МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Томский государственный университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Издательство “Пеленг”
Томск-1998

Математическое моделирование и теория вероятностей / Под редакцией И.А. Александрова, А.М. Бубенчикова, В.Н. Берцуна, Ю.К. Устинова - Томск: Изд-во "Пеленг", 1998. - 284с. 100 экз. 1602070000.

Издание подготовлено к 50- летнему юбилею механико-математического факультета Томского госуниверситета. В сборник включены работы по численным и аналитическим методам решения дифференциальных уравнений, математическому моделированию, теории вероятностей, математической статистике и их приложениям.

Для научных сотрудников, а также студентов старших курсов соответствующих специальностей.

ISBN 5-88630-108-9

УДК 681.324

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ СУММ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ

С.П.Сущенко
Томский государственный университет
634050, Томск, проспект Ленина, 36
Тел. (3822)232453, e-mail: ssp@inf.tsu.ru

Предложен метод аналитического вычисления сумм произведения показательных и степенных функций индекса суммирования, применяемых в задачах моделирования дискретных систем.

При моделировании широкого класса прикладных стохастических и детерминированных дискретных систем часто возникает необходимость в суммировании выражений, являющихся произведением показательной и степенной функций индекса суммирования:

$$\sum_{i=1}^{k} i^s x^i, \ 0 < x > 1.$$

Значения этих сумм, приводимые в справочниках [1,2], известны только при величинах показателя степенной функции $s = \overline{0,3}$ и не приведены к каноническому виду. В данной работе предложен подход, позволяющий последовательно получать аналитический вид сумм для произвольных значений показателя s.

Предлагаемый метод основан на эквивалентности представления исходной суммы с одним основанием показательной функции в виде двойной суммы с двумя основаниями показательной функции при равенстве оснований:

$$\sum_{i=1}^{k} i^s x^i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} i^{s-1} x^{i-j} y^j,$$

при $y = x$. Такое представление позволяет последовательно находить значения сумм для произвольного s. Однако, при этом необходимо выполнение предельного перехода к одному основанию показательных функций, который приводит к трудоемкой опреации раскрытия неопределенности вида $0/0$. Выполняя в правой части данного равенства суммирование и предельный переход при $y \to x$, получаем:

$$\sum_{i=1}^{k} i^s x^i = x \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^{k} i^{s-1} x^i \right)$$

Данное соотношение при $s > 0$ представимо в виде:

$$\sum_{i=1}^{k} i^s x^i =$$

$$= \frac{x(1-x^k)}{(1-x)^{s+1}} \sum_{i=0}^{s-1} A_i(s) x^i - \frac{kx^{k+1}}{1-x} \left(k^{s-1} + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{k^{s-1-i}}{(1-x)^i} \binom{s}{i} \sum_{j=0}^{i-1} A_j(i) x^i \right).$$

Поскольку для $k = 1$ значение искомой суммы равно x, то при известных начальных условиях (выражениях для сумм при $s = \overline{0,3}$) отсюда получаем алгебраическое уравнение относительно коэффициентов $A_i(s)$ при степенях x. Последовательно решая данное уравнение при $s = \overline{4,10}$ и канонизируя полученные и известные [1,2] соотношения приходим к следующим выражениям:

$$\sum_{i=1}^{k} x^i = \frac{x(1-x^k)}{1-x};$$

$$\sum_{i=1}^{k} ix^i = \frac{x(1-x^k)}{(1-x)^2} - \frac{kx^{k+1}}{1-x};$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^2x^i = \frac{x(1-x^k)(1+x)}{(1-x)^3} - \frac{kx^{k+1}}{1-x}\left\{k + \frac{2}{1-x}\right\};$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^3x^i = \frac{x(1-x^k)(1+4x+x^2)}{(1-x)^4} - \frac{kx^{k+1}}{1-x}\left\{k^2 + \frac{3k}{1-x} + \frac{3(1+x)}{(1-x)^2}\right\};$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^4x^i = \frac{x(1-x^k)(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^5} - \frac{kx^{k+1}}{1-x} \times$$
$$\times \left\{k^3 + \frac{4k^2}{1-x} + \frac{6k(1+x)}{(1-x)^2} + \frac{4(1+4x+x^2)}{(1-x)^3}\right\};$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^5x^i = \frac{x(1-x^k)(1+26x+66x^2+26x^3+x^4)}{(1-x)^6} - \frac{kx^{k+1}}{1-x} \times$$
$$\times \left\{k^4 + \frac{5k^3}{1-x} + \frac{10k^2(1+x)}{(1-x)^2} + \frac{10k(1+4x+x^2)}{(1-x)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{5(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^4}\right\};$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^6x^i = \frac{x(1-x^k)(1+57x+302x^2+302x^3+57x^4+x^5)}{(1-x)^7} - \frac{kx^{k+1}}{1-x} \times$$
$$\times \left\{k^5 + \frac{6k^4}{1-x} + \frac{15k^3(1+x)}{(1-x)^2} + \frac{20k^2(1+4x+x^2)}{(1-x)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{15k(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^4} + \frac{6(1+26x+66x^2+26x^3+x^4)}{(1-x)^5}\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^7 x^i = \frac{x(1-x^k)}{(1-x)^8}(1+120x+1191x^2+2416x^3+1191x^4+120x^5+$$
$$+x^6) - \frac{kx^{k+1}}{1-x}\left\{k^6 + \frac{7k^5}{1-x} + \frac{21k^4(1+x)}{(1-x)^2} + \right.$$
$$+\frac{35k^3(1+4x+x^2)}{(1-x)^3} + \frac{35k^2(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^4} +$$
$$+\frac{21k(1+26x+66x^2+26x^3+x^4)}{(1-x)^5} +$$
$$\left.+\frac{7(1+57x+302x^2+302x^3+57x^4+x^5)}{(1-x)^6}\right\};$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^8 x^i = \frac{x(1-x^k)}{(1-x)^9}(1+247x+4293x^2+15619x^3+15619x^4+4293x^5+$$
$$+247x^6+x^7) - \frac{kx^{k+1}}{1-x}\left\{k^7 + \frac{8k^6}{1-x} + \frac{28k^5(1+x)}{(1-x)^2} + \right.$$
$$+\frac{56k^4(1+4x+x^2)}{(1-x)^3} + \frac{70k^3(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^4} +$$
$$+\frac{56k^2(1+26x+66x^2+26x^3+x^4)}{(1-x)^5} +$$
$$+\frac{28k(1+57x+302x^2+302x^3+57x^4+x^5)}{(1-x)^6} +$$
$$\left.+\frac{8(1+120x+1191x^2+2416x^3+1191x^4+120x^5+x^6)}{(1-x)^7}\right\};$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^9 x^i = \frac{x(1-x^k)}{(1-x)^{10}}(1+502x+14608x^2+88234x^3+156190x^4+$$
$$+88234x^5+14608x^6+502x^7+x^8) - \frac{kx^{k+1}}{1-x}\left\{k^8 + \frac{9k^7}{1-x} + \right.$$
$$+\frac{36k^6(1+x)}{(1-x)^2} + \frac{84k^5(1+4x+x^2)}{(1-x)^3} +$$
$$+\frac{126k^4(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^4} +$$
$$+\frac{126k^3(1+26x+66x^2+26x^3+x^4)}{(1-x)^5} +$$
$$+\frac{84k^2(1+57x+302x^2+302x^3+57x^4+x^5)}{(1-x)^6} +$$
$$+\frac{36k(1+120x+1191x^2+2416x^3+1191x^4+120x^5+x^6)}{(1-x)^7} +$$

$$+\frac{9}{(1-x)^8}(1+247x+4293x^2+15619x^3+15619x^4+$$
$$+4293x^5+247x^6+x^7)\Big\};$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^{10}x^i = \frac{x(1-x^k)}{(1-x)^{11}}(1+1013x+47840x^2+455192x^3+1310354x^4+$$
$$+1310354x^5+455192x^6+47840x^7+1013x^8+x^9)-$$
$$-\frac{kx^{k+1}}{1-x}\Big\{k^9+\frac{10k^8}{1-x}+\frac{45k^7(1+x)}{(1-x)^2}+\frac{120k^6(1+4x+x^2)}{(1-x)^3}+$$
$$+\frac{210k^5(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^4}+$$
$$+\frac{252k^4(1+26x+66x^2+26x^3+x^4)}{(1-x)^5}+$$
$$+\frac{210k^3(1+57x+302x^2+302x^3+57x^4+x^5)}{(1-x)^6}+$$
$$+\frac{120k^2(1+120x+1191x^2+2416x^3+1191x^4+120x^5+x^6)}{(1-x)^7}+$$
$$+\frac{45k}{(1-x)^8}(1+247x+4293x^2+15619x^3+15619x^4+$$
$$4293x^5+247x^6+x^7)+$$
$$+\frac{10}{(1-x)^9}(1+502x+14608x^2+88234x^3+156190x^4+$$
$$+88234x^5+14608x^6+502x^7+x^8)\Big\}.$$

Отметим, что последовательно применяя данный прием можно найти соотношения для сумм, содержащих произвольную степень индекса суммирования. Кроме того, при $x < 1$ последовательности, образованные произведением показательной и степенной функций, сходятся и из найденных соотношений нетрудно получить суммы рядов.

Литература

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1971. – С. 1108.

2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – С. 800.

СОДЕРЖАНИЕ

Математическое моделирование

Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения