ТРУДЫ

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ПРИ ТОМСКОМ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ им. В. В. КУЙБЫШЕВА

Выпуск 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1973

Настоящий сборник содержит оригинальные работы по гидромеханике, газовой динамике и термоупругости, представленные сотрудниками научно-исследовательского института прикладной математики и механики при ТГУ и ряда кафедр Томского государственного университета. Труды рассчитаны на инженеров и научных работников, занимающихся приложениями численных и аналитических методов в различных областях прикладной математики и механики.

Редакторы — В. А. ШВАБ, В. Е. ТОМИЛОВ

Индекс 2-4-3

ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ТОЧЕЧНОМ ВЗРЫВЕ

С. В. ПАНЬКО

Модифицированным методом Швеца [1] получено приближенно-аналитическое решение задачи о точечном взрыве в сжимаемой среде. Проведено сравнение с известным точным решением Седова [2] для сильного взрыва. В случае взрыва с учетом противодавления выведены соотношения, позволяющие установить асимптотическое поведение газодинамических величин при больших t, причем достигается это более простым путем, нежели в работе [3]. Вначале рассмотрим точечный взрыв без учета противодавления.

§ 1. В покоящемся газе в момент $t=0$ вдоль некоторой плоскости мгновенно выделяется энергия E_0, приходящаяся на единицу площади, то есть происходит взрыв. Так как на границе области невозмущенного течения характеристики движения терпят разрыв, то образуется ударная волна. Требуется определить движение газа за ударной волной и ее закон движения, если параметры газа перед фронтом ударной волны известны. Газ считается идеальным, и для движения за ударной волной выполняется условие адиабатичности. Тогда задача сводится к отысканию решения системы уравнений одномерной газовой динамики, которую возьмем в виде:

$$\begin{gathered}(\rho u)_x=-\rho_t,\\ p_x=-\rho(u_t+uu_x)\\ (pu^\varkappa)_x=-u^{\varkappa-1}p_t.\end{gathered}\tag{1.1}$$

Это решение должно удовлетворять граничным условиям в центре $x=0$

$$u(0,t)=0,\ \rho(0,t)=0,\ p(0,t)=p_0(t)\tag{1.2}$$

и на ударной волне $x=x_2(t)$

$$u_2=\frac{2}{\varkappa+1}\dot{x}_2,\rho_2=\frac{\varkappa+1}{\varkappa+1}\rho_1,\ \ p_2=\frac{2}{\varkappa+1}\rho_1\dot{x}_2^2.\tag{1.3}$$

Из условия того, что скорость частицы в центре взрыва равна нулю и диссипация энергии отсутствует, плотность будет равна нулю в центре взрыва во все время движения.

Зададим пространственное распределение элементов течения за ударной волной в виде

$$u=u_2\frac{x}{x_2},\ p=p_0(t)+\gamma(t)\left(\frac{x}{x_2}\right)^{m_n}+\delta(t)\left(\frac{x}{x_2}\right)^{m_n}$$

$$\rho=\alpha(t)\left(\frac{x}{x_2}\right)^{s}+\beta(t)\left(\frac{x}{x_2}\right)^{m_n}. \tag{1.4}$$

Функции $p_0(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ подлежат определению, постоянные s, m, n, m_1 известны. Условия (1.2) выполняются тождественно. Удовлетворяя (1.3), получим:

$$\alpha(t)+\beta(t)=\rho_2,\ \gamma(t)+\delta(t)=p_2(t)-p_0(t). \tag{1.5}$$

Вставим профили (1.4) в правые части (1.1) и проинтегрируем, определяя временные константы из условий в центре

$$-\rho u=\frac{\dot\alpha x_2-s\alpha\dot x_2}{s+1}\left(\frac{x}{x_2}\right)^{s+1}+\frac{\dot\beta x_2-m\beta\dot x_2}{m+1}\left(\frac{x}{x_2}\right)^{m+1},$$

$$p_0=p_0(t)-(\dot u_2x_2-u_2\dot x_2+u_2^2)\left[\frac{\alpha}{s+2}\left(\frac{x}{x_2}\right)^{s+2}+\frac{\beta}{m+2}\left(\frac{x}{x_2}\right)^{m+2}\right], \tag{1.6}$$

$$-\rho u^{\varkappa}=u_2^{\varkappa-1}\left(\frac{x}{x_2}\right)^{\varkappa}\left[\frac{\dot p_0x_2}{\varkappa}+\frac{\dot\gamma x_2-n\gamma\dot x_2}{n+\varkappa}\left(\frac{x}{x_2}\right)^{n}+\frac{\dot\delta x_2-m_1\delta\dot x_2}{m_1+\varkappa}\left(\frac{x}{x_2}\right)^{m_1}\right].$$

Удовлетворим условия на ударной волне, полагая в (1.6)

$$-\rho_2u_2=\left(\frac{\dot\alpha}{s+1}+\frac{\dot\beta}{m+1}\right)x_2-\left(\frac{\alpha s}{s+1}+\frac{\beta m}{m+1}\right)\dot x_2,$$

$$p_2=p_0-(\dot u_2x_2-u_2\dot x_2+u_2^2)\left(\frac{\alpha}{s+2}+\frac{\beta}{m+2}\right), \tag{1.7}$$

$$-p_2u_2=\left(\frac{\dot p_0}{\varkappa}+\frac{\dot\gamma}{n+\varkappa}+\frac{\dot\delta}{m_1+\varkappa}\right)x_2-\left(\frac{\gamma n}{n+\varkappa}+\frac{\delta m_1}{m_1+\varkappa}\right)\dot x_2.$$

С учетом условий (1.3) и (1.5) первое соотношение (1.7) примет вид

$$\frac{2}{\varkappa+1}\rho_2\dot x_2=\frac{s}{s+1}\rho_2\dot x+\frac{m-s}{(m+1)(s+1)}(\beta\dot x_2). \tag{1.8}$$

Интегрируя (1.8) ($\rho_2=\mathrm{const}$) и принимая во внимание начальное условие для $x_2(t)$, $x_2(0)=0$, будем иметь следующее:

$$\beta=\frac{(m+1)(s+1)}{m-s}\left(\frac{2}{\varkappa+1}-\frac{s}{s+1}\right)\rho_2, \tag{1.9}$$

тогда α определяется сразу

$$\alpha=\left[1-\frac{(m+1)(s+1)}{m-s}\left(\frac{2}{\varkappa+s}-\frac{s}{s+1}\right)\right]\rho_2. \tag{1.10}$$

Из второго уравнения находим

$$p_0(t)=p_2+(\dot u_2x_2-u_2\dot x_2+u_2^2)\left(\frac{\alpha}{s+2}+\frac{\beta}{m+2}\right). \tag{1.11}$$

Граничные условия на ударной волне и (1.9), (1.10) позволяют записать (1.11) иначе:

$$p_0(t)=\frac{2(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)^2}\rho_2\dot{x}_2^2+\frac{2}{\varkappa+1}\rho_2\left(x_2\ddot{x}_2-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\dot{x}_2^2\right)\left(\frac{1-b}{s+2}+\frac{b}{m+2}\right),$$

где

$$b=\frac{(m+1)(s+1)}{m-s}\left(\frac{2}{\varkappa+1}-\frac{s}{s+1}\right).$$

То есть $P_0(t)$ будет известно, как только найдем закон движения ударной волны: его отыскиваем из последнего равенства (1.7), в котором положим следующее:

$$\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}p_2\dot{x}_2+\left(\frac{\dot{\gamma}n}{n+\varkappa}+\frac{\dot{\delta}m_1}{m_1+\varkappa}\right)x_2+\varkappa\left(\frac{\delta n}{n+\varkappa}+\frac{\delta m_1}{m_1+\varkappa}\right)\dot{x}_2. \tag{1.12}$$

Присоединяя к (1.12) второе условие (1.5), получим систему уравнений для определения $\delta(t)$ и $\delta(t)$. Для радиуса ударной волны будем иметь дифференциальное уравнение второго порядка:

$$2x^2\frac{d^2x_2}{dt^2}+\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2=0,$$

решение которого, удовлетворяющее условию $x_2(0)=0$, будет

$$x_2=ct^{\frac{2}{3}}. \tag{1.13}$$

Константу c в (1.13) находим из интегрального условия сохранения впрыснутой энергии

$$E_0=2\int_0^{x_2}\left(\frac{p}{\varkappa-1}+\frac{\rho u^2}{2}\right)dx. \tag{1.14}$$

Для $\gamma(t)$ и $\delta(t)$ имеем:

$$\gamma(t)=\frac{n+\varkappa}{(m_1-n)\varkappa}\left[(p_2-p_0)m_1-\frac{2(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)^2}\rho_2\dot{x}_2^2(m_1+\varkappa)\right],$$

$$\delta(t)=\frac{m_1+\varkappa}{(m_1-n)\varkappa}\left[-(p_2-p_0)n+\frac{2(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)^2}\rho^2\dot{x}_2^2(m_1+\varkappa)\right].$$

Введем обозначения:

$$\frac{\rho}{\rho_2}=g,\quad \frac{u}{u_2}=f,\quad \frac{p}{p^2}=h,\quad \frac{x}{x_2}=\lambda.$$

Тогда (1.6) можно записать в безразмерном виде

$$\begin{gathered} fg=\frac{\varkappa+1}{2}\left(\frac{s}{s+1}a\lambda^{s+1}+\frac{m}{m+1}b\lambda^{m+1}\right)\\ h=c_3+c_4\lambda^{s+2}+c_5\lambda^{m+2}\\ hf^{\varkappa}=\lambda^{\varkappa}(c_0+c_1\lambda^n+c_2\lambda^{m_1}), \end{gathered} \tag{1.15}$$

где за c $(i=0,1\ ...,\ 5)$ обозначено

$$c_0=\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\left[1-\frac{3\varkappa-1}{2(2\varkappa-1)}\left(1-\frac{m-s}{m+2}b\right)\right],$$

$$c_1=\frac{n+1}{m_1-n}\left[m_1\frac{3\varkappa-1}{2(2\varkappa-1)}\left(1-\frac{m-s}{m+2}b\right)-\frac{m_1+\varkappa}{\varkappa+1}\right]\frac{\varkappa+1}{2\varkappa},$$

$$c_2=\frac{m_1+1}{m_1-n}\left[-n\frac{3\varkappa-1}{2(2\varkappa-1)}\left(1-\frac{m-s}{m+2}b\right)+\frac{n+\varkappa}{\varkappa+1}\right]\frac{\varkappa+1}{2\varkappa},$$

$$c_3=\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}c_0,$$

$$c_4=\frac{3\varkappa-1}{2(2\varkappa-1)}(1-b),$$

$$c_5=\frac{3\varkappa-1}{2(2\varkappa-1)}\frac{b}{2}.$$

Приводя к безразмерному виду условия (1.14) и находя c в (1.13), получим

$$c=\left(\frac{E_0}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\frac{9(\varkappa^2-1)}{16I}\right]^{\frac{1}{3}}I-\int_0^1(h+gf^2)d\lambda. \tag{1.6}$$

Разрешая систему (1.15) относительно f, g, h, получим их значения в первом приближении

$$h=c_3+c_1\lambda^{s+2}+c_5\lambda^{m+2},$$

$$f=\lambda\left\{\frac{c_0+c_1\lambda^n+c_2\lambda^{m_1}}{c_3+c_1\lambda^{s+2}c_5\lambda^{m+2}}\right\}^{-\frac{1}{\varkappa}} \tag{1.17}$$

$$g=\frac{\varkappa+1}{2}\left(\frac{sa}{s+1}\lambda^s+\frac{mb}{m+1}\lambda^m\right)\left\{\frac{c_0+c_1\lambda^n+c_2\lambda^{m_1}}{c_3+c_1\lambda^{s+2}+c_5\lambda^{m+2}}\right\}^{-\frac{1}{\varkappa}}.$$

Постоянные s, m, n, m_1 связаны между собой следующим образом:

$$n=s+2;\ m=2s+2;\ m_1=2s+4;\ \varkappa=1{,}4;\ s=2{,}5.$$

Результаты сравнения приближенного решения (1.17) с точным решением Седова приведены на графиках (см. рис. 1, 2, 3), где 0 решение (1.17) — точное решение. Как видно из графиков, уже в первом приближении получается хорошее совпадение с точным решением, причем, оставаясь в рамках первого приближения, мы можем повысить точность двумя способами: взять больше членов в (1.4) или ввести свободные параметры, подлежащие определению, например, значение искомых величин на половине радиуса ударной волны, то есть путем разбиения промежутка интегрирования на части.

Перейдем к рассмотрению точечного взрыва с учетом противодавления.

§ 2. В этом случае давление перед фронтом ударной волны уже не равно нулю. А так как энергия, переносимая ударной волной, будет расходоваться на преодоление противодавления, то интенсивность ударной волны при удалении от центра взрыва будет падать уже не до

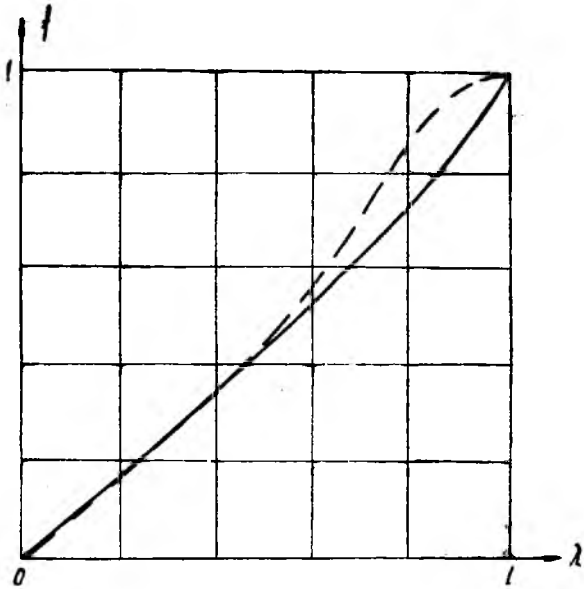

Рис. 1

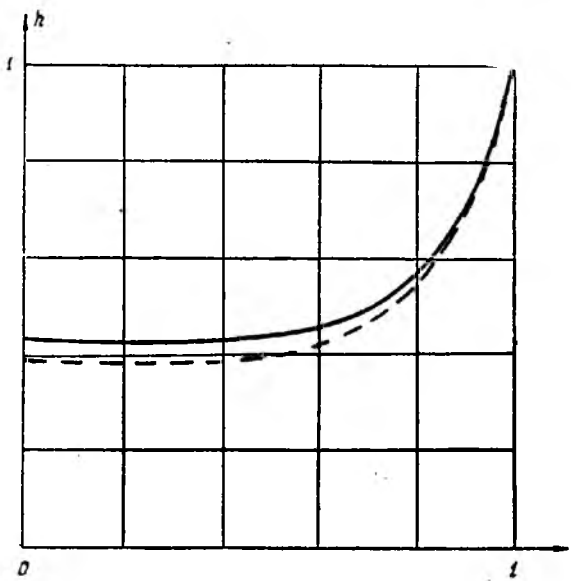

Рис. 2

11 Заказ 5471

нуля, давление во фронте ударной при $t \infty$ становится сравнимым с начальным давлением газа. Асимптотическое поведение элементов течения будет тем же самым, что и для случая взрыва без противодавления. В самом деле, скорость частицы, находящейся в центре взрыва, в силу симметрии, равна нулю. Ввод энергии точечной и передача ее за счет излучения и теплопроводности отсутствует, следовательно, плотность газа в центре взрыва будет равна нулю во все время движения. Это резкое уменьшение плотности с приближением к центру связано с возрастанием температуры.

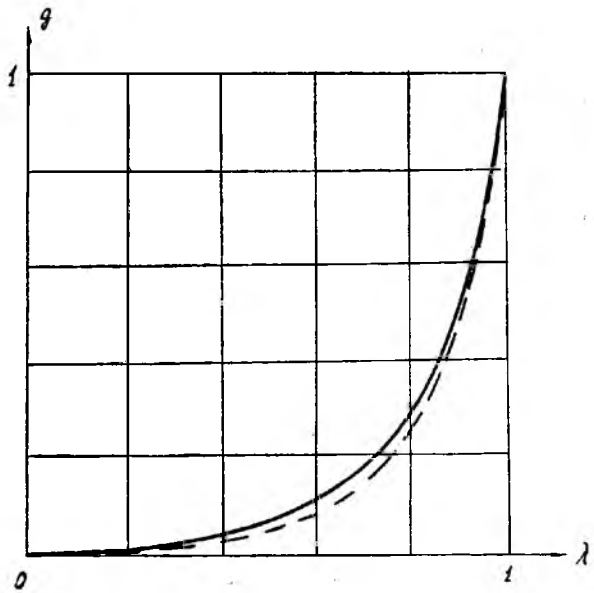

Рис. 3

Математически задача сводится к нахождению решения системы (1.1), удовлетворяющего (1.2) и условиям на ударной волне (1.3), которые в данном случае примут вид:

$$u_2=\frac{2}{\varkappa+1}\dot{x}_2\left(1-\frac{a_1^2}{\dot{x}_2}\right) \quad \rho_2=\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\frac{\rho_1}{1+\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\frac{a_1^2}{\dot{x}_2^2}},$$

$$p_2=\frac{2}{\varkappa+1}\rho_1\dot{x}_2^2\left(1-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\frac{a_1^2}{\dot{x}_2^2}\right). \tag{2.1}$$

Опуская выкладки, аналогичные проделанным для случая взрыва без противодавления, запишем систему уравнений для нахождения неизвестных функций $\beta(t),\gamma(t),\delta(t),p_0(t)$ и $x_2(t)$

$$\frac{m-s}{(m+1)(s+1)}\frac{d\beta x_2}{dt}=\rho_2 u_2-\frac{\rho_2 x_2-s\,\rho_2 x_2}{s+1}.$$

$$\frac{m-s}{(m+1)(s+1)}\,\frac{d\beta x_2}{d\dot{x}_2}=\frac{\rho_2 u_2 c-\dfrac{s}{s+1}\dot{x}_2}{\left(\dot{x}_2^2-a_1^2\right)^{\frac{3\varkappa+1}{\varkappa+1}}\left(\dot{x}_2^2-\dfrac{\varkappa-1}{2\varkappa}a_1^2\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}}}-\frac{x_2}{s+1}\,\frac{d\rho_2}{d\dot{x}_2}$$

$$\frac{d}{d\dot{x}_2}x_2^{\varkappa}\left(\frac{\gamma n}{n+\varkappa}+\frac{\delta m_1}{m_1+\varkappa}\right)=-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\,x_2^{\varkappa}\,\frac{d\rho_2}{d\dot{x}_2}.$$

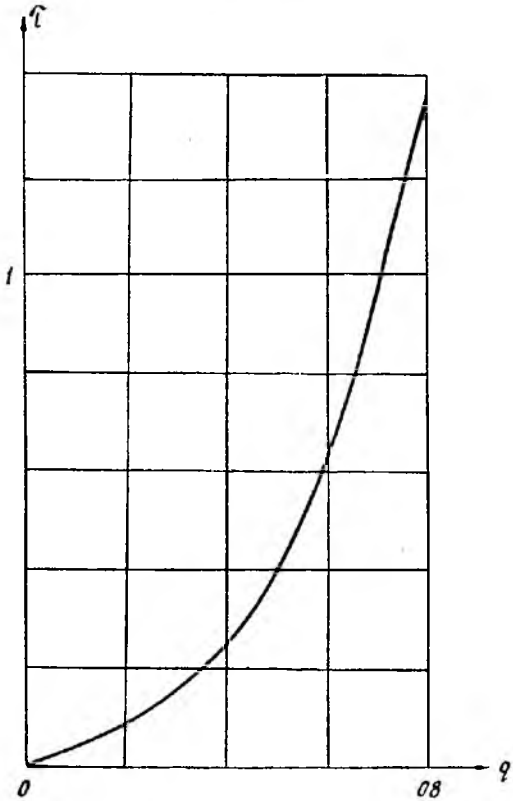

Рис. 4

Эти уравнения можно проинтегрировать, так как u_2 и p_2 суть известные функции x_2

$$\beta x_2=\frac{(m+1)(s+1)}{m-s}\int_0^{\dot{x}_2}\left\{\frac{\rho_2 u_2 c+\dfrac{s}{s+1}\dot{x}_2}{\left(\dot{x}_2^2-a_1^2\right)^{\frac{3\varkappa+1}{\varkappa+1}}\left(\dot{x}_2^2-\dfrac{\varkappa-1}{2\varkappa}a_1^2\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}}}-\frac{x_2}{s+1}\,\frac{d\rho_2}{d\dot{x}_2}\right\}d\dot{x}_2$$

$$\frac{\gamma n}{n+\varkappa}+\frac{\delta m_1}{m_1+\varkappa}=-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}x_2^{-\varkappa}\int_0^{x_2}x_2^{\varkappa}\frac{dp_2}{dx_2}dx_2\,.$$

Так как x_2 определена, то сразу находится $p_0(x_2)$. Присоединяя к последнему равенству (2.6) соотношение (1.5), находим $\gamma(x_2)$ и $\delta(x_2)$.

Интегралы в (2.5) и (2.6) не берутся и могут быть подсчитаны только численно.

Если в проведенных выше выкладках устремить к нулю противодавление, то результаты первого параграфа получаются как частный случай. На рис. 4 приведен график функции (2.5) $\tau=\tau(q)$. Таким образом, полученное решение справедливо не только при малых t, но качественно верно отражает поведение газодинамических величин на больших расстояниях от центра взрыва.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин А. М. Об одном итерационно-интерполяционном методе. См. настоящий сборник.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 1961.
3. Якимов Ю. П. Об асимптотических решениях уравнений одномерного неустановившегося движения идеального газа и об асимптотических законах затухания ударных волн. ПММ, т. 19, вып. 6, 1955.