ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том № 271 июнь 2000

УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

УДК 519.2

А.Л. Богданов, А.Ф. Терпугов

ОПТИМАЛЬНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ДИСПЕРСИИ НЕКОРРЕЛИРОВАННОГО ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА

Находится алгоритм оптимальной нелинейной фильтрации марковского процесса, управляющего дисперсией некоррелированного гауссовского шума. В качестве приближенного решения рассматривается нормальное приближение для апостериорной плотности вероятностей и находятся уравнения для апостериорных среднего и дисперсии управляющего процесса.

Постановка задачи

Шумы являются главной проблемой, с которой сталкиваются разработчики систем связи, работающих в КВ и УКВ диапазонах. Эти диапазоны очень загружены, и кроме естественных там действуют и техногенные помехи – станционные, помехи от транспорта, промышленных предприятий и т.д. Помеховая ситуация изменяется во времени, так как одни источники появляются, другие исчезают, третьи меняют свою мощность случайным образом. Знание мощности помехи в данный отрезок времени необходимо для адаптации систем передачи информации к этим помехам – например, путем изменения скорости передачи информации, перехода на другой канал и т.д. Поэтому умение оценивать текущую мощность помехи в канале связи является важным с практической точки зрения.

Рассмотрим ситуацию в дискретном времени. Математическая модель ситуации выглядит следующим образом: через равные промежутки времени производятся измерения значения x_i, $i = \overline{1, N}$ шума, действующего в канале связи. Будем предполагать, что величины x_i: 1) являются нормальными случайными величинами с математическим ожиданием $M\{x_i\} = 0$ и дисперсией $D\{x_i\} = \sigma^2 + f(y(t))$; 2) они независимы при фиксированной реализации $y(t)$. Прокомментируем эти предположения.

Предположение о независимости значений x_i при фиксированной реализации процесса $y(t)$ говорит о том, что мы имеем дело с широкополосным шумом. Если бы дисперсия шума $D\{x_i\}$ была константой, т.е. $D\{x_i\} = \sigma^2$, то такой про-цесс в радиотехнике носил бы имя белого гауссовского шума. Наличие слагаемого $f(y(t))$ делает дисперсию этого шума переменной, да и сам процесс $x(t)$ перестает быть гауссовским, если $y(t)$ – случайный процесс.

Что касается вида дисперсии $D\{x_i\} = \sigma^2 + f(y(t))$, то первое слагаемое можно трактовать как дисперсию ошибок измерений процесса $x(t)$ измерительным устройством или как мощность естественной компоненты шума (космические и атмосферные шумы,...), которая почти не изменяется во времени. Второе слагаемое $f(y(t))$ – это мощность шумов естественного происхождения. Предполагается, что $f(y(t))$ – известная функция, в аргументе которой стоит некоторый процесс $y(t)$, в дальнейшем называемый управляющим процессом. Чтобы применить теорию оптимальной фильтрации, необходимо считать, что $y(t)$ является марковским процессом. Описание этого процесса будет уточнено ниже. Задачей фильтрации является нахождение апостериорного распределения вероятностей для управляющего процесса $y(t)$ по измерениям шума x_i.

Случай диффузионного управляющего процесса

Рассмотрим случай, когда $y(t)$ является диффузионным марковским процессом с коэффициентом сноса $a(y,t)$ и коэффициентом диффузии $b(y,t)$. Измерения производятся через интервалы времени Δt. Введем обозначения $y' = y(t)$, $y = y(t+\Delta t)$.

Пусть $p(y|y')$ – условная плотность вероятностей значения процесса $y(t)$ в момент времени $t+\Delta t$ при условии, что в момент t значение процесса было равно y'; $p(x|y)$ – условная плотность вероятностей значений измеряемого процесса $x(t)$ при условии, что в этот же момент времени процесс $y(t)$ принял значение, равное y. Через $w(y,t)$ обозначим апостериорную плотность вероятностей значений процесса $y(t)$ в момент времени t, которая зависит от измеренных значений процесса $x(t)$, сделанных до момента t, включая и сам этот момент времени. С учетом предположений о процессе $x(t)$ запишем:

$$p(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + f(y))}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(\sigma^2 + f(y))}\right\}. \quad (1)$$

Рассмотрим двумерный марковский процесс $\{x(t), y(t)\}$. Как показано в [1], на интервале между измерениями $w(y,t)$ удовлетворяет уравнению

$$w(y, t+\Delta t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} p(y|y')w(y',t)dy'}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(y|y')w(y',t)dy'dy}. \quad (2)$$

Пусть $\Delta y = y - y'$. Тогда, как показано в [2]:

$$p(y\mid y') = \delta(\Delta y) + \Delta t\left[-a(y-\Delta y, t)\delta'(\Delta y) + \right.$$
$$\left. + 0{,}5 b(y-\Delta y, t)\delta''(\Delta y)\right] + o(\Delta t),$$

а числитель примет вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(y\mid y')w(y',t)dy' = w(y,t) + \Delta t\left[-\frac{\partial}{\partial y}\{a(y,t)w(y,t)\} + \right.$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{b(y,t)w(y,t)\}\Bigg]+o(\Delta t). \qquad (3)$$

С учетом (3) знаменатель (2) запишется в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(y|y')w(y',t)dy'dy =$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\Bigg[w(y,t)+\Delta t\Bigg[\frac{\partial}{\partial y}\{a(y,t)w(y,t)\}+$$

$$+\frac{1\partial^2}{2\partial y}\{b(y,t)w(y,t)\}\Bigg]+o(\Delta t)\Bigg]dy. \qquad (4)$$

Будем считать, что выполнены естественные требования на апостериорную плотность вероятностей:

$$w(y,t)\xrightarrow[|y|\to\infty]{}0\ ,\ \frac{\partial w(y,t)}{\partial y}\xrightarrow[|y|\to\infty]{}0\,. \qquad (5)$$

Тогда $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}\{a(y,t)w(y,t)\}dy = a(y,t)w(y,t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{b(y,t)w(y,t)\}dy=\frac{\partial}{\partial y}\{b(y,t)w(y,t)\}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0, \quad (6)$$

откуда видно, что знаменатель равен 1. Подставим полученные выражения в (2):

$$w(y,t+\Delta t)=w(y,t)+\Delta t\Bigg[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{b(y,t)w(y,t)\}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\{a(y,t)w(y,t)\}\Bigg]+o(\Delta t). \qquad (7)$$

Перенося $w(y,t)$ влево, деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим

$$\frac{\partial w(y,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}\{a(y,t)w(y,t)\}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{b(y,t)w(y,t)\}, \qquad (8)$$

т.е. на интервале между измерениями апостериорная плотность $w(y,t)$ удовлетворяет уравнению (8) с начальным и граничными условиями

$$w(y,t)\Big|_{t=T_k}=w(y,T_k+0)\,, \qquad (9)$$

$$w(\pm\infty,t)=0\,,\ \frac{\partial w(y,t)}{\partial y}\Big|_{y=\pm\infty}=0\,, \qquad (10)$$

где T_k – предшествующий моменту t момент измерения. В моменты измерений T_k $w(y,t)$ пересчитывается по формуле Байеса:

$$w(y,T_k+0)=\frac{p(x|y)w(y,T_k-0)}{\int_{-\infty}^{+\infty}p(x|y)w(y,T_k-0)dy}\,. \qquad (11)$$

Нормальное приближение

Уравнения (8)–(11) в принципе решают задачу нахождения апостериорной плотности вероятностей $w(y,t)$, так как уравнение (8) можно решить, по крайней мере, численно, так же как и вычислить входящий в (11) интеграл. Однако реально сделать это практически невозможно, так как интервал Δt между моментами измерений обычно настолько мал, что никакая ЭВМ не успеет проделать все эти вычисления. Поэтому необходимо искать приближенные выражения для $w(y,t)$, которые можно было бы либо вычислять, либо реализовывать техническими средствами. Это возможно сделать тогда, когда оценки процесса $y(t)$ достаточно точны, т.е. апостериорная дисперсия $D\{y(t)\}$ мала.

Как приближенное решение задачи фильтрации рассмотрим нормальное приближение для апостериорной плотности вероятностей $w(y,t)$, когда

$$w(y,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi D(t)}}\exp\left\{-\frac{(y-m(t))^2}{2D(t)}\right\}, \qquad (12)$$

и найдем дифференциальные уравнения для апостериорных среднего $m(t)$ и дисперсии $D(t)$. Для этого рассмотрим интервал между измерениями. По определению

$$m(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}yw(y,t)dy\,,\ D(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2w(y,t)dy-m^2(t)\,,$$

откуда $\qquad m(t+\Delta t)=\int_{-\infty}^{+\infty}yw(y,t+\Delta t)dy\,. \qquad (13)$

Заменим $w(y,t+\Delta t)$ выражением из (7):

$$m(t+\Delta t)=\int_{-\infty}^{+\infty}yw(y,t)dy+$$

$$+\Delta t\int_{-\infty}^{+\infty}y\Bigg[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{b(y,t)w(y,t)\}-\frac{\partial}{\partial y}\{a(y,t)w(y,t)\}\Bigg]+$$

$$+o(\Delta t). \qquad (14)$$

Найдем входящие сюда интегралы. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}yw(y,t)dy=m(t)\,, \qquad (15)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}y\frac{\partial}{\partial y}\{a(y,t)w(y,t)\}dy=ya(y,t)w(y,t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}a(y,t)w(y,t)dy=-\int_{-\infty}^{+\infty}a(y,t)w(y,t)dy. \qquad (16)$$

Для вычисления последнего интеграла разложим $a(y(t),t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $m(t)$:

$$a(y,t)=a(m(t),t)+(y-m(t))\frac{\partial a(y,t)}{\partial y}\Bigg|_{y=m(t)}+$$

$$+\frac{1}{2}(y-m(t))^2\frac{\partial^2 a(y,t)}{\partial y^2}\Bigg|_{y=m(t)}+o((y-m(t))^2). \ (17)$$

Подставим полученное разложение в интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Bigg[a(m(t),t)+(y-m(t))\frac{\partial a(y,t)}{\partial y}\Bigg|_{y=m(t)}+$$

$$+\frac{1}{2}(y-m(t))^2\frac{\partial^2 a(y,t)}{\partial y^2}\Bigg|_{y=m(t)}\Bigg]w(y,t)dy=$$

$$=a(m(t),t)+\frac{1}{2}D(t)\frac{\partial^2 a(y,t)}{\partial y^2}\Bigg|_{y=m(t)}. \qquad (18)$$

Окончательно получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}y\frac{\partial}{\partial y}\{a(y,t)w(y,t)\}dy=$$

$$= -\left[a(m(t),t) + \frac{1}{2} D(t) \frac{\partial^2 a(y,t)}{\partial y^2}\Bigg|_{y=m(t)} \right], \quad (19)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{b(y,t)w(y,t)\} dy = y \frac{\partial}{\partial y} \{b(y,t)w(y,t)\}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \{b(y,t)w(y,t)\} dy = -b(y,t)w(y,t)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0. \quad (20)$$

Подставим (15), (19) и (20) в (14):

$$m(t + \Delta t) = m(t) +$$

$$+ \Delta t \left[a(m(t),t) + \frac{1}{2} D(t) \frac{\partial^2 a(y,t)}{\partial y^2}\Bigg|_{y=m(t)} \right]. \quad (21)$$

Перенося $m(t)$ влево, деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение для апостериорного среднего $m(t)$:

$$\frac{dm(t)}{dt} = a(m(t),t) + \frac{1}{2} D(t) \frac{\partial^2 a(y,t)}{\partial y^2}\Bigg|_{y=m(t)}. \quad (22)$$

Аналогично для дисперсии

$$D(t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 w(y, t + \Delta t) dy - m^2 (t + \Delta t). \quad (23)$$

Заменим $w(y, t + \Delta t)$ выражением из (7):

$$D(t+\Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 w(y,t) dy + \Delta t \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{b(y,t)w(y,t)\} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial y} \{a(y,t)w(y,t)\} \right] dy - m^2 (t + \Delta t) + \mathrm{o}(\Delta t). \quad (24)$$

Вычислим интегралы, входящие в (24):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 w(y,t) dy = D(t) + m^2(t), \quad (25)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \frac{\partial}{\partial y} \{a(y,t)w(y,t)\} dy =$$

$$= y^2 a(y,t)w(y,t)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} y a(y,t) w(y,t) dy. \quad (26)$$

Разложим функцию $ya(y,t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $m(t)$:

$$ya(y,t) = m(t)a(m(t),t) + (y - m(t)) \times$$

$$\times \left[a(y,t) + y \frac{\partial a(y,t)}{\partial y} \right]\Bigg|_{y=m(t)} + \frac{1}{2} (y - m(t))^2 \times$$

$$\times \left[2 \frac{\partial a(y,t)}{\partial y} + y \frac{\partial^2 a(y,t)}{\partial y^2} \right]\Bigg|_{y=m(t)} + \mathrm{o}((y - m(t))^2). \quad (27)$$

Подставим разложение (27) в интеграл (26):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \frac{\partial}{\partial y} \{a(y,t)w(y,t)\} dy = -2[m(t)a(m(t),t) +$$

$$+ \frac{1}{2} D(t) \left[2 \frac{\partial a(y,t)}{\partial y} + y \frac{\partial^2 a(y,t)}{\partial y^2} \right]\Bigg|_{y=m(t)}], \quad (28)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{b(y,t)w(y,t)\} dy =$$

$$= y^2 \frac{\partial}{\partial y} \{b(y,t)w(y,t)\}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{\partial}{\partial y} \{b(y,t)w(y,t)\} dy =$$

$$= -2yb(y,t)w(y,t)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} b(y,t)w(y,t) dy. \quad (29)$$

Разложим $b(y,t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $m(t)$:

$$b(y,t) = b(m(t),t) + (y - m(t)) \frac{\partial b(y,t)}{\partial y}\Bigg|_{y=m(t)} +$$

$$+ \frac{1}{2} (y - m(t))^2 \frac{\partial^2 b(y,t)}{\partial y^2}\Bigg|_{y=m(t)} + \mathrm{o}((y - m(t))^2). \quad (30)$$

Подставим разложение (30) в интеграл (29):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{b(y,t)w(y,t)\} dy =$$

$$= 2b(m(t),t) + D(t) \frac{\partial^2 b(y,t)}{\partial y^2}\Bigg|_{y=m(t)}. \quad (31)$$

Вычислим $m^2(t + \Delta t)$:

$$m^2 (t + \Delta t) = m^2 (t) + \Delta t [2m(t)a(m(t),t) +$$

$$+ m(t)D(t) \frac{\partial^2 a(y,t)}{\partial y^2}\Big|_{y=m(t)}] + \mathrm{o}(\Delta t). \quad (32)$$

Подставим (25), (28), (31) и (32) в (24):

$$D(t + \Delta t) = D(t) + \Delta t [b(y,t) +$$

$$+ 2D(t) \frac{\partial a(y,t)}{\partial y} + \frac{1}{2} D(t) \frac{\partial^2 b(y,t)}{\partial y^2}]\Big|_{y=m(t)} + \mathrm{o}(\Delta t). \quad (33)$$

Перенося $D(t)$ влево, деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение для апостериорной дисперсии $D(t)$:

$$\frac{dD(t)}{dt} = b(m(t),t) + 2D(t) \frac{\partial a(y,t)}{\partial y}\Bigg|_{y=m(t)} +$$

$$+ \frac{1}{2} D(t) \frac{\partial^2 b(y,t)}{\partial y^2}\Bigg|_{y=m(t)}. \quad (34)$$

В интервалах между измерениями апостериорные среднее $m(t)$ и дисперсия $D(t)$ описываются системой двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dm(t)}{dt} = a(m(t),t) + \frac{1}{2} D(t) \frac{\partial^2 a(y,t)}{\partial y^2}\Bigg|_{y=m(t)},$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = b(m(t),t) + 2D(t) \frac{\partial a(y,t)}{\partial y}\Bigg|_{y=m(t)} +$$

$$+ \frac{1}{2} D(t) \frac{\partial^2 b(y,t)}{\partial y^2}\Bigg|_{y=m(t)}. \quad (35)$$

Для решения этих уравнений надо знать начальные условия $m(T_k + 0)$ и $D(T_k + 0)$, которые устанавливаются сразу после производства измерения. Заметим, что значения $m(T_k - 0)$ и $D(T_k - 0)$ непосредственно перед измерением получаются из решения системы уравнений (35) на предшествующем интервале времени. Выведем формулы для определения $m(T_k + 0)$ и $D(T_k + 0)$. По определению

$$m(T_k+0)=\int_{-\infty}^{+\infty} y w(y,T_k+0)dy\,. \quad (36)$$

Заменим $w(y,T_k+0)$ ее выражением из (11):

$$m(T_k+0)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} yp(x\,|\,y)w(y,T_k-0)dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x\,|\,y)w(y,T_k-0)dy}\,. \quad (37)$$

Разложим в ряд Тейлора функции $p(x\,|\,y)$ и $yp(x\,|\,y)$ в окрестности точки $m(T_k-0)$:

$$p(x\,|\,y)=p(x\,|\,m(T_k-0))+(y-m(T_k-0))\times$$
$$\times\left.\frac{\partial p(x\,|\,y)}{\partial y}\right|_{y=m(T_k-0)}+\frac{1}{2}(y-m(T_k-0))^2\times$$
$$\times\left.\frac{\partial^2 p(x\,|\,y)}{\partial y^2}\right|_{y=m(T_k-0)}+\mathrm{o}((y-m(T_k-0))^2), \quad (38)$$

$$yp(x\,|\,y)=m(T_k-0)p(x\,|\,m(T_k-0))+(y-m(T_k-0))\times$$
$$\times\left[p(x\,|\,y)+y\frac{\partial p(x\,|\,y)}{\partial y}\right]\Bigg|_{y=m(T_k-0)}+\frac{1}{2}(y-m(T_k-0))^2\times$$
$$\times\left[\frac{2\partial p(x\,|\,y)}{\partial y}+\frac{y\partial^2 p(x\,|\,y)}{\partial y^2}\right]\Bigg|_{y=m(T_0-0)}+$$
$$+\mathrm{o}((y-m(T_k-0))^2). \quad (39)$$

Запишем числитель в (37) с учетом (38):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} yp(x\,|\,y)w(y,T_k-0)dy=m(T_k-0)p(x\,|\,m(T_k-0))+$$
$$+\frac{1}{2}D(T_k-0)\left[2\frac{\partial p(x\,|\,y)}{\partial y}+y\frac{\partial^2 p(x\,|\,y)}{\partial y^2}\right]\Bigg|_{y=m(T_k-0)}, \quad (40)$$

а с учетом (39) знаменатель в (37) запишется в виде

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} p(x|y)w(y,T_k-0)dy=p(x|m(T_k-0)+$$
$$+\frac{1}{2}D(T_k-0)\left.\frac{\partial^2 p(x|y)}{\partial y^2}\right|_{y=m(T_k-0)}. \quad (41)$$

Подставим выражения (40) и (41) в (37):

$$m(T_k+0)=m(T_k-0)+$$
$$+\frac{D(T_k-0)\left.\frac{\partial p(x\,|\,y)}{\partial y}\right|_{y=m(T_k-0)}}{p(x\,|\,m(T_k-0))+\frac{1}{2}D(T_k-0)\left.\frac{\partial^2 p(x\,|\,y)}{\partial y^2}\right|_{y=m(T_k-0)}} \quad (42$$

(42) дает возможность вычислить $m(T_k+0)$, которое будет начальным условием для уравнения (22).

Найдем теперь связь между $D(T_k+0)$ и $D(T_k-0)$.

По определению

$$D(T_k+0)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 w(y,T_k+0)dy-m^2(T_k+0). \quad (43)$$

Заменим $w(y,T_k+0)$ ее выражением из (11):

$$D(T_k+0)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p(x\,|\,y)w(y,T_k-0)dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x\,|\,y)w(y,T_k-0)dy}-m^2(T_k+0). \quad (44)$$

В числителе (44) разложим в ряд Тейлора функцию $y^2p(x|y)$ в окрестности точки $m(T_k-0)$:

$$y^2p(x\,|\,y)=m^2(T_k-0)p(x\,|\,m(T_k-0))+(y-m(T_k-0))\times$$
$$\times\left[2yp(x\,|\,y)+y^2\frac{\partial p(x\,|\,y)}{\partial y}\right]\Bigg|_{y=m(T_k-0)}+$$
$$+\frac{1}{2}(y-m(T_k-0))^2\times$$
$$\times\left[2p(x\,|\,y)+4y\frac{\partial p(x\,|\,y)}{\partial y}+y^2\frac{\partial^2 p(x\,|\,y)}{\partial y^2}\right]\Bigg|_{y=m(T_k-0)}+$$
$$+\mathrm{o}((y-m(T_k-0))^2)\,. \quad (45)$$

С учетом (45) числитель в (44) будет иметь вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p(x\,|\,y)w(y,T_k-0)dy=m^2(T_k-0)p\times$$
$$\times(x\,|\,m(T_k-0))+\frac{1}{2}D(T_k-0)\times[2p(x|y)+$$
$$+4y\frac{\partial p(x|y)}{\partial y}+y^2\frac{\partial^2 p(x|y)}{\partial y^2}]\Bigg|_{y=m(T_k-0)}. \quad (46)$$

Подставляя (41), (42) и (46) в (44), получим:

$$D(T_k+0)=\frac{m^2(T_k-0)p(x\,|\,m(T_k-0))}{p(x\,|\,m(T_k-0))+\frac{1}{2}D(T_k-0)\left.\frac{\partial^2 p(x\,|\,y)}{\partial y^2}\right|_{y=m(T_k-0)}}+$$
$$+\frac{\frac{1}{2}D(T_k-0)\left[2p(x\,|\,y)+4y\frac{\partial p(x\,|\,y)}{\partial y}+y^2\frac{\partial^2 p(x\,|\,y)}{\partial y^2}\right]\Bigg|_{y=m(T_k-0)}}{p(x\,|\,m(T_k-0))+\frac{1}{2}D(T_k-0)\left.\frac{\partial^2 p(x\,|\,y)}{\partial y^2}\right|_{y=m(T_k-0)}}-$$
$$-\left[m(T_k-0)+\frac{D(T_k-0)\left.\frac{\partial p(x|y)}{\partial y}\right|_{y=m(T_k-0)}}{p(x|m(T_k-0))+\frac{1}{2}D(T_k-0)\left.\frac{\partial^2 p(x|y)}{\partial y^2}\right|_{y=m(T_k-0)}}\right]^2, \quad (47)$$

что дает возможность нахождения $D(T_k+0)$, являющегося начальным условием для уравнения (34).

Для нахождения окончательных выражений вычислим производные, входящие в уравнения (42) и (47):

$$\frac{\partial p(x\mid y)}{\partial y}=p(x\mid y)\left[\frac{x^2 f'(y)}{2(\sigma_0^2+f(y))^2}-\frac{f'(y)}{2(\sigma_0^2+f(y))}\right] \quad (48)$$

Введем функцию

$$P_1(x,y)=\frac{x^2 f'(y)}{2(\sigma_0^2+f(y))^2}-\frac{f'(y)}{2(\sigma_0^2+f(y))}. \quad (49)$$

Тогда (48) примет вид

$$\frac{\partial p(x\mid y)}{\partial y}=p(x\mid y)P_1(x,y). \quad (50)$$

Аналогично для второй производной будем иметь

$$\frac{\partial^2 p(x|y)}{\partial y^2}=p(x|y)\left[P_1^2(x,y)+\frac{\partial P_1^2(x,y)}{\partial y}\right]. \quad (51)$$

$$P_2(x,y)=P_1^2(x,y)+\frac{\partial P_1^2(x,y)}{\partial y}. \quad (52)$$

Тогда (51) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 p(x\mid y)}{\partial y^2}=p(x\mid y)P_2(x,y). \quad (53)$$

С учетом введенных обозначений уравнения (42) и (47) запишутся в следующем в виде:

$$m(T_k+0)=m(T_k-0)+ \\ +\frac{D(T_k-0)P_1(x,m(T_k-0))}{1+\frac{1}{2}D(T_k-0)P_2(x,m(T_k-0))} \quad (54)$$

$$D(T_k+0)=\frac{m^2(T_k-0)P_1(x,m(T_k-0))}{1+\frac{1}{2}D(T_k-0)P_2(x,m(T_k-0))}+\frac{D(T_k-0)\left[1+2m(T_k-0)P_1(x,m(T_k-0))+m(T_k-0)^2P_2(x,m(T_k-0))\right]}{1+\frac{1}{2}D(T_k-0)P_2(x,m(T_k-0))}-$$

$$-\left[m(T_k-0)+\frac{D(T_k-0)P_1(x,m(T_k-0))}{1+\frac{1}{2}D(T_k-0)P_2(x,m(T_k-0))}\right]^2. \quad (55)$$

Заключение

На интервале между измерениями в случае гауссовой аппроксимации $m(t)$ и $D(t)$ определяются решениями уравнений (22), (34) с начальными условиями (54) и (55).

Решение этих уравнений уже гораздо проще, чем решение исходных уравнений в частных производных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хазен Э.М.* Теория оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления М.: Сов. радио, 1968. 256 с.
2. *Поттосина С.А., Терпугов А.Ф.* // Изв. вузов. Физика. 1993. № 12. С. 54.
3. *Радюк Л.Е., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во ТГУ, 1988. 174 с.
4. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969. 400 с.
5. *Федосов Е.Н.* //Известия вузов. Физика. 1995. № 3. С. 17.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 1 марта 2000 г.