на правах рукописи

ТЮМЕНЦЕВ ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ СИТТЕРА

Специальность: 01.04.02 - теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Омск - 2006

Работа выполнена в Омском государственном университете

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент Клишевич Владимир Владимирович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Багров Владислав Гаврилович

кандидат физико-математических наук, Михеев Виталий Викторович

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: ГОУ ВПО Казанский государственный университет им. Ульянова-Ленина

Защита состоится "27" декабря 2006 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета К 212.179.02 в Омском государственном университете по адресу: 644077, г. Омск, Омский государственный университет, ул. Нефтезаводская 11, каб.210.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Омского государственного университета.

Автореферат разослан "____"____________ 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических
наук, доцент Вершинин Г.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В современных исследованиях по математической и теоретической физике выделяют две основные задачи из многих других не менее важных. Это получение точных решений уравнений математической физики и вместе с тем разработка наиболее общих методов для их точного решения. К настоящему времени известно множество точных результатов по многим уравнениям квантовой физики таких как уравнение Шредингера, Рариты-Швингера, Дирака. Многие уравнения обобщаются на более широкие классы задач и становятся тем самым сложнее. Например, уравнение Дирака для плоского пространства было обобщено на произвольное риманово пространство, при этом не существовало каких-либо общих алгоритмов его аналитического решения. С некоторыми точными решениями можно ознакомиться в [16]

Вопросы получения точного решения физического уравнения напрямую связаны с понятием его интегрируемости. Настоящая работа посвящена вопросам интегрирования уравнения Дирака в плоском пространстве и пространстве де Ситтера. Мы строим новый класс точных решений уравнения Дирака в 4-мерном пространстве де Ситтера. В случае произвольного риманова пространства общая теория уравнения Дирака сформулирована в работах Тетрода [14], Фока [7] и Вейля [15], дальнейшее развитие теория получила в работах Шаповалова [19], Картера, МакЛенагана и Спиндела [5],[10]. Определение уравнения Дирака в пространстве де Ситтера в рамках теории групп было дано Ханнабусом [9]. Множество работ, посвященных нахождению решений уравнения Дирака в пространстве де Ситтера, базируются на методе разделения переменных. В работе Шишкина [12] методом разделения переменных построен класс точных решений уравнения Дирака в пространстве де Ситтера. В основе этой статьи лежит критерий разделяемости переменных в уравнении Дирака для диагональных метрик, доказанный в работе [1]. Одно точное решение уравнения Дирака в связи с задачей о термоэмиссии спиновых частиц в пространстве де Ситтера построено в [11]. Отметим, что для разделения переменных в уравнении Дирака нет общепринятого определения. Одно из определений полного разделения переменных дано в работе Шаповалова [20]. Согласно этому определению провести процедуру разделения можно только при наличии у дифференциального уравнения коммутативной алгебры симметрии. По-видимому, провести корректно процедуру разделения переменных в уравнении Дирака возможно только в так называемых Штеккелевых пространствах. В этом направлении большая работа проделана группой Багрова [2],[3].

Наш подход принципиально отличается от метода разделения переменных. Мы используем теорию некоммутативного интегрирования, развитую в работе Шаповалова и Широкова [21]. В этом методе за основу берется некоммутативная алгебра симметрии. При некоторых дополнительных условиях на алгебру дифференциальное уравнение (систему) в частных производных можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению, которое, как правило, интегрируется в квадратурах. Интересно, что для уравнения Дирака в пространстве де Ситтера такие некоммутативные алгебры существуют и их довольно много, в то время как коммутативных алгебр, необходимых для разделения переменных нет (а в плоском пространстве такие коммутативные алгебры есть). Отсутствие коммутативных алгебр служит причиной того, что во многих работах по точным решениям уравнения Дирака в пространстве де Ситтера приводят только узкие классы решений. Без наличия полного коммутативного набора операторов симметрии невозможно построить полный базис решений с помощью метода разделения переменных. Это, конечно, не снижает роли частных решений, которые могут иметь важный физический смысл.

Цели диссертационной работы

1) Решение уравнений для векторных и тензорных полей Яно и Яно-Киллинга в плоском пространстве и пространстве де Ситтера;

2) Изучение алгебры операторов симметрии уравнения Дирака в этих пространствах;

3) Исследование вопроса построения интегрируемых моделей уравнения Дирака в этих пространствах в рамках метода некоммутативного интегрирования;

4) Построение точных решений в этих пространствах и спектра уравнения Дирака в пространстве де Ситтера.

5) Исследование построения точных решений уравнения Дирака в модели асимптотически плоского пространства, которое склеено из пространства де Ситтера и плоского.

Научная новизна результатов.

В диссертации получены следующие оригинальные результаты:

1. Найдены все решения уравнений на поля Яно и Яно-Киллинга в плоском пространстве и пространстве де Ситтера; показано, что число решений одинаково и равно 25 (вместе с решениями уравнений Киллинга).

2. По найденным полям Яно и Яно-Киллинга построены алгебры операторов симметрии первого порядка уравнения Дирака в плоском пространстве и пространстве де Ситтера, изучена структура этой алгебры. В полной алгебре симметрии операторов первого порядка выделены 11-мерные квадратичные стандартно-эквивалентные подалгебры (вид операторов симметрии одинаковый).

3. В общей 11-мерной алгебре симметрии уравнения Дирака в плоском пространстве и пространстве де Ситтера найдены 4 алгебры Ли с функционально-независимыми образующими, которые удовлетворяют условиям теоремы о некоммутативном интегрировании.

4. С помощью указанных подалгебр уравнение Дирака проинтегрировано методом некоммутативного интегрирования в плоском пространстве и в пространстве де Ситтера одновременно. Построенный класс точных решений уравнения Дирака является новым. Одна из особенностей этого класса решений состоит в том, что его нельзя получить методом разделения переменных. Определен спектр уравнения Дирака в случае отрицательной кривизны (пространство анти де Ситтера).

5. Рассмотрена модель асимптотически плоского пространства, которое склеено из пространства де Ситтера и плоского. С помощью найденных базисов решений уравнения Дирака в плоском пространстве и пространстве де Ситтера, предложена схема нахождения решений в рассмотренном асимптотически плоском пространстве.

Научная и практическая ценность работы

Результаты диссертации представляют интерес для специалистов в области квантовой электродинамики, квантовой теории поля, классической и квантовой гравитации, космологии, точных решений дифференциальных уравнений

Основные положения диссертации, выносимые на защиту

1. Впервые найдено полное число решений уравнений на поля Яно и Яно-Киллинга в плоском пространстве и пространстве де Ситтера.

2. Впервые изучены алгебры операторов симметрии уравнения Дирака в этих пространствах. Исследован вопрос построения интегрируемых моделей уравнения Дирака в этих пространствах в рамках метода некоммутативного интегрирования; из общей 11-мерной квадратичной алгебры симметрии выделены подалгебры Ли, удовлетворяющие условиям теоремы о некоммутативной интегрируемости.

3. Впервые пронтегрировано уравнение Дирака в плоском пространстве и пространстве де Ситтера методом некоммутативного интегрирования с помощью одной и той же алгебры операторов симметрии. Осуществлено нахождение нового класса точных решений.

4. Впервые для уравнения Дирака предложена модель асимптотически плоского пространства, которое склеено из плоского пространства и пространства де Ситтера, предложена методика построения точных решений в таком пространстве

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались и обсуждались на Всероссийской научной конференции «Под знаком σ» (ОНЦ СО РАН, Омск 2003), на семинаре кафедры теоретической физики Омского государственного университета, на семинаре кафедры теории относительности и гравитации Казанского государственного университета. Основные результаты работы опубликованы в 7 статьях.

Структура и объем диссертации.

Диссертация объемом 100 страниц печатного текста состоит состоит из введения, четырех глав, заключения, 4 приложений и списка цитируемой литературы.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель работы и представлена ее научная новизна.

Первая глава носит обзорный характер. В пунктах 1,2 этой главы изложена кратко понятия риманова пространства и оператора симметрии. В пунктах 3,4 приведены определения уравнения Дирака в римановом пространстве, его операторы симметрии. Уравнение Дирака в некоторой системе координат имеет вид

$$D\Psi = \gamma^k P_k \Psi = m\Psi, \tag{1}$$

где $\gamma_k = \gamma_k(x)$ – зависящие от координат матрицы Дирака, $P_k = \mathrm{i}(\nabla_k + \Gamma_k)$ – оператор обобщенного импульса, символы Γ_i обычно называют коэффициентами Фока-Иваненко [17],[18].

Общий вид операторов симметрии для уравнения Дирака получен в работе Шаповалова В.Н.[19] и независимо в работах Картера, МакЛенагана и Спиндела [5, 10]. Оператор симметрии первого порядка для уравнения Дирака представляет собой линейную комбинацию трех независимых операторов следующего вида:

$$Y = \widehat{E}_4 \xi^k P_k - \frac{\mathrm{i}}{4}\gamma^{kl}\xi_{k;l} \quad (2)$$

$$L = \overset{\star}{\widehat{\gamma}}_j f^{kj} P_k + \frac{\mathrm{i}}{3}\gamma_j \tilde{f}^{kj}_{;k}, \quad (3)$$

$$J = 2\gamma\gamma^{lk} f_k P_l + \frac{3\,\mathrm{i}}{4}\gamma f^k_{;k} \quad (4)$$

Здесь $\gamma^{kl} = \frac{1}{2}[\gamma^k, \gamma^l]$, $\gamma = -\frac{1}{4!}e_{klij}\gamma^k\gamma^l\gamma^i\gamma^j$, $\overset{\star}{\widehat{\gamma}}_j = -\frac{1}{3!}e_{jkli}\gamma^k\gamma^l\gamma^i$, $\tilde{f}_{ij} = \frac{1}{2}e_{ijkl}f^{kl}$ – дуальный тензор к f^{ij}, $e_{ijkl} = \sqrt{|\det(g_{mn})|}\varepsilon_{ijkl}$ – полностью антисимметричный тензор ($\varepsilon_{1234} = 1$).

Вторая глава посвящена изложению методов интегрирования систем дифференциальных уравнений в частных производных. Изложены методы интегрирования, которые наиболее популярны на данный момент – это метод полного разделения переменных и метод некоммутативного интегрирования. В данной работе мы используем только метод некоммутативного интегрирования.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$H(x, \partial x)\Psi(x) = 0 \quad (5)$$

Определение 1 *Будем говорить, что система (5) интегрируема, если построение базиса его решений может быть сведено к квадратурам и интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения.*

Пусть уравнение (5) допускает (в общем случае некоммутативную) алгебру симметрий Λ. Алгебра Λ порождается операторами X_i — линейными дифференциальными операторами

1-го порядка:

$$[X_i, H] = 0, \quad [X_i, X_j] = c^l_{ij} X_l, \quad i, j, l = 1, ..., dim\ \Lambda. \qquad (6)$$

Как показано Шаповаловым А.В. и Широковым И.В. [21], *необходимым и достаточным* условием интегрируемости уравнения (5) в смысле определения 1 является выполнение равенства

$$dim\ \Lambda + ind\ \Lambda = 2(n-1) \qquad (7)$$

где n — размерность пространства, $ind\ \Lambda$ — индекс алгебры Λ, для его вычисления используется формула

$$ind\ \Lambda = dim\ \Lambda - \sup_{\xi \in \Lambda^\star} rank\ f(c^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma), \qquad (8)$$

здесь $\Lambda^\star$ – означает дуальное пространство для Λ, линейный функционал f (ковектор) действует на векторы по формуле $f(X_k) = f_k \in K$ – числовое поле, над которым задана алгебра симметрии.

В важном для нас случае размерности пространства $n = 4$, формула (7) переписывается в виде

$$dim\ \Lambda + ind\ \Lambda = 6. \qquad (9)$$

В случае выполнения условия (9) точное решение уравнения (5) находится из системы уравнений

$$X_i \Psi_J(x, \lambda) = \ell_i(J, \lambda, \partial_\lambda) \Psi_J(x, \lambda) \qquad (10)$$

где ℓ_i — дифференциальные операторы первого порядка, задающие λ — представление алгебры Λ.

Это λ представление есть результат квантования линейной скобки Пуассона на коалгебре Λ^* в канонических координатах Дарбу [22].

Для решения уравнения (5) нужно решить систему

$$Y_i(x, \partial_x)\Psi_J(x, \lambda) = \ell_i(\lambda, J, \partial_\lambda)\Psi_J(x, \lambda). \qquad (11)$$

Эта система решается методом характеристик. Ее решение в общем случае имеет следующий вид:

$$\Psi_J(x, \lambda) = R(x, \lambda, J)\phi_J(u_1, ..., u_{m'}), \qquad (12)$$

где $R(x, \lambda, J)$ – функция определяемая системой (11),$\phi_J(u_1, ..., u_{m'})$ – произвольная функция переменных (u) и параметров (J), $u_\alpha = u_\alpha(x, \lambda, J)$ – характеристики системы (11), т.е. $[Y_i - \ell_i, u_\alpha] = 0, \ \alpha = 1, ..., m'$. Подставив (12) в исходное уравнение (5) получим редуцированное уравнение (13) на функцию $\phi_J(u)$ с независимыми переменными $u = u_1, ..., u_{m'}$

$$H(u, \partial_u, \lambda)\phi_J(u) = 0 \qquad (13)$$

$m' = m - \frac{1}{2}(dim\ L + ind\ L) = 4 - 3 = 1$. Т.е. получается обыкновенное дифференциальное уравнение на функцию $\phi_J(u)$. Полученное ОДУ сводим к квадратурам

В нашем случае показано, что уравнение Дирака в плоском пространстве с метрикой $\eta = diag(+1, -1, -1, -1)$ и пространстве де Ситтера с метрикой

$$\begin{aligned} g_{ij} = \frac{\varepsilon_i}{\Theta^2}\delta_{ij}, \Theta = 1 + \frac{K}{4}r^2, \\ r^2 = x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} - x^{4^2} \end{aligned}, \qquad (14)$$

$$(15)$$

можно проинтегрировать методом некоммутативного интегрирования, причем, в некотором смысле, одновременно. Оказалось, что для проведении редукции уравнения Дирака в плоском пространстве

$$D_F\Psi = \left(\widehat{\gamma}^1 \partial_{x^1} + \widehat{\gamma}^2 \partial_{x^2} + \widehat{\gamma}^3 \partial_{x^3} + \widehat{\gamma}^4 \partial_{x^4}\right)\Psi = m\Psi \qquad (16)$$

и в пространстве де Ситтера

$$\begin{array}{l} D_S\Psi = \left(\Theta\left(\widehat{\gamma}^{\,1}\,\partial_{x^1} + \widehat{\gamma}^{\,2}\,\partial_{x^2} + \widehat{\gamma}^{\,3}\,\partial_{x^3} + \widehat{\gamma}^{\,4}\,\partial_{x^4}\right) - \right. \\ \left. -\frac{3\,K}{4}\left(x^1\,\widehat{\gamma}^{\,1} - x^2\,\widehat{\gamma}^{\,2} - x^3\,\widehat{\gamma}^{\,3} - x^4\,\widehat{\gamma}^{\,4}\right)\Psi = m\Psi \right. \end{array} \tag{17}$$

в обоих случаях решается общая система из 4-х уравнений вида

$$\begin{array}{ccc} X_i(x,\partial_x)\Psi_J(x,\lambda) & = & \ell_i(\lambda,J,\partial_\lambda)\Psi_J(x,\lambda),\ i=1,..,4, \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_F\Psi_J(x,\lambda) = m\Psi_J(x,\lambda) & & D_S\Psi_J(x,\lambda) = m\Psi_J(x,\lambda). \end{array} \tag{18}$$

Третья глава посвящена исследованию алгебраической структуры уравнения Дирака в плоском пространстве и в пространстве де Ситтера произвольной сигнатуры, а именно: вычисление явного вида операторов симметрии, вычисление коммутационных соотношений, и поиск подалгебр, удовлетворяющих теореме о некоммутативной редукции.

Для построения алгебры операторов симметрии необходимо выбрать тетраду и найти решения на поля Яно и Яно-Киллинга в заданном пространстве. Показано, что число решений в плоском пространстве и в пространстве де Ситтера совладает и равно – по 10 тензоров Яно-Киллинга, по 5 векторов Яно. Всего по 25 векторных и тензорных полей, включая 10 векторов Киллинга.

В алгебре операторов симметрии первого порядка для уравнения Дирака существует одна специальная алгебраическая структура. Эта структура представляет собой ассоциативную алгебру, которая не является алгеброй Ли. В нашем случае коммутаторы операторов симметрии выражаются через себя полиномиально, более точно

$$[L_i, L_j] = \sum_{k,l=1}^{n} C_{ij}^{kl} L_k L_l + \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k} L_k \tag{19}$$

В литературе такие объекты называются W-алгебрами [8, 6]. Некоторая классификация W-алгебр дана в работе [4], полной классификации, по-видимому, не существует. Поскольку в правой части (19) стоит полином второго порядка, мы называем такую алгебру квадратичной. Рассмотренная нами W-алгебра содержит линейные подалгебры Ли. Вся алгебра операторов симметрии $\Lambda = \{Y_1, ..., U_1, ..., U_4, L_1, ..., L_4, M_1, ..., M_6, J_0, N_1, ..., N_4\}$ является квадратичной в смысле определения формулы (19).

Лемма 1 *В алгебре Λ существуют 4 подалгебры Ли Λ_i, для которых выполнены условия некоммутативного интегрирования*

$$\dim \Lambda_i + \operatorname{ind} \Lambda_i = 6. \tag{20}$$

Доказательство. Сводится к поиску всех линейных подалгебр в алгебре Λ и проверке условия (20). Эти подалгебры следующие

$$\begin{aligned} &\Lambda_1 = \{Y_1, Y_2, Y_4, J_0\}, \quad \Lambda_2 = \{Y_1, Y_3, Y_5, J_0\}, \\ &\Lambda_3 = \{Y_2, Y_3, Y_6, J_0\}, \quad \Lambda_4 = \{Y_4, Y_5, Y_6, J_0\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Элементы в подалгебрах Λ_i функционально независимы. □

Отметим, что в алгебре Λ существуют еще 4 подалгебры с условием (20). В них входят операторы из квадратичного расширения. Эти подалгебры следующие

$$\begin{aligned} &\Lambda_5 = \{Y_1, Y_2, Y_4, L_1\}, \quad \Lambda_6 = \{Y_1, Y_3, Y_5, L_2\}, \\ &\Lambda_7 = \{Y_2, Y_3, Y_6, L_3\}, \quad \Lambda_8 = \{Y_4, Y_5, Y_6, L_4\}. \end{aligned} \tag{22}$$

В алгебрах Λ_5 – Λ_8 существуют функциональные соотношения вида

$$\begin{aligned} &L_1^2 = -Y_1^2 - Y_2^2 + Y_4^2 + \tfrac{1}{4}, \quad L_2^2 = -Y_1^2 - Y_3^2 + Y_5^2 + \tfrac{1}{4}, \\ &L_3^2 = -Y_2^2 - Y_3^2 + Y_6^2 + \tfrac{1}{4}, \quad L_4^2 = -Y_4^2 - Y_5^2 - Y_6^2 + \tfrac{1}{4}. \end{aligned} \tag{23}$$

и, строго говоря, мы не можем использовать такие алгебры для интегрирования. Подалгебры Λ_5 – Λ_8 можно использовать для построения класса решений, однако условие полноты базиса решений будет нарушено.

Четвертая глава посвящена построению точно интегрируемых моделей уравнения для Дирака в плоском пространстве и в пространстве де Ситтера произвольной сигнатуры. Интегрируемая модель задается алгеброй Ли операторов симметрии, с помощью которой проводится процедура некоммутативного интегрирования. Сформулируем схему действий

1. Берем подалгебру, удовлетворяющую условию теоремы о некоммутативной интегрируемости: например, подалгебра $\Lambda^{(2)} = \{Y_1, Y_3, Y_5, J_0\} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$;

2. Находим λ – представление $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4\}$ этой подалгебры (элементы являются линейными дифференциальными операторами 1-го порядка) из условия
$$[\ell_i, \ell_j] = -c_{ij}^k \ell_k, \tag{24}$$
где c_{ij}^k – структурные константы подалгебры $\Lambda^{(2)}$ и проверяем условия невырожденности для оператора Казимира: $K_p(\ell) \equiv \omega_p \cdot 1, \det(\partial\omega_p/\partial J_p) \neq 0$.

3. Интегрирование уравнения Дирака сводится к решению системы
$$X_i(x, \partial_x)\Psi_J(x, \lambda) = \ell_i(\lambda, J, \partial_\lambda)\Psi_J(x, \lambda), \ i = 1, .., 4, \tag{25}$$
$$D\Psi_J(x, \lambda) = m\Psi_J(x, \lambda). \tag{26}$$

4. Сначала решаем систему (25) методом характеристик. Решение этой системы имеет вид
$$\Psi_J(x, \lambda) = R(x, \lambda, J)\, F(u(x, \lambda, J)) \tag{27}$$

Здесь $R(x,\lambda,J)$ – некоторая функция от координат и параметров λ, J, $F(u(x,\lambda,J))$ – спинор, зависящий только от одной переменной-функции $u(x,\lambda,J)$.

5. Подставляем решение (27) в уравнение Дирака (26) и получаем ОДУ на неизвестный спинор $F(u(x,\lambda,J))$.

6. Сводим ОДУ к квадратурам, т.е. строим точные решения

В плоском пространстве рассмотрены две модели – подалгебры: $\{Y_4, Y_5, Y_6, X_4 = \partial_{x^1}\}$ и $\{Y_4, Y_5, Y_6, J_0\}$. Интегрирование с помощью подалгебры $\{Y_4, Y_5, Y_6, X_4 = \partial_{x^1}\}$ дает точные решения, у которых спинор зависит от переменной $r_3^2 = \varepsilon_2 {x^2}^2 + \varepsilon_3 {x^3}^2 + \varepsilon_4 {x^4}^2$

$$f_{J_1 J_2}(r_3) = \begin{pmatrix} Z_1(r_3) \\ Z_2(r_3) \\ Z_3(r_3) \\ Z_4(r_3) \end{pmatrix} \tag{28}$$

и две компоненты имеют вид

$$Z_1(r_3) \ = \ r_3^{-1/2 J_1 - 1/2}[A J_{|J_1|}(\kappa\sqrt{r_3}) + B Y_{|J_1|}(\kappa\sqrt{r_3})] \tag{29}$$

$$Z_3(r_3) \ = \ r_3^{-1/2 J_1 - 1/2}[C J_{|J_1|}(\kappa\sqrt{r_3}) + D Y_{|J_1|}(\kappa\sqrt{r_3})] \tag{30}$$

$\kappa = \sqrt{m^2 + J_2^2}$, A, B, C, D – константы интегрирования. Параметр J_2 по смыслу есть энергия частицы, J_1 связан с моментом импульса. В модели $\{Y_4, Y_5, Y_6, J_0\}$, где J_0 – спинорный оператор, для безмассовой частицы выявлена 4-сферическая симметрия уравнения Дирака.

В пространстве де Ситтера – выбираем подалгебру $\{Y_4, Y_5, Y_6, J_0\}$ для некоммутативной редукции. Этот случай редукции аналогичен для уравнения Дирака в плоском с этой же подалгеброй. Волновая функция в 4-сферической системе координат разделилась на угловую и радиальную часть:

$\Psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3, r) = A(\phi_1, \phi_2, \phi_3)F(r)$, где $r = \varepsilon_1 x^{1^2} + \varepsilon_2 x^{2^2} + \varepsilon_3 x^{3^2} + \varepsilon_4 x^{4^2}$. На радиальный спинор получается система ОДУ

$$\Theta \frac{d}{dr} F_{j_1 j_2}(r) - \left(\mathrm{i} \frac{2 j_1 j_2 \overset{*}{\widehat{\gamma}}{}^1 + (j_1^2 + j_2^2) \widehat{\gamma}}{j_1^2 - j_2^2} m + j_2 \frac{\Theta}{r} \widehat{\gamma}^1 + \frac{3}{2} \frac{\Theta - 2}{r} \right) F_{j_1 j_2}(r) = 0. \qquad (31)$$

Вычисления не зависят от сигнатуры. Накладывая ограничения на волновую функцию, обычные для квантовомеханической задачи, такие как ограниченность, однозначность, квадратичная интегрируемость определяем спектр частицы в пространстве постоянной кривизны. При $r \to 0$ ограниченные решения возможны, если

$$\frac{m}{\sqrt{-K}} = \pm j_2 - \left(n + \frac{1}{2} \right), \ n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (32)$$

$$|j_2| > \frac{3}{2}. \qquad (33)$$

Из этой формулы видно, что действительный спектр возможен только отрицательной кривизне $K < 0$.

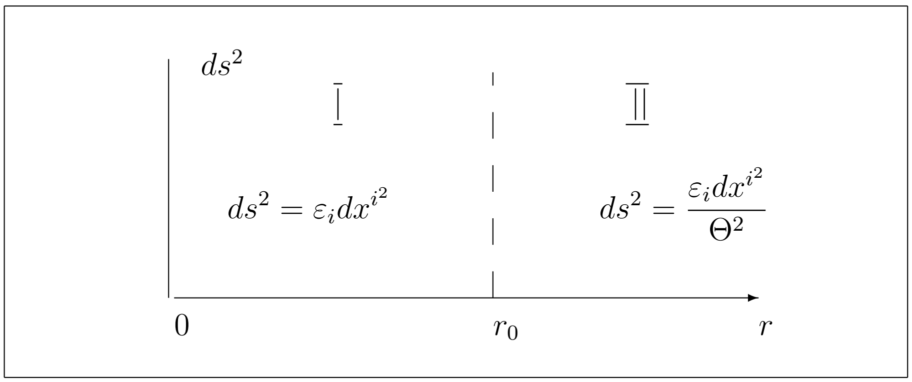
И, окончательно, учитывая двузначность квадратного корня и необходимое согласование с непрерывным спектром в плоском пространстве (при $K = 0$) , найдем спектр уравнения Дирака в пространстве анти де Ситтера:

$$m = m_0 \pm \sqrt{-K} \left(n + \frac{1}{2} \right), \ n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (34)$$

$$m = -m_0 \pm \sqrt{-K} \left(n + \frac{1}{2} \right), \ n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (35)$$

Этот спектр подробно обсуждается в параграфе 4.4 диссертации. Как приложение построена точная модель асимптотически плоского пространства – "склеивание"обоих пространств в некоторой области $r = r_0 = const$. В данной модели известны точные волновые функции для обоих пространств, их угловые части абсолютно идентичны, поэтому здесь задача сводится, фактически, к условиям сшивки радиальных компонент волновых функций на границе r_0. Зададим метрику следующим образом

$$ds^2 = \begin{cases} \varepsilon_1 dx^{1^2} + \varepsilon_2 dx^{2^2} + \varepsilon_3 dx^{3^2} + \varepsilon_4 dx^{4^2}, & r \leqslant r_0, \ \text{domain I} \\ (\varepsilon_1 dx^{1^2} + \varepsilon_2 dx^{2^2} + \varepsilon_3 dx^{3^2} + \varepsilon_4 dx^{4^2})/\Theta^2, & r > r_0, \ \text{domain II} \end{cases}. \tag{36}$$



В областях I и II оператор Дирака разный, однако, алгебра симметрии для уравнения Дирака одинакова. Сделаем сшивку радиальных спиноров в точке r_0. Для этого нужно рассмотреть систему

$$\begin{aligned} F_{j_1 j_2}(r;K)|_{r=r_0} &= F_{j_1 j_2}(r)|_{r=r_0}, \\ \frac{d}{dr}F_{j_1 j_2}(r;K)|_{r=r_0} &= \frac{d}{dr}F_{j_1 j_2}(r)|_{r=r_0}. \end{aligned} \tag{37}$$

Система (37) на компоненты спинора, вообще говоря, переопределена, однако, при частных значениях параметров j_1, j_2 имеет решение. При выполнении системы (37) мы будем иметь аналитическое решение уравнения Дирака в метрике (36).

В заключении подведены итоги и сформулированы выводы диссертации

Список работ автора

[1] Klishevich V. V., Tyumentsev A. V. On the solution of the Dirac equation in the de Sitter space // Class. Quantum Grav. 2005. V.22. №17. P.4263-4277

[2] Клишевич В. В., Тюменцев В. А. Векторное поле Яно и тензорное поле Яно-Киллинга в плоском пространстве и пространстве де Ситтера // Вестник Омского университета. 2000. №3. С.20-21

[3] Клишевич В. В, Тюменцев В А. Об алгебре симметрии уравнения Дирака в плоском пространстве и пространстве де Ситтера // Известия вузов. Физика. 2001. №8. С.52-58

[4] Клишевич В. В., Тюменцев В А. Некоммутативное интегрирование уравнения Дирака в плоском пространстве и в пространстве де Ситтера // Известия вузов. Физика. 2003. №9. С.49-53

[5] Тюменцев В. А. Некоммутативное интегрирование в плоском пространстве и в пространстве де Ситтера уравнения Дирака // Материалы Всероссийской научной молодежной конференции «Под знаком σ». Омск. 2003. С.17

[6] Тюменцев В. А. О решениях уравнений Яно и Яно-Киллинга в пространстве де Ситтера // Вестник Омского университета. 2003. №3. С.24-26

[7] Тюменцев В. А. Полнота алгебры операторов симметрии уравнения Дирака в пространстве де Ситтера и функциональные соотношения между операторами // Математические структуры и моделирование. 2004. №6. С.1-7

Список цитируемой литературы

[1] Andrushkevich I. E., Shishkin G. V. Criteria Of separability Of the variables in the Dirac-equation in gravitational fields// Theor. Math. Phys. 1987. V.70. N2. P.204-214.

[2] Bagrov V. G., Shapovalov A. V., Yevseyevich A. A. Separation of variables in the Dirac equation in Stackel spaces // Class. Quantum Grav. 1990. №7. P.517-531

[3] Bagrov V. G., Shapovalov A. V., Yevseyevich A. A. Separation of variables in the Dirac equation in Stackel spaces: II External gauge fields // Class. Quantum Grav. 1991. N8. P.163-173

[4] Bajnok Z., Nogradi D. Geometry of W-algebras from the affine Lie algebra point of view // J. Phys. A: Math. Gen. 2001. V.34. №23. P.4811-4829.

[5] Carter B., McLenaghan R G. Generalized total angular momentum operator for the Dirac equation in curved space-time // Phys. Rev. D. 1979. V.19. P.1093-1097

[6] de Boer J., Harmsze F., Tjin T. Nonlinear finite W symmetries and applications in elementary system(Preprint hep-th/9503161) // Phys. Rept., 1996, V.272, P.139–214

[7] Fock V. A. Z. Phys. 1929. V.57. P.261

[8] Gelfand I. M., Dikii L. A. Fractional powers of operators and Hamiltonian systems // Funkt. Anal. Pril. 1976. V. 10. №4. P. 13-29 (in Russian; English translation: Funct. Anal. Appl. 1976. V.10. P.259-273.)

[9] Hannabuss K C. The Dirac equation in de Sitter space // J. Phys. A:Gen. Phys. 1969. V.2. P.274-277

[10] McLenaghan R. G., Spindel P. H. Phys. Rev. D 1979. V.20. P.409

[11] Otchik V. S. On the Hawking radiation of spin-1/2 particles in the de Sitter spacetime // Class. Quantum Grav. 1985. V.2. P.539-543

[12] Shishkin G. V. Some exact solutions of the Dirac equation in gravitational fields // Class. Quantum Grav. - 1991. - 8. 175-185

[13] Stepanov S. E. The Killing–Yano tensor // Theor. Math. Phys. 2003. V.134. №3. P.333–338

[14] Tetrode H. Z. Phys. 1928. V.50. P.336.

[15] Weyl H. Z. Phys. 1929. V.56. P.330.

[16] Багров В. Г., Гитман Д. М., Тернов И. М., Халилов В. Р., Шаповалов В. Н. Точные решения релятивистских волновых уравнений // Новосибирск: Наука. - 1982.

[17] Гальцов Д. В. Частицы и поля в окрестности черных дыр // М:МГУ. - 1986

[18] Мицкевич Н. В. Физические поля в общей теории относительности // М: Наука. - 1969.

[19] Шаповалов В. Н. Симметрия уравнения Дирака-Фока // Известия вузов. Физика. 1975. N6. C.57-63

[20] Шаповалов В. Н. Пространства Штеккеля // Сибирский математический журнал. 1979. Т.20. №5. C.1117-1130

[21] Шаповалов А. В., Широков И. В. Некоммутативное интегрирование линейных дифференциальных уравнений // ТМФ. 1995. Т.104. №2. C.195-213

[22] Широков И. В. Координаты Дарбу на K-орбитах и спектры операторов Казимира на группах Ли // ТМФ. 2000. Т.123. №3. С.407.