

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Томский государственный университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Издательство "Пеленг"
Томск-1998

Математическое моделирование и теория вероятностей / Под редакцией И.А. Александрова, А.М. Бубенчикова, В.Н. Берцуна, Ю.К. Устинова - Томск: Изд-во "Пеленг", 1998. - 284с. 100 экз. 1602070000.

Издание подготовлено к 50-летнему юбилею механико-математического факультета Томского госуниверситета. В сборник включены работы по численным и аналитическим методам решения дифференциальных уравнений, математическому моделированию, теории вероятностей, математической статистике и их приложениям.

Для научных сотрудников, а также студентов старших курсов соответствующих специальностей.

ISBN 5-88630-108-9

Томский государственный университет, 1998

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА

Н.Т.Кустов, С.П.Сущенко

Томский государственный университет

634050, Томск, проспект Ленина, 36

Тел. (3822)232453, e-mail: ssp@inf.tsu.ru

Предложена синхронная модель групповых конфликтов с числом участников $K > 1$, позволяющая судить об устойчивости общей пропускной способности метода случайного множественного доступа к росту числа участников конфликта и его индивидуальном быстродействии для каждого источника.

1. Введение

В настоящее время наиболее массовыми технологиями построения локальных вычислительных сетей (ЛВС) являются решения, основанные на методе случайного множественного доступа. Известные подходы к анализу производительности данного метода соперничества не различают в самой модели конфликта количества его участников. Настоящее исследование посвящено изучению показателей производительности метода случайного множественного доступа в критических ситуациях, когда все станции ЛВС участвуют в конфликте. В работе предложена дискретная модель процесса соперничества, позволяющая определить зависимость пропускной способности от количества информационных источников при заданной производительности моноканала.

2. Модель конфликтов

Предполагается, что в ЛВС имеется K станций - источников данных, а время захвата среды передачи (моноканала) определяется слотовым интервалом (окном конфликта) длительности t_c . Считается, что все источники независимы, равноправны, всегда имеют блоки данных для отправки, одновременно входят в конфликт и в рамках процедуры соперничества используют механизм двоичной экспоненциальной отсрочки [1]. Отсрочка выполняется в длительностях, кратных размеру слота t_c , а соперничество станций ЛВС продолжается до захвата моноканала одним из источников и выполнения успешной передачи. При выполнении повторных передач станции, обнаружившие конфликт

других источников, продолжают соперничество в следующих повторных передачах согласно процедуре отсрочки. Количество повторных передач полагаем неограниченным. Пусть t – время отсрочки повторной передачи станцией ЛВС, а n – время до начала повторной передачи первым источником из множества K в очередном цикле разрешения конфликта, измеренные в интервалах t_c . В силу того, что моменты начала передачи станциями ЛВС после отсрочки кратны длительности окна конфликтов, источник, начавший передачу первым (в момент $t = n$), захватит моноканал, если время случайной задержки других станций будет удовлетворять неравенству $t > n$. Условная вероятность N -ой повторной передачи после возникновения $N - 1$ -го конфликта для K источников определяется суммой произведений вероятностей совпадения времени отсрочки $p(t = n)$ для $k \geq 2$ источников и вероятностей того, что время отсрочки превысит момент начала повторной передачи $p(t > n)$ для остальных $K - k$ источников:

$$\pi(N, K) = \sum_{k=2}^K \binom{K}{k} \sum_{n=0}^{S_N} p^k(t = n) p^{K-k}(t > n), \quad (1)$$

где S_N – верхняя граница времени отсрочки N -ой повторной передачи. Очевидно, что условная вероятность бесконфликтной N -ой повторной передачи является обратной к условной вероятности конфликта: $P(N, K) = 1 - \pi(N, K)$. Так как $K \geq 2$ источников при первой передаче всегда вступают в конфликт в силу наличия в них информационных блоков для отправки, то функция вероятностей времени разрешения конфликта определится соотношением:

$$f(N, K) = P(N, K) \prod_{n=1}^{N-1} \pi(n, K),$$

а функция распределения времени разрешения конфликта – выражением:

$$F(N, K) = \sum_{n=1}^N f(n, K).$$

Среднее условное время до конфликта и успеха в N -ой повторной передаче, измеренное в длительностях t_c , соответственно составит:

$$t(N, K) = \frac{1}{\pi(N, K)} \sum_{k=2}^K \binom{K}{k} \sum_{n=1}^{S_N} n p^k(t = n) p^{K-k}(t > n) \quad (2)$$

$$\tau(N, K) = \frac{1}{P(N, K)} \sum_{n=1}^{S_N} p(t = n) p^{K-1}(t > n). \quad (3)$$

Поскольку временное расписание повторных передач распределено равномерно в диапазоне $[0, 2^N - 1]$, то $S_N = 2^N - 1$, $p(t = n) = 1/N$ и соотношения (1), (2), (3) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \pi(N, K) &= 2^{-NK} \sum_{k=2}^K \binom{K}{k} \sum_{n=0}^{2^N-1} [2^N - 1 - n]^{K-k} = \\ &= 2^{-NK} \sum_{k=2}^K \frac{1}{k} \binom{K}{k-1} \{B_{K-k+1}(2^N - 1) - B_{K-k+1}(2^{N+1} - 1)\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $B_m(x)$ - многочлен Бернулли [5],

$$t(N, K) = \frac{1}{\pi(N, K)2^{NK}} \sum_{k=2}^K \binom{K}{k} \sum_{n=1}^{2^N-1} n[2^N - 1 - n]^{K-k}, \quad (5)$$

$$\tau(N, K) = \frac{1}{P(N, K)2^{NK}} \sum_{n=1}^{2^N-1} n[2^N - 1 - n]^{K-1}. \quad (6)$$

Среднее время передачи кадра от любой из станций (среднее время разрешения конфликта) складывается из времени, затраченного на первую передачу, в которой источники попали в конфликт, конфликты и успешную передачу:

$$\begin{aligned} T(K) &= \sum_{N=1}^{\infty} \left\{ t_m + t_c + \sum_{n=1}^{N-1} [t(n, K) + t_c] + \tau(N, K) + t_k \right\} f(N, K) = \\ &= t_m + t_c + t_k + \bar{t}(K), \end{aligned} \quad (7)$$

где t_m - длительность межкадрового интервала, t_k - время вывода кадра в моноканал, $\bar{t}(K)$ - средняя длительность соперничества (среднее время выполнения повторных передач):

$$\bar{t}(K) = \sum_{N=1}^{\infty} \left\{ \tau(N, K) + (N-1)t_c + \sum_{n=1}^{N-1} t(n, K) \right\} f(N, K).$$

3. Анализ группы однородных источников

Рассмотрим операционные параметры процесса разрешения конфликтов для различного числа соперничающих станций ЛВС. Очевидно, что при $K = 1$ время передачи кадра (7) будет равно: $T(1) = t_m + t_k$. Пусть $K = 2$. Тогда, с учетом соотношений для сумм степеней натуральных чисел [4,5], условная вероятность конфликта принимает вид $\pi(N, 2) = 2^{-N}$, а условное среднее время до повторной и бесконфликтной передач соответственно составят:

$$t(N, 2) = \frac{2^N - 1}{2}; \quad \tau(N, 2) = \frac{2}{3}(2^{N-1} - 1).$$

Функция вероятностей времени разрешения конфликта определится зависимостью:

$$f(N, 2) = (1 - 2^{-N})2^{-\frac{N(N-1)}{2}}.$$

При $K = 3$ параметры процесса конфликтов принимают вид:

$$\pi(N, 3) = \frac{3 \times 2^N - 1}{2^{2N+1}}, \quad t(N, 3) = \frac{(2^N - 1)^2}{3 \times 2^N - 1}, \quad \tau(N, 3) = \frac{(2^N - 1)(2^{N-1} - 1)}{2^{N+1} - 1}.$$

Значение $K = 4$ приводит к следующим зависимостям:

$$\pi(N, 4) = \frac{2^{N+1} - 1}{2^{2N}}, \quad t(N, 4) = \frac{(2^N - 1)(3 \times 2^{2N} - 5 \times 2^N + 1)}{6 \times 2^N(2^{N+1} - 1)},$$

$$\tau(N, 4) = \frac{3 \times 2^{4N} - 15 \times 2^{3N} + 25 \times 2^{2N} - 15 \times 2^N + 2}{15 \times 2^N(2^N - 1)^2}.$$

Для $K = 5$ из (4), (5), (6) получаем:

$$\pi(N, 5) = \frac{15 \times 2^{3N} - 10 \times 2^{2N} + 1}{6 \times 2^{4N}},$$

$$t(N, 5) = \frac{3 \times 2^{4N} - 10 \times 2^{3N} + 10 \times 2^{2N} - 2 \times 2^N - 1}{15 \times 2^{3N} - 10 \times 2^{2N} + 1},$$

$$\tau(N, 5) = \frac{5(2 \times 2^{5N} - 12 \times 2^{4N} + 25 \times 2^{3N} - 20 \times 2^{2N} + 3 \times 2^N + 2)}{6 \times 2^{4N} - 15 \times 2^{3N} + 10 \times 2^{2N} - 1}.$$

При шести соперничающих источниках имеем:

$$\pi(N, 6) = \frac{36 \times 2^{4N} - 30 \times 2^{3N} + 6 \times 2^N}{12 \times 2^{5N}}$$

$$t(N, 6) = \frac{2(2^N - 1)(3 \times 2^{4N} - 9 \times 2^{3N} + 6 \times 2^{2N} + 2^{N+1} - 1)}{36 \times 2^{4N} - 30 \times 2^{3N} + 6 \times 2^N}$$

$$\tau(N, 6) = \frac{(10 \times 2^{5N} - 60 \times 2^{4N} + 115 \times 2^{3N} - 60 \times 2^{2N} - 25 \times 2^N + 10)}{35(2 \times 2^{4N} - 4 \times 2^{3N} + 2^{2N} + 2^N)}.$$

Для рассмотренной схемы группового участия источников в конфликте найдены численные значения условной вероятности конфликта и условного среднего времени между последовательными конфликтами как функция номера повторной передачи и числа соперничающих источников. Из распределения параметров процесса соперничества, приводимых в табл.1, видно, что с ростом количества станций ЛВС условная вероятность успеха $P(N, K)$ в начальных повторных передачах снижается, однако при увеличении номера повторной передачи данная характеристика стабилизируется. Отсюда нетрудно видеть также, что

Таблица 1: Распределение условных параметров процесса соперничества по количеству источников и номеру повторной передачи

Показатель	N									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(N, 2)$.500	.750	.875	.938	.968	.984	.992	.996	.998	.999
$P(N, 3)$.375	.656	.820	.908	.953	.977	.988	.994	.997	.999
$P(N, 4)$.250	.563	.766	.879	.939	.969	.984	.992	.996	.998
$P(N, 5)$.156	.479	.714	.850	.924	.961	.981	.990	.995	.998
$P(N, 6)$.091	.404	.664	.822	.909	.954	.977	.988	.994	.997
$t(N, 2)$	0.50	1.50	3.50	7.50	15.5	31.5	63.5	127.5	255.5	511.5
$t(N, 3)$	0.20	0.82	2.13	4.79	10.1	20.8	42.1	84.8	170.1	340.8
$t(N, 4)$	0.08	0.52	1.49	3.47	7.5	15.5	31.5	63.5	127.5	255.5
$t(N, 5)$	0.04	0.35	1.11	2.69	5.9	12.3	25.1	50.7	101.9	204.3
$t(N, 6)$	0.02	0.24	0.86	2.16	4.8	10.1	20.8	42.1	84.8	170.1
$\tau(N, 2)$	0.00	0.67	2.00	4.67	10.0	20.7	42.0	84.7	170.0	340.7
$\tau(N, 3)$	0.00	0.43	1.40	3.39	7.4	15.4	31.4	63.4	127.4	255.4
$\tau(N, 4)$	0.00	0.28	1.04	2.62	5.8	12.2	25.0	50.6	101.8	204.2
$\tau(N, 5)$	0.00	0.18	0.80	2.11	4.8	10.1	20.8	42.1	84.8	170.1
$\tau(N, 6)$	0.00	0.12	0.63	1.74	4.0	8.6	17.7	36.0	72.6	145.7

условное время до повторной и успешной передач с ростом K падает, что легко объясняется тяготением вероятности условного успеха или неуспеха в каждом цикле разрешения конфликта к началу периода отсрочки $t \in [0, 2^N - 1]$. Вид функции вероятностей разрешения конфликта $f(N, K)$ иллюстрируется результатами, представленными в табл.2. Из численных значений средней длительности соперничества видно, что данный показатель монотонно увеличивается с ростом K . Показатель пропускной способности метода случайного множественного доступа, выраженный в количестве кадров, передаваемых в единицу времени, $C(K) = 1/T(K)$ при равноправных источниках равномерно делится между всеми станциями ЛВС, что приводит к пропорциональному сокращению индивидуального быстродействия для каждого источника информации.

На основе предложенной модели проведено сопоставление различных технологических воплощений метода случайного множественного доступа (Ethernet, FastEthernet, GigabitEthernet). Выполнена оценка параметра нагрузки в терминах предложенной модели при известном

числе источников с заданными распределениями интенсивности порождаемого потока данных. Предложена схема анализа коммутируемой технологии соперничества.

Таблица 2: Зависимость функции вероятностей и средней длительности соперничества от количества станций ЛВС

K	$f(1, K)$	$f(2, K)$	$f(3, K)$	$f(4, K)$	$f(5, K)$	$f(6, K)$	$\bar{t}(K)$
2	0.50000	0.37500	0.10938	0.01464	0.00095	0.00003	1.6888
3	0.37500	0.41015	0.17624	0.03506	0.00338	0.00016	1.8527
4	0.25000	0.42188	0.25122	0.06759	0.00874	0.00056	2.1609
5	0.15625	0.40375	0.31394	0.10718	0.01743	0.00139	2.4621
6	0.09375	0.36639	0.35843	0.14918	0.02930	0.00280	2.7242

4. Заключение

Дальнейшим обобщением предложенной модели является анализ ситуации, когда к конфликтующим источникам в процессе разрешения коллизии по мере выполнения повторных передач присоединяются новые станции ЛВС. Предварительное изучение такой схемы показывает, что неоднородная по времени вступления в конфликт группа источников вносит элементы неравноправия между станциями ЛВС. Источники, вступившие в конфликт самыми последними, имеют больше шансов захватить моноканал.

Литература

1. Бертсекас Д., Галлагер Р. Сети передачи данных. – М.: Мир, 1989. – 544 с.
2. Хомичков И.И. Модель локальной вычислительной сети со случайным множественным доступом // Автоматика и вычислительная техника. – 1997. – № N 1. – С.102-106.
3. Щербо В.К., Кирейчев В.М., Самойленко С.И. Стандарты по локальным вычислительным сетям: Справочник – М.: Радио и связь, 1990. – С. 304.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1971. – С. 1108.
5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – С. 800.

СОДЕРЖАНИЕ

В.Н.Берцун, М.Д. Михайлов. Памяти Р.М. Малаховской © 3

Математическое моделирование

- Л.М. Артищева, В.А. Гриднева, М.Д. Михайлов. Численное моделирование высокоскоростного соударения твердых тел © 6
- В.Н. Берцун, О.Л. Крицкий. К вопросу о математическом моделировании тепловых полей в средах с анизотропной теплопроводностью © 12
- С.Н. Бойцов. Распределенная маршрутизация потоков © 20
- А.М. Бубенчиков, А.В. Старченко, С.Н. Харламов. К моделированию динамики газа и теплообмена в плазмотроне с вихревой стабилизацией дуги © 25
- А.В. Буров. Об одной математической модели внутренней нормы доходности потока платежей © 29
- В.В. Жаровцев, Л.В. Комаровский. Численный расчет легкогазовой установки с неоднородным генератором пороховых газов © 34
- Г.Н. Исаков, А.И. Кустов. Моделирование временного хода температуры в припочвенном слое атмосферы © 40
- П.Н. Колтун, П.Б. Милованцев. Построение субъективно – ориентированных систем © 46
- С.Н. Колупаева, Е.В. Ерыгина, Г.А. Ковалевская. Математическое моделирование эволюции дефектной подсистемы деформируемых гетерофазных сплавов © 54
- В.И. Кондрашов. Численные решения задач хранения биологической продукции © 58
- А.И. Литвин, В.Б. Кусков. Численное моделирование турбулентных течений © 60
- М.Д. Михайлов, Н.А. Шинкин. Математическое моделирование популяций тетерева и большой синицы © 66
- Ю.Б. Нам, В.Б. Новосельцев. Об иерархии на основе эпистемических знаний © 72
- Д.Б. Овсянников, В.Б. Новосельцев. Один подход к задаче синтаксического разбора фраз естественного языка © 76
- С.Л. Павлов. Численно- аналитическое решение задачи осесимметричной теплопроводности © 80
- С.В. Панько, А.Т. Роот. О представлении решения одного класса систем с переменными коэффициентами © 84
- Н.М. Симонова. О движении твердого тела вращения в жидкости вблизи непроницаемой преграды © 88

- А.В. Старченко, Е.С. Бурлуцкий. Численный анализ газодинамики и теплообмена при турбулентном неизотермическом течении газ-инерционные частицы в трубе © 92
- С.Н. Харламов. Численный расчет турбулентного закрученного потока в коротких каналах © 99
- С.Н. Харламов. Детальное моделирование турбулентных развивающихся течений © 119
- Б.М. Шумилов. Трехдиагональные трехточечные сплайн-схемы максимальной точности приближенного решения дифференциальных уравнений второго порядка © 126

Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения

- Е.А. Бобкова, О.В. Бредихина. Интегродифференциальные уравнения Колмогорова для квазимарковских процессов с точечным дефектом © 132
- Ю.Б. Буркатовская, С.Э. Воробейчиков. Обнаружение разладки процесса авторегрессии, наблюдаемого с помехами © 141
- В.А. Вааль, Г.М. Кошкин. Интегральные непараметрические оценки функции интенсивности © 147
- Н.А. Витвинина, Т.В. Данилова. Преобразования квазимарковских процессов с точечным дефектом © 150
- Н.С. Демин. Распознавание стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений © 157
- Ю.Г. Дмитриев. Метод коррелированных процессов при наличии смещения © 163
- Ю.Г. Дмитриев. Непараметрическое условное оценивание функционалов плотности вероятности © 169
- Ю.Г. Дмитриев. Адаптивные статистики в проверке гипотез © 178
- Ю.Г. Дмитриев, С.А. Титова. Привлечение априорной информации на основе минимума верхних границ погрешностей © 185
- Ю.Г. Дмитриев, С.С. Тарима. Оценки вероятностей с учетом информации с полной группой событий © 191
- Т.В. Емельянова. Новая форма проектора в класс распределений, условно-инвариантных относительно разбиения пространства элементарных событий © 196
- И.Г. Константинова, А.Ф. Терпугов. Выделение трендов временных рядов сплайнами первого порядка, когда измерения проводятся в случайные моменты времени © 201
- G.M. Koshkin. Nonparametric Estimation in Complex Models of Life Insurance © 207
- G.M. Koshkin, V.I. Rynmkin. Mean Square Convergence of Kernel Estimates of Conditional Functionals by Weakly Dependent Observations © 215

Н.Т. Кустов, С.П. Сущенко. Об устойчивости метода случайного множественного доступа ©	221
Н.Ю. Марголис. Виртуальное время ожидания в системе M/G/N/∞ ©	227
А.А. Назаров, С.Л. Шохор. Сравнение асимптотической и допредельной модели сети связи с динамическим протоколом случайного множественного доступа ©	233
Ю.Д. Одышев. Исследование явления бистабильности в сети с протоколом “синхронная алоха” для конечного числа станции ©	242
Г.Г. Пестов. Об одной стохастической модели образования осколков ©	248
С.П. Сущенко. Аналитическая вычисляемость сумм произведения показательных и степенных функций ©	253
С.С. Тарима. О свойствах эмпирического распределения, модифицированного с учетом знания вероятностей ©	257
Е.Л. Туренова. Проверка гипотезы о соотношении интенсивностей нестационарных пуассоновских потоков ©	262
Ю.К. Устинов. О распределении Ф.Н. Алексеева ©	268
О.П. Федорова. Выявление аномалий координатно – привязанных объектов ©	270
Е.Н. Федосов. Нелинейная фильтрация интенсивности дважды стохастического пуассоновского потока событий при наличии непродливающегося мертвого времени ©	276