Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

готовимся к экзаменам

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Томск-2002

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Основан в 1878 г.

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Томск – 2002

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Рассмотрено и утверждено методической комиссией механико-математического факультета.
Протокол : от 16 мая 2002 года № 10.
Председатель комиссии: доцент ММФ Г.Г.Пестов

Составитель: кандидат физ.-мат. наук , доцент Соколов Б.В.

Данное пособие посвящено задачам с параметрами, На примерах продемонстрированы основные методы решения типовых задач с параметрами. Приводятся задачи для самостоятельного решения, большая часть из которых предлагалась на письменных вступительных экзаменах по математике в Томском государственном университете в 1997-2002 гг. на следующие факультеты: прикладной математики и кибернетики, информатики, механико-математический и экономический. Ко всем задачам даны ответы.

Пособие предназначено для школьников старших классов, абитуриентов, учителей математики.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Задачи с параметрами

Задачи с параметрами давно вошли в практику вступительных экзаменов по математике ведущих учебных заведений. Это во многом обусловлено тем, что задачи с параметрами позволяют в полной мере проверить знание основных разделов школьной математики, выяснить уровень математического и логического мышления, первоначальные навыки исследовательской деятельности, а главное, перспективные возможности успешного овладения курсом математики данного вуза. Для того, чтобы справиться с ними, абитуриенту необходимо приобрести определенный опыт их решения, повысить уровень логической культуры. Решение такого рода задач является необходимым условием получения отличной оценки, что особенно важно в условиях высокого конкурса.

I. Что такое параметр?

В задачах с параметрами наряду с неизвестными или переменными величинами ($x, y, z, \ldots$) встречаются величины, называемые ***параметрами*** ($a, b, c, \ldots$) ,численные значения которых хотя и не указаны конкретно, но считаются известными и заданными на некотором числовом множестве. При этом важно отметить, что каждое значение параметра определяет относительно неизвестного соответствующее уравнение (неравенство, систему). Другими словами, уравнение с параметром является фактически семейством уравнений, рассматриваемых при фиксированном значении параметра.

К задачам с параметрами, изучаемым в школе, можно отнести, например, поиск решений линейных ($ax + b = 0$) и квадратных ($ax^2 + bx + c = 0$) уравнений в общем виде, исследование их количества в зависимости от параметров.

II. Каковы основные типы задач с параметрами?

На вступительных экзаменах встречаются, в основном, следующие типы задач с параметрами.

Тип 1. Для каждого значения параметра или для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству, найти все решения некоторого уравнения или неравенства.

Тип 2. Найти все значения параметра, при каждом из которых множество решений данного уравнения или неравенства удовлетворяет заданным условиям .

Например, найти все значения параметра, при каждом из которых:

1) уравнение выполняется для любого значения переменной из заданного промежутка;

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

2) множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго уравнения и т.д.

Тип 3. Определить количество решений данного уравнения или неравенства в зависимости от значений параметра.

Тип 4. Найти все значения параметра, при каждом из которых данное уравнение или неравенство имеет заданное число решений (в частности, не имеет или имеет бесконечное множество решений).

III. Что означает «решить задачу с параметром»?

Естественно, это зависит от вопроса в задаче. Если, например, требуется решить уравнение, то это означает: для каждого из возможных значений параметра записать решения уравнения. Если требуется найти все значения параметра, при каждом из которых множество решений данного уравнения или неравенства удовлетворяет некоторым условиям, то в ответе к таким задачам должны быть перечислены все указанные значения параметра.

Решением уравнения для данного фиксированного значения параметра называется такое значение неизвестной, при подстановке которого в уравнение последнее обращается в верное числовое равенство. Аналогично определяется решение неравенства с параметром.

Решить уравнение или неравенство с параметром — это значит для каждого допустимого значения параметра (т.е. такого значения параметра, при котором имеют смысл левая и правая части уравнения или неравенства) указать множество всех решений данного уравнения (неравенства).

IV. Каковы основные методы решения задач с параметрами?

Метод I (Аналитический). Этот метод заключается в применении стандартных алгоритмов решения уравнений (неравенств). Но при этом надо учитывать, что одного знания этих алгоритмов недостаточно для решения задач с параметрами, поскольку решение таких задач всегда содержит перебор и исследование возможных ситуаций. Так, например, деление на выражение, содержащее параметр или извлечение квадратного корня из подобных выражений требуют предварительных исследований.

***Метод II* (Геометрический).** В некоторых задачах с параметрами использование геометрических интерпретаций иногда оказывается очень эффективным. Например, если изобразить графики функций, входящих в левые и правые части рассматриваемых уравнений, то точки пересечения графиков будут соответствовать решениям уравнения, а число точек пересечения — числу решений данного уравнения.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Этот метод удобно применять, когда уравнение, неравенство, их система или совокупность отвечают простым геометрическим образам, т.е. задают на координатной плоскости прямые (полуплоскости), окружности (круги или их внешности), параболы, гиперболы и т.п.

Метод III (Решение относительно параметра). При решении многих задач с параметрами на параметр можно взглянуть как на равноправную переменную и рассматривать уравнения или неравенства не только относительно одной из своих неизвестных, но и относительно параметра. Этот метод удобно применять :

1) если выражение имеет высокую степень, как многочлен относительно переменной x, и одновременно является линейным или квадратным выражением относительно параметра;

2) если формулировка задачи подсказывает, что переменную по смыслу задачи удобно считать параметром, а параметр — считать переменной;

3) если геометрическое место точек, определяемое заданным в условии уравнением или неравенством, удается изобразить на координатной плоскости «переменная – параметр».

Теперь перейдем к решению задач с параметрами указанными методами.

Задача 1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x+1| = ax$ не имеет решений.

Решение 1. Сначала для каждого значения параметра a решим данное уравнение, после чего выберем те значения параметра, при которых уравнение решений не имеет.

На основании определения модуля заключаем, что исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1 = ax \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 < 0 \\ -(x+1) = ax \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -1 \\ (a-1)x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1 \\ (a+1)x = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая система имеет одно решение $x = \dfrac{1}{a-1}$ при $\dfrac{1}{a-1} \geq -1$, т.е. при $a \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ и не имеет решений при остальных значениях параметра. Вторая система имеет одно решение $x = -\dfrac{1}{a-1}$, если $-\dfrac{1}{a-1} < -1$, т.е. при $a \in (-1, 0)$ и не имеет решений при остальных

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

значениях параметра.

Объединяя решения систем, имеем: данное уравнение имеет одно решение $x=\frac{1}{a-1}$, если $a\in(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup(1,+\infty)$; два решения $x=\frac{1}{a-1}$ и $x=-\frac{1}{a-1}$ при $a\in(-1,0)$. Анализируя полученный ответ, находим те значения параметра a, при которых уравнение не имеет решений.

Ответ: $a\in(0,1]$.

Решение 2. Рассмотрим графики функций $y=|x+1|$ и $y=ax$ (рис.1). График первой функции представляет собой неподвижный «уголок» с вершиной в точке $(-1;0)$; график второй функции — семейство прямых, проходящих через начало координат. При возрастании параметра a прямая $y=ax$ поворачивается против часовой стрелки вокруг начала координат. Тогда искомые значения параметра a соответствуют тем прямым из указанного семейства, которые не пересекают график функции $y=|x+1|$.

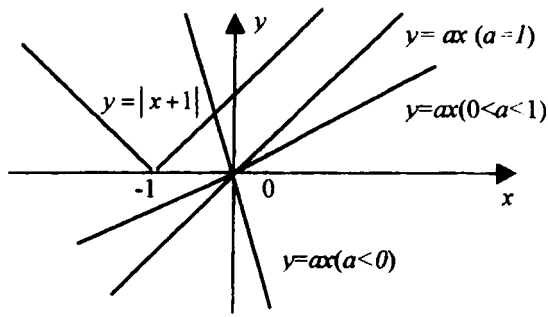


Рис.1

Легко видеть, что этим свойством обладают все прямые с угловым коэффициентом $0<a\le 1$.

Ответ: $a\in(0,1]$.

Решение 3. Так как $x=0$ не является корнем уравнения ни при каком значении параметра a, то разрешим уравнение относительно a: $a=\frac{|x+1|}{x}$.

График $y=\frac{|x+1|}{x}$ «склеивается» из двух гипербол $y=1+\frac{1}{x}$,

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

при $x \geq -1$ и $y = -1 - \frac{1}{x}$, при $x < -1$ (рис.2).

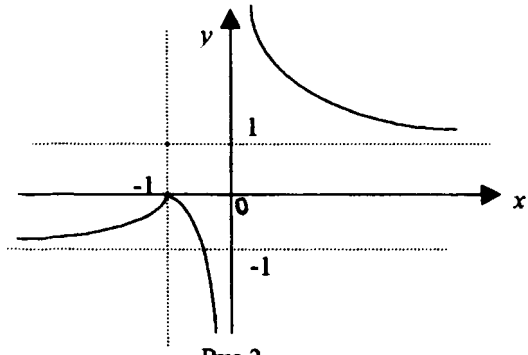


Рис.2

Прямая $y = a$ не пересекает кривую $y = \frac{|x+1|}{x}$ при $0 < a \leq 1$; пересекает один раз при $a \leq -1$, $a = 0$ и $a > 1$; пересекает два раза при $-1 < a < 0$. Так как, количество точек пересечений данных линий определяет число решений исходного уравнения в зависимости от параметра a, то мы опять имеем тот же самый ответ: $a \in (0,1]$.

Задача 2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $(a - x^2)(a + x - 2) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 1$.

Решение 1. Переформулируем задачу в позитивной форме (т.е. без отрицаний):требуется найти все значения a, при каждом из которых для любого $x \in [-1,1]$ справедливо неравенство

$$(a - x^2)(a + x - 2) \geq 0 \qquad (*)$$

Заметим, что если $x \in [-1,1]$, то $x^2 \leq 2 - x$, поскольку $0 \leq x^2 \leq 1$, $1 \leq 2 - x \leq 3$.

Изобразим для произвольного $x \in [-1,1]$ на оси параметра a множество значений a, для которых выполняется неравенство (*) (см.рис.3): числовая ось a, из которой удален интервал $(x^2, 2 - x) \subset (0,3)$.

Удалив из оси a указанные интервалы для всех $x \in [-1,1]$, мы получим множество допустимых значений a. Если $x = 0$, то требуется удалить интервал $(0;2)$; если $x = -1$, то будет удален интервал $(1;3)$.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Удалив их оба, мы удалим интервал $(0,3)$, который включает все

Рис. 3.

удаляемые интервалы.

Ответ: $(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$.

Решение 2. Графики уравнений $a=x^2$ и $a=2-x$ разбивают координатную плоскость $(x;a)$ на четыре области. «Методом областей» устанавливаем, что решением неравенства $(a-x^2)(a+x-2)<0$ будут заштрихованные области (рис. 4).

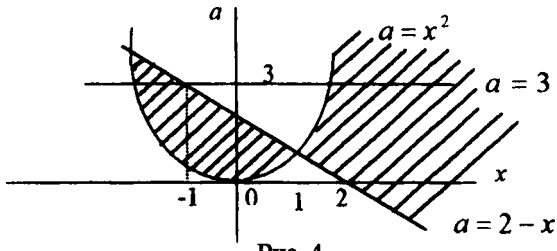


Рис. 4

Теперь, если при каком-то фиксированном значении a_0 прямая $a=a_0$ в пересечении с полученными областями содержит только лишь точки, абсциссы которых удовлетворяют условию $|x|>1$, то a_0 —одно из искомых значений параметра. Отсюда приходим к выводу, что в данной задаче

Ответ: $a\in(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$.

Задача 3. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$(a+2)x^3-(1+2a)x^2-6x+a^2+4a-5>0$$

хотя бы при одном значении параметра a, принадлежащем промежутку $[-2,1]$.

Решение. Перепишем неравенство по степеням параметра a:

$$a^2+(x^3-2x^2+4)a+(2x^3-x^2-6x-5)>0.$$

Переформулируем задачу: найти необходимые и достаточные условия, при выполнении которых квадратный трехчлен $f(a)=a^2+pa+q$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

положителен хотя бы в одной точке отрезка $[-2,1]$. Ясно, что для этого достаточно выполнения совокупности условий:

$$\left[\begin{array}{l} f(-2)>0 \\ f(1)>0 \end{array}\right. \qquad (*)$$

Если же $\begin{cases} f(-2)\le 0 \\ f(1)\le 0 \end{cases}$, то $f(a)\le 0$ для всех $a\in[-2,1]$, поэтому условия (*) являются и необходимыми.

$$\left[\begin{array}{l} f(-2)=3x^2-6x-9>0 \\ f(1)=3x^3-3x^2-6x>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3(x+1)(x-3)>0 \\ x(x+1)(x-2)>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty) \\ x\in(-1,0)\cup(2,+\infty) \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(2,+\infty)$.

Задача 4. Найти все значения параметра *a*, при которых система

$$\begin{cases} x^2+2x+a\le 0 \\ x^2-4x-6a\le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Перепишем исходную систему в таком виде:

$$\begin{cases} a\le -x^2-2x \\ a\ge \dfrac{x^2-4x}{6} \end{cases}$$

Все решения этой системы (пары вида $(x;a)$) образуют область, ограниченную двумя параболами (рис. 5). Требование единственности реше-

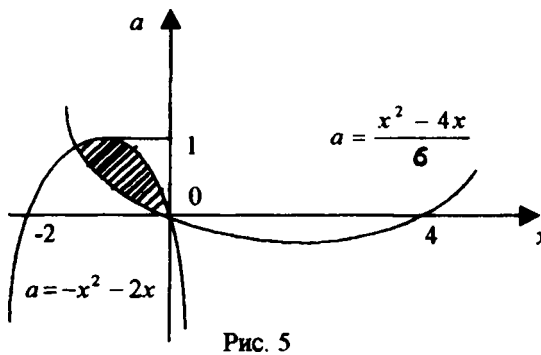


Рис. 5

ния данной системы на геометрический язык переводится так: горизонтальные прямые должны иметь с полученной областью только одну общую точку. Легко видеть, что лишь прямые $a=0$ и $a=1$ удовлетворяют этому требованию.

Ответ: $\{0;1\}$.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Задача 5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$3-|x-a|>x^2$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Решение. Представим данное неравенство в виде: $|x-a|<3-x^2$. Правая часть этого неравенства задает параболу, левая — «уголок», вершина которого двигается по оси абсцисс (рис.6).

Исходное неравенство имеет отрицательное решение, если найдется такое отрицательное значение переменной x, для которого соответствующая точка параболы расположена выше точки на «уголке». Рассмотрим два случая расположения «уголка» с вершинами в точках $(a_1,0)$ и $(a_2,0)$. : Значение a_1 соответствует касанию «уголка» с параболой и может быть найдено из условия, когда уравнение $x-a=3-x^2$ имеет единственное решение: $D=1+4(a+3)=0 \Leftrightarrow a=-\frac{13}{4}$. Значение a_2 соответствует прохождению прямой $y=a-x$ через вершину параболы —точку $(0,3)$, т.е. $a_2=3$. Легко видеть, что отрицательные решения будут существовать только тогда, когда абсцисса вершины «уголка» $a\in(a_1,a_2)$.

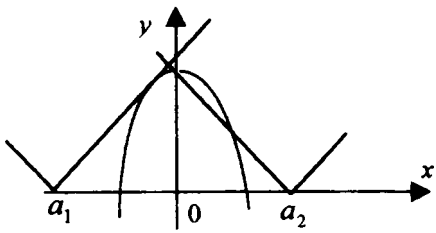


Рис.6

Ответ: $\left(-\frac{13}{4},3\right)$.

Задача 6. Решить неравенство $\log_{\frac{x^2+a^2}{2}} x \ge 1$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \frac{x^2+a^2}{2}<1 \\ x>0 \\ x\le\frac{x^2+a^2}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x^2+a^2}{2}>1 \\ x\ge\frac{x^2+a^2}{2} \end{cases}$$

Отсюда

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\begin{cases} x^2 + a^2 < 2 \\ x > 0 \\ (x-1)^2 + a^2 \geq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + a^2 > 2 \\ (x-1)^2 + a^2 \leq 1 \end{cases}.$$

На координатной плоскости $(x;a)$ первая система задает множество точек первого и четвертого координатных углов, одновременно лежащих внутри круга с центром $(0;0)$ и радиуса $\sqrt{2}$ и вне круга с центром $(1;0)$ и радиуса 1. Вторая система — множество точек, одновременно лежащих вне первого круга, но находящихся во втором. Тогда все решения исходного неравенства изображаются так, как показано на рис. 7.

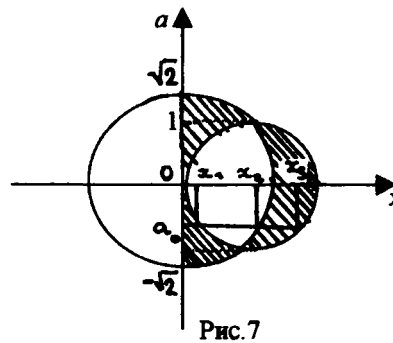


Рис.7

Заметим, что , например, прямая $a = a_0$ (см. рисунок) пересекает окружности в точках с абсциссами $x_1 = 1 - \sqrt{1-a^2}$, $x_2 = \sqrt{2-a^2}$, $x_3 = 1 + \sqrt{1-a^2}$. Теперь, учитывая все допустимые значения параметра a, записываем ответ.

Ответ: Если $1 \leq a < \sqrt{2}$, то $x \in \left(0; \sqrt{2-a^2}\right)$; если $|a| < 1$, то $x \in \left(0, 1-\sqrt{1-a^2}\right] \cup \left(\sqrt{2-a^2}, 1+\sqrt{1-a^2}\right]$; если $|a| \geq 2$, то $x \in \varnothing$.

Задача 7. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

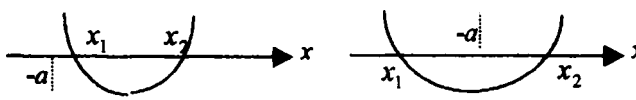
$$\sqrt{6x - x^2} = x + a$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение 1. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x + a \geq 0 \\ 6x - x^2 = x^2 + 2xa + a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -a \\ 2x^2 + (2a-6)x + a^2 = 0 \end{cases}$$

Изобразим случаи расположения параболы, которые удовлетворяют условию задачи.



Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Запишем аналитические условия, соответствующие этим случаям

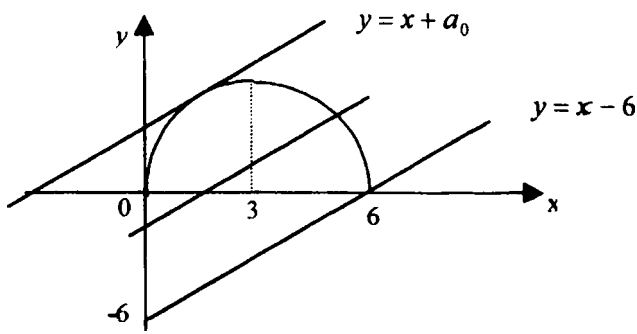
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{D}{4}=(a-3)^2-2a^2\ge 0\\ x_0=-\dfrac{(2a-6)}{4}\ge -a\\ f(-a)=2(-a)^2+(2a-6)(-a)+a^2\ge 0\end{cases}\\ f(-a)=2(-a)^2+(2a-6)(-a)+a^2\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3-3\sqrt{2}\le a\le -3+3\sqrt{2}\\ a\ge -3\\ a\le -6; a\ge 0\end{cases}\\ -6\le a\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3-3\sqrt{2}\le a\le -3+3\sqrt{2}\\ a\ge 0\end{cases}\\ -6\le a\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\le a\le -3+3\sqrt{2}\\ -6\le a\le 0\end{array}\right..$$

Ответ: $\left[-6\ ;-3+3\sqrt{2}\right]$.

Решение 2. Построим графики функций $y=x+a$ и $y=\sqrt{6x-x^2}$. Заметим, что

$$y=\sqrt{6x-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases}y\ge 0\\ y^2=6x-x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y\ge 0\\ y^2+(x-3)^2=9\end{cases}.$$



Следовательно, графиком функции $y=\sqrt{6x-x^2}$ является верхняя половина окружности радиуса 3 и с центром в точке $(3;0)$.

Из графиков видно, что данное уравнение имеет решение при $a\in[-6,a_0]$, где $a_0>0$ соответствует касанию окружности и прямой $y=x+a_0$ (при этих и только этих значениях a графики пересекаются).

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Критическое значение $a_0 > 0$ соответствует единственности решения уравнения $\sqrt{6x - x^2} = x + a_0$. Это означает, что дискриминант квадратного уравнения $6x - x^2 = (x + a_0)^2$ равен нулю:

$$\begin{cases} a_0 > 0 \\ (a_0 - 3)^2 - 2a_0^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a_0 = -3 + 3\sqrt{2}.$$

(Отметим, что значение a_0 можно найти также с помощью производной).

Ответ: $\left[-6\,; -3 + 3\sqrt{2}\right]$.

Решение многих задач с параметрами основано на знаниях о свойствах квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$. Например, если для данного уравнения (неравенства) можно сделать такую замену переменной, чтобы оно превратилось в квадратное уравнение (неравенство), то тогда решение такой задачи строится по следующей схеме: анализируя свойства сделанной замены, формулируем новую задачу с параметром для полученного уравнения (неравенства), которая решается стандартными методами.

Задача 8. Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых множество значений функции $y = 8 \cdot 2^{\frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1}} - 1$ принадлежит промежутку $[0; 127]$ для всех значений *x*.

Решение. По условию задачи имеем $0 \le 8 \cdot 2^{\frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1}} - 1 \le 127$. Отсюда

$$-3 \le \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} \le 4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x^2 - x(a + 4) + 6 \ge 0 \\ 4x^2 + x(a - 3) + 1 \ge 0 \end{cases}.$$

Квадратные трехчлены, стоящие в левых частях неравенств системы, должны быть неотрицательны при всех *x*. Поскольку их старшие коэффициенты положительны, то достаточно потребовать, чтобы их дискриминанты D_1 и D_2 были неположительны:

$$\begin{cases} D_1 = (a + 4)^2 - 72 \le 0 \\ D_2 = (a - 3)^2 - 16 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 8a - 56 \le 0 \\ a^2 - 6a - 7 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le a \le -4 + 6\sqrt{2}.$$

Ответ: $\left[-1; -4 + 6\sqrt{2}\right]$.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Задача 9. Найти все значения параметра a, при каждом их которых все решения уравнения $(a-1)x^2-(a+1)x+a=0$ удовлетворяют условию $0<x<3$.

Решение. Обозначим $f(x)=(a-1)x^2-(a+1)x+a$. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы уравнение $f(x)=0$ $(a\neq 1)$ имело все свои корни внутри отрезка $[0;\ 3]$, будет выполнение системы неравенств (проверьте самостоятельно):

$$\begin{cases} D\geq 0 \\ (a-1)f(0)>0 \\ (a-1)f(3)>0 \\ 0<x_0=\dfrac{a+1}{2(a-1)}<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a^2+6a+1\geq 0 \\ (a-1)a>0 \\ (a-1)(7a-12)>0 \\ 0<\dfrac{a+1}{2(a-1)}<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}\leq a\leq \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3} \\ \left[\begin{array}{l} a>\dfrac{12}{7} \\ a<-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{7}<a\leq\frac{3+2\sqrt{3}}{3}.$$

Остается рассмотреть случай $a=1$.

Ответ: $\left(\dfrac{12}{7};\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]\cup\{1\}$.

Задача 10. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-4)\cdot 4^x+(a+1)\cdot 2^x+2a-1=0$ не имеет решений.

Решение. Сделаем замену $y=2^x$, $y>0$. Тогда получаем уравнение $(a-4)y^2+(a+1)y+2a-1=0$. Естественно в первую очередь рассмотреть случай, когда $a=4$. В этом случае полученное уравнение имеет корень $y=-\dfrac{7}{5}<0$. Следовательно, $a=4$ входит в ответ. Если $a\neq 4$, то имеем квадратное уравнение. Теперь важно рассмотреть все случаи, которые обеспечат отсутствие корней у исходного уравнения: а) квадратное уравнение не имеет корней; б) оба корня отрицательны; в) оба корня равны нулю; г) один корень равен нулю, а другой —отрицательный.

Для случая а) имеем $D=(a+1)^2-4(a-4)(2a-1)<0$. Отсюда $a<\dfrac{3}{7}$ или $a>5$.

Для выполнения случая б) применим теорему Виета:

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\begin{cases} D=(a+1)^2-4(a-4)(2a-1)\geq 0 \\ \dfrac{a+1}{a-4}>0 \\ \dfrac{2a-1}{a-4}>0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 4<a\leq 5$$

Случай в), очевидно, не выполняется ни при одном a.

Для случая г) подставив $y=0$, получим $a=\frac{1}{2}$; наоборот, если $a=\frac{1}{2}$, то рассматриваемое уравнение имеет один нулевой корень и один положительный, что по условию замены нам не подходит. Объединяя все результаты, имеем

Ответ: $\left(-\infty,\frac{3}{7}\right)\cup[4,+\infty)$.

Задача 11. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $2-2\cos 2x=3a+4\sin x$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Если применить формулу косинуса двойного угла и сделать замену $t=\sin x$, $t\in[-1,1]$, то исходное уравнение можно переписать в виде $f(t)=4t^2-4t-3a=0$.

Тогда исходная задача сводится к следующей: «Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$4t^2-4t-3a=0$$

имеет хотя бы одно решение на промежутке $t\in[-1,1]$».

График функции $f(t)$ — парабола с вершиной в точке $t_0=\frac{1}{2}$.

Для того, чтобы только один из корней уравнения $f(t)=0$ находился на промежутке $[-1;1]$ необходимо и достаточно выполнения условия $f(-1)\cdot f(1)\leq 0$:

$$f(-1)\cdot f(1)\leq 0 \;\Leftrightarrow\; (3a-8)\cdot 3a\leq 0 \;\Leftrightarrow\; 0\leq a\leq\frac{8}{3}.$$

Для того, чтобы на промежутке $[-1;1]$ находились оба корня уравнения $f(t)=0$ необходимо и достаточно выполнения системы неравенств:

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\begin{cases} D \ge 0 \\ f(-1) \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \\ -1 \le t_0 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 12a \ge 0 \\ 8 - 3a \ge 0 \\ -3a \ge 0 \\ -1 \le \frac{1}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le a \le 0.$$

(Проверьте эквивалентность утверждений в обоих рассмотренных случаях самостоятельно).

Объединяя полученные значения параметра a, получим ответ.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right]$.

Задача 12. Найти все значения параметра a, при каждом их которых уравнение $\sin^2 x + (1 - 2a)\sin x + a^2 - 1 = 0$ не имеет решений.

Решение. Пусть $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$, тогда получим квадратное уравнение $f(t) = t^2 + (1 - 2a)t + a^2 - 1 = 0$. Графиком функции $f(t)$ является парабола с вершиной в точке $t_0 = \frac{2a - 1}{2}$ и ветвями, направленными вверх.

Исходное уравнение не имеет решений в четырех случаях:

1) когда полученное квадратное уравнение само не имеет решений;

2) его возможные, может быть, совпадающие корни меньше -1;

3) его возможные, может быть, совпадающие корни больше 1;

4) когда имеет корни $t_1 < -1$ и $t_2 > 1$.

Первый случай реализуется, когда $D = -4a + 5 < 0$, откуда $a > \frac{5}{4}$.

Второй случай реализуется как система

$$\begin{cases} t_0 = \frac{2a - 1}{2} < -1 \\ f(-1) = a^2 + 2a - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < -1 - \sqrt{2}.$$

Третий случай реализуется как система

$$\begin{cases} t_0 = \frac{2a - 1}{2} > 1 \\ f(1) = a^2 - 2a + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}.$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Четвертый случай реализуется как система

$$\begin{cases} f(-1)=a^2+2a-1<0 \\ f(1)=a^2-2a+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a\in\varnothing .$$

Объединяя все случаи получаем

Ответ: $\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)\cup\left(\frac{5}{4},+\infty\right)$.

Задача 13. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $4^{x^2}+2(2a+1)\cdot 2^{x^2}+4a^2-3>0$ выполняется для всех x.

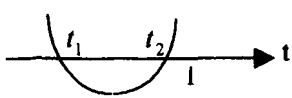
Решение. Обозначим $2^{x^2}=t$, при этом заметим, что $t\ge 1$. Тогда данное неравенство перепишем в виде:

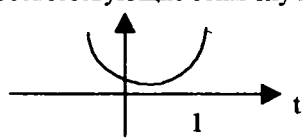
$$t^2+2(2a+1)\cdot t+4a^2-3>0$$

Теперь задача свелась к тому, чтобы найти такие a, при которых последнее неравенство справедливо для всех $t\ge 1$.

Условие задачи выполняется в следующих двух случаях расположения параболы $f(t)=t^2+2(2a+1)\cdot t+4a^2-3$, у которой ветви направлены вверх и вершина находится в точке $t_0=-(2a+1)$:

Запишем аналитические условия, соответствующие этим случаям:





$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{D}{4}=(2a+1)^2-4a^2+3\ge 0 \\ t_0=-(2a+1)<1 \\ f(1)=1^2+2(2a+1)\cdot 1+4a^2-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\ge -1 \\ a>-1 \\ a<-1;\, a>0 \end{cases} \\ a<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>0 \\ a<-1 \end{array}\right. \\ \begin{cases} \frac{D}{4}=(2a+1)^2-4a^2+3<0 \end{cases} \end{array}\right]$$

Ответ: $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

Задача 14. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\sin^2 x-(a+1)\sin x+2a+3>0$ выполняется при всех значениях x.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Решение. Пусть $t = \sin x$, $t \in [-1,1]$, тогда исходное неравенство можно переписать в виде $f(t) > 0$, где

$$f(t) = t^2 - (a+1)t + 2a + 3 = \left(t - \frac{a+1}{2}\right)^2 - \frac{a^2 - 6a - 11}{4},$$

причем оно должно выполняться для всех $t \in [-1,1]$.

График функции $f(t)$ —парабола с вершиной в точке $t_0 = \dfrac{a+1}{2}$ и ветвями, направленными вверх.

Если $t_0 < -1$, то неравенство $f(t) > 0$ выполняется для всех

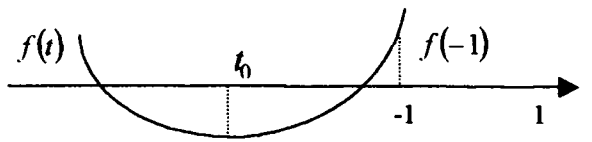


Рис.8

$t \in [-1,1]$, тогда и только тогда, когда $f(-1) > 0$ (рис.8):

$$\begin{cases} t_0 < -1 \\ f(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a+1}{2} < -1 \\ 1 + (a+1) + 2a + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \\ a > -\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a \in \varnothing,$$

т.е. данный случай невозможен.

Если $-1 \le t_0 \le 1$, то неравенство $f(t) > 0$ выполняется для

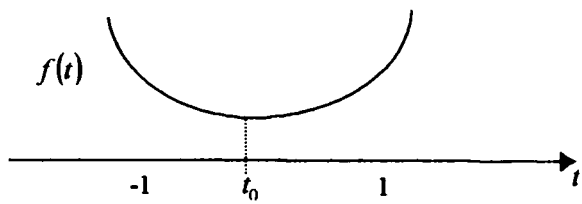


Рис.9

всех $t \in [-1,1]$ тогда и только тогда, когда $f(t_0) > 0$ (рис.9):

$$\begin{cases} -1 \le t_0 \le 1 \\ f(t_0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le \dfrac{a+1}{2} \le 1 \\ -\dfrac{a^2 - 6a - 11}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le a \le 1 \\ a^2 - 6a - 11 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

$$\begin{cases} -3 \le a \le 1 \\ 3-2\sqrt{5} < a < 3+2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \quad 3-2\sqrt{5} < a \le 1.$$

Если $t_0 > 1$, то неравенство $f(t) > 0$ выполняется для всех $t \in [-1, 1]$, тогда и только тогда, когда $f(1) > 0$ (рис.10):

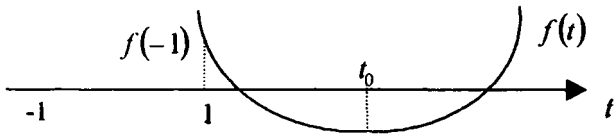


Рис.10

$$\begin{cases} t_0 > 1 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a+1}{2} > 1 \\ 1-(a+1)+2a+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a > -3 \end{cases} \Leftrightarrow a > 1.$$

Объединяя множество значений параметров, найденных в трех рассмотренных выше случаев, получим ответ.

Ответ: $\left(3-2\sqrt{5}, +\infty\right)$.

Задача 15. Найти все значения параметра a, при которых любое решение неравенства $ax^2 + \left(1-a^2\right)x - a > 0$ по модулю не превосходит двух.

Решение 1. Очевидно, что $a = 0$ не подходит. Тогда при $a \ne 0$, найдя корни соответствующего квадратного трехчлена, получим $a(x-a)\left(x+\dfrac{1}{a}\right) > 0$. Если $a > 0$, то решением этого неравенства будет неограниченное множество чисел (объединение двух лучей). Поэтому случай, когда $a > 0$ также не подходит. Остается рассмотреть $a < 0$. Тогда будем иметь $(x-a)\left(x+\dfrac{1}{a}\right) < 0$, и поскольку $a < 0$, то $a < -\dfrac{1}{a}$. Отсюда решением этого неравенства будет интервал $\left(a, -\dfrac{1}{a}\right)$. По условию полученный интервал должен содержаться в промежутке $[-2; 2]$.

Тогда имеем $\begin{cases} a < 0 \\ a \ge -2 \\ -\dfrac{1}{a} \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -2 \le a \le -\dfrac{1}{2}.$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Решение 2. Перепишем данное неравенство в следующем виде:

$$(a-x)(ax+1)<0.$$

Графики функций $a=x$ и $ax=-1$ разбивают координатную плоскость $(x;a)$ на четыре области. Учитывая знаки устанавливаем, что решением исходного неравенства будут заштрихованные области (рис. 11). Теперь, если при каком-то фиксированном значении a_0 прямая $a=a_0$ в пересечении с полученной областью дает лишь точки, абсциссы которых удовлетворяют условию $|x|\le 2$, то a_0 —одно из иско-

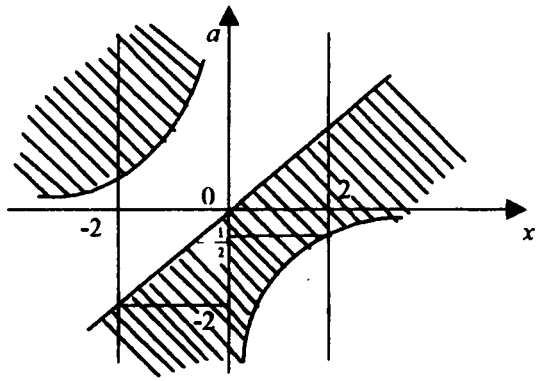


Рис.11

мых значений параметра. Теперь с помощью графика легко установить, что $-2\le a\le -\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$.

Задача 16. Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство $x^2+2|x-a|\ge a^2$ справедливо для всех *x*.

Решение. По определению модуля рассмотрим два случая:

1) $x\ge a\Rightarrow (x^2-a^2)+2(x-a)\ge 0\Rightarrow (x-a)(x+a+2)\ge 0$ (1)

Так как исходное неравенство справедливо для всех *x*, то неравенство (1) должно выполняться при всех $x\ge a$, а это возможно тогда и только тогда, когда $-a-2\le a$ или $a\ge -1$.

2) $x\le a\Rightarrow (x^2-a^2)+2(x-a)\ge 0\Rightarrow (x-a)(x-(-a+2))\ge 0$ (2)

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Аналогично неравенство (2) должно быть справедливым при всех $x \le a$, а это возможно тогда и только тогда, когда $a \le -a + 2$ или $a \le 1$.

Ответ: $[-1;1]$.

Задача 17. Найти наибольшее из значений параметра a, для которого существуют числа x и y, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + a^2 + xy - ax + ay = 3.$$

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно x. Для этого его удобно записать в таком виде: $x^2 + (y-a)x + 2y^2 + a^2 + ay - 3 = 0$. Поскольку должны существовать значения x, удовлетворяющие этому уравнению, то дискриминант этого уравнения должен принимать неотрицательные значения. Имеем $7y^2 + 6ay + 3a^2 - 12 \le 0$. Теперь осталось найти такие a, при которых полученное квадратное неравенство имеет хотя бы одно решение. Это опять означает, что дискриминант соответствующего квадратного трехчлена должен принимать неотрицательные значения. Получаем $9a^2 - 21a^2 + 84 \ge 0$. Отсюда $|a| \le \sqrt{7}$. Тогда наибольшее значение параметра a равно $\sqrt{7}$.

Ответ: $\sqrt{7}$.

Задача 18. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\sqrt{1-x^2} > a - x$ имеет решение.

Решение. Поскольку в данном неравенстве $|x| \le 1$, то полагая $x = \cos\alpha$, приходим к неравенству $\sqrt{1-\cos^2\alpha} > a - \cos\alpha$, или $|\sin\alpha| > a - \cos\alpha$. Но в нашем случае $\sin\alpha \ge 0$, так что имеем $\sin\alpha + \cos\alpha > a$. Отсюда $\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) > a$. Это неравенство имеет решения, если a меньше наибольшего значения выражения $\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$. Так как $\alpha \in [0;\pi]$, то $\max \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. Следовательно исходное неравенство имеет решение при $a < \sqrt{2}$.

Ответ: $\left(-\infty, \sqrt{2}\right)$.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Задача 19. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\left(x^2-a\right)^2=6x^2-4x-2a$ имеет ровно три решения.

Решение. Исходное уравнение является квадратным относительно a. Перепишем его в виде

$$a^2+2a\cdot\left(1-x^2\right)+x^4-6x^2+4x=0.$$

Решая это уравнение , находим корни $\left[\begin{array}{l} a=x^2+2x-2 \\ a=x^2-2x \end{array}\right.$.

На координатной плоскости $(x;a)$ построим параболы $a=x^2+2x-2$ и $a=x^2-2x$ (рис.12).

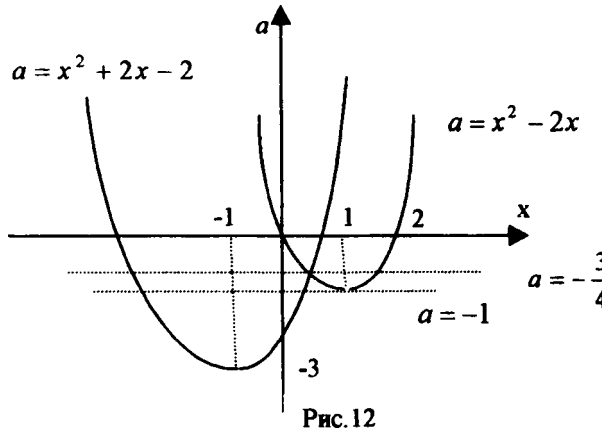


Рис.12

Данное уравнение имеет три решения при тех значениях параметра a_0, при которых прямая $a=a_0$ имеет три точки пересечения с параболами. Таким образом, исходное уравнение имеет три решения в следующих случаях:

1) прямая проходит через вершину одной параболы и пересекает другую в двух точках. Это возможно, когда $a_0=-1$, т.е. при $a_0=-1$ уравнение имеет три решения;

1) прямая проходит через точку пересечения парабол. Найдем абсциссу точки пересечения парабол, для этого решим уравнение

$x^2+2x-2=x^2-2x \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Отсюда имеем $a_0=-\frac{3}{4}$.

Ответ: $\left\{-\frac{3}{4};-1\right\}$.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Задача 20. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}} = \sin x$ имеет решение.

Решение. Обозначим $\sin x = t$, $t \in [-1;1]$ и воспользуемся схемой решения иррациональных уравнений.

Согласно схеме, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 0 \le t \le 1 \\ a+\sqrt{a+t} = t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 1 \\ t^2 - a \ge 0 \\ a+t = \left(t^2-a\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 1 \\ t^2 - a \ge 0 \\ t^4 - 2at^2 - t + a^2 - a = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Уравнение системы удобно представить как квадратное относительно параметра a. Имеем

$$a^2 - \left(2t^2+1\right)a + t^4 - t = 0 \Leftrightarrow D = \left(2t+1\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = t^2+t+1 \\ a = t^2 - t \end{array}\right..$$

Тогда система (1) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 0 \le t \le 1 \\ t^2 - a \ge 0 \\ a = t^2+t+1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 \le t \le 1 \\ t^2 - a \ge 0 \\ a = t^2 - t \end{cases}.$$

Так как $t^2 \ge a$ и $0 \le t \le 1$, то $t^2 - a + t + 1 > 0$ и первая система решений не имеет. Отметим, что условие $t^2 \ge a$ следует из остальных условий второй системы, так как $t^2 - a = t$ и $t \ge 0$.

Следовательно, система (1) равносильна такой:

$$\begin{cases} a = t^2 - t \\ 0 \le t \le 1 \end{cases}.$$

Легко видеть, что квадратный трехчлен $t^2 - t$ принимает на промежутке $[0;1]$ все значения из $\left[-\frac{1}{4};0\right]$, поэтому $a \in \left[-\frac{1}{4};0\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4};0\right]$.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

V. *Заключительные рекомендации.*

1. Прежде, чем приступить к решению задачи с параметрами, советуем разобраться в ситуации для конкретного числового значения параметра. Например, возьмите значение параметра $a = 1$ и ответьте на вопрос: является ли значение параметра $a = 1$ искомым для данной задачи. Отметим, что подстановка фиксированного значения параметра позволяет во многих случаях нащупать путь решения задачи.

2. При решении многих задач с параметрами удобно воспользоваться геометрическими интерпретациями. Если изобразить графики функций, входящих в левые и правые части рассматриваемых уравнений, то тогда точки пересечения графиков будут соответствовать решениям уравнения, а число точек пересечения — числу решений. Аналогично, при решении систем уравнений или неравенств можно изобразить геометрические места точек плоскости, удовлетворяющих рассматриваемым уравнениям или неравенствам. Это часто позволяет существенно упростить анализ задач, а в ряде случаев представляет собой единственный «ключ» к решению.

3. Решение многих задач с параметрами требует умения правильно формулировать необходимые и достаточные условия, соответствующие различным условиям расположения корней квадратного трехчлена на числовой оси.

4. Существенным этапом решения задач с параметрами является запись ответа. Особенно это относится к тем примерам, где решение как бы «ветвится» в зависимости от значений параметра. В подобных случаях составление ответа — это сбор ранее полученных результатов. И здесь очень важно не забыть отразить в ответе все этапы решения. Также рекомендуем прежде, чем записывать ответ, еще раз внимательно прочитать условие задачи и четко уяснить, что именно спрашивается.

5. Для того, чтобы освоить приемы решения задач с параметрами, необходимо внимательно разобрать приведенные примеры решения таких задач и постараться прорешать как можно больше задач для самостоятельного решения.

Надеемся, что изучение материалов этого пособия будет способствовать повышению уровня математической подготовки поступающих в Томский Государственный Университет, что, в свою очередь, крайне необходимо для успешного обучения в университете.

Желаем успеха!

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Задачи для самостоятельного решения

1. Линейные уравнения, неравенства и системы

1. Решить уравнение $a^2x - a = x + 1$.

2. Решить уравнение $6(ax - 1) - a = 2(a + x) - 7$.

3. Решить уравнение $\dfrac{x-4}{x+1} + \dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{a(x+1)}$.

4. При каких значениях a уравнение $a\cos x + 1 = a^2 - \cos x$ имеет хотя бы одно решение ?

5. При каких a уравнение $1 + a\sin x = (a+1)^2$ имеет хотя бы одно решение ?

6. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_2(3x - 1) = \log_2(x + a)$$ не имеет решений.

7. Решить неравенство $3(2a - x) < ax + 1$.

8. Решить неравенство $x - \dfrac{2a-2}{a} \le \dfrac{2(x+1)}{3a}$.

9. При каких a неравенство $5x - a > ax - 3$ не имеет решений ?

10. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$(5a - 7)\cos x < a + 5$$ выполняется для всех x.

11. Найти все значения параметра a при которых неравенство

$$\frac{\sin x}{a-2} < a - 6$$ выполняется для всех x.

12. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\left(a\cdot(5+\cos x) - a^2 + 3\cos x\right)\cdot(\cos x - 2) < 0$$ выполняется для любых x.

13. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$(2\sin x - 5)\cdot\left(\left(a^2 - 1\right)\cos x + 4a\right) < 0$$ не имеет решений.

14. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\left(a^2(\sin x + 3) - 2(\sin x + 5)\right)\cdot(\sin x + 5) < 0$$

выполняется для любых x.

15. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\left(\left(a^2 - 4\right)\sin x - 8a\right)\cdot(\sin x + 8) > 0$$ не имеет решений.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

16. Для всех значений параметра a решить систему

$$\begin{cases} ax+(a-2)y=1 \\ (a+1)x-(5-3a)y=a \end{cases}$$

17. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2ax+y=a^2-2a \\ -10x+(a-6)y=10a-5a^2 \end{cases}$$ не имеет решений.

18. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} ax+3y=a^2+1 \\ (3a+14)x+(a+8)y=5a^2+5 \end{cases}$$ не имеет решений.

19. При каких значениях m система уравнений

$$\begin{cases} (m+1)x-my=4 \\ 3x-5y=m \end{cases}$$

имеет решение, удовлетворяющее условию: $x-y<2$?

20. Найти, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (a+4)x+(a-2)y=-4 \\ x+ay=-2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям: $x<1, y<-2$.

21. Найти, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax+(a+2)y=-1 \\ x+ay=1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям: $x<4, y<-1$.

22. Найти, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (a+6)x-ay=2 \\ ax-y=-1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям: $x<2, y>3$.

23. Найти, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax+(3a-2)y=2 \\ x+ay=1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям: $x>-4, y>2$.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

24. Найти, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (4-a)x + ay = 1 \\ ax + 2y = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям: $x<-1, y>-4$.

25. Найти все значения параметра a, при которых все решения уравнения $10x-15a=13-5ax+2a$ больше 2.

26. Для каждого значения параметра a решить уравнение $\frac{a-2}{\sqrt{x+4}}=1$

27. Для каждого значения параметра a решить неравенство $|x-a|\geq x-$.

28. Для каждого значения параметра a решить неравенство $\frac{1}{\log_a x}>1$.

29. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x+(9a^2-2)y=6a-2 \\ x+y=1 \end{cases}$$ не имеет ни одного решения.

30. Найти значение параметра a, при котором наибольшее отрицательное решение неравенства $\frac{ax+10}{x}\geq -3$ равно -5.

31. Найти значение параметра a, при котором наименьшее решение неравенства $\frac{ax-18}{x}\geq 5$ равно -3.

32. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{a(x+2)+1}{x-3}=5$ имеет решение, удовлетворяющее условию $x>2$.

33. При каких значениях параметра a неравенство $2x+a>0$ является следствием неравенства $x+1-3a>0$?

34. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$a^2-2a\leq(a+4)\cdot 2^{|x-1|}$ выполняется для любых x.

35. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$(a+2)\log_2(-4x-x^2)\leq(a-2)$ не имеет решений.

36. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$(a-1)9^x+3^{2x+1}(3-a)+a>1$ выполняется для всех x.

37. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$(1-a)4^{2x}+a<1+(2-a)2^{4x+1}$ не имеет решений.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Ответы:

1. Если $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{1}{a-1}$; если $a = 1$, то $x \in R$; если $a = -1$, то $x \in \varnothing$. **2.** Если $a \neq \frac{1}{3}$, то $x = \frac{1}{2}$; если $a = \frac{1}{3}$, то $x \in R$. **3.** Если $a \neq -\frac{1}{5}$, $a \neq -2$, $a \neq 0$, то $x = \frac{4a-1}{a+2}$; если $a = -\frac{1}{5}$, $a = -2$, то $x \in \varnothing$. **4.** $\{-1\} \cup [0,2]$. **5.** $[-3,-1] \cup \{0\}$. **6.** $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$. **7.** Если $a > -3$, то $x > \frac{6a-1}{a+3}$; если $a < -3$, то $x < \frac{6a-1}{a+3}$; если $a = -3$, то $x \in R$. **8.** Если $a \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$, то $x \leq 2$; если $a \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$, то $x \geq 2$; если $a = \frac{2}{3}$, то $x \in R$. **9.** $a = 5$. **10.** $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$. **11.** $\left(-\infty, 4-\sqrt{5}\right] \cup \left[4-\sqrt{3}, 4+\sqrt{3}\right]$. **12.** $(1,3)$. **13.** $\left[-2-\sqrt{5}, 2-\sqrt{5}\right]$. **14.** $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$. **15.** $\left[-4+2\sqrt{5}, 4+2\sqrt{5}\right]$. **16.** Если $a = 0$, то $x = -5, y = 1$; если $a = 1$, то решений нет; если $a \neq 0, a \neq 1$, то $x = \frac{-a^2+5a-5}{2(a-1)^2}$, $y = \frac{a^2-a-1}{2(a-1)^2}$. **17.** 5. **18.** -6. **19.** $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

20. $(-1,0) \cup \{-2\}$. **21.** $\left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \{-1\}$. **22.** $\left(2, \frac{5}{2}\right) \cup \{-2\}$. **23.** $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right) \cup \{2\}$. **24.** $\left(-5, -\frac{9}{2}\right) \cup \{2\}$. **25.** $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

26. Если $a > 2$, то $x = a^2 - 4a$; если $a \leq 2$, то $x \in \varnothing$. **27.** Если $a \leq 1$, то $x \in (-\infty, +\infty)$; если $a > 1$, то $x \in \left(-\infty, \frac{a+1}{2}\right]$. **28.** Если $a > 1$, то $x \in (1, a)$; если $0 < a < 1$, то $x \in (a, 1)$. **29.** $-\frac{2}{3}$. **30.** -1. **31.** -1. **32.** $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}, 5\right)$. **33.** $\left[\frac{2}{7}, +\infty\right)$ **34.** $[-1;4]$. **35.** $(-6;-2)$. **36.** $[1;4]$. **37.** $(3;+\infty)$.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

2. Квадратные уравнения

1. При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения $(a-1)x^2+ax-3\cdot(a-1)=0$ равна 10?
2. При каких значениях k сумма кубов корней уравнения $2kx^2-(k+1)x-4k=0$ равна 7?
3. При каких значениях k сумма кубов корней уравнения $kx^2-6kx+2k+3=0$ равна 72?
4. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$ принимает наибольшее значение?
5. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2-2ax+2a^2-6a+8=0$ принимает наименьшее значение?
6. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2+x\sqrt{a^2-4a}-a-2=0$ принимает наименьшее значение?
7. Найти все значения параметра a, при которых полусумма корней уравнения $(a-6)x^2+2ax-1=0$ не меньше, чем их произведение.
8. Найти все значения параметра a, при которых произведение корней уравнения $(a+2)x^2-2ax+1=0$ не меньше, чем пятая часть их суммы.
9. Найти все значения параметра a, при которых сумма корней уравнения $4(a+6)x^2+4ax+1=0$ не больше, чем третья часть их произведения.
10. Найти наибольшее значение k, при котором корни уравнения $(k-3)x^2-2kx+6k=0$ положительны.
11. Найти все значения параметра a, при которых оба корня квадратного уравнения $x^2-6ax+\left(2-2a+9a^2\right)=0$ больше, чем 3.
12. Найти все значения параметра a, при которых оба корня квадратного уравнения $(2-a)x^2-3ax+2a=0$ больше 0,5.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

13. Найти все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $\left(a^2+a+1\right)x^2+\left(2a-3\right)x+a-5=0$ больше 1, а другой меньше 1.

14. Найти все значения параметра a, при которых оба корня квадратного уравнения $x^2+4ax+\left(1-2a+4a^2\right)=0$ меньше, чем -1.

15. Найти все значения параметра a, при которых расстояние между точками пересечения графика функции

$$y=x^2\cdot\sin a+\sqrt{3-a}\cdot x+\frac{a^2-7a+8}{4\sin a}$$

с осью OX, является наибольшим. Найти это расстояние.

16. Найти все значения параметра a, при которых расстояние между точками пересечения графика функции

$$y=x^2\left(a-2\right)-\sqrt{a}\cdot x+\frac{a^2}{4\left(a-2\right)}$$

с осью OX, является наибольшим. Найти это расстояние.

17. Найти все значения параметра a, при которых расстояние между точками пересечения графика функции

$$y=x^2\left(\pi a-a^2-5\right)+x\sin a+\frac{1}{2a^2-2\pi a+10}$$

с осью OX, является наибольшим. Найти это расстояние.

18. Определить для каких значений параметра a уравнение $ax^2+3x+2a^2-3=0$ имеет только целые корни.

19. Определить для каких значений параметра a уравнение $2ax^2+5x+4a^2+5=0$ имеет только целые корни.

20. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $4^x-\left(3a+7\right)\cdot 2^x+21a=0$ имеет единственный корень.

21. При каких значениях параметра a уравнение $25^x-(a-4)5^x-2a^2+10a-12=0$ не имеет действительных корней?

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

22. При каких значениях параметра k уравнение $4^x + (3-2k)2^x + 4k - 10 = 0$ имеет единственное решение?

23. При каких значениях параметра a уравнение

$$36^x + (a-1)6^x + a - 2a^2 = 0$$

имеет два действительных и различных корня?

24. При каких значениях параметра a уравнение

$$9^x - (3a+1)3^x + 2a^2 + 3a - 2 = 0$$

имеет единственное решение?

25. При каких значениях параметра b уравнение

$$16^x - (3b-1)4^x + 2b^2 - 2 = 0$$

имеет два действительных различных корня?

26. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x - (\log_2 a + 2)\sqrt{x} - \frac{1}{4}(\log_2 a^2 - 11) = 0$ имеет единственное решение.

27. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_{2x}(ax+1) = \frac{1}{2}$$ имеет единственное решение.

28. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_{x-1}(x-a) = \frac{1}{2}$$ имеет единственное решение.

29. Найти все значения параметра q, при которых уравнение

$$x - 4 = \sqrt{2(q-1)x+1}$$ имеет единственное решение.

30. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$x - 2 = \sqrt{-2(a+2)x+2}$$ имеет единственное решение.

31. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{2}\cdot\sqrt{a+3-4\sqrt{a-1}} + \sqrt{a+8-6\sqrt{a-1}}\cdot\sqrt{1+\cos 2x} = \sqrt{2}$ имеет единственное решение на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

32. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{a^2}{\sqrt{5a+4}} + \sqrt{5a+4}\sin x - 2\sin^2 2x = \frac{4}{3}a + 1 + \cos 4x$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

имеет единственное решение $x \in [0, \pi]$.

33. Найти все решения уравнения $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \frac{x}{2} = 3k$, которые при целых значениях параметра k удовлетворяют неравенству $\sqrt{\sin(x + \frac{\pi}{4})} < 1$.

34. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 - x\cos a - 0{,}5\cos 4a = 0$$

имеет два различных корня, сумма квадратов которых равна $0{,}25$.

35. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$2\cos 2x + 2a\sin x + a - 1 = 0$$

имеет единственное решение на интервале $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

36. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{a-1}\sin^2 x - \sqrt{a}\sin x + \frac{1}{4}\sqrt{a+2} = 0$$

имеет два решения на промежутке $[0, \pi]$.

37. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$2\sin^2 x - 3\cos x \sin x - 3\cos^2 x = a$$

не имеет решений, удовлетворяющих неравенству $0 \le x < \frac{\pi}{2}$.

38. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$(a^2 + 1)\sin^2 x + 2a^2 \sin x + \frac{1}{2} = 0$ имеет хотя бы одно решение.

39. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$2(a^2 + 1)\cos^2 x + 4a^2 \cos x + 1 = 0$ не имеет решений.

40. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$\sin^2 x + 2a^2 \sin x + 1 = 0$ имеет хотя бы одно решение.

41. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$\log_{x+1}(x^2 - ax) = 1$ имеет единственное решение.

42. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$\log_{x+a}(x - 2) = 2$ имеет единственное решение.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

43. Найти наименьшее натуральное значение параметра k, при котором уравнение $x^3-3x^2-9x-3k=0$ имеет ровно один корень

44. Найти наибольшее натуральное значение параметра k, при котором уравнение $x^3+3x^2-24x-3k=0$ имеет три корня.

45. Найти наибольшее отрицательное целое значение параметра a, при котором уравнение $8x-x^2-\frac{1}{3}x^3=a$ имеет ровно один корень

46. Найти наименьшее значение параметра a, при котором функция $f(x)=-\frac{7}{3}x^3+7x^2-ax+11$ убывает на всей числовой прямой.

47. Найти наименьшее значение параметра a, при котором функция $f(x)=-\frac{1}{15}x^3-3x^2-5ax+9$ убывает на всей числовой прямой.

48. Найти все значения параметра a, при которых существуют такие значения x, что числа $5^{1+x}+5^{1-x}, \frac{a}{2}, 25^x+25^{-x}$ образуют арифметическую прогрессию.

49. Найти все значения параметра a, при которых существуют такие значения x, что числа $2^x-a, -2^{-x-1}, 4^x+4^{-x}$ образуют арифметическую прогрессию.

50. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$x^2-(3a-1)|x|+2a^2-a=0$ имеет четыре различных корня .

51. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$x^2-(4a-2)|x|+3a^2-2a=0$ имеет два различных корня .

52. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$x^4-(3a-2)x^2+2a^2-4a=0$ имеет три различных корня .

53. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$x^4-(4a+2)x^2+3a^2+2a=0$ не имеет корней.

54. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$2x^4-2ax^2+a^2-2=0$ не имеет корней.

55. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$\sin^2 x+(1-2a)\sin x+a^2-1=0$ не имеет корней.

56. Найти все значения параметра a,при которых ровно один из корней уравнения $x^2+2(a-1)x+3a+1=0$ удовлетворяет неравенству $x<-1$.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

57. Найти все значения параметра a, при которых ровно один из корней уравнения $x^2+2(a-2)x+4-3a=0$ удовлетворяет неравенству $x>1$.

58. Найти все значения параметра a, при которых ровно один из корней уравнения $x^2+2(a-3)x+9-2a=0$ удовлетворяет неравенству $x<2$.

59. Найти все значения параметра a, при которых ровно один из корней уравнения $x^2+2(a-4)x+16-5a=0$ удовлетворяет неравенству $x>3$.

60. Найти все значения параметра a, при которых корни квадратного уравнения $ax^2+2(a+1)\cdot x+a+3=0$ неположительны.

61. Найти все значения параметра a, при которых корни квадратного уравнения $ax^2+2(a+3)\cdot x+a+2=0$ неотрицательны.

62. Найти все значения параметра a, при которых корни квадратного уравнения $ax^2+2(a+5)\cdot x+a+3=0$ неотрицательны.

63. Найти все значения параметра a, при которых корни квадратного уравнения $ax^2-2(a-3)\cdot x+a+2=0$ неположительны.

64. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$4^{x^2}-5a\cdot 2^{x^2}+6a^2=0$ имеет ровно два корня

65. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$9^{\sqrt{x}}-(2a+1)\cdot 3^{\sqrt{x}}+a^2+a=0$ имеет ровно один корень

66. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$8^{2|x|}-2a\cdot 2^{3|x|}+a^2-1=0$ имеет ровно два корня

67. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$3^{\sqrt{4x}}-(3a+1)\cdot 3^{\sqrt{x}}+2a^2+2a=0$ имеет ровно один корень

68. Решить уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x+a=0$.

69. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$\sin^4 x+\cos^2 x-a=0$ не имеет решений.

70. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$\dfrac{x^2+(3a-1)x+2a^2-3a-2}{x^2-6x+5}=0$ имеет одно решение.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

71. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{x^2+(2a+3)x-4a-10}{\sqrt{2x^2-2x-1}}=0$$ имеет одно решение.

72. Определить все значения параметра a, для которых графики функций $y=x^2+ax+a$ и $y=(1-a)x^2-x$ имеют не более одной общей точки.

73. Определить все значения параметра a, для которых графики функций $y=x^2-ax-a$ и $y=(1+a)x^2+2x$ имеют не более одной общей точки.

74. Определить все значения параметра a, для которых графики функций $y=x^2-ax-a$ и $y=(1+a)x^2-x-1$ не имеют общих точек.

75. Определить все значения параметра a, для которых графики функций $y=x^2+ax+a+2$ и $y=(1-a)x^2-2x$ имеют не более одной общей точки.

76. Определить все значения параметра a, для которых уравнения

$$x^2+ax+8=0 \text{ и } x^2+x+a=0$$ имеют общий корень.

77. Определить все значения параметра a, для которых система

$$\begin{cases} 2y-x+xy=0 \\ (x+2a-4)y-ax+5=0 \end{cases}$$ имеет единственное решение.

78. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$2\cdot\log_3^2 x-|\log_3 x|+a=0$$ имеет четыре решения.

79. Найти все значения параметра a, при которых больший корень уравнения $(a-1)x^2+2x+1=0$ больше 100.

80. Найти все значения a, при которых все решения уравнения $(a-1)x^2-2(a+1)x+a-3=0$ удовлетворяют условию $-1<x<5$.

81. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\cos^4 x-(a+2)\cos^2 x-a-3=0$$ имеет решения.

82. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$x+\log_{\frac{1}{3}}(9^x-2a)=0$$ имеет ровно два различных решения.

83. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(2a+3)\cos^2 x+(a+1)\cos x+4=0$$

на интервале $(-\pi;\pi)$ имеет ровно два различных решения.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Ответы:

1. $\frac{2}{3};2$. **2.** 1. **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** -3. **5.** 2. **6.** 0. **7.** $[2,6)$.

8. $(-2,-1]\cup\left[2,\frac{5}{2}\right]$. **9.** $(-\infty,-6)\cup[3,+\infty)$. **10.** $\frac{18}{5}$. **11.** $\left(\frac{11}{9},+\infty\right)$.

12. $\left[\frac{16}{17},2\right)$. **13.** $\left(-2-\sqrt{11},-2+\sqrt{11}\right)$. **14.** $(1,+\infty)$. **15.** 3; $\frac{2}{\sin 3}$.

16. $\frac{2}{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **17.** $\frac{\pi}{2}$; $\frac{4\sqrt{3}}{20-\pi^2}$. **18.** $\left\{0;-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right\}$. **19.** $\left\{0;\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right\}$.

20. $(-\infty,0)\cup\left\{\frac{7}{3}\right\}$. **21.** $[2,3]$. **22.** $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)\cup\left\{\frac{7}{2}\right\}$. **23.** $\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$.

24. $\left(-2,\frac{1}{2}\right)\cup\{3\}$. **25.** $(1,3)\cup(3,+\infty)$. **26.** $\left(32\sqrt{2},+\infty\right)\cup\{2\}$.

27. $(-\infty,0)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **28.** $(-\infty,-1)\cup\left\{-\frac{3}{4}\right\}$. **29.** $\left[\frac{7}{8},+\infty\right)$.

30. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$. **31.** $[5,10)$. **32.** 0; 1. **33.** $\frac{\pi}{2}+2\pi n, 2\pi k, \frac{2\pi}{3}+2\pi l; n,k,l\in Z$.

34. $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi n, n\in Z$. **35.** $(-\infty,-3]\cup\{-2\}\cup[-1,+\infty)$.

36. $\left[1,\frac{32\sqrt{22}-46}{63}\right)\cup\{2\}$. **37.** $\left(-\infty,-\frac{1+\sqrt{34}}{2}\right)\cup[2,+\infty)$.

38. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. **39.** $(-1,1)$. **40.** $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

41. $(-\infty,-1)$. **42.** $(-\infty,-2)\cup\left\{-\frac{7}{4}\right\}$. **43.** 2. **44.** 26. **45.** -27.

46. 7. **47.** 9. **48.** $[12,+\infty)$. **49.** $[4,+\infty)$. **50.** $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$.

51. $\left(0,\frac{2}{3}\right)\cup\{1\}$. **52.** 2. **53.** $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$. **54.** $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup(2,+\infty)$.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

55. $\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)\cup\left(\frac{5}{4},+\infty\right)$. **56.** $(-\infty,-4)\cup\{5\}$. **57.** $\{0\}\cup(1,+\infty)$.

58. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\{4\}$. **59.** $(-\infty,-1)\cup\{0\}$. **60.** $(-\infty,-3]\cup(0,1]$.

61. $\left[-\frac{9}{4},2\right]$. **62.** $\left[-\frac{25}{7},-3\right]$. **63.** $\left(0,\frac{9}{8}\right]$. **64.** $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$. **65.** $[0,1)$.

66. $(0,\ 2)$. **67.** $\left[0,\frac{1}{2}\right)\cup\{1\}$. **68.** Если $a\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, то $x\in\varnothing$; если $a=\frac{3}{2}$, то $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$; если $a=\frac{1}{2}$, то $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$; если $a\in\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$, то $x=(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\left(1-\sqrt{2a+3}\right)+\frac{\pi n}{2}$. **69.** $\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)\cup(1,+\infty)$.

70. $-1;1$. **71.** $\left[\frac{-11-\sqrt{3}}{4},\frac{-11+\sqrt{3}}{4}\right]\cup\left\{-\frac{7}{2}\right\}$. **72.** $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup\{0\}\cup[1,+\infty)$.

73. $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup\{0\}\cup[2,+\infty)$. **74.** $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.

75. $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$. **76.** -6 **77.** $\left\{\frac{39}{40};1;3\right\}$. **78.** $\left(0;\frac{1}{8}\right)$.

79. $(0{,}9799;\ 1)$. **80.** $\{1\}\cup\left(\frac{19}{8};1\right)$.**81.** $[-3;-2]$. **82.** $\left(-\frac{1}{8};0\right)$.

83. $\left[-6;-\frac{8}{3}\right)$.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

3. Квадратные неравенства

1. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a+2)x^2-(2a+4)x+7a+3>0$ выполняется для всех x.

2. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a+4)x^2-2ax+2a-6<0$ выполняется для всех x.

3. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\left|\frac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$$ выполняется при любых значениях x.

4. Найти все значения параметра a, при которых множеством решений системы

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+ax-2}{x^2+x+1}<2\\ \dfrac{x^2+2ax-2}{x^2+x+1}>-3\end{cases}$$

является вся числовая ось.

5. Найти все значения параметра a, при которых множеством решений системы

$$\begin{cases}\dfrac{2x^2+ax-6}{x^2+x+1}<3\\ \dfrac{2x^2+ax+5}{x^2-x+4}>1\end{cases}$$

является вся числовая ось.

6. При всех значениях параметра a решить неравенство

$$\frac{ax-4}{x^2+2x+1-a}<0.$$

7. При всех значениях параметра a решить неравенство

$$\frac{18-ax}{a-1-2x-x^2}\geq 0.$$

8. . При всех значениях параметра a решить неравенство

$$\frac{ax+3}{x^2-4x+4+a}\leq 0.$$

9. Найти все значения параметра a, при которых решения неравенства $ax^2-x+1-a<0$ принадлежат промежутку $(0,1)$.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

10. Найти все значения параметра a, при которых неравенство
$(x-3a)\cdot(x+2a+1)<0$ выполнено для всех $x\in[1,3]$.

11. Найти все значения параметра a, при которых неравенство
$\dfrac{x-2a-1}{x-a}<0$ выполнено для всех $x\in[1,2]$.

12. Найти все значения параметра a, при которых все $x\in(1;+\infty)$ являются решениями неравенства

$$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x-a+1\right)\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x-2a+5\right)<0.$$

13. Найти все значения параметра a, при которых все $x\in(-\infty;0)$ являются решениями неравенства $\left(3^x-(a-3)\right)\cdot\left(3^x-(2a-3)\right)<0$.

14. Найти все значения параметра a, при которых все $x\in(1;10)$ являются решениями неравенства $(\lg x+a-2)\cdot(\lg x+2a)<0$.

15. Найти все значения параметра a, при которых все решения неравенства $\left(2^x-2a+2\right)\cdot\left(2^x-a-1\right)>0$ принадлежат промежутку $(0;+\infty)$.

16. Найти все значения параметра a, при которых все $x\in(0;2)$ являются решениями неравенства

$$\left(\log_2 x-(a-2)\right)\cdot\left(\log_2 x-(2a-4)\right)>0.$$

17. Найти все значения параметра a, при которых все $x\in(-\infty,-1)$ являются решениями неравенства

$$9^x-(3a+1)3^x+2a^2+3a-2\le 0.$$

18. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\left|7\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a+1\right|\le 8$$

выполняется для всех x.

19. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\left|5\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a+1\right|\le 6$$

выполняется для всех x.

20. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\left|\sin^2 x-2(a-1)\sin x\cos x+3\cos^2 x-a+1\right|\le 3$$

выполняется для всех x.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

21. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\sin^6 x + \cos^6 x + a\sin x\cos x \geq 0$ выполняется при всех x.

22. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2$ выполняется при всех x.

23. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a-1)\sin^2 x + 2(a-2)\sin x + a + 3 < 0$ не имеет решений.

24. Найти все значения параметра a, при которых все решения неравенства $\log_{2+\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - 5\right) \geq 1$ одновременно являются решениями неравенства $a^4x^2 - a^2x - 2 > 0$.

25. Найти все значения параметра a, при которых все решения неравенства $\log_{x+3}\left(\frac{11x}{2} + 14\right) > 2$ одновременно являются решениями неравенства $a^2x^2 - 4 \leq 0$.

26. Найти все значения параметра a, при которых все решения неравенства $\log_{3x+2}\left(x^2 - 3x + 7\right) \leq 1$ одновременно являются решениями неравенства $(x+1)^2 - 4a^2(x+1) + 3a^4 \geq 0$.

27. Пусть x принадлежит множеству решений неравенства $x^4 - 4x^2 + 3 \leq 0$. Найти максимальное значение выражения $1 + ax - x^2$.

28. Пусть x принадлежит множеству решений неравенства

$$(x+1)^4 - 4(x+1)^2 + 3 \leq 0.$$

Найти минимальное значение выражения $x^2 - 2ax + 2x$.

29. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$a \cdot 5^{-x} - (5a+3)\cdot 5^x + a - 1 < 0$$ выполняется при всех x.

30. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$a \cdot 9^x + (1-a)\cdot 3^x - \frac{7}{4}a + 1 > 0$$ выполняется при всех x.

31. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\frac{x^2 - ax - 2}{x^2 - 3x + 4} > -1$$ выполняется при всех x.

32. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\sin^2 x - (a+1)\cdot\sin x + 2a + 3 > 0$$ выполняется при всех x.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

33. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\cos^2 x + (a+1)\cdot\cos x < 3a+2$$ выполняется для всех x..

34. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$(a-1)\cos^2 x + 2(a-2)\cdot\cos x + a + 3 < 0$$ не имеет решений.

35. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$4\cdot 4^x + 8a\cdot 2^x - a^2 < 0$$

36. Найти все значения параметра a, при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2+(2a^2+6)x-a^2+2a-3}{x^2+(a^2+7a-7)x-a^2+2a-3} < 0,$$ не меньше 1.

37. Найти все значения параметра a, при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2+(2a^2+2)x-a^2+4a-6}{x^2+(a^2+5a-5)x-a^2+4a-6} < 0,$$ не меньше 1.

38. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\sin^2 x + a(3-\cos x)^2 + 5a - 5 > 0$$ выполняется для всех значений x.

39. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$cos^2 x + 2a\sin x - 2a < a^2 - 4$$ выполняется для всех значений x.

40. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$4^{\cos x} - 2(a-3)\cdot 2^{\cos x} + a + 3 > 0$$ выполняется для всех значений x.

41. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$(a+2)\cdot 4^{|x-1|} - 2a\cdot 2^{|x-1|} + 3a + 1 > 0$$ выполняется для всех значений x.

42. При каких a неравенство $x^2 + ax + a^2 + 4a < 0$ выполняется при всех $1 < x < 2$?

43. При каких a неравенство $ax^2 + (a+1)x - 3 < 0$ выполняется при всех $x < 2$?

44. Найти, при каких a неравенство $(x-3a)\cdot(x-a-3) < 0$ выполняется для всех $x \in [1,3]$.

45. При каких значениях a множество решений неравенства

$x^2 + ax - 1 < 0$ будет интервал длины 5 ?

46. Найти все значения a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} x^2 - (a+1)x + a < 0 \\ x^2 + (a+3)x + 3a < 0 \end{cases}$ имеет решение.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

47. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} x^2+4ax+3a^2-1-2a>0 \\ x^2+2ax-3a^2+8a-4\le 0 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

48. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $9^x<20\cdot 3^x+a$ не имеет ни одного целочисленного решения.

49. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $16^x<30\cdot 4^x-a$ не имеет ни одного целочисленного решения.

50. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $x^2+2|x-a|\ge a^2$ выполняется для всех x.

51. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $x^2+5|x+a|\ge a^2$ выполняется для всех x.

52. Найти все значения параметра a, при неравенство $x^2+4x+6\cdot|x+2|+9a^2-4\le 0$ имеет не более одного решения.

53. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $x^2-6x+6\cdot|x+2|+9a^2-4\le 0$ имеет не более одного решения.

54. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $a^2+a-\sin^2 x-2a\cos x>1$ выполняется для всех x.

55. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $-5+5a+\sin^2 x+a(3-\cos x)^2>0$ выполняется для всех x.

56. Найти все значения параметра a, для которых неравенство $x^4+\left(x^2-1\right)\log_2 a<0$ не имеет решений.

57. Найти все значения параметра a, при которых из неравенства $ax^2-x+1-a<0$ следует неравенство $0<x<1$.

58. Найти все значения параметра a, при которых из неравенства $\left(a^2+a-2\right)x^2-\left(a+5\right)x-2\le 0$ следует неравенство $0\le x\le 1$.

59. Найти все значения параметра a, при которых все числа из отрезка $1\le x\le 5$ удовлетворяют неравенству $3ax+2\sqrt{3x+1}-6x+a-5<0$.

60. Найти все значения параметра a, при которых множество решений системы неравенств $\begin{cases} x^2+\left(a+4\right)x+4a\le 0 \\ 3x+y-\left(2a+4\right)\le 0 \end{cases}$ содержит отрезок оси x.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Ответы:

1. $\left(-\frac{1}{6},+\infty\right)$. **2.** $(-\infty,-6)$. **3.** $(-5,1)$. **4.** $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$. **5.** $(-3,1)$. **6.** Если $a<0$, то $x\in\left(\frac{4}{a},+\infty\right)$; если $a=0$, то $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$; если $0<a<4$, то $x\in\left(-\infty,-1-\sqrt{a}\right)\cup\left(-1+\sqrt{a},\frac{4}{a}\right)$; если $a=4$, то $x\in(-\infty,-3)$; если $a>4$, то $x\in\left(-\infty,-1-\sqrt{a}\right)\cup\left(\frac{4}{a},-1+\sqrt{a}\right)$. **7.** Если $a<0$, то $x\in\left(-\infty,\frac{18}{a}\right]$; если $a=0$, то $x\in\varnothing$; если $0<a<9$, то $x\in\left(-1-\sqrt{a},\frac{18}{a}\right]\cup\left(-1+\sqrt{a},+\infty\right)$; если $a=9$, то $x\in(-4,2)\cup(2,+\infty)$; если $a>9$, то $x\in\left(-1-\sqrt{a},-1+\sqrt{a}\right)\cup\left[\frac{18}{a},+\infty\right)$.

8. Если $a<-1$, то $x\in\left(2-\sqrt{-a},-\frac{3}{a}\right]\cup\left(2+\sqrt{-a},+\infty\right)$; если $-1\le a<0$, то $x\in\left(2-\sqrt{-a},2+\sqrt{-a}\right)\cup\left[-\frac{3}{a},+\infty\right)$; если $a=0$, то $x\in\varnothing$; если $a>0$, то $x\in\left(-\infty,-\frac{3}{a}\right]$. **9.** $\left(\frac{1}{2},1\right]$. **10.** $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$. **11.** $\left(\frac{1}{2},1\right)$. **12.** $\left[\frac{4}{3},\frac{5}{2}\right]$. **13.** $[2,3]$. **14.** $[0,1]$. **15.** $[0,1]$. **16.** $[3,+\infty)$. **17.** $\left[-\frac{7}{3},\frac{1}{2}\right]$. **18.** $\left[-\frac{80}{13},0\right]$. **19.** $\left[-\frac{24}{5},0\right]$. **20.** $\left[1,\frac{17}{5}\right]$. **21.** $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. **22.** $\left(-\infty,-\sqrt{6}-2\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

23. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. **24.** $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$. **25.** $\left[-\frac{11}{14},\frac{11}{14}\right]$.

26. $\left(-\infty,-\sqrt{6}\right]\cup\left\{\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}\cup\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\sqrt{6},+\infty\right)$. **27.** Если $|a|\geq 2\sqrt{3}$, то $\sqrt{3}|a|-2$; если $2\leq|a|<2\sqrt{3}$, то $\frac{a^2}{4}+1$; если $|a|<2$, то $|a|$.

28. Если $|a|\geq 3$, то $2-2|a|\left(\sqrt{3}+1\right)$; если $1\leq|a|<\sqrt{3}$, то $-(a-1)^2$; если $|a|<1$, то $2a-2|a|$. **29.** $\left[-\frac{3}{5},0\right]$. **30.** $\left[0,\frac{4}{7}\right]$. **31.** $(-7,1)$.

32. $\left(3-2\sqrt{5},+\infty\right)$. **33.** $\left(5-2\sqrt{7},+\infty\right)$. **34.** $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. **35.** Если $a=0$, то $x\in\varnothing$; если $a>0$, то $x\in\left(-\infty,\log_2\frac{a}{4}\right)$; если $a<0$, то $x\in\left(-\infty,\log_2(-a)\right)$. **36.** $(-\infty,3]\cup[4,+\infty)$. **37.** $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$.

38. $\left(\frac{5}{9},+\infty\right)$. **39.** $\left(-\infty,-2\sqrt{2}-2\right)\cup(2,+\infty)$. **40.** $\left(-\infty,\frac{19}{3}\right)$.

41. $\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$. **42.** $\left[\frac{-5-\sqrt{21}}{2},-3+\sqrt{5}\right]$. **43.** $\left(-7-4\sqrt{3},0\right]$.

44. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$. **45.** $\pm\sqrt{21}$. **46.** $(-\infty,0)$. **47.** $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$.

48. $(-\infty,-99]$. **49.** $[224,+\infty)$. **50.** $[-1,1]$. **51.** $\left[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right]$.

52. $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$. **53.** $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$. **54.** $\left(-\infty,-\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

55. $\left(\frac{5}{9},+\infty\right)$. **56.** $\left[\frac{1}{16};1\right]$. **57.** $\left[\frac{1}{2};1\right]$. **58.** $[-3;3]$. **59.** $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$.

60. $\left[-\frac{7}{2};1\right]$.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

4. Аналитические и графические приемы решения задач с параметрами

1. Определить направление ветвей параболы $f(x) = ax^2 + bx + c$, если известно, что $f(-1) < 1; f(1) > -1; f(3) < -4$.
2. Определить направление ветвей параболы $f(x) = ax^2 + bx + c$, если известно, что $f(-3) < -5; f(-1) > 0; f(1) < 4$.
3. Определить направление ветвей параболы $f(x) = ax^2 + bx + c$, если известно, что $f(-1) > -4; f(1) < 0; f(3) > 5$.
4. Определить направление ветвей параболы $f(x) = ax^2 + bx + c$, если известно, что $f(-3) > 3; f(-1) < 1; f(1) > 0$.
5. Решить неравенство: $(10x - x^2 - 24)\log_4(3 - \cos \pi x) \geq 1$.
6. Решить неравенство: $(-15 - x^2 - 8x)\log_4(1 + 3\sin^2 \frac{\pi x}{8}) \geq 1$.
7. Решить неравенство: $(4x + x^2 + 5)\log_3(4 + \cos \frac{\pi x}{2}) \leq 1$.
8. Решить неравенство: $(x^2 - 2x + 3)\log_2(4 + \sqrt{x - 1}) \leq 4$.
9. Решить неравенство: $(2 - \sin^2 \frac{\pi x}{2})\log_2(-4x - x^2) \geq 4$.
10. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(6 \cdot |x| - x^2)^2 = a$ имеет ровно два решения.
11. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(16 \cdot |x| - 4x^2)^2 = a^2$ имеет ровно четыре решения.
12. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x - a = |2|x| - 1|$ имеет три различных корня.
13. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x - a = 2|2|x| - a^2|$ имеет три различных корня.
14. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $|2x - a| + 1 = |x + 3|$ имеет единственное решение.
15. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $|x - a| - |2x + 2| = 3$ имеет единственное решение.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

16. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $|x+2|+|2x-a|=4$ имеет единственное решение .

17. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $|x-a|(x+a)=\sqrt{a^2(4a+1)}$ имеет единственное решение.

18. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $|x-a|\cdot|x-2|=a^2$ имеет ровно два решения.

19. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $|x|(x+\sqrt{a})=\sqrt{a}+2$ имеет ровно три решения.

20. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}$ имеет решение.

21. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x-a=\sqrt{(a-1)^2-x}$ имеет единственное решение.

22. Найти все значения параметра a, при которых существует хотя бы одно решение x системы: $\begin{cases}(2x-a-1)\cdot(x-2a+1)\le 0\\ x^2+a^2-1=0\end{cases}$.

23. Найти все значения параметра a, при которых существует хотя бы одно решение x системы: $\begin{cases}(x-a)\cdot(x-4a+2)\le 0\\ x^2+a-\dfrac{10}{9}=0\end{cases}$.

24. Найти все значения параметра a, при которых существует хотя бы одно решение x системы: $\begin{cases}(x+a)\cdot(x+3a-2)\le 0\\ x^2-3a-4=0\end{cases}$.

25. Найти все значения параметра a, при которых существует хотя бы одно решение x системы: $\begin{cases}x^2-3ax+2a^2\le 0\\ x^2+a^2-4=0\end{cases}$.

26. Найти все значения параметра a, при которых существует хотя бы одно решение x системы: $\begin{cases}(x+a)\cdot(x+4a+2)\le 0\\ x^2+a^2=4\end{cases}$.

27. Для каждого значения параметра a решить неравенство:

$$\sqrt{a^2-x^2}\ge a+1.$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

28. Для каждого значения параметра b решить неравенство:

$$\sqrt{b^2 - x^2} \geq 2 - b.$$

29. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $a \geq (a+1)\sqrt{x^2 - 1}$ не имеет решений.

30. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\left| x^2 - 5x + 4 \right| \leq a^2 - 5$ выполнено для всех $x \in [0,5]$.

31. Найти все такие числа a и b, при которых парабола $y = ax^2 + bx + 1$ касается прямых $y = 2x + 10$ и $y = 2 - 2x$.

32. Найти все такие числа a и b, при которых парабола $y = ax^2 + bx + 3$ касается прямых $y = 2x - 6$ и $y = 2 - 2x$.

33. При каких значениях параметров a и b графики функций $y = \sqrt{b^2 - 2} \cdot x^2 + ax + 1$ и $y = \dfrac{\sqrt{a^2 - 1}}{x - 1}$ касаются в точке $x = 2$.

34. При каких значениях параметров a и b графики функций $y = a^2x^2 + x\sqrt{b^2 - 4} + 1$ и $y = ax^3 + a^2x^2 - 1$ касаются в точке $x = -3$

35. Найти все значения параметра a, при которых точки $M(-a;a)$ и $Q(2a;4a^2 - 5a)$ одновременно лежат либо выше, либо ниже графика функции $y = ax^2 + 2ax$.

36. Найти все значения параметра a, при которых одна из точек $M(a;2a)$ и $N(3a;a^2)$ лежит выше графика функции $y = ax^2 + 2x - 3a$, а другая ниже?

37. Найти все значения параметра a, при которых точки $M(1;a)$ и $N(-a;a^3)$ одновременно лежат либо выше, либо ниже графика функции $y = ax^2 + a^2x - 1$.

38. Найти все целочисленные решения неравенства

$$\sqrt{x^3 - 5x - 3} \leq 6 - x.$$

39. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$\left| 1 - \left| x \right| \right| < a - x.$$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

40. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $3-|x-a|>x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

41. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $2>|x+a|+x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение.

42. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2-|x-a|-|x-1|+3\geq 0$ выполняется для всех x.

43. Найти все значения параметра a, при которых вершины двух парабол $y=4x^2+8ax-a$ и $y=4ax^2-8x+a-2$ лежат по одну сторону от прямой $y=-5$.

44. Найти все значения параметра a, при которых вершины двух парабол $y=x^2-2(a+1)x+1$ и $y=ax^2-x+a$ лежат по разные стороны от прямой $y=\frac{3}{4}$.

45. Найти все значения параметра a, при которых вершины двух парабол $y=x^2-2ax$ и $y=x^2-(a+3)x+1$ лежат по разные стороны от прямой $y=2x$.

46. При каких значениях параметра d вершина параболы $y=x^2-6dx+9d^2+|d-1|$ лежит выше прямой $y=2x-11$.

47. При каких значениях параметра c вершина параболы $y=x^2+4cx+6c^2+1$ лежит ниже прямой $y=4x-5$.

48. При каких значениях параметра b вершина параболы $y=x^2+4bx+4b^2-3b$ лежит выше графика функции $y=|x-1|$.

49. Найти точку с наибольшей ординатой, удовлетворяющей системе неравенств $\begin{cases} y-2x\geq 0 \\ -x^2+2ax-a^2+a+1\geq y \end{cases}$.

50. Среди множества точек (x, y), удовлетворяющих условию $y\leq 1-|x-1|-3|x-3|$, найти наибольшее возможное значение выражения $\left(y-x^2+4x\right)$.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

51. Среди множества точек (x, y), удовлетворяющих условию $y \geq |x+5| + 2|x+1| + 1$, найти наименьшее возможное значение выражения $(y + x^2 - 3x)$.

52. Среди множества точек (x, y), удовлетворяющих условию $y \leq 1 - |3x+6| - |x+5|$, найти наибольшее возможное значение выражения $(y - x^2 - 8x)$.

53. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $x^2 - 6x + 10 < \sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}$ не имеет решений.

54. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$4x^2 - 4x + 5 > \sqrt{6-a} - \sqrt{a+1}$$

выполнено при всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

55. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + a^2 = 1 \\ x + y = a \end{cases}$$ имеет единственное решение

56. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + a^2 = 2(1+a) \\ (x+y)^2 = 14 \end{cases}$$ имеет два решения.

57. Для всех значений параметра a решить систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + a^2 \leq 4 \\ x^2 - 6x + 5 + a^2 \geq 0 \end{cases}$$

58. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$\sqrt{a^2 - x^2} \geq 4 + a$$

59. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x^2 - 5x + 6| = ax$ имеет ровно три решения.

60. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x^2 - 2x - 3| = ax + 1 - a$ имеет ровно три решения.

61. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|3x+3| = ax + 5$ имеет единственное решение.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

62. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x|-3=a(x-9)$ имеет два решения.

63. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x+2|=ax$ не имеет решений.

64. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решения неравенства $\sqrt{a^2-x^2}\geq 2x$ образуют отрезок длиной 4.

65. Для каждого положительного значения параметра a решить неравенство $\sqrt{2ax-x^2}\geq a-x$.

66. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2+a|x-2|=0$ имеет четыре решения.

67. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$a|x+3|+2|x+4|=2.$$

68. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$|x+3|-a|x-1|=4.$$

69. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решения уравнения $2\cdot|x-a|+a-4+x=0$ принадлежат отрезку $[0,4]$.

70. Найдите все значения параметра a из интервала $(2,5)$, при которых уравнение $\log_2(3-|\sin ax|)=\cos(\pi x-\pi/6)$ имеет хотя бы одно решение из отрезка $[2,3]$.

71. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a^2-1)\sin 3x+2a\cdot\cos 3x=2a+1$ имеет решение.

72. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a^2-9)\sin\frac{x}{2}+6a\cdot\cos\frac{x}{2}=6a+9$ имеет решение.

73. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sin(\arcsin x)+4\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+2a=0$ имеет ровно два решения.

74. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_{\sqrt{2ax+4}}(2x^2-x+3)=2\cdot\log_{2ax+4}(x^2+2x+1)$ имеет единственное решение.

75. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $y=x+2x-1+|x-a|$ больше двух.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Ответы:

1. Вниз. **2.** Вниз. **3.** Вверх. **4.** Вверх. **5.** 5. **6.** -4. **7.** –2. **8.** 1. **9.** -2.

10. $(81,+\infty)$. **11.** ± 16. **12.** $-1;\ -\frac{1}{2}$. **13.** $-2;\ -\frac{1}{2}$. **14.** $-4,\ -8$.

15. $-4;\ 2$. **16.** $-12;\ 4$. **17.** $\left[-\frac{1}{4}, 2+\sqrt{5}\right)$. **18.** $(-\infty,-2)\cup\{0\}\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$.

19. $\left(16+8\sqrt{3},+\infty\right)$. **20.** $\left[2,\ \frac{5}{2}\right]$. **21.** $\left(-\infty,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

22. $[-1,0]\cup\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right]$. **23.** $\left[-\frac{5}{3},\frac{13}{48}\right]\cup\left\{\frac{2}{3}\right\}$. **24.** $[-1,\ 0]\cup\left[\frac{5}{3},\ 4\right]$.

25. $\left[-\sqrt{2},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right]\cup\left[\frac{2}{\sqrt{5}},\sqrt{2}\right]$. **26.** $\left[-\sqrt{2},-\frac{16}{17}\right]\cup\left[0,\sqrt{2}\right.$.

27. Если $a<-1$, то $a\le x\le -a$; если $-1\le a\le -\frac{1}{2}$, то $-\sqrt{-(2a+1)}\le x\le\sqrt{-(2a+1)}$; если $a>-\frac{1}{2}$, то $x\in\varnothing$.

28. Если $b\ge 2$, то $-b\le x\le b$; если $1\le b<2$, то $-2\sqrt{b-1}\le x\le 2\sqrt{b-1}$; если $b<1$, то $x\in\varnothing$. **29.** $[-1,0)$.

30. $|a|\ge 3$. **31.** $a_1=-1, b_1=-4; a_2=-\frac{1}{4}, b_2=-1$.

32. $a_1=1, b_1=-4$; $a_2=\frac{1}{4}, b_2=-1$. **33.** $a=-1, b=\pm\frac{\sqrt{33}}{4}$.

34. $a=\frac{1}{27}, b=\pm\sqrt{5}$. **35.** $\left(-\infty,1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2},+\infty\right)$.

36. $\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$. **37.** $(-\infty,-1)\cup(-1,1)$. **38.** $-1;3$.

39. Если $a\le -1$, то решений нет; если $-1<a\le 1$, то $x<\frac{a-1}{2}$; если $a>1$, то $x<\frac{a+1}{2}$.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

40. $\left(-\frac{13}{4},3\right)$. **41.** $\left(-\frac{9}{4},2\right)$. **42.** $[-2,-1]$. **43.** $(-\infty,-4)\cup\left(-\frac{5}{4},0\right)$.

44. $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{4},0\right)\cup(1,+\infty)$. **45.** $(-2,0)\cup\left(-5-2\sqrt{2},-5+2\sqrt{2}\right)$.

46. $(-\infty,2)$. **47.** $(-3,-1)$. **48.** $\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right)$. **49..** Если $a\le 1$, то $x=a, y=a+1$; если $1<a\le 2$, то $x=a-1+\sqrt{2-a}$, $y=2(a-1)+2\sqrt{2-a}$. **50.** 2. **51.** 9. **52.** 11. **53.** $\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

54. $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2},6\right]$. **55.** $\pm\sqrt{2}$. **56.** $\frac{5}{2}$. **57.** Если $|a|>2$, то $x\in\varnothing$; если $|a|=2$, то $x=0$; если $\frac{\sqrt{7}}{2}\le|a|<2$, то $x\in\left[-\sqrt{4-a^2},\sqrt{4-a^2}\right]$; если $|a|<\frac{\sqrt{7}}{2}$, то $x\in\left[-\sqrt{4-a^2},3-\sqrt{4-a^2}\right]$. **58.** Если $a\le -4$, то $x\in[a,-a]$; если $-4<a\le -2$, то $x\in\left[-\sqrt{-16-8a},\sqrt{-16-8a}\right]$; если $a>-2$, то $x\in\varnothing$. **59.** $5-2\sqrt{6}$. **60.** $\pm\frac{1}{2}$. **61.** $[-3,3]$.

62. $(-\infty,-1)\cup\left[0,\frac{1}{3}\right)$. **63.** $(0,1)$. **64.** $\pm\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)$. **65.** $\left[a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),2a\right]$.

66. $(-\infty,-8)$. **67.** Если $|a|>2$, то $x=3$; если $a=-2$, то $x\in[-3,+\infty)$; если $a=2$, то $x\in[-4,-3]$; если $|a|<2$, то $x=-3$ или $x=-\frac{3a+10}{a+2}$.

68. Если $|a|>1$, то $x=1$; если $a=-1$, то $x\in[-3,1]$; если $a=1$, то $x\in[1,+\infty)$; если $|a|<1$, то $x=1$ или $x=\frac{7+a}{a-1}$. **69.** $\left[\frac{4}{3},2\right]$.

70. $\frac{9\pi}{13};\frac{15\pi}{13}$. **71.** $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$. **72.** $(-\infty,0]\cup[6,+\infty)$.

73. $\left(-\sqrt{5};-\sqrt{3}-0{,}5\right]$. **74.** $(-2;-1{,}5)\cup(-1{,}5;-1]\cup\{-0{,}75\}$.

75. $(-\infty;-5{,}25)\cup(3{,}25;+\infty)$

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
http://vital.lib.tsu.ru

1-921290

Томский госуниверситет 1878
Научная библиотека 00479072