На правах рукописи

Радченко Ольга Васильевна

СООТНОШЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ СУПЕРМНОГООБРАЗИЙ РИМАНА И ФЕДОСОВА

01.04.02 - теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2008

Работа выполнена
в ГОУ ВПО «Томский государственный педагогический университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Лавров Петр Михайлович**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Галажинский Антон Владимирович,**
ГОУ ВПО «Томский политехнический университет»

доктор физико-математических наук,
профессор **Шаповалов Александр Васильевич,**
ГОУ ВПО «Томский государственный университет»

Ведущая организация: Объединенный институт ядерных исследований,
Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова (г. Дубна)

Защита состоится «_5_» июня 2008 г. в 14.30 часов на заседании Диссертационного совета Д 212.267.07 при ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке ГОУ ВПО «Томский государственный педагогический университет» по адресу: 634041, Томск, Комсомольский пр., 75.

Автореферат разослан «___» ____________ 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.267.07 И.В. Ивонин
доктор физ. – мат. наук, ст. науч. сотрудник

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации

Актуальность проведенного исследования определяется тем, что рассмотренные в данной диссертации супермногообразия играют принципиально важную роль в формулировках современной классической механики и современной квантовой теории поля. Изучаемые в диссертации супермногообразия определяются как супермногообразия, оснащенные всеми возможными градуированными (четными и нечетными) структурами, которые, в свою очередь, могут быть описаны с помощью симметричных и антисимметричных тензорных полей второго ранга (скобка Пуассона, антискобка, дифференциальная 2-форма, метрика), а также симметричными связностями, согласованными с заданными структурами. Это приводит к понятиям градуированных симплектических супермногообразий, градуированных метрических супермногообразий, градуированных супермногообразий Федосова и градуированных супермногообразий Римана. Так, четные симплектические супермногообразия используются при формулировках классической механики, когда, наряду с обычными четными (коммутирующими) переменными, встречаются и нечетные (антикоммутирующие) переменные. Четные супермногообразия Римана являются основой при формулировках различных теорий супергравитации. Каноническое квантование динамических систем со связями, сформулированное в произвольных координатах, апеллирует к использованию четных супермногообразий Федосова, в то время как ковариантное квантование калибровочных теорий общего вида основано на нечетных супермногообразиях Федосова.

Цель работы

Целью диссертационной работы является систематическое изучение основных свойств супермногообразий, оснащенных всеми возможными градуированными структурами, которые могут быть описаны с помощью симметричных и антисимметричных тензорных полей второго ранга (скобка Пуассона, антискобка, дифференциальная 2-форма, метрика), а также симметричными связностями, согласованными с заданными структурами на супермногообразиях.

В соответствии с поставленной целью можно выделить следующие задачи исследования:

1) исследовать форму уравнений, определяющих обратное тензорное поле к заданному невырожденному тензорному полю на супермногообразиях;

2) рассмотреть алгебраические свойства тензора кривизны, тензора Риччи и тензора скалярной кривизны на произвольных супермногообразиях Римана;

3) изучить соотношения высших порядков для произвольных супермногообразий Римана между тензором кривизны, метрическим тензором и симметричной связностью, согласованной с заданным метрическим тензором в нормальных и произвольных координатах;

4) рассмотреть алгебраические свойства тензора кривизны, тензора Риччи и скалярной кривизны на произвольных супермногообразиях Федосова;

5) изучить соотношения высших порядков для произвольных супермногообразий Федосова, существующие между тензором кривизны, тензором симплектической структуры и симметричной симплектической связностью как в нормальных, так и в произвольных координатах.

Научная новизна

Научная новизна работы обусловлена получением следующих новых результатов:

1. Доказано, что форма уравнений, определяющих обратное тензорное поле к заданному невырожденному тензорному полю на супермногообразиях зависит от определения тензорных полей.
2. Доказано, что для произвольных градуированных метрических супермногообразий, оснащенных симметричной связностью, согласованной с заданной метрической структурой, существует единственная связность.
3. Доказано, что алгебраические свойства тензора кривизны для четных и нечетных супермногообразий Римана формально совпадают друг с другом. Установлено, что в случае нечетных супермногообразий Римана тензор Риччи является антисимметричным, а тензор скалярной кривизны, вобщем случае, отличен от нуля.
4. Доказано, что для произвольных супермногообразий Римана существуют соотношения высших порядков между тензором кривизны, метрическим тензором и симметричной связностью,

согласованной с заданным метрическим тензором как в нормальных, так и в произвольных координатах и построена производящая функция этих соотношений.

5. Доказано, что алгебраические свойства тензора кривизны для четных и нечетных супермногообразий Федосова формально совпадают друг с другом. Установлено, что в случае четных супермногообразий Федосова тензор скалярной кривизны тождественно обращается в ноль, в то время как для нечетных супермногообразий Федосова этот тензор, в общем случае, отличен от нуля.
6. Показано, что супермногообразия, используемые для формулировки метода ковариантного квантования произвольных калибровочных теорий в общих координатах, можно отождествить с нечетными супермногообразиями Федосова.
7. Для супермногообразий Федосова в произвольных координатах построена производящая функция для соотношений высших порядков между тензором кривизны, тензором симплектической структуры и симметричной симплектической связностью.

Достоверность результатов

Все результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, являются достоверными, а сделанные выводы обоснованы, что подтверждается совпадением полученных результатов с известными результатами для дифференциальной геометрии на многообразиях, когда все рассматриваемые переменные являются коммутирующими.

Научная и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты, изложенные в диссертации, связаны с изучением основных объектов дифференциальной геометрии – супермногообразий, играющих решающую роль в теоретической физике, в частности, в современной теории калибровочных полей. Ценность работы состоит в установлении фундаментальных фактов, касающихся свойств тензора скалярной кривизны, для нечетных супермногообразий Федосова и Римана, в выводе соотношений высших порядков между тензором кривизны, метрическим тензором и симметричной связностью, согласованной с заданным метрическим тензором на произвольных супермногообразиях

Римана, а также соотношений высших порядков между тензором кривизны, тензором симплектической структуры и симметричной связностью, согласованной с заданной симплектической структурой на произвольных супермногообразиях Федосова. В практическом плане интересным является наблюдение, что суперматрица, обратная к невырожденной четной симметричной (антисимметричной) суперматрице, является симметричной (антисимметричной), в то время как к невырожденной нечетной симметричной (антисимметричной) матрице является антисимметричной (симметричной).

Изучение свойств супермногообразий Федосова показывает, что супермногообразия, используемые при формулировке метода ковариантного квантования произвольных калибровочных теорий в общих координатах можно отождествить с нечетными супермногообразиями Федосова.

Личный вклад

Результаты научных исследований, включенные в диссертацию, выполнены лично автором, либо при его непосредственном участии в решении рассматриваемой задачи.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука и образование» ТГПУ (Томск 2004, 2005, 2006, 2007), на международной конференции QFEXT’05 (Барселона, Испания 2005), на семинарах Токийского университета (Токио, Япония 2006), на семинарах Департамента теоретической физики Сарагосского университета (Сарагоса, Испания 2007), на международных конференциях QFT&G’05 (Томск 2005) и QFT&G’07 (Томск 2007), а также на объединенных семинарах Лаборатории фундаментальных исследований, кафедры теоретической физики и кафедры математического анализа ТГПУ. Исследования, проведенные в ходе диссертационной работы, поддержаны Президентским грантом поддержки ведущих научных школ Российской Федерации № 4489.2006.02.

Публикации

По материалам диссертационной работы опубликовано 8 работ.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 107 страниц. Список литературы включает 111 наименований.

Содержание работы

Во **введении** изложена важность исследований различных типов супермногообразий для формулировки современной теоретической физики. Здесь же дается обоснование актуальности темы диссертационной работы, сформулированы цели научного исследования, приведена структура и содержание диссертации.

Первая глава диссертации посвящена последовательному изучению тензорного исчисления на супермногообразиях. Показано, что среди возможных типов симметрий суперматриц лишь симметрии двух типов согласованы с тензорным законом преобразований. Определение тензорных полей на супермногообразиях может быть выбрано так, что этими типами суперматриц являются симметричные и антисимметричные суперматрицы. Изучены свойства симметрии обратных тензорных полей и найдено, что для невырожденного нечетного симметричного (антисимметричного) тензорного поля обратное тензорное поле является нечетным антисимметричным (симметричным), в то время как для четного симметричного (антисимметричного) тензорного поля обратное тензорное поле обладает теми же свойствами симметрии. Подробно рассмотрены скалярные структуры, которые можно ввести на супермногообразиях с помощью различных симметричных и антисимметричных тензорных полей второго ранга. Рассмотрено введение симметричной связности (ковариантной производной) на супермногообразиях и описаны основные свойства тензора кривизны.

В **первом параграфе** представлены основные идеи и элементарные конструкции алгебры и анализа с антикоммутирующими переменными. В частности, рассматриваются конкретные примеры алгебр (алгебра Грассмана, алгебра Березина), элементы которых обладают следующим свойством: $\xi_i \xi_k + \xi_k \xi_i = 0$. Вводятся понятия производной и интеграла по антикоммутирующим переменным.

Во **втором параграфе** вводится понятие супермногообразия, которое является обобщением бесконечно дифференцируемого многообразия на суперслучай.

В **третьем параграфе** дается определение тензорных полей на супермногообразиях. В простейшем случае тензорных полей второго ранга эти определения сводятся к следующим соотношениям:

$$\overline{T}^{ij} = T^{mn} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^n} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^m} (-1)^{\varepsilon_j(\varepsilon_i + \varepsilon_m)},$$

$$\overline{T}_{ij} = T_{mn} \frac{\partial_r x^n}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial_r x^m}{\partial \overline{x}^i} (-1)^{\varepsilon_j(\varepsilon_i + \varepsilon_m)},$$

$$\overline{T}^i{}_j = T^m{}_n \frac{\partial_r x^n}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^m} (-1)^{\varepsilon_j(\varepsilon_i + \varepsilon_m)},$$

определяющим законы преобразования компонент тензорного поля при переходе от одной системы локальных координат x^i на супермногообразии к некоторой другой $\overline{x}^i = \overline{x}^i(x)$. Здесь введены следующие обозначения: x^i, $\overline{x}^i = \overline{x}^i(x)$ - локальные координаты на супермногообразии в окрестности некоторой точки, а $\varepsilon(x^i) = \varepsilon(\overline{x}^i) = \varepsilon_i$ - грассмановская четность соответствующих переменных. Матрицы преобразований (матрицы Якоби) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\frac{\partial_r \overline{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial_r x^k}{\partial \overline{x}^j} = \delta^i_j, \qquad \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} = \delta^i_j, \qquad \frac{\partial_r x^i}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial_r \overline{x}^k}{\partial x^j} = \delta^i_j, \qquad \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^k} = \delta^i_j,$$

где символ $\frac{\partial_r}{\partial x^i}$ использован для обозначения правых производных.

Изучаются основные операции (умножение, свертка) над тензорными полями на супермногообразиях, обсуждаются свойства симметрии тензорных полей различных типов. В частности, показано, что из двух тензорных полей $U^{i_1 \dots i_n k}$ типа *(n+1,0)* и $V_{lj_1 \dots j_m}$ типа *(0,m+1)* с помощью операции умножения можно построить новое тензорное поле типа *(n,m)*:

$$(-1)^{\varepsilon(V)(\varepsilon_{i_1} + \dots + \varepsilon_{i_n} + \varepsilon_k) + \varepsilon_k} U^{i_1 \dots i_n k} V_{kj_1 \dots j_m} \equiv T^{i_1 \dots i_n}{}_{j_1 \dots j_m}$$

Учитывая это правило и следствия из него, обратное тензорное поле T_{ij} для невырожденного тензорного поля T^{ij} второго ранга типа (2,0) следует определять с помощью соотношений:

$$(-1)^{(\varepsilon_i+\varepsilon_k)\varepsilon(T)+\varepsilon_k} T^{ik} T_{kj} = \delta^i_j,$$

$$(-1)^{(\varepsilon_j+\varepsilon_k)\varepsilon(T)+\varepsilon_j} T_{jk} T^{ki} = \delta^i_j,$$

$$\varepsilon(T_{ij}) = \varepsilon(T^{ij}) = \varepsilon(T) + \varepsilon_i + \varepsilon_j$$

и аналогично для тензорных полей типа (0,2). Такое определение ведет к тому, что правые и левые обратные матрицы к заданной невырожденной матрице совпадают. Следует отметить, что сама форма уравнений, определяющих обратное тензорное поле, зависит от того или иного определения тензорных полей на супермногообразии – обстоятельство, которое отсутствует в тензорном анализе на многообразии.

При формулировке методов современной квантовой теории поля на супермногообразиях, большую роль играют тензорные поля, являющиеся симметричными или антисимметричными.

Изучение таких тензорных полей показывает, что для невырожденного симметричного и антисимметричного тензорных полей обратные к ним тензорные поля также обладают необходимыми свойствами симметрии. При этом в случае невырожденного симметричного четного тензорного поля обратное тензорное поле будет симметричным, в то время как в нечетном случае обратное тензорное поле будет антисимметричным и наоборот.

В **четвертом параграфе** рассматриваются аффинная связность (ковариантная производная) на супермногообразии, которая, как и в случае тензорного анализа на многообразиях, вводится как отображение ∇ с компонентами ∇_i, $\varepsilon(\nabla_i) = \varepsilon_i$ набора тензорных полей на супермногообразии самого в себя и удовлетворяющее двум требованиям: во-первых, оно должно быть тензорной операцией, действующей справа и добавляющей один нижний индекс, и, во-вторых, в том случае, когда возможно введение локальных декартовых координат, оно должно сводиться к обычной правой производной. В простейших случаях тензорных полей второго ранга различных типов это приводит к соотношениям

$$T^{ij}\nabla_k = T^{ij}{}_{,k} + T^{il}\Gamma^j{}_{lk}(-1)^{\varepsilon_l(\varepsilon_j+1)} + T^{lj}\Gamma^i{}_{lk}(-1)^{\varepsilon_i\varepsilon_j+\varepsilon_l(\varepsilon_i+\varepsilon_j+1)},$$

$$T_{ij}\nabla_k = T_{ij,k} - T_{il}\Gamma^l{}_{jk} - T_{lj}\Gamma^l{}_{ik}(-1)^{\varepsilon_i\varepsilon_j+\varepsilon_l\varepsilon_j},$$

$$T^i{}_j\nabla_k = T^i{}_{j,k} - T^i{}_l\Gamma^l{}_{jk} + T^l{}_j\Gamma^i{}_{lk}(-1)^{\varepsilon_i\varepsilon_j+\varepsilon_l(\varepsilon_i+\varepsilon_j+1)},$$

где - $\Gamma^i{}_{jk}$ компоненты симметричной связности.

В **пятом параграфе** вводится понятие тензора кривизны на супермногообразии, изучаются его свойства, которые, в силу того, что тензор кривизны определяется только заданием связности, справедливы для супермногообразий любых типов, оснащенных симметричной связностью.

Во **второй главе** диссертации изучаются супермногообразия, оснащенные двумя структурами: градуированной метрикой и симметричной связностью, которая согласована с заданной метрической структурой, т.е. четные и нечетные супермногообразия Римана. Показано, что основные свойства и соотношения, которым удовлетворяет тензор кривизны в четном и нечетном случаях, выглядят формально одинаково. Различия проявляются на уровне свойств тензора Риччи. Что, в свою очередь, обеспечивает нетривиальность тензора скалярной кривизны в общем случае. Также изучены соотношения высших порядков между аффинными расширениями тензора кривизны, метрического тензора и симметричной связности и найдены производящие функции этих соотношений в произвольных координатах.

В **первом параграфе** вводится понятие супермногообразия Римана (M, g, Δ), которое определяется как метрическое супермногообразие *M*, оснащенное (четной или нечетной) симметричной связностью Δ, согласованной с заданной невырожденной метрической структурой *g*. Изучается тензор кривизны

$$R_{ijkl} = g_{in} R^n{}_{jkl},$$

где $g_{ij} = (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j} g_{ji}$, $\varepsilon(g_{ij}) = \varepsilon(g) = \varepsilon_i + \varepsilon_j$, $\varepsilon(R_{ijkl}) = \varepsilon(g) + \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k + \varepsilon_l$,

и устанавливаются следующие свойства симметрии этого тензора:

$$R_{ijkl} = -(-1)^{\varepsilon_k \varepsilon_l} R_{ijlk}, \quad R_{ijkl} = -(-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j} R_{jikl}, \quad R_{ijkl} = (-1)^{(\varepsilon_i + \varepsilon_j)(\varepsilon_k + \varepsilon_l)} R_{klij}$$

на четных и нечетных супермногообразиях Римана.

Тензор Риччи определяется соотношением

$$R_{ij} = R^k{}_{ikj} (-1)^{\varepsilon_k(\varepsilon_i + 1)} = g^{kn} R_{nikj} (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_k + (\varepsilon_k + \varepsilon_n)(\varepsilon(g)+1)},$$

где $\varepsilon(R_{ij}) = \varepsilon_i + \varepsilon_j$, ,

g^{ij} - тензор обратный тензору g_{ij} со свойствами симметрии:

$$g^{ij} = (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j + \varepsilon(g)} g^{ji}$$

и доказывается, что свойства симметрии тензора Риччи

$$R_{ij} = (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j + \varepsilon(g)} R_{ji}$$

в четном и нечетном случаях противоположны: в четном случае этот тензор симметричен, в нечетном – антисимметричен.

Устанавливается, что тензор скалярной кривизны

$$R = g^{ji} R_{ij} (-1)^{\varepsilon_i + \varepsilon_j}, \ \varepsilon(R) = \varepsilon(g),$$

для произвольных градуированных супермногообразий Римана, в общем случае, отличен от нуля.

Во **втором параграфе** доказывается, что, как и в обычной геометрии Римана, на римановом супермногообразии существует единственная симметричная связность Δ, согласованная с заданной четной или нечетной метрической структурой g, то есть

$$\Delta^l_{ki} = \frac{1}{2} g^{lj} (g_{ij,k} (-1)^{\varepsilon_k \varepsilon_i} + g_{jk,i} (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j} - g_{ki,j} (-1)^{\varepsilon_k \varepsilon_j}) \times (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j + \varepsilon_j + \varepsilon(g)(\varepsilon_l + \varepsilon_j)}.$$

В **третьем параграфе** доказывается, что для произвольных супермногообразий Римана существуют соотношения высших порядков (до третьего порядка включительно) между аффинными расширениями метрического тензора, тензора кривизны и симметричной связности в нормальных координатах.

В **четвертом параграфе** строятся производящие функции для соотношений, выражающих связь аффинных расширений связности и метрической структуры через тензор кривизны и его аффинные расширения в произвольных координатах на супермногообразии Римана:

$$\Phi_{ijkl} = \Delta_{ijk,l} - \frac{1}{3} X_{ijkl} + \frac{1}{3} [R_{ijkl} + R_{ikjl} (-1)^{\varepsilon_j \varepsilon_k}] = 0,$$

$$F_{ijkl} = g_{ij,kl} - \frac{1}{3} (X_{ijkl} - X_{jikl} (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j}) - \frac{1}{3} [R_{ikjl} (-1)^{\varepsilon_j \varepsilon_k} + R_{jkil} (-1)^{\varepsilon_i (\varepsilon_j + \varepsilon_k)}] = 0,$$

где

$$\begin{aligned} X_{ijkl} = {} & \Delta_{ijk,l} + \Delta_{ijl,k} (-1)^{\varepsilon_k \varepsilon_l} + \Delta_{ikl,j} (-1)^{\varepsilon_j (\varepsilon_k + \varepsilon_l)} + \\ & + 2 \Delta_{njk} \Delta^n_{il} (-1)^{(\varepsilon_k + \varepsilon_j)(\varepsilon_i + \varepsilon_n)} - \Delta_{njl} \Delta^n_{ik} (-1)^{(\varepsilon_j + \varepsilon_l)(\varepsilon_i + \varepsilon_n) + \varepsilon_k \varepsilon_l} - \\ & - \Delta_{nkl} \Delta^n_{ij} (-1)^{(\varepsilon_k + \varepsilon_l)(\varepsilon_i + \varepsilon_n + \varepsilon_j)}. \end{aligned}$$

Сами соотношения высших порядков возникают как коэффициенты разложения этих функций в ряд Тейлора.

В **третьей главе диссертации** рассматриваются супермногообразия, оснащенные градуированной дифференциальной невырожденной замкнутой 2-формой (симплектической структурой) и симметричной связностью, согласованной с заданной симплектической структурой, то есть четные и нечетные супермногообразия Федосова.

Показано, что четные супермногообразия Федосова совпадают с невырожденными супермногообразиями Пуассона, оснащенными симметричной связностью, а нечетные супермногообразия Федосова эквивалентны заданию, так называемых, антисимплектических супермногообразий с симметричной связностью, то есть супермногообразий, оснащенных невырожденной антискобкой и симметричной связностью, согласованной с этой структурой. Показано, что основные свойства и соотношения, которым удовлетворяет тензор кривизны в четном и нечетном случаях, выглядят формально одинаково. Тензор Риччи является симметричным для четных супермногообразий Федосова, а для нечетных – не обладает какими-либо специальными свойствами симметрии. Тензор скалярной кривизны для четных супермногообразий Федосова тождественно равен нулю, а для нечетных супермногообразий Федосова, в общем случае, отличен от нуля. Изучены соотношения высших порядков между аффинными расширениями тензора кривизны, тензора симплектической структуры и симметричной связности и найдены производящие функции этих соотношений в произвольных координатах.

В **первом параграфе** дается определение супермногообразия Федосова (M,ω,Γ), как симплектического супермногообразия M, оснащенного симметричной связностью Γ, которая согласована с симплектической структурой ω. Обсуждаются основные скалярные структуры на супермногообразиях и доказывается тот факт, что в четном случае существует взаимно-однозначное соответствие между невырожденным пуассоновским супермногообразием и четным симплектическим супермногообразием. Изучается симплектический тензор кривизны

$$R_{ijkl} = \omega_{in} R^{n}{}_{jkl}, \quad \varepsilon(R_{ijkl}) = \varepsilon(\omega) + \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k + \varepsilon_l$$

и устанавливаются следующие его свойства симметрии:

$$R_{ijkl} = -(-1)^{\varepsilon_k \varepsilon_l} R_{ijlk}, \qquad R_{ijkl} = (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j} R_{jikl}$$

на четных и нечетных супермногобразиях Федосова.

Тензор Риччи определяется из соотношения

$$K_{ij} = R^{k}{}_{ikj} (-1)^{\varepsilon_k(\varepsilon_i + 1)} = \omega^{kn} R_{nikj} (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_k + (\varepsilon_k + \varepsilon_n)(\varepsilon(\omega)+1)},$$

где $\varepsilon(K_{ij}) = \varepsilon_i + \varepsilon_j$,

ω^{ij} - тензор обратный тензору ω_{ij} со свойствами симметрии:

$$\omega^{ij} = -(-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j + \varepsilon(\omega)} \omega^{ji}$$

и доказывается свойство симметрии тензора Риччи для четных супермногобразий Федосова

$$K_{ij} = (-1)^{\varepsilon_i\varepsilon_j} K_{ji} .$$

Устанавливается, что тензор скалярной кривизны

$$K = \omega^{ji} K_{ij} (-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_j}, \quad \varepsilon(K) = \varepsilon(\omega)$$

$$[1+(-1)^{\varepsilon(\omega)}]K = 0 ,$$

как и в случае обычных супермногообразий Федосова, для четной симплектической связности равен нулю, однако для нечетных супермногообразий Федосова этот тензор, в общем случае, отличен от нуля.

Во **втором параграфе** обсуждаются свойства симплектической связности. Показано, что в общем случае, замкнутость 2-формы ω и ее согласованность со связностью $\omega\nabla = 0$ (или в координатном базисе $\omega_{ij,k} - \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}(-1)^{\varepsilon_i\varepsilon_j} = 0$) не ведут к ограничениям на свойства симметрии Γ_{ijk}, и существует достаточно широкий произвол в выборе связности для заданной симплектической структуры.

В **третьем параграфе** выводятся соотношения высших порядков между аффинными расширениями тензора симплектической структуры, симплектического тензора кривизны и связности в нормальных координатах на произвольном супермногообразии Федосова. Показано, что, начиная с соотношений третьего порядка, возникает нелинейная зависимость аффинных расширений симплектической связности от тензора кривизны и не существует новых тождеств, содержащих аффинные расширения тензора симплектической структуры, симплектического тензора кривизны и связности.

В **четвертом параграфе** в произвольных координатах построены производящие функции для соотношений, выражающих связь аффинных расширений симплектической связности и симплектической структуры через симплектическрий тензор кривизны и его аффинные расширения. Формально, вид этих функций совпадает с производящими функциями в случае супермногообразий Римана. Сами соотношения высших порядков возникают как коэффициенты разложения этих функций в ряд Тейлора.

В **заключении** сформулированы основные результаты, полученные в ходе диссертационной работы.

Результаты, выносимые на защиту:

1. Доказано, что форма уравнений, определяющих обратное тензорное поле к заданному невырожденному тензорному полю на супермногообразиях зависит от определения тензорных полей. Если для обычных матриц существует единственное представление в виде суммы симметричной и антисимметричной матриц, то для суперматриц, среди которых возможны восемь типов симметрии, такой единственности представления не существует. Однако для тензорных полей на супермногообразиях восстанавливается указанная единственность представления в виде суммы тензорных полей противоположных симметрий. Суперматрица, обратная к невырожденной четной симметричной (антисимметричной) суперматрице, является симметричной (антисимметричной), в то время как к невырожденной нечетной симметричной (антисимметричной) матрице является антисимметричной (симметричной).
2. Доказано, что для произвольных градуированных метрических (то есть, четных или нечетных) супермногообразий, оснащенных симметричной связностью, согласованной с заданной метрической структурой, существует единственная связность, аналогично ситуации с геометрией Римана на многообразиях. Доказано, что алгебраические свойства тензора кривизны для четных и нечетных супермногообразий Римана формально совпадают друг с другом. Тензор Риччи симметричен для четных супермногообразий Римана и антисимметричен для нечетных супермногообразий Римана. Это, в свою очередь, приводит к тому, что тензор скалярной кривизны для четных и нечетных супермногообразий Римана, в общем случае, отличен от нуля.
3. Доказано, что для произвольных супермногообразий Римана существуют соотношения высших порядков между тензором кривизны, метрическим тензором и симметричной связностью, согласованной с заданным метрическим тензором как в нормальных координатах, так и в произвольных. И построена производящая функция этих соотношений.
4. Доказано, что алгебраические свойства тензора кривизны для четных и нечетных супермногообразий Федосова формально совпадают друг с другом. Показано, что тензор Риччи для четных

супермногообразий Федосова симметричен, а в случае нечетных супермногообразий Федосова является тензором общего положения. В свою очередь, тензор скалярной кривизны для четных супермногообразий Федосова тождественно обращается в ноль, а для нечетных супермногообразий Федосова, в общем случае, отличен от нуля. Показано, что супермногообразия, используемые для формулировки метода ковариантного квантования произвольных калибровочных теорий в общих координатах, можно отождествить с нечетными супермногообразиями Федосова.

5. Изучены соотношения высших порядков для произвольных супермногообразий Федосова, существующие между тензором кривизны, тензором симплектической структуры и симметричной симплектической связностью, как в нормальных координатах, так и в произвольных. В произвольных координатах построена производящая функция для соотношений высших порядков.

Основное содержание и результаты исследования отражены в 8 публикациях автора:

Материалы, опубликованные в научных журналах, утвержденных ВАК РФ:

1. On higher order relations in Fedosov supermanifolds [Text] / P.M. Lavrov, O.V. Radchenko // Journal of Physics A: Mathematical and General. -2006. - V. 39. - P. 6501-6508. – ISSN 0305-4470. (0,5 п.л.; авт. 50%).
2. Супермногообразия Федосова [Текст] / П.М. Лавров, О.В. Радченко // Теоретическая и математическая физика.-2006.-Т.149.-№2.- С.202-227. - ISSN 0564-6162. (1,3 п.л.; авт. 50 %).
3. Нечетные симплектические геометрии на супермногообразиях [Текст] / П.М. Лавров, О.В. Радченко // Известия ВУЗов. Физика. - 2008. - Т.51. - №.2 - С.52-57. - ISSN 0021-3411. (0,4 п.л.; авт. 50 %).

Материалы, опубликованные в научных журналах:

4. Symplectic geometries on supermanifolds [Text] / P.M. Lavrov, O. V. Radchenko // International Journal of Modern Physics A. - 2008. - V.23. - P.1337 - 1350. - ISSN 0217-751. (0,6 п.л.; авт. 50%).

Научные труды и материалы выступлений на конференциях:

5. Радченко, О.В. Свойства тензора кривизны на произвольных федосовских супермногообразиях [Текст] / О.В. Радченко // VIII Всероссийская конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука и образование» (19-23 апреля 2004): Материалы конференции: В 6 томах Т.1. Ч.1: Естественные и точные науки. - Томск: Изд-во ТГПУ. - 2004. - С.57-61. (0,3 п.л.).
6. Радченко, О.В. Супермногообразия Федосова: соотношения высших порядков [Текст] / О.В. Радченко // IX Всероссийская конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука и образование» (25-29 апреля 2005): Материалы конференции: В 6 томах Т.1. Ч.1: Естественные и точные науки. - Томск: Изд-во ТГПУ. - 2005. - С.103-106. (0,2 п.л.).
7. Радченко, О.В. О соотношениях высших порядков для Федосовских супермногообразий [Текст] / О.В. Радченко // X Всероссийская конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука и образование» (15-19 мая 2006): Материалы конференции: В 6 томах Т.1. Ч.2: Естественные и точные науки. - Томск: Изд-во ТГПУ. - 2006. - С.216-220. (0,3 п.л.).
8. Радченко, О.В. Соотношения высших порядков в римановой геометрии [Текст] / О.В. Радченко // XI Всероссийская конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука и образование» (16-20 апреля 2007): Материалы конференции: В 6 томах Т.1. Ч.1: Естественные и точные науки. - Томск: Изд-во ТГПУ. - 2007. - С.46-51. (0,3 п.л.).