

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЬЮТОНА ОДНОЛИСТНЫХ НОРМИРОВАННЫХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ

И.А. Александров установил точные оценки коэффициентов Тейлора однолистных и нормированных в единичном круге функций. Используя результат И.А. Александрова, в настоящей статье автор получил точные оценки коэффициентов Ньютона этих функций. Знаки равенства реализуются функцией Кебе.

Пусть E – единичный круг $|z| < 1$. Известно, что разделенную разность n -порядка можно определить формулой

$$[F(z); z_0, \dots, z_n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{F(\xi) d\xi}{(\xi - z_0) \dots (\xi - z_n)}, \quad (1)$$

где Γ – простой замкнутый контур, охватывающий все точки $z_0, \dots, z_n \in E$.

Точки $z_0, \dots, z_n \in E$ могут совпадать между собой. Если $z_0 = \dots = z_n = 0$, то разделенная разность (1) превращается в коэффициент Маклорена. Если $z_0 = \dots = z_n = \xi$, то получим коэффициент Тейлора. В общем случае разделенную разность (1) можно назвать коэффициентом Ньютона.

Обозначим через $\tilde{K}_1(E)$ класс аналитических в E функций $F(z)$, нормированных условиями $F(0)=0$, $F'(0)=1$, для которых $[F(z); z_0, z_1] \neq 0$ при любых различных $z_0, z_1 \in E$. Легко видеть, что при таком определении класс $\tilde{K}_1(E)$ полностью совпадает с хорошо известным в математической литературе классом S однолистных и нормированных в E функций.

В 1984 году Л. де Бранжем [1] была положительно решена знаменитая гипотеза Л. Бибербаха о коэффициентах однолистных функций из класса S , которая в наших обозначениях формулируется следующим образом.

Теорема 1 (Л. де Бранж). Если $F(z) \in \tilde{K}_1(E)$, то

$$\frac{1}{n!} |F^{(n)}(0)| \leq n. \quad (2)$$

Знак равенства для любого $n \geq 2$ реализуется только функциями вида

$$F(z) = \frac{z}{(1 - e^{-i\alpha} z)^2} \in \tilde{K}_1(E), \quad 0 \leq \alpha < 2\pi. \quad (3)$$

Применяя теорему 1, И.А. Александров [2] осуществил переход от точных оценок коэффициентов Маклорена (2) к точным оценкам коэффициентов Тейлора.

Теорема 2 (И.А. Александров). Если

$$F(z) \in \tilde{K}_1(E),$$

то

$$\frac{1}{n!} |F^{(n)}(z)| \leq \frac{n+|z|}{(1-|z|)^{n+2}}, \quad \forall z \in E, \quad (4)$$

$n=0, 1, 2, \dots$

Знак равенства для любого $n \geq 0$ при фиксированном $z_0 = |z_0| e^{i\alpha_0} \neq 0$ из E реализуется только функциями вида (3) с $\alpha = \alpha_0$.

Опираясь на теорему 2, автору этой заметки удалось перейти от точных оценок коэффициентов Тейлора к точным оценкам коэффициентов Ньютона.

Теорема 3 (Э.Г. Кирьяцкий). Если $F(z) \in \tilde{K}_1(E)$, то

$$|[F(z); z_0, \dots, z_n]| \leq \left(-1 + \sum_{m=0}^n \frac{1}{1-|z_m|} \right) \prod_{m=0}^n \frac{1}{1-|z_m|} \quad (5)$$

при любом $n \geq 0$ и любых $z_0, \dots, z_n \in E$. Знак равенства в (5) имеет место тогда и только тогда, когда $z_m = |z_m| e^{i\alpha_0}$, $m=0, 1, \dots, n$ (т.е. все точки $z_0, \dots, z_n$ из E принадлежат лучу, выходящему из начала координат под некоторым углом α_0 к вещественной оси), и функция $F(z)$ имеет вид (3) при $\alpha = \alpha_0$.

Заметим, что при $z_0 = \dots = z_n = 0$ получим (2). При $z_0 = \dots = z_n$ имеем (4). Таким образом, теорема 3 является, в некотором смысле, усилением, а также обобщением теорем Л. де Бранжа и И.А. Александрова.

Пусть S^0 – класс выпуклых однолистных в E нормированных функций $F(z)$. Для этого класса справедлива следующая

Теорема 4 (Э. Г. Кирьяцкий). Если $F(z) \in S^0$,

$$|[F(z); z_0, \dots, z_n]| \leq \frac{1}{(1-|z_0|) \dots (1-|z_n|)} \quad (6)$$

при любом $n \geq 1$ и любых $z_0, \dots, z_n \in E$. Знак равенства в (6) имеет место тогда и только тогда, когда $z_m = |z_m| e^{i\alpha_0}$, $m=0, 1, \dots, n$ (т.е. все точки $z_0, \dots, z_n$ из E принадлежат лучу, выходящему из начала координат под некоторым углом α_0 к вещественной оси), и функция $F(z)$ имеет вид

$$F(z) = \frac{z}{1 - e^{-i\alpha_0} z}.$$

Заметим, что при $z_0 = \dots = z_n$ получим результат И.А. Александрова [2]. Нам понадобится так называемая теорема перехода, имеющая самостоятельный интерес и применения, например, в том случае, когда уже известна оценка модуля n -й производной аналитической в единичном круге E функции [3].

Теорема 5 (Э.Г. Кирьяцкий). Пусть $F(z)$ – аналитическая в E функция и $M(r)$ – непрерывная на промежутке $[0, 1)$ функция, имеющая на этом про-

межутке строго возрастающую непрерывную n -ю производную $M^{(n)}(r)$. Если

$$|F^{(n)}(z)| \leq M^{(n)}(r), \quad |z|=r, \quad (7)$$

для любого $z \in E$, то справедливы следующие утверждения:

1. При любых $z_0, \dots, z_n \in E$ выполняется неравенство

$$| [F(z); z_0, \dots, z_n] | \leq [M(r); r_0, \dots, r_n], \quad (8)$$

где $|z_0|=r_0, \dots, |z_n|=r_n$.

2. Пусть $F^{(n)}(z) \equiv \text{const}$. Для того чтобы при некоторых $z_0, \dots, z_n \in E$ (среди которых есть различные) в (8) имело место равенство

$$| [F(z); z_0, \dots, z_n] | = [M(r); r_0, \dots, r_n], \quad (9)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали вещественные α и β , удовлетворяющие следующим условиям:

а) Все точки $z_0, \dots, z_n$ лежат на радиусе круга E , наклоненном под углом α к вещественной оси, т.е. $z_m = r_m e^{i\alpha}$, $m=0, 1, \dots, n$.

б) Выполняется условие

$$F^{(n)}(re^{i\alpha}) = M^{(n)}(r) e^{i\beta}$$

для любого r , взятого из наименьшего промежутка, содержащего все точки $r_0, \dots, r_n$.

с) Пусть $F^{(n)}(z) \equiv c$. Для того чтобы для некоторых $z_0, \dots, z_n \in E$ имело место равенство (9), необходимо и достаточно, чтобы

$$M^{(n)}(r) \equiv |c|$$

при любом r , взятом из наименьшего промежутка, содержащего все точки $r_0, \dots, r_n$ [3].

Докажем теорему 3. Сначала убеждаемся в том, что для функции

$$M(r) = \frac{r}{(1-r)^2}$$

справедливо равенство

$$\frac{1}{n!} M^{(n)}(r) = \frac{r+n}{(1-r)^{2+n}},$$

где $M^{(n)}(r)$ – непрерывная и строго возрастающая на промежутке $[0,1)$ функция. Применяя теорему 2, к функции $F(z) \in \tilde{K}_1(E)$, получим

$$|F^{(n)}(z)| \leq M^{(n)}(r), \quad \forall |z|=r < 1.$$

На основании теоремы 5 и того, что

$$[M(r); r_0, \dots, r_n] = \left(-1 + \sum_{m=0}^n \frac{1}{1-r_m} \right) \prod_{m=0}^n \frac{1}{1-r_m},$$

приходим к оценке (5) разделенной разности n -го порядка любой функции $F(z) \in \tilde{K}_1(E)$:

$$| [F(z); z_0, \dots, z_n] | \leq [M(r); r_0, \dots, r_n] = \left(-1 + \sum_{m=0}^n \frac{1}{1-r_m} \right) \prod_{m=0}^n \frac{1}{1-r_m} \quad (10)$$

при любом $n \geq 0$ и произвольно взятых $z_0, \dots, z_n \in E$, так как случай совпадения всех точек между собой приведет нас снова к теореме 2. Теперь рассмотрим вопрос о знаке равенства в (10). Пусть знак равенства в (10) имеет место в некоторых точках $z_0, \dots, z_n \in E$, среди которых есть различные. Тогда на основании теоремы 5 существуют такие вещественные α и β , что $z_m = r_m e^{i\alpha}$, $m=0, 1, \dots, n$ и

$$F^{(n)}(re^{i\alpha}) = M^{(n)}(r) e^{i\beta} = n! \frac{r+n}{(1-r)^{2+n}} e^{i\beta},$$

при любом r из наименьшего промежутка, содержащего все точки $r_0, \dots, r_n$. По теореме 2 функция $F(z)$ должна иметь вид (3) с $\alpha = \alpha_0$

Для n -й разделенной разности такой функции легко получим

$$[F(z); z_0, \dots, z_n] = e^{-i(n-1)\alpha} \left(-1 + \sum_{m=0}^n \frac{1}{1-e^{-i\alpha} z_m} \right) \prod_{m=0}^n \frac{1}{1-e^{-i\alpha} z_m}.$$

Теорема 3 доказана. Аналогичным образом доказывается теорема 4, если применить формулу

$$[z(1-cz)^{-1}; z_0, \dots, z_n] = \frac{c^{n-1}}{(1-cz_0) \dots (1-cz)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Branges L. A proof of the Bieberbach conjecture / LOMI preprints, E-5-84-S. 1-21.
2. Александров И.А. Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: ТГУ, 2001. 220 с.
3. Кирьяцкий Э.Г. Некоторые оценки n -й разделенной разности // Лит. мат. сб. 1989. Т. 29. № 3. С. 491-506.

Статья представлена кафедрой математического моделирования факультета фундаментальных наук Вильнюсского технического университета им. Гедиминаса, поступила в научную редакцию 30 апреля 2003 г.