

СИЛЬНО СОСТОЯТЕЛЬНАЯ И АСИМПТОТИЧЕСКИ НОРМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА ПРОЦЕССА АВТОРЕГРЕССИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С БЕСКОНЕЧНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Рассматривается стационарный процесс авторегрессии первого порядка. Предложена сильно состоятельная оценка параметра, не требующая существования моментов у функции распределения затравочного процесса. Показано, что для асимптотической нормальности предложенной оценки достаточно существования первого момента у данного процесса.

В последнее время распространение получили модели, в которых входящие в них случайные переменные имеют распределения с более «тяжелыми хвостами», чем гауссовское, не имеющие конечной дисперсии и, возможно, даже математического ожидания, например распределение Коши. Такого рода модели находят широкое применение, к примеру, в задачах экономики и климатологии [1, 2].

Пусть наблюдаемые значения

$$x_i = \rho x_{i-1} + \varepsilon_i, \quad (1)$$

где ρ – интересующий нас параметр, $|\rho| < 1$; ε_i – независимые одинаково распределенные случайные величины с симметричной плотностью $p(\cdot)$. Будем предполагать, что $M\{\log_+ |\varepsilon_i|\} < \infty$, где $\log_+ u = \max(0, \log u)$. Тогда с вероятностью единица существует стационарный процесс

$$x_i = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{i-j}, \quad (2)$$

удовлетворяющий (1) [3].

Рассмотрим оценку параметра ρ , основанную на знаковых функциях, которую будем искать из уравнения

$$\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \text{sign}(x_i(x_{i+1} - \hat{\rho}x_i)) = 0, \quad (3)$$

где $\text{sign}(u) = \{1, \text{если } u > 0; -1, \text{если } u < 0; 0, \text{если } u = 0\}$.

Нетрудно видеть, что если для данной конкретной выборки не существует $\hat{\rho}$, удовлетворяющей (3), то всегда можно найти такое $\hat{\rho}$, что $\xi(\hat{\rho}) = O(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$, и все полученные ниже асимптотические результаты останутся справедливыми.

Рассмотрим асимптотические свойства оценки $\hat{\rho}$.

Теорема 1. Если функция $p(\cdot)$ непрерывна в нуле, и $p(0) \neq 0$, то $\hat{\rho}$ сходится почти наверное при $n \rightarrow \infty$ к ρ .

Для доказательства рассмотрим одну общую лемму.

Лемма. Пусть $y^{(n)}$ – последовательность функций $R^k \rightarrow R^k$, которая поточечно сходится к функции y на R^k , причем существует единственная точка $x^{(0)}$: $y(x^{(0)}) = 0$ и невырожденная матрица $P = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x^{(0)}); i, j = \overline{1, k} \right)$. Тогда последовательность $x^{(n)}$ такая, что $y^{(n)}(x^{(n)}) = 0$, сходится к $x^{(0)}$.

Доказательство леммы. Обозначим через $\|a\|$ евклидову норму вектора a . Так как $y_m^{(n)}(x^{(0)}) \xrightarrow{n} y_m(x^{(0)}) \forall m$ и $y^{(n)}(x^{(n)}) = 0$, то $\|y^{(n)}(x^{(0)}) - y^{(n)}(x^{(n)})\| \rightarrow 0$.

Рассмотрим окрестность S точки $x^{(0)}$, в которой функция $y(\cdot)$ непрерывна: поскольку $y(\cdot)$ имеет в S единст-

венный нуль, и $\det P \neq 0$, то существует некоторая окрестность $S^* \subset S$, в которой функция $y(x)$ строго монотонна. Возьмем $\forall u, v \in S^*$. Заметим, что $\|y(u) - y(v)\| \leq \|y^{(n)}(u) - y^{(n)}(v)\| + \|y^{(n)}(u) - y^{(n)}(v)\|$ и для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$ такое, что из условия $\|y(u) - y(v)\| < \delta$ будет следовать $\|u - v\| < \varepsilon$. Таким образом, для достаточно больших номеров $n \exists \delta_0$, таких, что из $\|y^{(n)}(u) - y^{(n)}(v)\| < \delta_0$ следует $\|u - v\| < \varepsilon_0$. Значит, из сходимости $\|y^{(n)}(x^{(0)}) - y^{(n)}(x^{(n)})\| \rightarrow 0$ будет следовать сходимость $\|x^{(n)} - x^{(0)}\| \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Доказательство Теоремы 1. Найдем математическое ожидание $M\{\xi\}$. Обозначим через $p_x(\cdot)$ функцию плотности распределения процесса (2), $\Delta\rho = \hat{\rho} - \rho$. К примеру, если $p(\cdot)$ – распределение Коши с параметрами 0 и σ , то $p_x(\cdot)$ также распределение Коши с параметрами 0 и $\sigma/(1 - |\rho|)$.

$$\begin{aligned} M\{\xi\} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} M\{\text{sign}(x_i(x_{i+1} - \hat{\rho}x_i))\} = \\ &= \int_{R^2} p_x(z)p(y) \text{sign}(z(y - \Delta\rho z)) dz dy = \\ &= -4 \int_0^{\infty} p_x(z) \int_0^{\Delta\rho z} p(y) dy dz. \end{aligned} \quad (4)$$

Сходимость почти наверное ξ к $M\{\xi\}$ для $\forall |\hat{\rho}| < 1$ следует из стационарности процесса $\text{sign}(x_i(x_{i+1} - \hat{\rho}x_i))$ [4]. Единственность решения уравнения $M\{\xi\} = 0$ следует непосредственно из (4), непрерывности и положительности функции плотности $p(\cdot)$ в нуле. Так как производная $M'_{\Delta\rho}\{\xi\} \neq 0$ в точке $\Delta\rho = 0$, то по лемме получаем требуемый результат.

Рассмотрим предельное распределение оценки $\hat{\rho}$.

Теорема 2. Если выполнены условия предыдущей теоремы и существует $\int_R xp_x(x) dx$, то оценка $\hat{\rho}$ асимптотически нормальна с дисперсией

$$D = \left(\int_0^{\infty} xp_x(x) dx \right) / 16p^2(0).$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность случайных величин $\xi_n(c) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} \text{sign}\left(x_i\left(\varepsilon_{i+1} - \frac{c}{\sqrt{n}}x_i\right)\right)$, где c – некоторый параметр. Найдем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\{\xi_n(c)\} = -4 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{cz}{\sqrt{n}}} p_x(z) \sqrt{n} dz = -4cp \int_0^{\infty} zp_x(z) dz,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\{\xi_n^2(c)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n M \left\{ \text{sign} \left(x_i x_j \left(\varepsilon_{i+1} - \frac{c}{\sqrt{n}} x_i \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\varepsilon_{j+1} - \frac{c}{\sqrt{n}} x_j \right) \right) \right\} = 1.$$

Таким образом, для $\forall c \xi(c)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится в среднеквадратическом к случайной величине

$$\xi(c) = -4cp(0) \int_0^\infty zp_x(z) dz + \zeta,$$

где $M\{\zeta\} = 0$, $D(\zeta) = 1$.

Распределение случайной величины ζ совпадает с асимптотическим распределением

$$\xi_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} \text{sign}(x_i \varepsilon_{i+1}),$$

которое является стандартным гауссовским распределением [5]. Следовательно, $\sqrt{n}\Delta p$ сходится по распределению к случайной величине

$$\left(4p(0) \int_0^\infty zp_x(z) dz \right)^{-1} \zeta$$

[4], что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Samorodnitsky G., Taqqu M.S.* Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance. London: Chapman and Hall, 1997.
2. *Peters E.E.* Fractal Market Analysis. Wiley & Sons, 1994.
3. *Bloomfield P., Steiger W.* Least Absolute Deviations: Theory, Applications and Algorithms. Boston: Birkhouser, 1983.
4. *Хеннекен П.Л., Тортра А.* Теория вероятностей и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1974.
5. *Корольюк В.С., Портенко Н.И. и др.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.

Статья представлена кафедрой теоретических основ информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика и информатика» 30 апреля 2003 г.