

ОБРАБОТКА ДАННЫХ И УПРАВЛЕНИЕ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ



ВЫПУСК 5

Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

**ОБРАБОТКА ДАННЫХ
И УПРАВЛЕНИЕ
В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ**

Выпуск 5

Под редакцией профессора А.Ф. Терпугова

Издательство Томского университета

2003

УДК 519.2

ББК 22.17

О 24

Обработка данных и управление в сложных системах:

О 24 Сборник статей / Под ред. А.Ф. Терпугова. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. Вып. 5. – 238 с.

ISBN 5-7511-1646-x

Сборник содержит статьи сотрудников и аспирантов факультета математики и информатики филиала Кемеровского университета в г. Анжеро-Судженске, посвященные статистической обработке временных рядов, актуарной математике, а также вопросам управления в системах массового обслуживания и в измерительных системах.

Для студентов, аспирантов, научных работников, занимающихся вопросами анализа временных рядов и управления в измерительных системах.

УДК 519.2

ББК 22.17

ISBN 5-7511-1646-x

© Филиал Кемеровского государственного
университета в г. Анжеро-Судженске, 2003

СОДЕРЖАНИЕ

Войтиков К.Ю., Змеев О.А., Моисеев А.Н. Основные функциональные требования к подсистеме «Брокер объектных запросов» в рамках унифицированного процесса разработки программного обеспечения ©.	3
Гарайшина И.Р., Назаров А.А. Исследование переходных режимов в математической модели изменения числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде ©.	14
Егоров М.Н., Якупов Р.Т. Прямой подход к решению задачи оптимальной фильтрации состояний нескольких дискретных линейных динамических систем при наблюдении разностей их векторов состояния ©.	21
Злобина С.Л. Динамическая модель формирования заданных структурных характеристик социальной системы ©.	32
Змеев О.А. Математическая модель деятельности фонда социального страхования с детерминированными расходами на социальные программы при релейно-гистерезисном управлении капиталом ©.	42
Колоусов Д.В. Исследование потока заявок, отправленных в источник повторных вызовов сети связи случайного доступа с конечным числом станций ©.	57
Кошоруба П.И. Исследование времени и распределения вероятностей стабильного функционирования неустойчивой сети связи ©.	67
Кузнецов Д.Ю. Математическая модель двухлинейной сети связи с вероятностным распределением запросов, управляемая адаптивным протоколом случайного множественного доступа©.	78
Лях Е.А., Назаров А.А., Туренова Е.Л. Численное исследование сети связи с протоколом случайного множественного доступа ©.	86
Марголис Н.Ю. Исследование нестабильных сетей случайного доступа ©.	91
Масяйкин С.А. Построение переговорного множества при конкурентном взаимодействии страховых компаний и обратной зависимости интенсивности потока рисков от страховых взносов©.	96
Моисеев А.Н., Хохлов А.С. Бизнес-модель документооборота Администрации города©.	105
Назаров А.А. Период занятости в бесконечнолинейных немарковских системах обслуживания©.	119
Назаров А.А., Цой С.А. Исследование математической модели двухканальной сети случайного доступа©.	124
Никитина М.А. Исследование немарковской модели сети связи, управляемой h ₂ -настойчивым протоколом случайного доступа с дискретным контролем оповещения о конфликте ©.	136
Новицкая Е.В. Организация анализа оборотных средств в системе «1С. Предприятие. Оперативный учет»©.	144
Орлов А.Б. Расчет характеристик бесконечнолинейной системы массового обслуживания с дважды стохастическим входящим потоком ©.	150
Орлов А.Б. Средняя длительность периода занятости системы массового обслуживания с вытеснением заявки при дважды стохастическом входящем потоке ©.	158

Поддубный В.В. Максимально правдоподобное полиномиальное сглаживание рядов эмпирических частот ©	171
Терпугов А.Ф., Щирова Н.П. Релейно-гистерезисное управление ценой товара при наличии склада (диффузионное приближение) ©	183
Токарева Е.Г. Двумерное распределение Коши ©	191
Токарева Е.Г. Асимптотические свойства статистик для проверки гипотезы о равенстве дисперсий двух гауссовских процессов ©	195
Чернядьева Н.В. Существование и признаки оптимальности траекторий участников рынка труда ©	202
Яковлева Н.М. Об одной модели равновесия на рынке труда, учитывающей рабочее и досуговое время ©	212
Янковский Б.Е. Энтропийные числовые характеристики случайных величин ©	222
Глухова Е.В. Вероятностные характеристики количества вредных веществ в организме ©	226

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВУХКАНАЛЬНОЙ СЕТИ СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА

А.А. НАЗАРОВ, С.А. ЦОЙ

В данной работе проводится анализ математической модели двухканальной сети связи с протоколом случайного множественного доступа, на вход которой от абонентских станций поступают сообщения [1, 2]. Эти сообщения распределяются между двумя каналами.

Для исследования данной сети связи построим ее математическую модель в виде двухлинейной системы массового обслуживания (СМО) [3, 4], на вход которой поступает простейший с параметром λ поток заявок. Заявки распределяются между каналами по биномиальной схеме. Вероятность попадания заявки в первый канал обозначим r , во второй – $(1 - r)$. Время обслуживания заявок случайно и распределено экспоненциально с параметрами μ_1 и μ_2 для первого и второго каналов соответственно. При возникновении конфликта в системе реализуется сигнал оповещения о конфликте, продолжительность которого имеет экспоненциальный закон распределения с параметрами $1/a_1$ и $1/a_2$ соответственно для конфликта в каждом канале. Искраженные заявки направляются в источник повторных вызовов (ИПВ), из которого обращаются к каналам после случайной задержки, распределенной экспоненциально с параметром σ . Заявки из ИПВ распределяются между каналами также по биномиальной схеме аналогично заявкам, поступившим из входящего потока. Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, а $k_1(t)$ и $k_2(t)$ – случайные процессы, характеризующие состояние первого и второго каналов соответственно. Процессы $k_1(t)$ и $k_2(t)$ могут принимать следующие значения: $k_v(t) = 0$ – канал свободен, $k_v(t) = 1$ – занят обслуживанием заявки, $k_v(t) = C$ –

идет интервал оповещения о конфликте. Очевидно, что процесс $\{i(t), k_1(t), k_2(t)\}$ является марковским с дискретным множеством состояний. Обозначим $P_{k_1 k_2}(i, t) = P\{i(t) = i, k_1(t) = k_1, k_2(t) = k_2\}$. Для наших обозначений выпишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова, определяющих распределение вероятностей $P_{k_1 k_2}(i, t)$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial P_{00}(i, t)}{\partial t} + (\lambda + \sigma i) P_{00}(i, t) = \mu_1 P_{10}(i, t) + \mu_2 P_{01}(i, t) + \frac{1}{a_1} P_{C0}(i, t) + \frac{1}{a_2} P_{0C}(i, t), \\
 & \frac{\partial P_{10}(i, t)}{\partial t} + (\lambda + \sigma i + \mu_1) P_{10}(i, t) = \mu_2 P_{11}(i, t) + r\sigma(i+1) P_{00}(i+1, t) + r\lambda P_{00}(i, t) + \\
 & \quad + \frac{1}{a_2} P_{1C}(i, t), \\
 & \frac{\partial P_{01}(i, t)}{\partial t} + (\lambda + \sigma i + \mu_2) P_{01}(i, t) = \mu_1 P_{11}(i, t) + (1-r)\sigma(i+1) P_{00}(i+1, t) + \frac{1}{a_1} P_{C1}(i, t) + \\
 & \quad + (1-r)\lambda P_{00}(i, t), \\
 & \frac{\partial P_{11}(i, t)}{\partial t} + (\lambda + \sigma i + \mu_1 + \mu_2) P_{11}(i, t) = (1-r)\lambda P_{10}(i, t) + (1-r)\sigma(i+1) P_{10}(i+1, t) + \\
 & \quad + r\lambda P_{01}(i, t) + r\sigma(i+1) P_{01}(i+1, t), \\
 & \frac{\partial P_{0C}(i, t)}{\partial t} + \left(\lambda + r\sigma i + \frac{1}{a_2} \right) P_{0C}(i, t) = (1-r)\lambda P_{01}(i-2, t) + \mu_1 P_{1C}(i, t) + \frac{1}{a_1} P_{CC}(i, t) + \\
 & \quad + (1-r)\sigma(i-1) P_{01}(i-1, t) + (1-r)\lambda P_{0C}(i-1, t), \\
 & \frac{\partial P_{C0}(i, t)}{\partial t} + \left(\lambda + (1-r)\sigma i + \frac{1}{a_1} \right) P_{C0}(i, t) = r\lambda P_{10}(i-2, t) + \mu_2 P_{C1}(i, t) + \frac{1}{a_2} P_{CC}(i, t) + \\
 & \quad + r\sigma(i-1) P_{10}(i-1, t) + r\lambda P_{C0}(i-1, t), \\
 & \frac{\partial P_{1C}(i, t)}{\partial t} + \left(\lambda + r\sigma i + \mu_1 + \frac{1}{a_2} \right) P_{1C}(i, t) = r\lambda P_{0C}(i, t) + r\sigma(i+1) P_{0C}(i+1, t) + \\
 & \quad + (1-r)\lambda P_{11}(i-2, t) + (1-r)\sigma(i-1) P_{11}(i-1, t) + (1-r)\lambda P_{1C}(i-1, t), \\
 & \frac{\partial P_{C1}(i, t)}{\partial t} + \left(\lambda + (1-r)\sigma i + \mu_2 + \frac{1}{a_1} \right) P_{C1}(i, t) = r\lambda P_{11}(i-2, t) + r\lambda P_{C1}(i-1, t) + \\
 & \quad + (1-r)\sigma(i+1) P_{C0}(i+1, t) + r\sigma(i-1) P_{11}(i-1, t) + (1-r)\lambda P_{C0}(i, t), \\
 & \frac{\partial P_{CC}(i, t)}{\partial t} + \left(\lambda + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) P_{CC}(i, t) = r\lambda P_{1C}(i-2, t) + r\sigma(i-1) P_{1C}(i-1, t) + \\
 & \quad + (1-r)\lambda P_{C1}(i-2, t) + (1-r)\sigma(i-1) P_{C1}(i-1, t) + \lambda P_{CC}(i-1, t).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Для исследования данной системы воспользуемся методом асимптотического анализа. Анализ будем проводить в тех условиях, что заявки из ИПВ вновь поступают после достаточно большой задержки, то есть величина $\sigma \rightarrow 0$.

В системе (1) переобозначим $\sigma = \varepsilon$ и сделаем замену $x = \varepsilon i$, $\tau = \varepsilon t$,

$\frac{1}{\varepsilon} P_{k_1 k_2}(i, t) = \pi_{k_1 k_2}(x, \tau, \varepsilon)$. При этом система (1) примет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \pi_{00}(x, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + (\lambda + x) \pi_{00}(x, \tau, \varepsilon) &= \mu_1 \pi_{10}(x, \tau, \varepsilon) + \mu_2 \pi_{01}(x, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{a_1} \pi_{C0}(x, \tau, \varepsilon) + \\ &+ \frac{1}{a_2} \pi_{0C}(x, \tau, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{\partial \pi_{10}(x, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + (\lambda + x + \mu_1) \pi_{10}(x, \tau, \varepsilon) &= \mu_2 \pi_{11}(x, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{a_2} \pi_{1C}(x, \tau, \varepsilon) + \\ &+ r \lambda \pi_{00}(x, \tau, \varepsilon) + r(x + \varepsilon) \pi_{00}(x + \varepsilon, \tau, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{\partial \pi_{01}(x, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + (\lambda + x + \mu_2) \pi_{01}(x, \tau, \varepsilon) &= \mu_1 \pi_{11}(x, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{a_1} \pi_{C1}(x, \tau, \varepsilon) + \\ &+ (1-r) \lambda \pi_{00}(x, \tau, \varepsilon) + (1-r)(x + \varepsilon) \pi_{00}(x + \varepsilon, \tau, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{\partial \pi_{11}(x, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + (\lambda + x + \mu_1 + \mu_2) \pi_{11}(x, \tau, \varepsilon) &= (1-r) \lambda \pi_{10}(x, \tau, \varepsilon) + \\ &+ r \lambda \pi_{01}(x, \tau, \varepsilon) + (1-r)(x + \varepsilon) \pi_{10}(x + \varepsilon, \tau, \varepsilon) + r(x + \varepsilon) \pi_{01}(x + \varepsilon, \tau, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{\partial \pi_{0C}(x, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + \left(\lambda + r x + \frac{1}{a_2} \right) \pi_{0C}(x, \tau, \varepsilon) &= (1-r) \lambda \pi_{01}(x - 2\varepsilon, \tau, \varepsilon) + \mu_1 \pi_{1C}(x, \tau, \varepsilon) + \\ &+ (1-r)(x - \varepsilon) \pi_{01}(x - \varepsilon, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{a_1} \pi_{CC}(x, \tau, \varepsilon) + (1-r) \lambda \pi_{0C}(x - \varepsilon, \tau, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{\partial \pi_{C0}(x, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + \left(\lambda + (1-r)x + \frac{1}{a_1} \right) \pi_{C0}(x, \tau, \varepsilon) &= r \lambda \pi_{10}(x - 2\varepsilon, \tau, \varepsilon) + \mu_2 \pi_{C1}(x, \tau, \varepsilon) + \\ &+ r(x - \varepsilon) \pi_{10}(x - \varepsilon, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{a_2} \pi_{CC}(x, \tau, \varepsilon) + r \lambda \pi_{C0}(x - \varepsilon, \tau, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{\partial \pi_{1C}(x, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + \left(\lambda + rx + \mu_1 + \frac{1}{a_2} \right) \pi_{1C}(x, \tau, \varepsilon) &= r(x + \varepsilon) \pi_{0C}(x + \varepsilon, \tau, \varepsilon) + \\
&+ r\lambda \pi_{0C}(x, \tau, \varepsilon) + (1-r)\lambda \pi_{11}(x - 2\varepsilon, \tau, \varepsilon) + (1-r)(x - \varepsilon) \pi_{11}(x - \varepsilon, \tau, \varepsilon) + \\
&+ (1-r)\lambda \pi_{1C}(x - \varepsilon, \tau, \varepsilon), \\
\varepsilon \frac{\partial \pi_{C1}(x, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + \left(\lambda + (1-r)x + \mu_2 + \frac{1}{a_1} \right) \pi_{C1}(x, \tau, \varepsilon) &= (1-r)\lambda \pi_{C0}(x, \tau, \varepsilon) + \\
&+ (1-r)(x + \varepsilon) \pi_{C0}(x + \varepsilon, \tau, \varepsilon) + r\lambda \pi_{11}(x - 2\varepsilon, \tau, \varepsilon) + r(x - \varepsilon) \pi_{11}(x - \varepsilon, \tau, \varepsilon) + \\
&+ r\lambda \pi_{C1}(x - \varepsilon, \tau, \varepsilon), \\
\varepsilon \frac{\partial \pi_{CC}(x, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + \left(\lambda + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \pi_{CC}(x, \tau, \varepsilon) &= r\lambda \pi_{1C}(x - 2\varepsilon, \tau, \varepsilon) + \\
&+ r(x - \varepsilon) \pi_{1C}(x - \varepsilon, \tau, \varepsilon) + (1-r)\lambda \pi_{C1}(x - 2\varepsilon, \tau, \varepsilon) + (1-r)(x - \varepsilon) \pi_{C1}(x - \varepsilon, \tau, \varepsilon) + \\
&+ \lambda \pi_{CC}(x - \varepsilon, \tau, \varepsilon).
\end{aligned}$$

На первом этапе исследования сделаем предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ в системе (2). В этом случае систему (2) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
(\lambda + x) \pi_{00}(x, \tau) &= \mu_1 \pi_{10}(x, \tau) + \mu_2 \pi_{01}(x, \tau) + \frac{1}{a_1} \pi_{C0}(x, \tau) + \frac{1}{a_2} \pi_{0C}(x, \tau), \\
(\lambda + x + \mu_1) \pi_{10}(x, \tau) &= \mu_2 \pi_{11}(x, \tau) + \frac{1}{a_2} \pi_{1C}(x, \tau) + r\lambda \pi_{00}(x, \tau) + rx \pi_{00}(x, \tau), \\
(\lambda + x + \mu_2) \pi_{01}(x, \tau) &= \mu_1 \pi_{11}(x, \tau) + \frac{1}{a_1} \pi_{C1}(x, \tau) + (1-r)\lambda \pi_{00}(x, \tau) + (1-r)x \pi_{00}(x, \tau), \\
(\lambda + x + \mu_1 + \mu_2) \pi_{11}(x, \tau) &= (1-r)\lambda \pi_{10}(x, \tau) + r\lambda \pi_{01}(x, \tau) + (1-r)x \pi_{10}(x, \tau) + rx \pi_{01}(x, \tau), \\
\left(\lambda + rx + \frac{1}{a_2} \right) \pi_{0C}(x, \tau) &= (1-r)\lambda \pi_{01}(x, \tau) + (1-r)x \pi_{01}(x, \tau) + \mu_1 \pi_{1C}(x, \tau) + \\
&+ \frac{1}{a_1} \pi_{CC}(x, \tau) + (1-r)\lambda \pi_{0C}(x, \tau), \\
\left(\lambda + (1-r)x + \frac{1}{a_1} \right) \pi_{C0}(x, \tau) &= r\lambda \pi_{10}(x, \tau) + rx \pi_{10}(x, \tau) + \mu_2 \pi_{C1}(x, \tau) + \frac{1}{a_2} \pi_{CC}(x, \tau) +
\end{aligned}$$

$$+ r\lambda\pi_{C0}(x, \tau), \quad (3)$$

$$\left(\lambda + rx + \mu_1 + \frac{1}{a_2} \right) \pi_{1C}(x, \tau) = r\lambda\pi_{0C}(x, \tau) + rx\pi_{0C}(x, \tau) + (1-r)\lambda\pi_{11}(x, \tau) + \\ + (1-r)x\pi_{11}(x, \tau) + (1-r)\lambda\pi_{1C}(x, \tau),$$

$$\left(\lambda + (1-r)x + \mu_2 + \frac{1}{a_1} \right) \pi_{C1}(x, \tau) = (1-r)\lambda\pi_{C0}(x, \tau) + (1-r)x\pi_{C0}(x, \tau) + r\lambda\pi_{11}(x, \tau) + \\ + rx\pi_{11}(x, \tau) + r\lambda\pi_{C1}(x, \tau),$$

$$\left(\lambda + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \pi_{CC}(x, \tau) = r\lambda\pi_{1C}(x, \tau) + rx\pi_{1C}(x, \tau) + (1-r)\lambda\pi_{C1}(x, \tau) + \\ + (1-r)x\pi_{C1}(x, \tau) + \lambda\pi_{CC}(x, \tau),$$

где $\pi_{k_1 k_2}(x, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi_{k_1 k_2}(x, \tau, \varepsilon)$.

Система (3) представляет собой однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно $\pi_{k_1 k_2}(x, \tau)$. Определитель этой системы равен 0, что легко проверяется сложением всех уравнений и получением тождества. Следовательно, (3) имеет нетривиальное решение, и это решение определяется с точностью до мультипликативной составляющей. Будем искать ее решение в виде: $\pi_{k_1 k_2}(x, \tau) = R_{k_1 k_2} \pi(x, \tau)$. Подставив его в (3) и сократив на $\pi(x, \tau)$, получаем систему уравнений для $R_{k_1 k_2}$:

$$(\lambda + x)R_{00} = \mu_1 R_{10} + \mu_2 R_{01} + \frac{1}{a_1} R_{C0} + \frac{1}{a_2} R_{0C},$$

$$(\lambda + x + \mu_1)R_{10} = \mu_2 R_{11} + \frac{1}{a_2} R_{1C} + r\lambda R_{00} + rxR_{00},$$

$$(\lambda + x + \mu_2)R_{01} = \mu_1 R_{11} + \frac{1}{a_1} R_{C1} + (1-r)\lambda R_{00} + (1-r)xR_{00},$$

$$(\lambda + x + \mu_1 + \mu_2)R_{11} = (1-r)\lambda R_{10} + r\lambda R_{01} + (1-r)xR_{10} + rxR_{01},$$

$$\left(\lambda + rx + \frac{1}{a_2} \right) R_{0C} = (1-r)\lambda R_{01} + (1-r)xR_{01} + \mu_1 R_{1C} + \frac{1}{a_1} R_{CC} + (1-r)\lambda R_{0C}, \quad (4)$$

$$\left(\lambda + (1-r)x + \frac{1}{a_1} \right) R_{C0} = r\lambda R_{10} + rxR_{10} + \mu_2 R_{C1} + \frac{1}{a_2} R_{CC} + r\lambda R_{C0},$$

$$\left(\lambda + rx + \mu_1 + \frac{1}{a_2} \right) R_{1C} = r\lambda R_{0C} + rxR_{0C} + (1-r)\lambda R_{11} + (1-r)xR_{11} + (1-r)\lambda R_{1C},$$

$$\left(\lambda + (1-r)x + \mu_2 + \frac{1}{a_1} \right) R_{C1} = (1-r)\lambda R_{C0} + (1-r)xR_{C0} + r\lambda R_{11} + rxR_{11} + r\lambda R_{C1},$$

$$\left(\lambda + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) R_{CC} = r\lambda R_{1C} + rxR_{1C} + (1-r)\lambda R_{C1} + (1-r)xR_{C1} + \lambda R_{CC}.$$

Полученная система уравнений не содержит явно переменной τ , следовательно, решение системы не будет явно зависеть от τ . Таким образом, мы получили, что решение системы (3) можно представить как произведение двух компонент, первая из которых характеризует состояние каналов и не зависит от τ , а вторая определяет процесс $x = \epsilon i$. Для решения системы (4) преобразуем ее в следующий вид, с учетом замены $g = \lambda + x$:

$$\begin{cases} rgR_{00} = \mu_1 R_{10} + \frac{1}{a_1} R_{C0}, \\ rgR_{10} + \mu_1 R_{10} = rgR_{00}, \\ \frac{1}{a_1} R_{C0} = rgR_{10}; \end{cases} \quad \begin{cases} rgR_{01} = \mu_1 R_{11} + \frac{1}{a_1} R_{C1}, \\ rgR_{11} + \mu_1 R_{11} = rgR_{01}, \\ \frac{1}{a_1} R_{C1} = rgR_{11}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} rgR_{0C} = \mu_1 R_{1C} + \frac{1}{a_1} R_{CC}, \\ rgR_{1C} + \mu_1 R_{1C} = rgR_{0C}, \\ \frac{1}{a_1} R_{CC} = rgR_{1C}; \end{cases} \quad \begin{cases} (1-r)gR_{00} = \mu_2 R_{01} + \frac{1}{a_2} R_{0C}, \\ (1-r)gR_{01} + \mu_2 R_{01} = (1-r)gR_{00}, \\ \frac{1}{a_2} R_{0C} = (1-r)gR_{01}; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} (1-r)gR_{10} = \mu_2 R_{11} + \frac{1}{a_2} R_{1C}, \\ (1-r)gR_{11} + \mu_2 R_{11} = (1-r)gR_{10}, \\ \frac{1}{a_2} R_{1C} = (1-r)gR_{11}; \end{cases} \quad \begin{cases} (1-r)gR_{C0} = \mu_2 R_{C1} + \frac{1}{a_2} R_{CC}, \\ (1-r)gR_{C1} + \mu_2 R_{C1} = (1-r)gR_{C0}, \\ \frac{1}{a_2} R_{CC} = (1-r)gR_{C1}. \end{cases}$$

Очевидно, что если некоторое решение $R_{k_1 k_2}$ будет удовлетворять системе (5), то это же решение будет удовлетворять системе (4). Все системы имеют нетривиальное решение, определенное с точностью до мультипликативной составляющей, в силу того, что их определители равны 0. Будем искать решение в виде произведения $R_{k_1 k_2} = R_{k_1}^{(1)} R_{k_2}^{(2)}$. Разрешая эти системы и добавляя условие нормиров-

ки: $\sum_{k_1=0}^C R_{k_1}^{(1)} = 1$ и $\sum_{k_2=0}^C R_{k_2}^{(2)} = 1$, получаем

$$\begin{aligned} R_0^{(1)} &= \frac{rg + \mu_1}{(rg)^2 a_1 + 2rg + \mu_1}, & R_0^{(2)} &= \frac{(1-r)g + \mu_2}{((1-r)g)^2 a_2 + 2(1-r)g + \mu_2}, \\ R_1^{(1)} &= \frac{rg}{(rg)^2 a_1 + 2rg + \mu_1}, & R_1^{(2)} &= \frac{(1-r)g}{((1-r)g)^2 a_2 + 2(1-r)g + \mu_2}, \\ R_C^{(1)} &= \frac{(rg)^2 a_1}{(rg)^2 a_1 + 2rg + \mu_1}, & R_C^{(2)} &= \frac{((1-r)g)^2 a_2}{((1-r)g)^2 a_2 + 2(1-r)g + \mu_2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, на первом этапе асимптотического анализа получено решение для системы (3), которое представляет собой произведение трех маргинальных распределений, два из них определяют состояния каналов, а последнее — компоненту x . Причем для первых двух были получены явные выражения, определенные в (6).

Для проведения второго этапа исследования необходимо вернуться к рассмотрению системы (2). В данной системе функцию $\pi_{k_1 k_2}(x \pm k\varepsilon, \tau, \varepsilon)$ разложим в ряд по приращению аргумента x с точностью до $o(\varepsilon)$:

$$\pi_{k_1 k_2}(x \pm k\varepsilon, \tau, \varepsilon) = \pi_{k_1 k_2}(x, \tau, \varepsilon) \pm k\varepsilon \frac{\partial \pi_{k_1 k_2}(x, \tau, \varepsilon)}{\partial x} + o(\varepsilon),$$

$$(x \pm k\varepsilon) \pi_{k_1 k_2}(x \pm k\varepsilon, \tau, \varepsilon) = x \pi_{k_1 k_2}(x, \tau, \varepsilon) \pm k\varepsilon \frac{\partial \{x \pi_{k_1 k_2}(x, \tau, \varepsilon)\}}{\partial x} + o(\varepsilon).$$

В итоге имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \pi_{00}(x, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + (\lambda + x) \pi_{00}(x, \tau, \varepsilon) &= \mu_1 \pi_{10}(x, \tau, \varepsilon) + \mu_2 \pi_{01}(x, \tau, \varepsilon) + \\ &+ \frac{1}{a_1} \pi_{c0}(x, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{a_2} \pi_{0c}(x, \tau, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{\partial \pi_{10}(x, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + (\lambda + x + \mu_1) \pi_{10}(x, \tau, \varepsilon) &= \mu_2 \pi_{11}(x, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{a_2} \pi_{1c}(x, \tau, \varepsilon) + \\ &+ r \lambda \pi_{00}(x, \tau, \varepsilon) + r x \pi_{00}(x, \tau, \varepsilon) + \varepsilon r \frac{\partial \{x \pi_{00}(x, \tau, \varepsilon)\}}{\partial x} + o(\varepsilon), \\ \varepsilon \frac{\partial \pi_{01}(x, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + (\lambda + x + \mu_2) \pi_{01}(x, \tau, \varepsilon) &= \mu_1 \pi_{11}(x, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{a_1} \pi_{c1}(x, \tau, \varepsilon) + \\ &+ (1-r) \lambda \pi_{00}(x, \tau, \varepsilon) + (1-r) x \pi_{00}(x, \tau, \varepsilon) + \varepsilon (1-r) \frac{\partial \{x \pi_{00}(x, \tau, \varepsilon)\}}{\partial x} + o(\varepsilon), \\ \varepsilon \frac{\partial \pi_{11}(x, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + (\lambda + x + \mu_1 + \mu_2) \pi_{11}(x, \tau, \varepsilon) &= (1-r) \lambda \pi_{10}(x, \tau, \varepsilon) + \\ &+ r \lambda \pi_{01}(x, \tau, \varepsilon) + (1-r) x \pi_{10}(x, \tau, \varepsilon) + \varepsilon (1-r) \frac{\partial \{x \pi_{10}(x, \tau, \varepsilon)\}}{\partial x} + \\ &+ r x \pi_{01}(x, \tau, \varepsilon) + \varepsilon r \frac{\partial \{x \pi_{01}(x, \tau, \varepsilon)\}}{\partial x} + o(\varepsilon), \\ \varepsilon \frac{\partial \pi_{0c}(x, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + \left(\lambda + r x + \frac{1}{a_2} \right) \pi_{0c}(x, \tau, \varepsilon) &= (1-r) \lambda \pi_{01}(x, \tau, \varepsilon) - \\ &- 2\varepsilon (1-r) \lambda \frac{\partial \pi_{01}(x, \tau, \varepsilon)}{\partial x} + (1-r) x \pi_{01}(x, \tau, \varepsilon) - \varepsilon (1-r) \frac{\partial \{x \pi_{01}(x, \tau, \varepsilon)\}}{\partial x} + \\ &+ \mu_1 \pi_{1c}(x, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{a_1} \pi_{cc}(x, \tau, \varepsilon) + (1-r) \lambda \pi_{0c}(x, \tau, \varepsilon) - \varepsilon (1-r) \lambda \frac{\partial \pi_{0c}(x, \tau, \varepsilon)}{\partial x} + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

Этот процесс $x(\tau)$ имеет смысл асимптотического среднего нормированного числа заявок в ИПВ.

Для демонстрации полученных результатов приведем ряд графиков правой части дифференциального уравнения (9) для различных параметров. На рис.1 и 2 представлены графики поведения правой части дифференциального уравнения (9) при следующих параметрах: $\lambda = 1.475$, $\mu_1 = 10$, $\mu_2 = 10$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $r = 0.5$ для первого графика и $\lambda = 1.475$, $\mu_1 = 10$, $\mu_2 = 15$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $r = 0.1$ – для второго. По оси абсцисс отложено значение x , а по оси ординат – значение λ (прямая линия) и значение выражения в круглых скобках уравнения (9) (кривая линия).

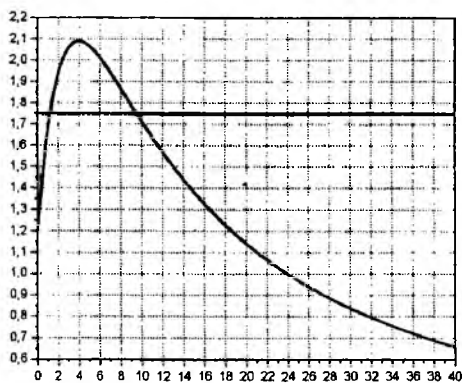


Рис. 1

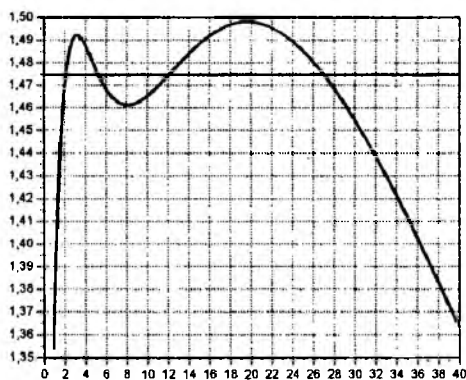


Рис. 2

В первом случае (рис.1) у дифференциального уравнения существует две точки покоя, одна из которых устойчива, а другая неустойчива. Устойчивую точку покоя назовем точкой стабилизации сети связи, а сеть случайного доступа в этом случае будем называть моностабильной. Во втором случае (рис.2) точек покоя четыре, и две из них устойчивы. Это точки стабилизации сети связи, в этом случае сеть случайного доступа будем называть бистабильной.

На рис.3 и 4 представлены численные решения уравнения (9) для указанных выше параметров соответственно. По оси абсцисс отложено значение τ , а по оси

ординат – значение решений $x(t)$, начальные значения которых были взяты вблизи точек покоя, и указаны точки покоя (прямыми линиями).

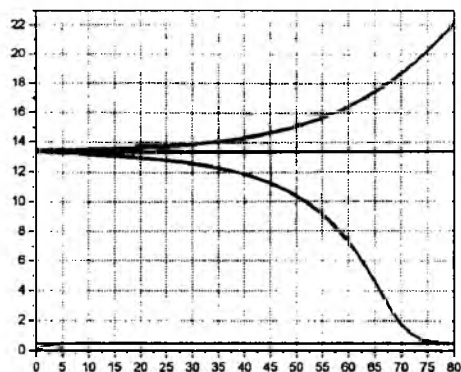


Рис. 3

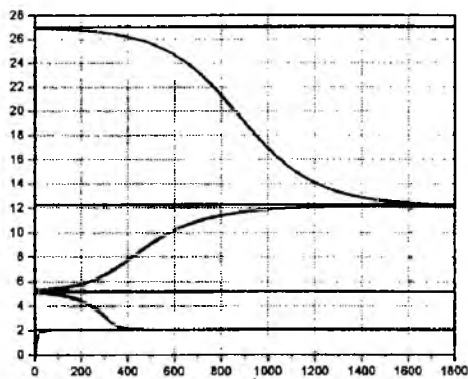


Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Флинт Д. Локальные сети ЭВМ. М.: Финансы и статистика, 1986.
2. Бертсекас Д., Галлагер Р. Сети передачи данных. М.: Мир, 1989.
3. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Сов. радио, 1971.
4. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.
5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: Учебник для физических и физико-математических факультетов университетов. М.: Эдиториал УРСС, 2000.