МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Томский государственный университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Издательство "Пеленг"
Томск-1998

Математическое моделирование и теория вероятностей / Под редакцией И.А. Александрова, А.М. Бубенчикова, В.Н. Берцуна, Ю.К. Устинова - Томск: Изд-во "Пеленг", 1998. - 284с. 100 экз. 1602070000.

Издание подготовлено к 50- летнему юбилею механико-математического факультета Томского госуниверситета. В сборник включены работы по численным и аналитическим методам решения дифференциальных уравнений, математическому моделированию, теории вероятностей, математической статистике и их приложениям.

Для научных сотрудников, а также студентов старших курсов соответствующих специальностей.

ISBN 5-88630-108-9

УДК 681.324

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА

Н.Т.Кустов, С.П.Сущенко
Томский государственный университет
634050, Томск, проспект Ленина, 36
Тел. (3822)232453, e-mail: ssp@inf.tsu.ru

Предложена синхронная модель групповых конфликтов с числом участников $K > 1$, позволяющая судить об устойчивости общей пропускной способности метода случайного множественного доступа к росту числа участников конфликта и его индивидуальном быстродействии для каждого источника.

1. Введение

В настоящее время наиболее массовыми технологиями построения локальных вычислительных сетей (ЛВС) являются решения, основанные на методе случайного множественного доступа. Известные подходы к анализу производительности данного метода соперничества не различают в самой модели конфликта количества его участников. Настоящее исследование посвящено изучению показателей производительности метода случайного множественного доступа в критических ситуациях, когда все станции ЛВС участвуют в конфликте. В работе предложена дискретная модель процесса соперничества, позволяющая определить зависимость пропускной способности от количества информационных источников при заданной производительности моноканала.

2. Модель конфликтов

Предполагается, что в ЛВС имеется K станций - источников данных, а время захвата среды передачи (моноканала) определяется слотовым интервалом (окном конфликта) длительности t_c. Считается, что все источники независимы, равноправны, всегда имеют блоки данных для отправки, одновременно входят в конфликт и в рамках процедуры соперничества используют механизм двоичной экспоненциальной отсрочки [1]. Отсрочка выполняется в длительностях, кратных размеру слота t_c, а соперничество станций ЛВС продолжается до захвата моноканала одним из источников и выполнения успешной передачи. При выполнении повторных передач станции, обнаружившие конфликт других источников, продолжают соперничество в следующих повторных передачах согласно процедуре отсрочки. Количество повторных передач полагаем неограниченным. Пусть t – время отсрочки повторной передачи станцией ЛВС, а n – время до начала повторной передачи первым источником из множества K в очередном цикле разрешения конфликта, измеренные в интервалах t_c. В силу того, что моменты начала передачи станциями ЛВС после отсрочки кратны длительности окна конфликтов, источник, начавший передачу первым (в момент $t = n$), захватит моноканал, если время случайной задержки других станций будет удовлетворять неравенству $t > n$. Условная вероятность N-ой повторной передачи после возникновения $N-1$-го конфликта для K источников определяется суммой произведений вероятностей совпадения времени отсрочки $p(t=n)$ для $k \geq 2$ источников и вероятностей того, что время отсрочки превысит момент начала повторной передачи $p(t > n)$ для остальных $K - k$ источников:

$$\pi(N, K) = \sum_{k=2}^{K} \binom{K}{k} \sum_{n=0}^{S_N} p^k(t = n) p^{K-k}(t > n), \tag{1}$$

где S_N - верхняя граница времени отсрочки N-ой повторной передачи. Очевидно, что условная вероятность бесконфликтной N-ой повторной передачи является обратной к условной вероятности конфликта: $P(N, K) = 1 - \pi(N, K)$. Так как $K \geq 2$ источников при первой передаче всегда вступают в конфликт в силу наличия в них информационных блоков для отправки, то функция вероятностей времени разрешения конфликта определится соотношением:

$$f(N, K) = P(N, K) \prod_{n=1}^{N-1} \pi(n, K),$$

а функция распределения времени разрешения конфликта – выражением:

$$F(N, K) = \sum_{n=1}^{N} f(n, K).$$

Среднее условное время до конфликта и успеха в N-ой повторной передаче, измеренное в длительностях t_c, соответственно составит:

$$t(N. K) = \frac{1}{\pi(N, K)} \sum_{k=2}^{K} \binom{K}{k} \sum_{n=1}^{S_N} n p^k(t = n) p^{K-k}(t > n,) \tag{2}$$

$$\tau(N, K) = \frac{1}{P(N, K)} \sum_{n=1}^{S_N} p(t = n) p^{K-1}(t > n). \tag{3}$$

Поскольку временное расписание повторных передач распределено равномерно в диапазоне $[0, 2^N - 1]$, то $S_N = 2^N - 1$, $p(t = n) = 1/N$ и соотношения (1), (2), (3) можно переписать в виде:

$$\pi(N, K) = 2^{-NK} \sum_{k=2}^{K} \binom{K}{k} \sum_{n=0}^{2^N-1} [2^N - 1 - n]^{K-k} =$$

$$= 2^{-NK} \sum_{k=2}^{K} \frac{1}{k} \binom{K}{k-1} \left\{ B_{K-k+1}(2^N - 1) - B_{K-k+1}(2^{N+1} - 1) \right\}, \qquad (4)$$

где $B_m(x)$ - многочлен Бернулли [5],

$$t(N, K) = \frac{1}{\pi(N, K) 2^{NK}} \sum_{k=2}^{K} \binom{K}{k} \sum_{n=1}^{2^N-1} n[2^N - 1 - n]^{K-k}, \qquad (5)$$

$$\tau(N, K) = \frac{1}{P(N, K) 2^{NK}} \sum_{n=1}^{2^N-1} n[2^N - 1 - n]^{K-1}. \qquad (6)$$

Среднее время передачи кадра от любой из станций (среднее время разрешения конфликта) складывается из времени, затраченного на первую передачу, в которой источники попали в конфликт, конфликты и успешную передачу:

$$T(K) = \sum_{N=1}^{\infty} \left\{ t_м + t_c + \sum_{n=1}^{N-1} [t(n, K) + t_c] + \tau(N, K) + t_к \right\} f(N, K) =$$

$$= t_м + t_c + t_к + \bar{t}(K), \qquad (7)$$

где $t_м$ - длительность межкадрового интервала, $t_к$ - время вывода кадра в моноканал, $\bar{t}(K)$ - средняя длительность соперничества (среднее время выполнения повторных передач):

$$\bar{t}(K) = \sum_{N=1}^{\infty} \left\{ \tau(N, K) + (N - 1) t_c + \sum_{n=1}^{N-1} t(n, K) \right\} f(N, K).$$

3. Анализ группы однородных источников

Рассмотрим операционные параметры процесса разрешения конфликтов для различного числа соперничающих станций ЛВС. Очевидно, что при $K = 1$ время передачи кадра (7) будет равно: $T(1) = t_м + t_к$. Пусть $K = 2$. Тогда, с учетом соотношений для сумм степеней натуральных чисел [4,5], условная вероятность конфликта принимает вид $\pi(N, 2) = 2^{-N}$, а условное среднее время до повторной и бесконфликтной передач соответственно составят:

$$t(N, 2) = \frac{2^N - 1}{2}; \; \tau(N, 2) = \frac{2}{3}(2^{N-1} - 1).$$

Функция вероятностей времени разрешения конфликта определится зависимостью:

$$f(N,2) = (1-2^{-N})2^{-\frac{N(N-1)}{2}}.$$

При $K = 3$ параметры процесса конфликтов принимают вид:

$$\pi(N,3) = \frac{3\times 2^N - 1}{2^{2N+1}},\ t(N,3) = \frac{(2^N-1)^2}{3\times 2^N - 1},\ \tau(N,3) = \frac{(2^N-1)(2^{N-1}-1)}{2^{N+1}-1}.$$

Значение $K = 4$ приводит к следующим зависимостям:

$$\pi(N,4) = \frac{2^{N+1}-1}{2^{2N}},\ t(N,4) = \frac{(2^N-1)(3\times 2^{2N} - 5\times 2^N + 1)}{6\times 2^N(2^{N+1}-1)},$$

$$\tau(N,4) = \frac{3\times 2^{4N} - 15\times 2^{3N} + 25\times 2^{2N} - 15\times 2^N + 2}{15\times 2^N(2^N-1)^2}.$$

Для $K = 5$ из (4), (5), (6) получаем:

$$\pi(N,5) = \frac{15\times 2^{3N} - 10\times 2^{2N} + 1}{6\times 2^{4N}},$$

$$t(N,5) = \frac{3\times 2^{4N} - 10\times 2^{3N} + 10\times 2^{2N} - 2\times 2^N - 1}{15\times 2^{3N} - 10\times 2^{2N} + 1},$$

$$\tau(N,5) = \frac{5(2\times 2^{5N} - 12\times 2^{4N} + 25\times 2^{3N} - 20\times 2^{2N} + 3\times 2^N + 2)}{6\times 2^{4N} - 15\times 2^{3N} + 10\times 2^{2N} - 1}.$$

При шести соперничающих источниках имеем:

$$\pi(N,6) = \frac{36\times 2^{4N} - 30\times 2^{3N} + 6\times 2^N}{12\times 2^{5N}}$$

$$t(N,6) = \frac{2(2^N-1)(3\times 2^{4N} - 9\times 2^{3N} + 6\times 2^{2N} + 2^{N+1} - 1)}{36\times 2^{4N} - 30\times 2^{3N} + 6\times 2^N}$$

$$\tau(N,6) = \frac{(10\times 2^{5N} - 60\times 2^{4N} + 115\times 2^{3N} - 60\times 2^{2N} - 25\times 2^N + 10)}{35(2\times 2^{4N} - 4\times 2^{3N} + 2^{2N} + 2^N)}.$$

Для рассмотренной схемы группового участия источников в конфликте найдены численные значения условной вероятности конфликта и условного среднего времени между последовательными конфликтами как функция номера повторной передачи и числа соперничающих источников. Из распределения параметров процесса соперничества, приводимых в табл.1, видно, что с ростом количества станций ЛВС условная вероятность успеха $P(N,K)$ в начальных повторных передачах

снижается, однако при увеличении номера повторной передачи данная характеристика стабилизируется. Отсюда нетрудно видеть также, что

Таблица 1: Распределение условных параметров процесса соперничества по количеству источников и номеру повторной передачи

Показатель	N									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(N,2)$	.500	.750	.875	.938	.968	.984	.992	.996	.998	.999
$P(N,3)$	.375	.656	.820	.908	.953	.977	.988	.994	.997	.999
$P(N,4)$	.250	.563	.766	.879	.939	.969	.984	.992	.996	.998
$P(N,5)$	.156	.479	.714	.850	.924	.961	.981	.990	.995	.998
$P(N,6)$	.091	.404	.664	.822	.909	.954	.977	.988	.994	.997
$t(N,2)$	0.50	1.50	3.50	7.50	15.5	31.5	63.5	127.5	255.5	511.5
$t(N,3)$	0.20	0.82	2.13	4.79	10.1	20.8	42.1	84.8	170.1	340.8
$t(N,4)$	0.08	0.52	1.49	3.47	7.5	15.5	31.5	63.5	127.5	255.5
$t(N,5)$	0.04	0.35	1.11	2.69	5.9	12.3	25.1	50.7	101.9	204.3
$t(N,6)$	0.02	0.24	0.86	2.16	4.8	10.1	20.8	42.1	84.8	170.1
$\tau(N,2)$	0.00	0.67	2.00	4.67	10.0	20.7	42.0	84.7	170.0	340.7
$\tau(N,3)$	0.00	0.43	1.40	3.39	7.4	15.4	31.4	63.4	127.4	255.4
$\tau(N,4)$	0.00	0.28	1.04	2.62	5.8	12.2	25.0	50.6	101.8	204.2
$\tau(N,5)$	0.00	0.18	0.80	2.11	4.8	10.1	20.8	42.1	84.8	170.1
$\tau(N,6)$	0.00	0.12	0.63	1.74	4.0	8.6	17.7	36.0	72.6	145.7

условное время до повторной и успешной передач с ростом K падает, что легко обьясняется тяготением вероятности условного успеха или неуспеха в каждом цикле разрешения конфликта к началу периода отсрочки $t \in [0, 2^N - 1]$. Вид функции вероятностей разрешения конфликта $f(N, K)$ иллюстрируется результатами, представленными в табл.2. Из численных значений средней длительности соперничества видно, что данный показатель монотонно увеличивается с ростом K. Показатель пропускной способности метода случайного множественного доступа, выраженный в количестве кадров, передаваемых в единицу времени, $C(K) = 1/T(K)$ при равноправных источниках равномерно делится между всеми станциями ЛВС, что приводит к пропорциональному сокращению индивидуального быстродействия для каждого источника информации.

На основе предложенной модели проведено сопоставление различных технологических воплощений метода случайного множественного доступа (Ethernet, FastEthernet, GigabitEthernet). Выполнена оценка параметра нагрузки в терминах предложенной модели при известном числе источников с заданными распределениями интенсивности порождаемого потока данных. Предложена схема анализа коммутируемой технологии соперничества.

Таблица 2: Зависимость функции вероятностей и средней длительности соперничества от количества станций ЛВС

K	$f(1,K)$	$f(2,K)$	$f(3,K)$	$f(4,K)$	$f(5,K)$	$f(6,K)$	$\bar{t}(K)$
2	0.50000	0.37500	0.10938	0.01464	0.00095	0.00003	1.6888
3	0.37500	0.41015	0.17624	0.03506	0.00338	0.00016	1.8527
4	0.25000	0.42188	0.25122	0.06759	0.00874	0.00056	2.1609
5	0.15625	0.40375	0.31394	0.10718	0.01743	0.00139	2.4621
6	0.09375	0.36639	0.35843	0.14918	0.02930	0.00280	2.7242

4. Заключение

Дальнейшим обобщением предложенной модели является анализ ситуации, когда к конфликтующим источникам в процессе разрешения коллизии по мере выполнения повторных передач присоединяются новые станции ЛВС. Предварительное изучение такой схемы показывает, что неоднородная по времени вступления в конфликт группа источников вносит элементы неравноправия между станциями ЛВС. Источники, вступившие в конфликт самыми последними, имеют больше шансов захватить моноканал.

Литература

1. Бертсекас Д., Галлагер Р. Сети передачи данных. – М.: Мир, 1989. – 544 с.

2. Хомичков И.И. Модель локальной вычислительной сети со случайным множественным доступом // Автоматика и вычислительная техника. – 1997. – № N 1. – С.102-106.

3. Щербо В.К., Киреичев В.М., Самойленко С.И. Стандарты по локальным вычислительным сетям: Справочник – М.: Радио и связь, 1990. – С. 304.

4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1971. – С. 1108.

5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – С. 800.

СОДЕРЖАНИЕ

Математическое моделирование

Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения