial}{\partial z}\int_F \rho E u dF = -R_0 \frac{\partial}{\partial z}\int_F p u dF,$$

где $\vec{\tau} = d\vec{r}_0/dz$ — единичный вектор, касательный к L_0; $\vec{\nu} = (1/R_0)\, d^2\vec{r}_0/dz^2$ — главная нормаль к L_0; $\vec{n}$ — единичная внешняя нормаль к боковой поверхности канала; ρ — плотность газа; $\vec{v}$ — скорость; p — давление; E — полная энергия единицы массы газа; u — проекция вектора скорости на направление вектора $\vec{\tau}$.

Отметим, что уравнения (2) есть точные следствия законов сохранения. На основе этих уравнений можно получать различные приближенные одномерные аппроксимации реальных потоков [2—6].

Предположим, что изменением плотности и скорости газа по поперечному сечению канала можно пренебречь и считать вектор скорости параллельным вектору $\vec{\tau}$. Тогда из (2) с учетом очевидного равенства

$$R_0 = \frac{1}{F}\int_F \delta dF$$

получим уравнения

$$\frac{\partial \rho F}{\partial t} + \frac{\partial \rho u F}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial \rho u F}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 F}{\partial z} = -\frac{\partial P F}{\partial z} - \frac{1}{R_0}\int_L p n_z \delta dl;$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

$$\frac{\partial \rho EF}{\partial t} + \frac{\partial \rho uEF}{\partial z} + \frac{\partial PuF}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

где P — среднее по поперечному сечению давление газа. Для вычисления интеграла в правой части уравнения импульсов необходимо знать распределение давления по периметру поперечного сечения, поэтому в общем случае вычисление этого интеграла невозможно. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть среднее по указанному контуру давление с весом δ равно p_*. Тогда предельным переходом можно получить

$$\lim_{R_0 \to \infty} \frac{1}{R_0} \int_L p n_z \delta dl = p_* \frac{dF}{dz}.$$

В этом случае система (3) сводится к известным уравнениям, описывающим движение газа по каналу переменного сечения [2—6]. При этом, как правило, предполагается, что $p_* \equiv P$.

Интересно, что при $n_z \equiv 0$, то есть для каналов, поперечное сечение которых постоянно по площади и по форме, указанный интеграл тождественно равен нулю, а уравнения (3) совпадают с обычными одномерными уравнениями.

2. Рассмотрим канал, граничными поверхностями которого являются две плоскости, параллельные плоскости M, и две цилиндрические поверхности с образующими, нормальными к плоскости M. Течение в таком канале естественно считать плоским. Предположим, что распределение давления в каждом сечении канала можно считать квазистационарным и зависящим лишь от кривизны канала в этом сечении. Тогда имеем [7]:

$$\frac{\partial p}{\partial \delta} = \frac{\rho u^2}{\delta},$$

откуда, интегрируя, получим

$$p = p_1 + \rho u^2 \ln \frac{\delta}{\delta_1}, \tag{4}$$

где индексом 1 отмечены соответствующие величины на кривой L_1. Отсюда легко определяется связь между средним по сечению давлением и граничными давлениями p_1 и p_2:

$$\begin{aligned} p_1 &= P - \rho u^2 \left(\frac{\delta_2}{\delta_2 - \delta_1} \ln \frac{\delta_2}{\delta_1} - 1 \right); \\ p_2 &= P - \rho u^2 \left(\frac{\delta_1}{\delta_2 - \delta_1} \ln \frac{\delta_2}{\delta_1} - 1 \right). \end{aligned} \tag{5}$$

Отметим, что δ_i — расстояния от точек поперечного сечения, лежащих на кривых L_i, до центра кривизны кривой L_0. Используя уравнения (5), вычисляем интеграл в уравнении импульсов (3):

$$\int_L p n_z \delta dl = Ph(\delta_1 n_{z1} + \delta_2 n_{z2}) + \rho u^2 h \left[\delta_1 n_{z1} + \delta_2 n_{z2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta_1 \delta_2 h}{F} (n_{z1} + n_{z2}) \ln \frac{\delta_2}{\delta_1} \right],$$

где h — расстояние между плоскими стенками канала.

3. Введем в плоскости поперечного сечения декартову систему координат (ξ, η) с началом в центре кривизны кривой L_0, причем ось ξ

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

возьмем лежащей в плоскости M. Тогда, считая распределение давления по поперечному сечению квазистационарным и квазиплоским, будем иметь в каждом сечении

$$p(\xi, \eta, t) = p_1(z, t) + \rho(z, t)\, u^2(z, t) \ln \frac{\xi}{\delta_1(z)}. \qquad (7)$$

Уравнение (7) можно использовать при вычислении вышеуказанного интеграла, а также для вывода соотношений типа (5), то есть для замены $p_1(z, t)$ через $P(z, t)$, когда задан вид контура L.

Для подтверждения применимости полученных приближенных уравнений был произведен расчет течения идеального газа в плоском криволинейном канале в одномерной и двумерной постановках. Рассматривалась следующая модельная задача.

В начальный момент времени в криволинейном канале (рис. 2), заполненном покоящимся газом и закрытом с обоих концов, мгновенно разрывается диафрагма, расположенная посередине канала и отделяющая область газа высокого давления (I) от области газа низкого давления (II). Перепад давления на диафрагме $p_1/p_2 = 100$, плотности — $\rho_1/\rho_2 = 10$. Газ рассматривался совершенный с отношением удельных теплоемкостей $\gamma = 1{,}4$. Для простоты кривые L_1 и L_2 выбраны концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2 соответственно.

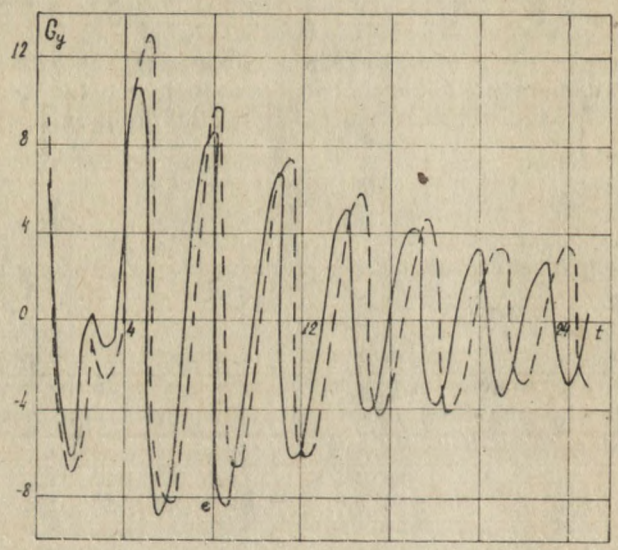

Рис. 3

Область движения газа в плоскости (x, y) разбивалась двумя семействами линий на четырехугольные ячейки. Первое семейство представляло собой окружности с центром, совпадающим с центром кривизны линий L_1 и L_2. Второе семейство — лучи, исходящие из этого центра под углами $\varphi_i = \varphi_0 + i\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi = \text{const}$.

Система уравнений, описывающая нестационарное плоское течение газа, решалась методом распада произвольного разрыва С. К. Годунова [8]. Расчет производился в безразмерных переменных, при этом в качестве основных масштабов были выбраны давление и плотность газа в области низкого давления и полусумма радиусов $(R_1 + R_2)/2$. Остальные масштабы выбирались из условия инвариантности уравнений движения.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Искривленность канала определялась безразмерным параметром $\varkappa = 2(R_2 - R_1)/(R_2 + R_1)$. Исследована область значений $0{,}1 \leqslant \varkappa \leqslant 1$ с шагом 0,1. Расчетная область при этом разбивалась на 50 ячеек по φ (z в одномерном случае), а число ячеек в радиальном направлении выбиралось таким, чтобы шаги интегрирования в двух взаимно перпендикулярных направлениях были сравнимыми. При $\varkappa = 0{,}1$ было взято 10 ячеек в радиальном направлении.

В процессе решения подсчитывались компоненты главного вектора $\vec{G}$ сил давления газа на внутреннюю поверхность канала. На рис. 3 показана зависимость $G_y(t)$, полученная по двумерной (сплошная линия) и одномерной (пунктир) методикам при $\varkappa = 0{,}4$. Зависимость $G_x(t)$ не приводится, так как для нее разница между двумя расчетами существенно меньше. Из рис. 3 видна удовлетворительная точность одномерной методики при этом значении $\varkappa$. При меньших значениях $\varkappa$ погрешность одномерной методики быстро убывает и становится несущественной для $\varkappa \leqslant 0{,}2$. В области $0{,}5 \leqslant \varkappa \leqslant 1$ погрешность одномерного подхода быстро возрастает, причем существенные отличия наблюдаются как в амплитудах колебаний, так и в периоде. Последнее обстоятельство объясняется существенной неодномерностью процесса распространения сильных и слабых разрывов в действительном течении.

Исходя из результатов проведенных расчетов, можно сделать вывод о целесообразности использования системы (3) при расчетах течений идеального газа по криволинейным каналам переменного сечения, для которых выполнено условие

$$|(\delta_2 - \delta_1)/(\delta_1 + \delta_2)| \leqslant 0{,}2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. — М.: Наука, 1970. — 535 с.
2. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. — М.: Наука, 1975. — 296 с.
3. Гинзбург И. П. Прикладная гидродинамика. — Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1958. — 338 с.
4. Любимов Г. А. Об осреднении магнитогидродинамических потоков и применимости гидравлического приближения для расчета магнитогидродинамических течений в каналах. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 3, с. 3—11.
5. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1977. — 438 с.
6. Хоменко Ю. П. О днижении идеального газа по каналу переменного сечения. — Тр. НИИ прикладной математики и механики. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1976, т. 7, с. 97—101.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. — М., 1955. — 583 с.
8. Численное решение многомерных задач газовой динамики (С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов и др. — М.: Наука, 1976. — 400 с.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

РЕФЕРАТЫ НА ОПУБЛИКОВАННЫЕ СТАТЬИ

УДК 532.517.4

Приближенное решение уравнений для пульсационных параметров турбулентного потока несжимаемой жидкости. Шабловский О. Н. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 3—12.

Рассмотрена система уравнений для осредненных гидродинамических величин совместно с уравнениями для пульсационных параметров потока. Дан алгоритм решения этих уравнений для одного класса движений ньютоновской изотермической жидкости. Получено локальное решение уравнений гидродинамики, характеризующее квазистационарное турбулентное течение вдоль центральной оси прямолинейного канала.

Библ. 7.

УДК 621.43.037

О распыливании жидкости центробежной форсункой при низких перепадах давления. Волков В. П. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 13—16.

Приводятся экспериментальные результаты зависимости расхода жидкости, распыливаемой центробежной форсункой, от перепада давления Δp_6 на линии подачи при пониженных значениях последнего. Описан метод определения перепада давления на форсунке в рассматриваемом диапазоне Δp_6. Уточняется эмпирическая зависимость для коэффициента расхода жидкости, в результате чего она может быть использована для любых значений Δp_Φ.

Библ. 5, ил. 3.

УДК 533.6.011

О применении сквозного счета при решении некоторых одномерных задач газовой динамики. Новгородцев Н. А. Газовая динамика, Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 17—19.

Предлагается метод сквозного расчета при решении одномерных задач газовой динамики, когда твердое метаемое тело заменяется вводом импульса. Проведено сравнение численного решения задачи Лагранжа с аналитическим.

Библ. 4, ил. 1.

УДК 533.6.011.3.5

Об алгоритмах расчета двухфазных течений в соплах. Болтрукевич Т. В., Васенин И. М., Глазунов А. А. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 20—28.

В работе исследуются особенности построения алгоритмов для численного решения задачи о двухфазном течении в соплах Лаваля. Предложен подход к построению разностных схем на основе совместного решения уравнений, описывающих движение газа и частиц. Показано, что такие схемы более точны по сравнению с другими схемами, использующимися для расчета двухфазных течений. Приведены результаты расчетов, которые иллюстрируют эффективность предложенного алгоритма.

Библ. 3, ил. 3.

УДК 532.517.4

Расчет неустановившегося течения в круглой трубе на основе двухпараметрических моделей турбулентности. Старченко А. В. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 29—37.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

В данной работе представлены результаты расчетов неустановившегося турбулентного течения вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе по моделям турбулентности, ранее применявшимся для исследования стационарного движения. Были сопоставлены некоторые двухпараметрические модели турбулентности по эффективности и точности предсказания картины как стационарного, так и неустановившегося течения в круглой трубе.

Библ. 16, ил. 7.

УДК 533.6.011

К применению методов нелинейного программирования для решения вариационных задач профилирования сопл. Афонин Г. И., Бутов В. Г. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 38—40.

Излагаются рекомендации по применению методов нелинейного программирования для решения вариационных задач профилирования сопл, полученные путем численного эксперимента. Основной целью этих рекомендаций является сокращение времени поиска оптимального решения. Для этого в вычислительном алгоритме поиска решения детально исследованы вопросы аппроксимации исходного контура и точности расчета поля течения.

УДК 532.529 : 536.242

Стационарный теплообмен при вынужденном движении двухфазной среды в прямоугольной трубе. Дубовик В. А. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 41—44.

Аналитически решается задача о теплообмене в области тепловой и гидродинамической стабилизации потока. Двухфазный поток рассматривается как двухскоростная, двухтемпературная сплошная среда. Приводятся зависимости числа Нуссельта и среднемассовой температуры от отношения стороны прямоугольного сечения трубы, вычисленные для случая стоксовского режима обтекания каждой частицы. Показано влияние концентрации примеси на теплообмен в зависимости от рода компонент двухфазной среды.

Библ. 7, ил. 2.

УДК 533.6.011

Некоторые несепарабельные решения уравнения Лапласа и их применение в гидродинамике. Томилов Е. Д. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 45—56.

Путем суммирования и дифференцирования по параметру несепарабельных решений уравнения Лапласа построены некоторые частные решения. Устанавливается их гидродинамический смысл и возможность использования полученных решений в задачах о течениях в каналах и теории струй.

Библ. 2, ил. 8.

УДК 533.6.011

Численное решение задачи о метании кругового цилиндра газовым потоком в плоском канале. Дубровская Л. И. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 57—59.

Методом распада произвольного разрыва исследуется задача об устойчивости движения кругового цилиндра в нестационарном потоке газа, когда между стенками канала и метаемым телом существует зазор. Вопрос о стабилизирующем действии потока рассматривается для цилиндра, который обладает способностью перемещаться и вдоль и поперек канала. Задача решается в двумерной постановке в криволинейной подвижной сетке. Приводятся результаты расчетов.

Библ. 3, ил. 3.

УДК 533.6.01 : 518

Решение одной вариационной задачи квазиодномерной нестационарной газовой динамики. Погорелов Е. И., Погорелова Т. Г., Никульчикова Г. М. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 60—66.

В работе рассматривается вариационная задача внутренней газовой динамики о метании тела. Оптимизируется форма камеры высокого давления с целью получения максимальной скорости тела. Сформулированы необходимые условия оптимальности. Приведены результаты численных расчетов.

Библ. 9, ил. 3.

УДК 533.6.011

Применение метода множителей Лагранжа в одной вариационной задаче о метании тела газовым потоком. Погорелова Т. Г. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 67—73.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

В работе метод множителей Лагранжа применяется для формулировки условий стационарности функционала в вариационной задаче о метании тела неизэнтропическим потоком газа в канале переменного сечения в условиях квазиодномерности течения, невязкости и нетеплопроводности газа. Сформулирована сопряженная краевая задача, получены условия в угловых точках и на линиях разрыва множителей Лагранжа, выявлена возможная структура оптимального решения, приведены частные случаи аналитических решений вырожденной вариационной задачи.

Библ. 4, ил. 3.

УДК 518.12 : 533.16

Определение параметра сглаживания и коэффициента запаса устойчивости в схеме Лакса—Вендроффа при численном интегрировании газодинамических уравнений. Жаровцев В. В. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 74—78.

Имеющийся произвол в выборе параметра сглаживания и коэффициента запаса устойчивости используется для того, чтобы двухшаговая схема Лакса—Вендроффа с согласованным сглаживанием в некотором смысле приближалась к схемам с положительной аппроксимацией. Для явных разностных схем, аппроксимирующих уравнения гиперболического типа, в качестве меры близости предложено брать абсолютную величину суммы отрицательных собственных чисел матриц, стоящих при значениях сеточных вектор-функций на нижнем слое в линейных аналогах исходных разностных уравнений. Приведены результаты расчета одной тестовой задачи.

Библ. 9, ил. 3.

УДК 532.69

Численное исследование слияния вязких капель под действием сил поверхностного натяжения. Шрагер Г. Р., Якутенок В. А. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 79—84.

В работе исследуется процесс слияния двух вязких капель под действием сил поверхностного натяжения. Предлагается алгоритм решения задачи и приводятся результаты расчетов начального этапа слияния.

Библ. 4, ил. 4.

УДК 65.011.56 : 658.512.2

Об универсальности систем автоматизированного проектирования. Кадиев О. П., Лосев В. А. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 85—87.

Описывается технология создания САПР, адаптируемой к широкому классу изделий.

Библ. 2.

УДК 533.6.011

Об одном точном решении задачи Лагранжа, когда в области течения происходит смешение или разделение потоков газа. Жолобов В. В., Ефремов В. В. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 88—94.

Точное решение уравнений одномерной газодинамики с линейным профилем скорости, полученное А. И. Седовым, используется для аналитического изучения некоторых частных случаев движения газового потока, метающего тела в разветвляющихся каналах.

Библ. 3.

УДК 534.222 : 532.5

Исследование потенциальных течений идеальной жидкости со свободной поверхностью на основе метода конформных отображений. Буров А. В., Либин Э. Е. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 95—99.

Рассматриваются две струйные задачи гидродинамики: а) определение формы выемки выброса грунта при взрыве заглубленного заряда; б) определение форм каверн при обтекании пластинки или диска. Предлагается использовать метод конформных отображений как в плоском, так и в осесимметричном случае. Оба типа задач решаются в рамках единого алгоритма. Приводятся результаты расчетов форм неизвестных границ.

Библ. 4, ил. 4, табл. 2.

УДК 532.517.4

О приближенном методе расчета пульсирующих турбулентных струй. Анисимов Г. П. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 100—104.

Предлагается применить для расчета пульсирующих турбулентных струй разработанный ранее метод расчета нестационарных осесимметричных турбулентных струй. Приводимые результаты расчета качественно согласуются с известными экспериментальными данными.

Библ. 6, ил. 3.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

УДК 532.522

Обтекание идеальной жидкостью дуги окружности в канале с источником за обтекаемым контуром. Никитин В. И., Штанько В. А. Газовая динамика. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1984, с. 105—111.

Методами теории струй решается задача об обтекании идеальной жидкостью дуги окружности в канале, на оси которого за обтекаемым контуром расположен источник. На основе конечномерной аппроксимации найдено общее решение задачи, получена замкнутая система уравнений для вычисления параметров общего решения по заданным значениям величин, определяющих течение в физической плоскости. Численными расчетами показано, что коэффициент сопротивления обтекаемого контура неограниченно возрастает при приближении источника к контуру и убывает до нуля при удалении источника на бесконечность.

Библ. 2, ил. 3, табл. 1.

УДК 532.526.2—3

Ламинарный пространственный пограничный слой на частично проницаемой поверхности. Бородин А. И., Пейгин С. В. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 112—119.

В настоящей работе в широком диапазоне изменения определяющих параметров задачи проведено исследование течения в пространственном ламинарном пограничном слое с двумя плоскостями симметрии на частично проницаемой поверхности. Показано, что наличие разрыва в граничных условиях приводит к существенному изменению характера течения в пограничном слое.

Библ. 12, ил. 5.

УДК 533.6.011

Метод расчета двумерного гиперзвукового ударного слоя на затупленных телах. Пейгин С. В., Русаков В. В., Тирский Г. А. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 120—126.

В работе предлагается приближенный экономический метод расчета течений невязкого газа в двумерном ударном слое около гладких затупленных тел. Путем сравнения с результатами других авторов показано, что наряду с экономичностью предлагаемый метод обладает достаточной точностью. В качестве примера приведены результаты расчета осесимметричного невязкого ударного слоя около тел различной формы.

Библ. 10, ил. 4.

УДК 533.6.011

Об использовании метода распада разрыва при расчете течений газа со сложным уравнением состояния. Касимов В. З. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 128—129.

Проводится обоснование приближения «эффективного показателя адиабаты» для определения «больших» величин при расчете течений газа со сложным уравнением состояния методом С. К. Годунова на примере решения тестовой задачи о распаде произвольного разрыва.

Библ. 6, ил. 1.

УДК 517.945

Об одной физической интерпретации плоских скалярных полей с постоянным по модулю градиентом. Касимов В. З., Хоменко Ю. П. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 130—131.

Рассматривается решение задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка, описывающего плоские скалярные поля с постоянным по модулю градиентом. Показывается, что оно может быть использовано для отыскания конфигурации заряда ВВ, обеспечивающего заданный заранее закон скольжения детонационной волны по плоской граничной поверхности, когда ее скорость распространения можно считать постоянной.

Библ. 3, ил. 1.

УДК 533.6.011

Алгоритм оценки аэродинамических коэффициентов тел по дискретным наблюдениям за их свободным движением. Вознюк В. И. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 132—137.

Предлагается основанный на методе последовательной линеаризации алгоритм оценки и достаточное для его глобальной сходимости условие, в которое входят параметры алгоритма и некоторая функция от матрицы эксперимента.

Для минимизации возможного смещения оценки алгоритм следует применять последовательно для расчетов с упорядоченной системой подматриц полной матрицы экспе-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

римента. Построение такой системы в значительной степени связано со спецификой конкретных объектов, поэтому в данной работе не рассматривается. Применение алгоритма позволило оценить нелинейные аэродинамические коэффициенты конуса в ситуации, когда алгоритм Чэпмэна—Керка и его модификации на основе метода продолжения демонстрировали расходимость.

Библ. 8, ил. 3.

УДК 531.55

Об особых управлениях в задаче оптимального спуска летательного аппарата (ЛА). Скородинский И. Т. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 132—142.

Выясняется ряд существенных закономерностей, присущих особым режимам управления в задаче о спуске ЛА переменной геометрии с минимальным значением интегрального подведенного тепла в критической зоне и ограниченными среднеинтегральными силовыми нагрузками. Определяется структура оптимальной программы в целом.

Библ. 6.

УДК 533.6.011

Об уравнениях нестационарного движения идеального газа по криволинейному каналу. Дубровская Л. И., Хоменко Ю. П. Газовая динамика. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 143—147.

В работе рассматривается адиабатическое неустановившееся движение невязкого нетеплопроводного газа по криволинейному каналу, симметричному относительно некоторой плоскости. Предлагается приближенная одномерная система уравнений для каналов, поперечные размеры которых малы по сравнению с их протяженностью. Одномерное приближение получается осреднением действительного потока по поперечному сечению канала. Для случая, когда действительное течение можно считать плоским, проведено сравнение одномерного решения с решением соответствующей плоской задачи, из которого делается вывод о границах применимости такого подхода.

Библ. 8, ил. 3.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

СОДЕРЖАНИЕ

О. Н. Шабловский. Приближенное решение уравнений для пульсационных параметров турбулентного потока несжимаемой жидкости 3
В. П. Волков. О распыливании жидкости центробежной форсункой при низких перепадах давления 13
Н. А. Новгородцев. О применении сквозного счета при решении некоторых одномерных задач газовой динамики 17
Т. В. Болтрукевич, И. М. Васенин, А. А. Глазунов. Об алгоритмах расчета двухфазных течений в соплах 20
А. В. Старченко. Расчет неустановившегося течения в круглой трубе на основе двухпараметрических моделей турбулентности 29
Г. И. Афонин, В. Г. Бутов. К применению методов нелинейного программирования для решения вариационных задач профилирования сопл . . . 38
В. А. Дубовик. Стационарный теплообмен при вынужденных движениях двухфазной среды в прямоугольной трубе 41
Е. Д. Томилов. Некоторые несепарабельные решения уравнения Лапласа и их применение в гидродинамике 45
Л. И. Дубровская. Численное решение задачи о метании кругового цилиндра газовым потоком в плоском канале 57
Е. И. Погорелов, Т. Г. Погорелова, Г. М. Никульчикова. Решение одной вариационной задачи квазиодномерной нестационарной газовой динамики 60
Т. Г. Погорелова. Применение метода множителей Лангранжа в одной вариационной задаче о метании тела газовым потоком 67
В. В. Жаровцев. Определение параметра сглаживания и коэффициента запаса устойчивости в схеме Лакса—Вендроффа при численном интегрировании газодинамических уравнений 74
Г. Р. Шрагер, В. А. Якутенок. Численное исследование слияния вязких капель под действием сил поверхностного натяжения 79
О. П. Кадиев, В. А. Лосев. Об универсальности систем автоматизированного проектирования 85
В. В. Жолобов, В. В. Ефремов. Об одном точном решении задачи Лагранжа, когда в области течения происходит смешение или разделение потоков газа 88
А. В. Буров, Э. Е. Либин. Исследование потенциальных течений идеальной жидкости со свободной поверхностью на основе метода конформных отображений 95
Г. П. Анисимов. О приближенном методе расчета пульсирующих турбулентных струй 100
В. И. Никитин, В. Н. Штанько. Обтекание идеальной жидкостью дуги окружности в канале с источником за обтекаемым контуром . . . 105
А. И. Бородин, С. В. Пейгин. Ламинарный пространственный пограничный слой на частично проницаемой поверхности 112
С. В. Пейгин, В. В. Русаков, Г. А. Тирский. Метод расчета двумерного гиперзвукового невязкого ударного слоя на затупленных телах . . 120
В. З. Касимов. Об использовании метода разрыва при расчете течений газа со сложным уравнением состояния 128
В. З. Касимов, Ю. П. Хоменко. Об одной физической интерпретации плоских скалярных полей с постоянным по модулю градиентом 130
В. И. Вознюк. Алгоритм оценки аэродинамических коэффициентов тел по дискретным наблюдениям за их свободным движением 132
И. Т. Скородинский. Об особых управлениях в задаче оптимального спуска летательного аппарата (ЛА) 138
Л. И. Дубровская, Ю. П. Хоменко. Об уравнениях нестационарного движения идеального газа по криволинейному каналу 143
Рефераты на опубликованные статьи 148

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

Редактор **К. Г. Шилько**
Технический редактор **Р. М. Подгорбунская**
Корректор **Н. Л. Егорова**

ИБ1302. Сдано в набор 1.09.84 г. Подписано к печати 20.6.84 г. К30308?.
Формат 70×108$^{1}/_{16}$, бумага типографская № 3. Гарнитура литературная.
Высокая печать. П. л. 9,75; уч.-изд. л. 12,2; усл. п. л. 13,65.
Тираж 500. Заказ 6079-22. Цена 1 р. 80 к.

Издательство ТГУ. 634029. Томск. ул. Никитина, 4.
Типография издательства «Красное знамя», Томск, ул. Советская, 47.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

Электронный библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета

1-545080

1 р. 80 к.

Томский госуниверситет 1878
Научная библиотека 00700169