

ПРИБЛИЖЕНИЕ СЛОЖНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТА РЕСТРИКТИВНЫХ В-СПЛАЙНОВ

В.В. Поддубный, М.В. Черноусов

1. Введение

Часто в различных практических задачах возникает необходимость представить произвольно заданный трехмерный набор точечных данных в виде гладкой, аналитической функции. Как правило, задача осложняется тем, что может содержать различные ограничения, подчас нелинейные. Например, в целом ряде геофизических приложений требуется по неупорядоченному набору результатов измерения распределенного параметра составить топографическую карту в виде набора линий одинакового уровня либо произвести картографирование на основе специальных вычислений, использующих различные параметры в качестве входных данных. Очевидно, что представление поверхностного распределения параметров должно удовлетворять некоторым законам, следующим из физики задачи. Кроме того, учитывая, что современная вычислительная техника все же оперирует конечным ресурсом, то чтобы разрабатываемый алгоритм представлял практическую ценность нужно, чтобы время, необходимое для его выполнения, было по возможности минимальным, а также требуемая память и дисковое пространство лежали в разумных пределах.

Проблема представления данных при аппроксимации поверхностей решается в основном с использованием двух типов моделей данных – так называемых «тинов» (представление поверхности в виде набора треугольников) и «гридов» (представление поверхности с помощью прямоугольной сетки узлов).

Но на практике приходится иметь дело с совершенно неупорядоченными массивами входных данных. При этом, кроме наиболее точной аппроксимации с использованием указанных двух типов данных, необходимо ещё и обеспечить выполнение априорных условий, которые, как было сказано, могут быть нелинейными.

Самым простым подходом к проблеме аппроксимации многомерного набора является триангуляция, построенная на входном наборе точек [1], но так как она является все же линейным приближением исходного набора, то точность такого метода не всегда может удовлетворить исследователя. Кроме того, триангуляция может представлять практический интерес в областях, скорее связанных с машинной графикой для быстрой визуализации исходного массива, чем для использования в практических задачах, где требуется сложная обработка входных данных, подчас это сложная эвристика, и, конечно, удобнее иметь аналитическое представление поверхностного распределения приближаемого параметра в виде непрерывной функции.

Другой распространенный подход – это использование взвешивающих полиномов высоких степеней типа [2]:

$$\tilde{f} = \frac{\sum_{i=k_1}^{k_2} f_i w_i}{\sum_{i=k_1}^{k_2} w_i},$$

где

$$w_i(x, y) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}{R}\right)^2, & \text{при } \langle |x - x_i| < R, |y - y_i| < R \rangle, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1)$$

Но опять же, так как, по сути, это усредняющий фильтр, то результат часто не удовлетворяет заказчика из-за сильного сглаживания, особенно на разреженных сетках. Если исходный набор содержит области сгущения и разрежения узлов, то возникает проблема выбора радиуса R : при очень большом радиусе мы получим слишком сильное сглаживание, при малом радиусе могут возникнуть области, где функция $\tilde{f}(\cdot)$ будет не определена.

Наиболее интересным представляется так называемый ДММ-сплайн [3]:

$$S(p) = \sum_{i=1}^N \alpha_i b(p, p_i) + \pi_k(x, y),$$

где

$$b_i(p, p_i) = \begin{cases} u^m \ln(u), & \text{если } m - \text{четное}, \\ u^m, & \text{если } m - \text{нечетное}, \end{cases}$$

$$u = [r^2(p, p_i) + R^2]^{1/2}, \quad R - \text{const, и существует } k = 0, 1, \dots \text{ ограничений,}$$

$$\sum_i \alpha_i \pi_k(p_i) = 0, \quad \forall k \in P_k, \quad P_k : \pi_k(p) = \sum_{0 \leq r+s \leq k} a_{rs} x^r y^s, \quad (2)$$

$$S(p_i) = f_i, \quad i = \overline{0, N}.$$

Важное его преимущество в том, что аргумент p в общем случае может быть n -мерным. Это часто полезно в задачах геофизики, связанных с аппроксимацией параметров, распределенных в объемах, которые задаются кернами с различных разведочных скважин.

Но так как его вычислительные затраты зависят от размера входного массива квадратично, то на практике при количестве точек свыше 10^3 этот тип сплайна трудно применим. Здесь возможны различные методы вычисления ДММ-сплайна на различных пересекающихся участках и последующее «сшивание» результатов, что, разумеется, влечет снижение точности аппроксимации.

Но даже при априорно вычисленных коэффициентах сплайна его построение требует много времени, из-за чего его использование ограничено в задачах, требующих большого числа вычислений в реальном времени.

2. Рестриктивные В-сплайны

В данной работе предлагается новый тип сплайна – рестриктивный В-сплайн для аппроксимации сложных поверхностей в случае несовпадающих сеток и при наличии ограничения на вид аппроксимации.

В теории сплайнов фундаментальным понятием является понятие дефекта. Под дефектом сплайна понимают разницу между степенью сплайна и количеством непрерывных производных. Говорят, что сплайн не имеет дефекта, если сам сплайн и все его производные непрерывны всюду в области определения сплайна.

Чем выше дефект сплайна, тем больше он имеет степеней свободы и, соответственно, тем выше его гибкость, но зато тем меньше степень гладкости. Очевидно, что дефект сплайна может принимать только целые значения. Изменение свойств сплайна с изменением его дефекта происходит скачкообразно, дискретно. Однако в работе [4] одного из авторов данной статьи предлагается новый тип сплайнов, по своим свойствам способных занимать промежуточное положение между сплайнами соседних дефектов.

Конструкции этого типа сплайна обобщают известные и отличаются от них тем, что в условиях сопряжения элементов сплайна в его узлах вводятся ограничения типа неравенств на величину максимально допустимого скачка сопрягаемой производной соответствующего порядка. Обычные сплайны не содержат такого ограничения. Обычные сплайны подразумевают «склеивание» в его узлах некоторой сетки отрезков полиномов (в частности, кубических парабол) таким образом, чтобы в этих узлах совпадали значения соседних полиномов и значения того или иного числа их первых производных [4]. Предлагается видоизменить конструкцию сплайна таким образом, чтобы в условиях сопряжения была заключена возможность плавного регулирования допустимых скачков производных в узлах сплайна, что позволило плавно переходить от сплайна одного дефекта к сплайну другого дефекта. Модифицированный таким образом сплайн предложено называть «рестриктивным». Определяются рестриктивные сплайны в [4] следующим образом.

Пусть $S(\xi)$ – кубический сплайн скалярной переменной ξ , определенной на интервале $[\xi_0, \xi_{n+1}]$, разбитом точками (узлами) $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_i < \xi_{i+1} < \dots < \xi_n < \xi_{n+1}$ на $n+1$ неперекрывающихся, примыкающих друг к другу интервалов. Если $S_i(\xi)$ – i -й элемент сплайна, т.е. полином третьей степени, определенный на интервале $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, так что

$$S_i(\xi) = \sum_{\alpha=0}^3 a_i^{(\alpha)} (\xi - \xi_i)^\alpha, \quad i = \overline{0, n}, \quad (3)$$

где $\{a_i^{(\alpha)} \quad (\alpha = 0, 3)\}$ – его коэффициенты, то сплайн может быть представлен в виде

$$S(\xi) = \sum_{i=0}^n S_i(\xi) \cdot 1(\xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1}), \quad (4)$$

где (A) – индикатор события A , равный единице, если событие имеет место, и нулю – в противном случае.

В [4] вводятся более общие, чем традиционно принятые для обычных сплайнов, условия сопряжения элементов рестриктивного кубического сплайна дефекта $\Delta (0 \leq \Delta \leq 4)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha!} \frac{d^\alpha S_{i+1}(\xi_{i+1})}{d\xi^\alpha} &= \frac{1}{\alpha!} \frac{d^\alpha S_i(\xi_{i+1})}{d\xi^\alpha} + \delta_{\alpha, 4-\Delta} \cdot u_i + 1(\alpha - 4 + \Delta > 0) w_i^{(\alpha)}, \\ |u_i| &\leq c_i, \quad \alpha = \overline{0, 3}; \quad i = \overline{0, n-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где u_i – ограниченный по модулю величиной c_i скачок в i -м узле уменьшенной в $(4 - \Delta)!$ раз $(4 - \Delta)$ -й производной сплайна; $\{w_i^{(\alpha)}\}$ – скачки уменьшенных в $\alpha!$ раз производных более высоких порядков, не стесненные ограничениями; $\delta_{\alpha, 4-\Delta}$ – символ Кронекера; $(\alpha - 4 + \Delta > 0)$ – индикатор события, указанного в скобках.

Введение в условиях сопряжения символов Кронекера и индикаторов указанных в них неравенств обусловлено требованием непротиворечивости условий, накладываемых на скачки производных в узлах сплайна. В самом деле, сплайн дефекта $\Delta (\Delta < 4)$ должен быть непрерывным и иметь непрерывные производные до $(3 - \Delta)$ -го порядка включительно. Следовательно, скачки производных такого сплайна до $(3 - \Delta)$ -го порядка включительно в узлах сплайна недопустимы, что, как видим, и обеспечивается условием сопряжения (5). Производные же $(4 - \Delta)$ -го порядка и выше в узлах могут испытывать скачки, что также допускают условия (5). Для обычных сплайнов эти скачки ничем не регламентируются. Для рестриктивного сплайна скачки $(4 - \Delta)$ -й производной в узлах ограничиваются по модулю некоторыми величинами $c_i (i = \overline{0, n-1})$, регулируемыми степенью рестриктивного сплайна, а скачки производных более высокого порядка едва ли целесообразно чем-либо ограничивать, что и отражено в условиях (5). Меняя c_i , можно получить все маргинальные рестриктивные сплайны заданного дефекта Δ . При $c_i \rightarrow \infty \quad \forall i = \overline{0, n-1}$ мы придем к обычному

сплайну дефекта Δ , а при $c_i \rightarrow 0 \quad \forall i = \overline{0, n-1}$ – к обычному сплайну дефекта $\Delta - 1$ (если $\Delta \geq 1$).

В работе [4] для нахождения коэффициентов этого сплайна предложено использовать метод инвариантного погружения для решения двухточечной краевой задачи.

Однако метод инвариантного погружения требует больших вычислительных затрат и неустойчиво работает на больших интервалах. Поэтому требуется разработка более совершенных алгоритмов построения данного типа сплайнов, годных к практическому (промышленному) использованию.

Сконструируем рестриктивный В-сплайн по аналогии с рестриктивным сплайном, предложенным в [4], но построим его на финитных функциях, определенных на конечных носителях подобно классическим В-сплайнам [5,6,7].

Пусть задан набор узлов $\{x_i, y_i\}$, $i = \overline{0, N}$. Обычный (не рестриктивный) В-сплайн строится по формуле [5,6,7]:

$$S(x) = \sum_i b_i B_i^m(x),$$

где функция $B_i^m(x)$ является полиномом степени m . $B_i^m(x)$ определяется по рекуррентной формуле [5,6,7], дающей связь между $B_i^m(x)$ и $B_i^{m-1}(x)$:

$$B_i^m(x) = \frac{x - x_i}{(x_{i+m} - x_i)} B_i^{m-1}(x) + \frac{x_{i+m+1} - x}{(x_{i+m+1} - x_{i+1})} B_{i+1}^{m-1}(x), \quad (6)$$

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{при } x \notin [x_i, x_{i+1}]. \end{cases} \quad (7)$$

Связь между числом узлов, по которым строятся финитные функции, и количеством условий непрерывности в каждом узле показана в теореме Карри-Шенберга [7].

Согласно этой теореме B^m будет иметь $m-1$ непрерывную производную. Так, в случае $m = 3$ наш сплайн $S(x)$ будет представлять собой кубический сплайн единичного дефекта.

Более глубоко теория сплайн-функций рассмотрена в работе [8]. В частности, большое внимание уделяется экстремальному свойству кубических интерполяционных сплайнов. Его можно сформулировать в следующем виде.

Среди всех функций из $C^2[a, b]$, интерполирующих данные значения, минимум функционала $\int_a^b |\phi''|^2 dx$ достигается на кубическом сплайне $S(x)$ с так называемыми естественными краевыми условиями $S''(a) = 0, S''(b) = 0$ [8]. То

есть интерполяционный кубический сплайн имеет кривую минимальной длины в классе $C^2[a, b]$.

Вернемся к нашим рестриктивным сплайнам. По аналогии с построением кубических В-сплайнов нам необходимо выбрать систему базисных функций. В конструкции В-сплайна функция $B_i^m(x)$ в общем виде строится по рекуррентной формуле (7). Будем выбирать нашу функцию $B_i^m(x, c_i^m)$ в таком виде, чтобы при значении $c_i^m = 1$ управляющего коэффициента $c_i^m \in [0, 1]$ $B_i^m(x, c_i^m) \equiv B_i^m(x)$, а при $c_i^m = 0$ $B_i^m(x, c_i^m) \equiv B_i^{m-1}(x)$ соответственно.

Простейшим решением может служить линейная комбинация этих функций:

$$B_i^m(x, c_i^m) = c_i^m B_i^m(x) + (1 - c_i^m) B_i^{m-1}(x). \quad (9)$$

Но в дальнейшем нам будет удобнее работать с выражением (9) в виде

$$B_i^m(x, c_i) = c_i^m A_i^m(x) + B_i^{m-1}(x), \quad (10)$$

где, очевидно,

$$A_i^m(x) = B_i^m(x) - B_i^{m-1}(x). \quad (11)$$

Построим рекуррентную формулу для вычисления функции $B_i^m(x, c_i)$ по аналогии с построением классической функции $B_i^m(x)$ [5]. Приведем эту формулу к такому виду, чтобы явно выделить слагаемое $B_i^{m-1}(x)$, а оставшуюся часть помножим на весовой коэффициент $c_i \in [0, 1]$:

$$B_i^m(x, c_i) = B_i^{m-1}(x) + c_i \left[\left(\frac{(x - x_i)}{(x_{i+m} - x_i)} - 1 \right) B_i^{m-1}(x) + \frac{(x_{i+m+1} - x)}{(x_{i+m+1} - x_{i+1})} B_{i+1}^{m-1}(x) \right]. \quad (12)$$

Мы получаем класс функций, на границах (при c_i равном 1 и 0 соответственно) совпадающих с $B_i^m(x)$ и $B_i^{m-1}(x)$.

Сравнивая эту формулу с (10), легко видеть, что функция $A_i^m(x)$ может быть представлена в виде

$$A_i^m(x) = B_i^{m-1}(x) \left(\frac{x - x_i}{x_{i+m} - x_i} - 1 \right) + B_{i+1}^m(x) \frac{x_{i+m+1} - x_m}{x_{i+m+1} - x_{i+1}}. \quad (13)$$

В случае $m = 3$, вводя обозначения $c_i^3 = c_i$, $c_i^2 = d_i$, $c_i^1 \equiv 1$ и используя формулу (12) рекуррентно, мы можем определить наш сплайн как сплайн-функцию, построенную на финитных функциях $B_i^3(x, c_i, d_i, d_{i-1})$ с двумя наборами управляющих коэффициентов $C = \{c_i\}$ и $D = \{d_i\}$, $i = \overline{0, N}$.

На рис.1 показан график функции $B_i^3(x, c_i, d_i, d_{i-1})$, при $c_i = 1, d_i = 1, d_{i-1} = 1$ ей соответствует кривая, помеченная цифрой «3», $c_i = 0, d_i = 1, d_{i-1} = 1$ этой комбинации отвечает кривая под цифрой «2» и при $c_i = 0, d_i = d_{i-1} = 0$ под цифрой «1» соответственно. Когда параметры c_i, d_i, d_{i-1} принимают другие значения из интервала $[0,1]$, функция $B_i^3(.)$ занимает промежуточное положение между этими кривыми.

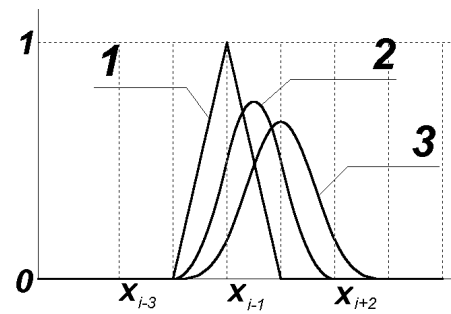


Рис. 1. График $B_i^3(x, c_i, d_i, d_{i-1})$.

Непосредственно сам В-сплайн строится по аналогии с [5]:

$$S_i(x) = \sum_{i=1}^{N+1} b_i B_i(x, c_i, d_i, d_{i-1}), \quad (14)$$

т.е. в конкретной точке $x'' \in [x_{i-1}, x_i]$ сплайн вычисляется по формуле

$$S_i(x'') = \sum_{j=i-2}^{i+1} b_j B_j(x'', \dots). \quad (15)$$

По полной аналогии с работами [5,6,7] мы должны принять один из типов краевых условий.

Если областью определения сплайна является интервал $[a = x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_{N-1}, x_N = b]$, то граничные условия для определения коэффициентов рестриктивного интерполяционного В-сплайна согласно [8] могут быть одного из следующих типов:

$$I_1: \quad S'(a) = z'_a, \quad S'(b) = z'_b;$$

$$II_1: \quad S''(a) = 0, \quad S''(b) = 0;$$

$$III_1: \quad S^{(p)}(a) = S^{(p)}(b), \quad p = 1, 2.$$

Возможно задание и смешанных краевых условий, когда на одном конце задается краевое условие типа I_1 или II_1 , а на втором – другого. Возможны и другие варианты граничных условий, но мы не будем здесь их рассматривать в силу их неестественности для постановок задач аппроксимации [8].

Несмотря на кажущуюся громоздкость этих конструкций, на практике все может быть гораздо проще, если использовать равномерную сетку узлов и положить непрерывной первую производную, т.е. взять тождественно $d_i = 1, \forall i$.

В формуле (14) с учетом (15) приведем слагаемые при одинаковых функциях $B_i^0(x, c_i)$, заменяя для удобства i на $i-2$, но в силу того, что c_i – линейный массив, оставляя $c_i = c_{i+2}$, и мы получим соответственно при $B_{i-2}^0(x)$:

$$\frac{1}{2}(a+2)^2 + c_i \left[\frac{1}{2}(a+2)^2 \left(\frac{1}{3}(a+2) - 1 \right) \right].$$

При $B_{i-1}^0(x)$:

$$\frac{1}{6}(-3a^3c_i - 6a^2 + 6a(c_i - 1) + 3 + c_i).$$

При $B_i^0(x)$:

$$\frac{1}{6}(3a^3c_i + a^2(3 - 9c_i) + 6a(c_i - 1) + c_i + 3).$$

И, наконец, при $B_{i+1}^0(x)$:

$$\frac{1}{6}(2-a)^3c_i, \text{ где } a = \frac{x-x_i}{h}, \quad h = x_i - x_{i-1} \text{ для } \forall i.$$

Легко видеть, что при $c_i \equiv 1$ $B_i^3(x, c_i)$ совпадает с функцией $B_i^3(x)$, приведенной, например, в [9]:

$$B_i^3(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \left(\frac{x-x_i}{h} + 2 \right)^3, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x-x_i}{h} \right)^3 + 2 \left(\frac{x-x_i}{h} \right)^2 \right), & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x-x_i}{h} \right)^3 - 2 \left(\frac{x-x_i}{h} \right)^2 \right), & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ \frac{1}{6} \left(2 - \frac{x-x_i}{h} \right)^3, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}], \end{cases}$$

а при $c_i \equiv 0 \quad \forall i$ наш $B_i^3(x, c)$ совпадает с $B_i^2(x)$.

В данной работе мы не станем обобщать результаты исследования рестриктивных В-сплайнов на случай произвольного числа переменных и ограничимся разработкой эффективных алгоритмов для аппроксимации двумерного набора.

3. Использование рестриктивных В-сплайнов двух переменных для аппроксимации поверхностей при несовпадении сеток

Пусть задан произвольный нерегулярный набор точек $N_1: \{x_i^1, y_i^1, z_i^1\}$, $i = \overline{0, N_1}$, и мы хотим приблизить его локальным сплайном $S(x, y)$, строящимся по регулярной сетке узлов $N: \{x_i, y_j\}$, где $i = \overline{0, N}$, $j = \overline{0, M}$ и $S(x_i, y_j) = z_{ij}$ при ограничениях:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 S(x_i, y_j)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S(x_{i-1}, y_{j-1})}{\partial x^2} \right| &< C_{ij}^x, \quad \left| \frac{\partial^2 S(x_i, y_j)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 S(x_i, y_{j-1})}{\partial y^2} \right| < C_{ij}^y, \\ \frac{\partial S(x_i, y_j)}{\partial x} &= \frac{\partial S(x_{i-1}, y_{j-1})}{\partial x}, \quad \frac{\partial S(x_i, y_j)}{\partial y} = \frac{\partial S(x_i, y_{j-1})}{\partial y}, \\ \left| \frac{\partial^2 S(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 S(x_{i-1}, y_{j-1})}{\partial x \partial y} \right| &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что для корректной работы сплайна сетка узлов должна быть соответствующим образом построена на границах.

Если принять $C_{ij}^x \equiv 0$, $C_{ij}^y \equiv 0$, $C_{ij}^{xy} \equiv 0$, то получим классическую постановку задачи построения кубического сплайна двух переменных, решением которой может быть тензорное произведение одномерных сплайнов [6]:

$$S(x, y) = \sum_i \sum_j b_{ij} B_i(x) B_j(y).$$

Иначе получаем задачу с двумя двумерными наборами управляющих коэффициентов C_{ij}^x, C_{ij}^y . На доопределенных интервалах мы можем положить $C_{ij}^x = C_{ij}^y = 0$. Мы хотим приблизить наш исходный набор узлов N_1 с помощью сплайна $S(x, y, c^x, c^y)$, где c_{ij}^x, c_{ij}^y – двумерные наборы управляющих коэффициентов. Сплайн строится по формуле, аналогичной приведенной в [5]:

$$S(x, y, c^x, c^y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M b_{ij} B_i(x, c^x) B_j(y, c^y),$$

т.е. в конкретной точке $\{x', y'\}$, принадлежащей интервалу $[x_{i'-1}, x_{i'}] \times [y_{j'-1}, y_{j'}]$, сплайн строится по формуле

$$S(x', y') = \sum_{i=i'-2}^{i'+1} \sum_{j=j'-2}^{j'+1} b_{ij} B_i(x', c_{ij}^x) B_j(y', c_{ij}^y). \quad (16)$$

На рис. 2 представлен пример построения рестриктивного В-сплайна двух переменных. На рис. 2а приведён обычный В-сплайн без управляющих коэффициентов, а на рис. 2б – рестриктивный В-сплайн, управляющие коэффициенты C_{ij}^x, C_{ij}^y которого распределены в интервале $[0,1]$ согласно выбранным условиям.

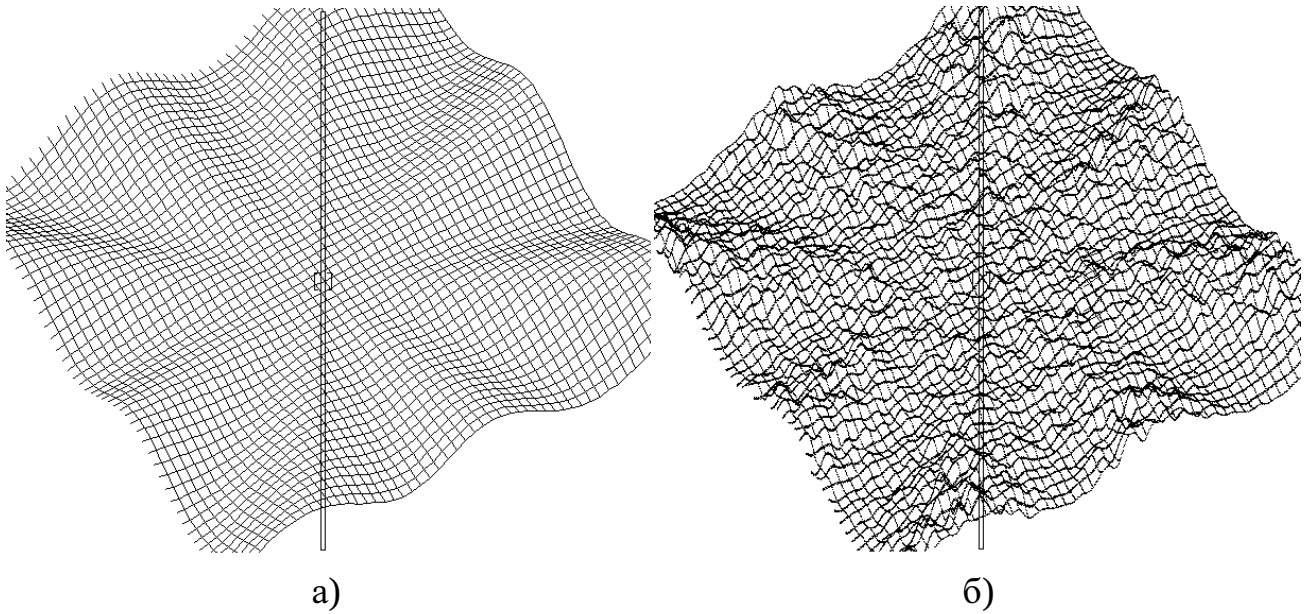


Рис. 2. Примеры сплайнов.

Коэффициенты b_{ij} находятся с помощью процедуры двумерной прогонки [5]. Выберем критерий качества аппроксимации в виде

$$J(c^x, c^y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{k: \{x'_k, y'_k\} \in [x_i - x_{i-1}] \times [y_j - y_{j-1}]} (S(x_k, y_k, c^x, c^y) - z_k)^2 \Rightarrow \min_{C^x, C^y}. \quad (17)$$

Таким образом, наша задача – приблизить исходный набор N_1 локальным сплайном на регулярной сетке узлов, который строится по формуле (16), и найти набор управляющих $\{c_{ij}^x, c_{ij}^y\}$, оптимальный в смысле критерия (17). При этом необходимо, чтобы оптимизационный алгоритм работал при больших размерах массива N_1 устойчиво и за приемлемое при промышленной эксплуатации время. Притом за счет управления скачком второй производной достигается более высокая точность аппроксимации по сравнению с классическим кубическим В-сплайном в случае несовпадающих сеток.

Решением данной задачи может быть какой-нибудь поисковый метод. Например, покоординатный спуск [10]. В качестве начального приближения для коэффициентов C^x, C^y можно взять $c_{ij}^x = c_{ij}^y = 1$, для начального приближения функции $f_{ij} = z_{ij}$ можно взять значения, получаемые, например, при триангуляции исходного набора точек. Затем производим рекуррентно поисковую процедуру для оптимизации набора управляющих коэффициентов $\{c_{ij}^x, c_{ij}^y\}$ в смысле критерия (17) при наличии ограничений, задаваемых на скачки второй производной с помощью наборов C_{ij}^x, C_{ij}^y , которые могут, кстати, быть равными при $\forall i, j$, что будет означать, что скачок второй производной при сопряжении сплайна на соседних узлах не превышает константу C .

Отметим, что скорость выполнения поискового алгоритма может быть существенно увеличена, если от использования критерия (17) перейти к локальному критерию:

$$J_{ml}(c^x) = \sum_{i=m-3}^{m+3} \sum_{j=l-3}^{l+3} \sum_{k:\{x'_k, y'_k\} \in [x_i - x_{i-1}] \times [y_j - y_{j-1}]} (S(x_k, y_k, c^x, c^y) - z_k)^2 \Rightarrow \min_{c^{x^x}},$$

$$J_{ml}(c^y) = \sum_{i=m-3}^{m+3} \sum_{j=l-3}^{l+3} \sum_{k:\{x'_k, y'_k\} \in [x_i - x_{i-1}] \times [y_j - y_{j-1}]} (S(x_k, y_k, c^x, c^y) - z_k)^2 \Rightarrow \min_{c^{y^y}}. \quad (18)$$

Так как при использовании метода покоординатного спуска, описанного в [10], мы последовательно улучшаем критерий (17), добиваясь поочередно его минимума для каждого c_{ij}^x, c_{ij}^y , то правомерность применения на этом этапе критерия (18) обеспечена следующей теоремой.

Теорема 1. Минимум функционала (17) по какому-либо управляющему коэффициенту c_{ij}^x, c_{ij}^y совпадает с минимумом функционала (18), $i = \overline{2, N-3}$, $j = \overline{2, M-3}$.

Доказательство. Из (16) следует, что коэффициент c_{ij}^x будет присутствовать в выражении для сплайна $S(x, y)$, строящегося на интервале $x \in [x_{i-1}, x_{i+2}]$, $y \in [y_{j-1}, y_{j+2}]$. Эти интервалы будут сказываться на вычислении внутренней суммы по k в (17) для значений внешних сумм при $i = \overline{i-3, i+3}$, $j = \overline{j-3, j+3}$. Для остальных i, j c_{ij}^x не будет влиять на значение внутренней суммы. Тогда минимум по c_{ij}^x для (17) совпадет с минимумом по c_{ij}^x для (18). Аналогично, для c_{ij}^y . **Теорема доказана.**

Может показаться, что наложение ограничений на скачок второй производной имеет достаточно узкую область применения, но надо учитывать, что через вторую производную могут быть выражены многие физические параметры. Более того, в критерий качества (17) могут быть заложены любые другие эвристики, обеспечение которых можно добиваться подбором управляющих коэффициентов.

4. Заключение

Предложенный рестриктивный сплайн двух переменных может успешно применяться как инструмент для аппроксимации сложных поверхностей. При этом он предъявляет весьма умеренные требования к памяти и позволяет производить более гибкую аппроксимацию, в частности, моделировать так называемый мезорельеф, который значительно мельче шага сетки, или закладывать в вид аппроксимации различные ограничения, согласованные с физикой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение / Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 478 с.
2. Латфулин М. Г. Технология автоматизированного картирования геофизических параметров с учетом дизъюнктивных нарушений // Автореф. дис. ... к.т.н., Барнаул, 1996. – 16 с.
3. Мирошниченко В.Л. Аппроксимация функций ДММ-сплайнами по данным в хаотически расположенных точках // Тез. докладов международной конференции «Всесибирские чтения по математике и механике». – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1997, т. 1. – с. 211-212.
4. Поддубный В.В. Методы инвариантного погружения и аппроксимации в restriктивных задачах управления и фильтрации. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993. – 276 с.
5. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1981. – 181 с.
6. Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скорospelов В.А. Сплаины в инженерной геометрии. – М.: Машиностроение, 1985. – 221 с.
7. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам / Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1985. – 303 с.
8. Вершинин В.В., Завьялов Ю. С., Павлов Н.Н. Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания. – Новосибирск: Наука, 1998.
9. Шикин Е.В., Плис Л.И. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей. – М: ДИАЛОГ-МИФИ, 1996. – 240 с.
10. Зангвилл У. Нелинейное программирование. Единый подход / Пер. с англ.; под ред. Е.Г. Гольштейна. – М., Сов. радио, 1973. – 312 с.