

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Томский государственный университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Издательство "Пеленг"
Томск-1998

Математическое моделирование и теория вероятностей / Под редакцией И.А. Александрова, А.М. Бубенчикова, В.Н. Берцуна, Ю.К. Устинова - Томск: Изд-во "Пеленг", 1998. - 284с. 100 экз. 1602070000.

Издание подготовлено к 50- летнему юбилею механико-математического факультета Томского госуниверситета. В сборник включены работы по численным и аналитическим методам решения дифференциальных уравнений, математическому моделированию, теории вероятностей, математической статистике и их приложениям.

Для научных сотрудников, а также студентов старших курсов соответствующих специальностей.

ISBN 5-88630-108-9

Томский государственный университет, 1998

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ СУММ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ

С.П.Сущенко

Томский государственный университет

634050, Томск, проспект Ленина, 36

Тел. (3822)232453, e-mail: ssp@inf.tsu.ru

Предложен метод аналитического вычисления сумм произведения показательных и степенных функций индекса суммирования, применяемых в задачах моделирования дискретных систем.

При моделировании широкого класса прикладных стохастических и детерминированных дискретных систем часто возникает необходимость в суммировании выражений, являющихся произведением показательной и степенной функций индекса суммирования:

$$\sum_{i=1}^k i^s x^i, \quad 0 < x < 1.$$

Значения этих сумм, приводимые в справочниках [1,2], известны только при величинах показателя степенной функции $s = \overline{0, 3}$ и не приведены к каноническому виду. В данной работе предложен подход, позволяющий последовательно получать аналитический вид сумм для произвольных значений показателя s .

Предлагаемый метод основан на эквивалентности представления исходной суммы с одним основанием показательной функции в виде двойной суммы с двумя основаниями показательной функции при равенстве оснований:

$$\sum_{i=1}^k i^s x^i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i i^{s-1} x^{i-j} y^j,$$

при $y = x$. Такое представление позволяет последовательно находить значения сумм для произвольного s . Однако, при этом необходимо выполнение предельного перехода к одному основанию показательных функций, который приводит к трудоемкой операции раскрытия неопределенности вида $0/0$. Выполняя в правой части данного равенства суммирование и предельный переход при $y \rightarrow x$, получаем:

$$\sum_{i=1}^k i^s x^i = x \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^k i^{s-1} x^i \right)$$

Данное соотношение при $s > 0$ представимо в виде:

$$\sum_{i=1}^k i^s x^i = \frac{x(1-x^k)}{(1-x)^{s+1}} \sum_{i=0}^{s-1} A_i(s) x^i - \frac{kx^{k+1}}{1-x} \left(k^{s-1} + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{k^{s-1-i}}{(1-x)^i} \binom{s}{i} \sum_{j=0}^{i-1} A_j(i) x^j \right).$$

Поскольку для $k = 1$ значение искомой суммы равно x , то при известных начальных условиях (выражениях для сумм при $s = \overline{0,3}$) отсюда получаем алгебраическое уравнение относительно коэффициентов $A_i(s)$ при степенях x . Последовательно решая данное уравнение при $s = 4, 10$ и канонизируя полученные и известные [1,2] соотношения приходим к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k x^i &= \frac{x(1-x^k)}{1-x}; \\ \sum_{i=1}^k ix^i &= \frac{x(1-x^k)}{(1-x)^2} - \frac{kx^{k+1}}{1-x}; \\ \sum_{i=1}^k i^2 x^i &= \frac{x(1-x^k)(1+x)}{(1-x)^3} - \frac{kx^{k+1}}{1-x} \left\{ k + \frac{2}{1-x} \right\}; \\ \sum_{i=1}^k i^3 x^i &= \frac{x(1-x^k)(1+4x+x^2)}{(1-x)^4} - \frac{kx^{k+1}}{1-x} \left\{ k^2 + \frac{3k}{1-x} + \frac{3(1+x)}{(1-x)^2} \right\}; \\ \sum_{i=1}^k i^4 x^i &= \frac{x(1-x^k)(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^5} - \frac{kx^{k+1}}{1-x} \times \\ &\quad \times \left\{ k^3 + \frac{4k^2}{1-x} + \frac{6k(1+x)}{(1-x)^2} + \frac{4(1+4x+x^2)}{(1-x)^3} \right\}; \\ \sum_{i=1}^k i^5 x^i &= \frac{x(1-x^k)(1+26x+66x^2+26x^3+x^4)}{(1-x)^6} - \frac{kx^{k+1}}{1-x} \times \\ &\quad \times \left\{ k^4 + \frac{5k^3}{1-x} + \frac{10k^2(1+x)}{(1-x)^2} + \frac{10k(1+4x+x^2)}{(1-x)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^4} \right\}; \\ \sum_{i=1}^k i^6 x^i &= \frac{x(1-x^k)(1+57x+302x^2+302x^3+57x^4+x^5)}{(1-x)^7} - \frac{kx^{k+1}}{1-x} \times \\ &\quad \times \left\{ k^5 + \frac{6k^4}{1-x} + \frac{15k^3(1+x)}{(1-x)^2} + \frac{20k^2(1+4x+x^2)}{(1-x)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{15k(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^4} + \frac{6(1+26x+66x^2+26x^3+x^4)}{(1-x)^5} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k i^7 x^i &= \frac{x(1-x^k)}{(1-x)^8} (1 + 120x + 1191x^2 + 2416x^3 + 1191x^4 + 120x^5 + \\
&+ x^6) - \frac{kx^{k+1}}{1-x} \left\{ k^6 + \frac{7k^5}{1-x} + \frac{21k^4(1+x)}{(1-x)^2} + \right. \\
&+ \frac{35k^3(1+4x+x^2)}{(1-x)^3} + \frac{35k^2(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^4} + \\
&+ \frac{21k(1+26x+66x^2+26x^3+x^4)}{(1-x)^5} + \\
&+ \left. \frac{7(1+57x+302x^2+302x^3+57x^4+x^5)}{(1-x)^6} \right\}; \\
\sum_{i=1}^k i^8 x^i &= \frac{x(1-x^k)}{(1-x)^9} (1 + 247x + 4293x^2 + 15619x^3 + 15619x^4 + 4293x^5 + \\
&+ 247x^6 + x^7) - \frac{kx^{k+1}}{1-x} \left\{ k^7 + \frac{8k^6}{1-x} + \frac{28k^5(1+x)}{(1-x)^2} + \right. \\
&+ \frac{56k^4(1+4x+x^2)}{(1-x)^3} + \frac{70k^3(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^4} + \\
&+ \frac{56k^2(1+26x+66x^2+26x^3+x^4)}{(1-x)^5} + \\
&+ \frac{28k(1+57x+302x^2+302x^3+57x^4+x^5)}{(1-x)^6} + \\
&+ \left. \frac{8(1+120x+1191x^2+2416x^3+1191x^4+120x^5+x^6)}{(1-x)^7} \right\}; \\
\sum_{i=1}^k i^9 x^i &= \frac{x(1-x^k)}{(1-x)^{10}} (1 + 502x + 14608x^2 + 88234x^3 + 156190x^4 + \\
&+ 88234x^5 + 14608x^6 + 502x^7 + x^8) - \frac{kx^{k+1}}{1-x} \left\{ k^8 + \frac{9k^7}{1-x} + \right. \\
&+ \frac{36k^6(1+x)}{(1-x)^2} + \frac{84k^5(1+4x+x^2)}{(1-x)^3} + \\
&+ \frac{126k^4(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^4} + \\
&+ \frac{126k^3(1+26x+66x^2+26x^3+x^4)}{(1-x)^5} + \\
&+ \frac{84k^2(1+57x+302x^2+302x^3+57x^4+x^5)}{(1-x)^6} + \\
&+ \left. \frac{36k(1+120x+1191x^2+2416x^3+1191x^4+120x^5+x^6)}{(1-x)^7} \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{9}{(1-x)^8} (1 + 247x + 4293x^2 + 15619x^3 + 15619x^4 + \\
& + 4293x^5 + 247x^6 + x^7) \}; \\
\sum_{i=1}^k i^{10} x^i = & \frac{x(1-x^k)}{(1-x)^{11}} (1 + 1013x + 47840x^2 + 455192x^3 + 1310354x^4 + \\
& + 1310354x^5 + 455192x^6 + 47840x^7 + 1013x^8 + x^9) - \\
& - \frac{kx^{k+1}}{1-x} \left\{ k^9 + \frac{10k^8}{1-x} + \frac{45k^7(1+x)}{(1-x)^2} + \frac{120k^6(1+4x+x^2)}{(1-x)^3} + \right. \\
& + \frac{210k^5(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^4} + \\
& + \frac{252k^4(1+26x+66x^2+26x^3+x^4)}{(1-x)^5} + \\
& + \frac{210k^3(1+57x+302x^2+302x^3+57x^4+x^5)}{(1-x)^6} + \\
& + \frac{120k^2(1+120x+1191x^2+2416x^3+1191x^4+120x^5+x^6)}{(1-x)^7} + \\
& + \frac{45k}{(1-x)^8} (1 + 247x + 4293x^2 + 15619x^3 + 15619x^4 + \\
& + 4293x^5 + 247x^6 + x^7) + \\
& + \frac{10}{(1-x)^9} (1 + 502x + 14608x^2 + 88234x^3 + 156190x^4 + \\
& + 88234x^5 + 14608x^6 + 502x^7 + x^8) \}.
\end{aligned}$$

Отметим, что последовательно применяя данный прием можно найти соотношения для сумм, содержащих произвольную степень индекса суммирования. Кроме того, при $x < 1$ последовательности, образованные произведением показательной и степенной функций, сходятся и из найденных соотношений нетрудно получить суммы рядов.

Литература

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1971. — С. 1108.

2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — С. 800.

СОДЕРЖАНИЕ

В.Н.Берцун, М.Д. Михайлов. Памяти Р.М. Малаховской ©

3

Математическое моделирование

Л.М. Артишева, В.А. Гриднева, М.Д. Михайлов. Численное моделирование высокоскоростного соударения твердых тел ©	6
В.Н. Берцун, О.Л. Крицкий. К вопросу о математическом моделировании тепловых полей в средах с анизотропной теплопроводностью ©	12
С.Н. Бойцов. Распределенная маршрутизация потоков ©	20
А.М. Бубенчиков, А.В. Старченко, С.Н. Харламов. К моделированию динамики газа и теплообмена в плазмотроне с вихревой стабилизацией дуги ©	25
А.В. Буров. Об одной математической модели внутренней нормы доходности потока платежей ©	29
В.В. Жаровцев, Л.В. Комаровский. Численный расчет легкогазовой установки с неоднородным генератором пороховых газов ©	34
Г.Н. Исаков, А.И. Кустов. Моделирование временного хода температуры в припочвенном слое атмосферы ©	40
П.Н. Колтун, П.Б. Милованцев. Построение субъективно – ориентированных систем ©	46
С.Н. Колупаева, Е.В. Ерыгина, Г.А. Ковалевская. Математическое моделирование эволюции дефектной подсистемы деформируемых гетерофазных сплавов ©	54
В.И. Кондрашов. Численные решения задач хранения биологической продукции ©	58
А.И. Литвин, В.Б. Кусков. Численное моделирование турбулентных течений ©	60
М.Д. Михайлов, Н.А. Шинкин. Математическое моделирование популяций тетерева и большой синицы ©	66
Ю.Б. Нам, В.Б. Новосельцев. Об иерархии на основе эпистемических знаний ©	72
Д.Б. Овсянников, В.Б. Новосельцев. Один подход к задаче синтаксического разбора фраз естественного языка ©	76
С.Л. Павлов. Численно- аналитическое решение задачи осесимметричной теплопроводности ©	80
С.В. Панько, А.Т. Роот. О представлении решения одного класса систем с переменными коэффициентами ©	84
Н.М. Симонова. О движении твердого тела вращения в жидкости вблизи непроницаемой преграды ©	88

А.В. Старченко, Е.С. Бурлуцкий. Численный анализ газодинамики и теплообмена при турбулентном неизотермическом течении газ-инерционные частицы в трубе ©	92
С.Н. Харламов. Численный расчет турбулентного закрученного потока в коротких каналах ©	99
С.Н. Харламов. Детальное моделирование турбулентных развивающихся течений ©	119
Б.М. Шумилов. Трехдиагональные трехточечные сплайн-схемы максимальной точности приближенного решения дифференциальных уравнений второго порядка ©	126

Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения

Е.А. Бобкова, О.В. Бредихина. Интегродифференциальные уравнения Колмогорова для квазимарковских процессов с точечным дефектом ©	132
Ю.Б. Буркатовская, С.Э. Воробейчиков. Обнаружение разладки процесса авторегрессии, наблюдаемого с помехами ©	141
В.А. Вааль, Г.М. Кошкин. Интегральные непараметрические оценки функции интенсивности ©	147
Н.А. Витвинина, Т.В. Данилова. Преобразования квазимарковских процессов с точечным дефектом ©	150
Н.С. Демин. Распознавание стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений ©	157
Ю.Г. Дмитриев. Метод коррелированных процессов при наличии смещения ©	163
Ю.Г. Дмитриев. Непараметрическое условное оценивание функционалов плотности вероятности ©	169
Ю.Г. Дмитриев. Адаптивные статистики в проверке гипотез ©	178
Ю.Г. Дмитриев, С.А. Титова. Привлечение априорной информации на основе минимума верхних границ погрешностей ©	185
Ю.Г. Дмитриев, С.С. Тарима. Оценки вероятностей с учетом информации с полной группой событий ©	191
Т.В. Емельянова. Новая форма проектора в класс распределений, условно-инвариантных относительно разбиения пространства элементарных событий ©	196
И.Г. Константинова, А.Ф. Терпугов. Выделение трендов временных рядов сплайнами первого порядка, когда измерения проводятся в случайные моменты времени ©	201
G.M. Koshkin. Nonparametric Estimation in Complex Models of Life Insurance ©	207
G.M. Koshkin, V.I.Rynmkin. Mean Square Convergence of Kernel Estimates of Conditional Functionals by Weakly Dependent Observations ©	215

Н.Т. Кустов, С.П. Сущенко. Об устойчивости метода случайного множественного доступа ©	221
Н.Ю. Марголис. Виртуальное время ожидания в системе M/G/N/∞ ©	227
А.А. Назаров, С.Л. Шохор. Сравнение асимптотической и допредельной модели сети связи с динамическим протоколом случайного множественного доступа ©	233
Ю.Д. Одышев. Исследование явления бистабильности в сети с протоколом “синхронная алоха” для конечного числа станции ©	242
Г.Г. Пестов. Об одной стохастической модели образования осколков ©	248
С.П. Сущенко. Аналитическая вычисляемость сумм произведения показательных и степенных функций ©	253
С.С. Тарима. О свойствах эмпирического распределения, модифицированного с учетом знания вероятностей ©	257
Е.Л. Туренова. Проверка гипотезы о соотношении интенсивностей нестационарных пуассоновских потоков ©	262
Ю.К. Устинов. О распределении Ф.Н. Алексеева ©	268
О.П. Федорова. Выявление аномалий координатно – привязанных объектов ©	270
Е.Н. Федосов. Нелинейная фильтрация интенсивности дважды стохастического пуассоновского потока событий при наличии непродливающегося мертвого времени ©	276