На правах рукописи

Лисок Александр Леонидович

Метод квазиклассически сосредоточенных состояний для уравнения типа Хартри с периодическими внешними полями

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2004

Работа выполнена на кафедре высшей математики и математической физики Томского политехнического университета

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор Трифонов Андрей Юрьевич (ТПУ)
Научный консультант:
доктор физико-математических наук
профессор Шаповалов Александр Васильевич (ТГУ)

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
профессор Белов Владимир Владимирович (МИЭМ)

доктор физико-математических наук
профессор Бордовицын Владимир Александрович (ТГУ)

Ведущая организация:
Казанский государственный университет

Защита состоится “ 16 декабря 2004 г. в 14 час.” на заседании диссертационного совета Д 212.267.07 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук при Томском государственном университете по адресу: 634050, Томск, пр. Ленина, 36, ауд.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета

Автореферат разослан “ 5 ноября ” 2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук
профессор И.В. Ивонин

Общая характеристика работы

В диссертации развивается метод построения аналитических решений нелинейных задач квантовой теории и их приложений на примере уравнения типа Хартри с периодическими внешними полями.

Актуальность темы

Нелинейные модели являются основой описания широкого класса физических явлений. В этих моделях особый интерес представляют уравнения в многомерных пространствах с переменными коэффициентами (внешними полями) и различными видами нелинейности. Разработка аналитических методов интегрирования таких уравнений представляет актуальную проблему не только для математической физики, но и для физических приложений, описываемых этими моделями.

Точно решаемые задачи математической физики исключительно важны, поскольку позволяют проиллюстрировать основные положения и выводы рассматриваемой теории или модели. Однако такие задачи чаще всего возникают вследствие упрощения исследуемой модели. Для нелинейных уравнений с переменными коэффициентами фактически отсутствуют точные аналитические методы интегрирования и поэтому проблема разработки различных асимптотических методов решения нелинейных уравнений для них особенно актуальна.

В линейных задачах математической физики особое место занимают асимптотические методы, получившие название квазиклассических. Квазиклассическое приближение естественно возникло в квантовой механике, поскольку одним из постулатов квантовой теории является принцип соответствия, который предъявляет к теории требование, чтобы в пределе $\hbar \to 0$ квантовая динамика переходила в соответствующую классическую. Для нелинейных квантовых систем проблема соответствия практически не изучена и ее исследование представляется актуальной задачей.

Помимо решения фундаментальных проблем квантовой теории, квазиклассическое приближение доказало свою эффективность при расчете конкретных квантовомеханических эффектов. Например, квазиклассическими методами могут быть описаны геометрические свойства физических систем, находящихся под внешним периодическим воздействием. Для квантовых систем с нетривиальной топологией такие свойства «представлены» так называемыми топологическими или геометрическими фазами (ГФ) волновой функции. Теория ГФ в квантовой механике опирается на свойство линейности уравнения Шрёдингера. Для нелинейных уравнений понятие ГФ также может быть введено, хотя не вполне очевидно, что построенное выражение определяется лишь геометрией системы и не содержит динамического вклада из-за наличия нелинейности. ГФ в нелинейных системах менее изучены не только из-за отсутствия принципа суперпозиции решений. Нетривиальная топология системы может определяться как соответствующими граничными условиями, так и внешними полями. Последние входят в уравнение в виде переменных коэффициентов. Построение квазиэнергетических состояний и ГФ в этом случае сталкивается с фундаментальной проблемой интегрируемости нелинейных уравнений, поэтому естественно изучать ГФ в нелинейных системах в квазиклассическом приближении.

Экспераментальные достижения последних лет – наблюдение конденсанции Бозе-Эйнштейна (БЭК) в парах щелочных металлов - открыло новые возможности для исследования макроскопических квантовых явлений. Теория БЭК основана на уравнении Гросса-Питаевского[1], которое в математической литературе известно как нелинейное уравнение Шрёдингера. Учет «неидеальности» межатомного взаимодействия частиц конденсата приводит к нелокальному уравнению Гросса-Питаевского, которое также называется уравнением типа Хартри.

Метод квазиклассически сосредоточенных состояний оказался эффективным инструментом исследования математических моделей основанных на линейных уравнениях. Обобщение этого метода на случай задач, описываемых нелинейными уравнениями типа Хартри, является одной из основных задач диссертации.

Цель работы

Цель диссертационной работы состоит в развитии методов построения аналитических решений нелинейных задач квантовой теории и их приложений на примере уравнения типа Хартри с периодическими внешними полями.

[1]Питаевский Л.П. Бозе-Эинштеновская конденсация в магнитных ловушках // Успехи физ. наук. 1988. Т. 168. С.641-653.

Научная новизна

В работе впервые получены следующие основные результаты:

1. Предложен метод решения задачи Флоке для уравнения типа Хартри с периодическими по времени потенциалами внешнего поля в классе траекторно-сосредоточенных функций (ТСФ).

2. Построены с любой степенью точности по $\hbar \to 0$ квазиклассические квазиэнергетические спектральные серии, асимптотика оператора Флоке и фаза Ааронова-Анандана (в классе ТСФ) для уравнений типа Хартри с периодическим по времени оператором.

3. Построены оператор эволюции и однопараметрическое семейство операторов симметрии (операторы которого задают нелинейный аналог представления группы Гейзенберга-Вейля) одномерного уравнения типа Хартри с квадратичным оператором.

4. Сформулирован нелинейный принцип суперпозиции, позволяющий каждой линейной комбинации точных решений уравнения типа Хартри с квадратичным оператором сопоставить другое решение этого уравнения.

Теоретическая и практическая ценность работы

Результаты, приведенные в диссертации, имеют общетеоретический характер и иллюстрируют высокую эффективность метода квазиклассически сосредоточенных состояний на примере задачи Флоке для уравнения типа Хартри.

С одной стороны, использование квазиклассически сосредоточенных состояний позволяет достичь более глубокого понимания структуры самой квантовой теории. Это достигается, например, при решении «проблемы соответствия» результатов квантовой и классической механик, а именно, позволяет по новому взглянуть на квазиклассическое приближение как на приближенное описание квантовой системы в терминах новых классических динамических переменных. Показано, что для нелинейных уравнений соответствие результатов квантовой и классической механик существенно зависит от класса решений, на котором рассматривается классический предел $\hbar \to 0$.

Диссертация направлена на развитие метода квазиклассически сосредоточенных состояний[2] для построения спектральных серий многомерного нелинейного уравнения типа Хартри и его приложению к актуальным проблемам теоретической и математической физики: теории топологических фаз решений нелинейных уравнений, теории БЭК.

С другой стороны, квазиклассически сосредоточенные состояния удобно использовать для анализа конкретных физических эффектов во внешних полях. Предложенный в работе новый метод расчета квазиклассических квазиэнергетических спектральных серий оператора Хартри, отвечающих замкнутым траекториям системы Гамильтонона-Эренфеста, может иметь важное прикладное значение в спектроскопии, теории БЭК и в астрофизике.

Принципиальным отличием рассматриваемых в диссертации задач является то, что исследуемые нелинейные уравнения в общем случае не допускают интегрирования методом обратной задачи[3] и его обобщениями такими, например, как метод "d-бар"проблемы Захарова-Манакова – наиболее эффективное обобщение метода обратной задачи[4].

Полученные в работе общие формулы для фазы Ааронова-Анандана волновых функций оператора Хартри могут оказаться полезными как для прояснения статуса квантовых фаз в теоретической физике, так и для постановки экспериментов по их измерению.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Метод решения задачи Флоке для уравнения типа Хартри с периодическим по времени оператором в классе ТСФ.
2. Явные выражения для квазиклассических квазиэнергетических спектральных серий, асимптотики оператора Флоке и фазы Ааронова-Анандана квазиэнергетических состояний (в классе ТСФ) для уравнения типа Хартри с периодическим по времени оператором.

[2] Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu. Semiclassical trajectory-coherent approximation in quantum mechanics: I. High order corrections to multidimensional time-dependent equations of Schrodinger type // Ann. of Phys. (N.Y.). 1996. V.246, No 2, 231 - 290.

[3] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: Метод обратной задачи.* М.: Наука, 1980, 319 с.

[4] Konopelchenko B.G. *Solitons in multidimensions*. Singapour, London, Hong-Kong: World Scientific, 1993.

3. Нелинейный принцип суперпозиции, позволяющий каждой линейной комбинации точных решений уравнения типа Хартри с квадратичным оператором сопоставить другое решение этого уравнения.
4. Построеные точные решения, операторы симметрии, однопараметрическое семейство операторов симметрии, генераторы этого семейства для уравнения типа Хартри с квадратичным оператором.

Апробация диссертации и публикации

Результаты диссертации докладывались на международных конференциях:

— XIV международная летняя школа-семинар по современным проблемам теоретической и математической физики. 22 июня - 03 июля 2002 г., Казань;

— International Workshop "Gravity, Strings and Quantum Field Theory"(July 1 - 7 2002 g., Tomsk);

— XV International Conference "Symmetry in nonlinear mathematical physics", June 23-29, 2003 Institute of Mathematics, Kyiv (Kiev), Ukraine;

— Workshop on Separability Theory of Differential Equations. January 12 - 16, 2004 Department of Mathematics, Linkoping University (Sweden);

— XV международная летняя школа-семинар по современным проблемам теоретической и математической физики. 22 июня - 03 июля 2003 г., Казань;

— Всероссийская конференция "Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение", приуроченная к 85-летию академика Л.В. Овсянникова, 10 - 14 мая 2004 г., Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск;

— XVI международная летняя школа-семинар по современным проблемам теоретической и математической физики, 22 июня - 03 июля 2004 г., Казань;

— Int. Seminar "Day on Diffraction'2004". June 29 - July 03, 2004. S. Petersburg,

а также на научных семинарах кафедры высшей математики и математической физики Томского политехнического университета, кафедр теоретической физики и квантовой теории поля Томского государственного университета, кафедре прикладной математики Московского института электроники и математики, на Томском общегородском семинаре по теоретической физике.

По теме диссертации опубликовано 6 статей в отечественной и зарубежной научной печати, а также 7 тезисов докладов на всероссийских и международных конференциях.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, приложения, заключения и списка цитируемой литературы, содержащего 174 библиографических ссылки. Общий объем диссертации составляет 102 страницы. Работа содержит 3 рисунка.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, проведен краткий обзор литературы и установлена связь результатов, представленных в диссертации, с результатами работ других авторов. Дано описание структуры диссертации и сформулированы основные задачи, решаемые в ней.

В **первой главе диссертации** развит метод построения асимптотических квазипериодических решений $\Psi_{\mathcal{E}}(\vec{x},t,\hbar)$, то есть решений многомерной задачи Флоке

$$\Psi_{\mathcal{E}}(\vec{x},t+T,\hbar)=e^{-i\mathcal{E}T/\hbar}\Psi_{\mathcal{E}}(\vec{x},t,\hbar) \tag{1}$$

с квазиэнергией $\mathcal{E}$ для уравнения

$$\{-i\hbar\partial_t+\hat{\mathcal{H}}_\varkappa(t)\}\Psi=0,\quad \hat{\mathcal{H}}_\varkappa(t)=\hat{\mathcal{H}}(t)+\varkappa\hat{V}(t,\Psi),\qquad \Psi\in L_2(\mathbb{R}^n_x), \tag{2}$$

Здесь

$$\hat{\mathcal{H}}(t)=\mathcal{H}(\hat{z},t),\quad \hat{V}(t,\Psi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}dy\,\Psi^*(\vec{y},t)V(\hat{z},\hat{w},t)\Psi(\vec{y},t), \tag{3}$$

а самосопряженные в L_2 и упорядоченные по Вейлю операторы $\mathcal{H}(\hat{z},t)$, $V(\hat{z},\hat{w},t)$ периодически зависят от времени:

$$\hat{\mathcal{H}}(t+T)=\hat{\mathcal{H}}(t),\qquad \hat{V}(t+T,\Psi)=\hat{V}(t,\Psi) \tag{4}$$

и являются функциями от некоммутирующих операторов $\hat{z}=(-i\hbar\partial/\partial\vec{x},\vec{x})$, $\hat{w}=(-i\hbar\partial/\partial\vec{y},\vec{y})$, $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$; функция Ψ^* комплексно сопряжена к Ψ, $\varkappa$ – вещественный параметр, $\hbar$ – “малый параметр”, $\hbar\in[0,1[$. Асимптотические по малому параметру $\hbar$, $\hbar\to 0$ решения строятся в классе ТСФ.

Глава организована следующим образом. В первом разделе дана постановка задачи Флоке в классе ТСФ. Во втором разделе рассмотрены их простейшие свойства. Методика построения решений задачи (2), (1) в классе ТСФ опирается на технику решения задачи Коши[5] и существенно использует динамическую систему уравнений Гамильтона - Эренфеста (систему уравнений для средних и центрированных моментов). В третьем разделе приведен вывод системы Гамильтона–Эренфеста, описывающей “частицеподобные” свойства квазиклассически сосредоточенных решений уравнения типа Хартри. В четвертом разделе уравнение типа Хартри эффективно линеаризовано с помощью решений системы Гамильтона–Эренфеста и получено семейство ассоциированных линейных уравнений Шрёдингера, определяющих асимптотическое решение исходной задачи (2), (1). Для семейства ассоциированных уравнений Шрёдингера построено решение задачи Флоке в классе ТСФ. В пятом разделе с точностью$O(\hbar^{3/2})$ построены квазиэнергетические фоковские состояния уравнения типа Хартри и получен главный член квазиклассической асимптотики. В частности, для квазиэнергий с точностью $O(\hbar^{3/2})$ получено

$$\mathcal{E}_\nu^{(2)}(\mathrm{mod}\ \omega) = -\frac{1}{T}S(T,\hbar) + \hbar\sum_{k=1}^{n}\Omega_k(\nu_k+\frac{1}{2}), \tag{5}$$

$$S(T,\hbar) = \int\limits_0^T \{\langle \vec{P}(t,\hbar)\dot{\vec{X}}(t,\hbar)\rangle - \mathfrak{H}(Z(t,\hbar),t) -$$
$$-\frac{\tilde{\varkappa}}{2}\,\mathrm{Sp}\,V_{ww}(Z(t,\hbar),w,t)|_{w=Z(t,\hbar)}\Delta_2\}dt.$$

Здесь $Z(t,\hbar) = (\vec{P}(t,\hbar),\vec{X}(t,\hbar))$ – периодическое решение системы Гамильтона-Эренфеста второго порядка

$$\begin{aligned} &\dot{z} = J\partial_z(1+\frac{1}{2}\langle\partial_z,\Delta_2\partial_z\rangle + \frac{1}{2}\langle\partial_w,\Delta_2\partial_w\rangle)\Big[\mathcal{H}(z,t)+\tilde{\varkappa}V(z,w,t)\Big]\Big|_{w=z}, \\ &\dot{\Delta}_2 = J\mathfrak{H}_{zz}(z,t)\Delta_2 - \Delta_2\mathfrak{H}_{zz}(z,t)J, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\mathfrak{H}(z,t) = \Big[\mathcal{H}(z,t)+\tilde{\varkappa}V_{zz}(z,w,t)\Big|_{w=z}\Big], \quad \mathfrak{H}_{zz}(z,t) = \Big[\mathcal{H}_{zz}(z,t)+\tilde{\varkappa}V_{zz}(z,w,t)\Big|_{w=z}\Big],$$

а $(2n\times 2n)$ – матрица $\Delta_2(t)$ определена соотношением

$$\Delta_2(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{pp}(t) & \sigma_{px}(t) \\ \sigma_{xp}(t) & \sigma_{xx}(t) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

[5]V.V. Belov, A.Yu. Trifonov and A.V. Shapovalov, The Trajectory-Coherent Approximation and the System of Moments for the Hartree Type Equation // Int. J. Math. and Math. Sci. (2002). Vol. 32, No 6. P. 325-370. Белов В.В., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В., Квазиклассическое траекторно–когерентное приближение для уравнения типа Хартри // Теор. Мат. Физ. (2002). Т. 130, №3. С. 460-492.

Здесь $n \times n$ матрицы $\sigma_{xx}(t)$, $\sigma_{pp}(t)$, $\sigma_{px}(t)$ – матрицы "дисперсий" координат, импульсов и матрица корреляции координат и импульсов соответственно.

Через Ω_k, $k = \overline{1,n}$ обозначены показатели Флоке системы в вариациях, отвечающей траектории $z = Z(t,\hbar)$

$$\dot{a}_k = J\mathfrak{H}_{zz}(t)a_k, \quad k = \overline{1,n}, \quad a_k(t+T) = e^{i\Omega_k T}a_k(t). \tag{8}$$

В шестом разделе построены квазиклассически сосредоточенные квазиэнергетические решения (общий случай) для уравнения Хартри с произвольной степенной точностью по параметру $\sqrt{\hbar}$ при $\hbar \to 0$. Явные выражения для нелинейного оператора Флоке (оператора монодромии) уравнения (2) построены в заключительном разделе главы.

Во **второй главе диссертации** развитый метод применяется к построению геометрических фаз Ааронова-Анандана.

В восьмом разделе для геометрических фаз Ааронова-Анандана, соответствующих квазиэнергетическим ТКС уравнения (2) в квазиклассическом приближении, получено общее выражение

$$\begin{gathered}
\gamma_{\mathcal{E}_\nu} = \frac{1}{\hbar}\int\limits_0^T dt\langle\vec{P}(t),\dot{\vec{X}}(t)\rangle - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\Big(\nu_k+\frac{1}{2}\Big)\int\limits_0^T dt\{\dot{\tilde{a}}_k,\tilde{a}_k^*\} - \\
-\operatorname{Re}\int\limits_0^T dt\frac{i}{2}\sum_{l=1}^n\{a_0(t),a_l(t)\}\Big[\partial_z\sum_{k=1}^n\Big(\nu_k+\frac{1}{2}\Big)\int\limits_0^t d\tau\{a_k^*(\tau),J\Big[\mathcal{H}_{zz}(z,\tau)+ \\
+\tilde{\varkappa}V_{zz}(z,w,\tau)+\tilde{\varkappa}V_{ww}(z,w,\tau)\Big]a_k(t)\}\Big]\Big|_{z=w=Z_0(\tau)} + \frac{b_k^{(\nu)}(T)}{1-e^{i\Omega_k T}}\Big],
\end{gathered} \tag{9}$$

$$b_k^{(\nu)}(T) = \frac{1}{2i}\int\limits_0^T d\tau\{F_k^{(\nu)}(\tau),a_k^*(\tau)\}. \tag{10}$$

$$\begin{gathered}
F^{(\nu)}(t)=\Big[\partial_z\sum_{k=1}^n\Big(\nu_k+\frac{1}{2}\Big)\{a_k^*(t),J\Big[\mathcal{H}_{zz}(z,t)+ \\
+\tilde{\varkappa}V_{zz}(z,w,t)+\tilde{\varkappa}V_{ww}(z,w,t)\Big]a_k(t)\}\Big]\Big|_{z=w=Z_0(t)}, \quad \nu\in\mathbb{Z}_+^n.
\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь $\tilde{a}_k(t)$ – периодическая часть решения системы в вариациях(8), фигурными скобками обозначено кососкалярное произведение векторов.

Как видно из выражения (9), фаза Ааронова–Анандана $\gamma_{\mathcal{E}_\nu}$, отвечающая квазиэнергетическим ТКС $\Psi_{\mathcal{E}_\nu}$,полностью определяется двумя следующими геометрическими объектами: устойчивой в линейном приближении замкнутой фазовой траекторией $z = Z_0(t)$ системы Гамильтона-Эренфеста и комплексным ростком $r^n(Z_0(t))$, образованным из n линейно независимых решений Флоке $a_k(t)$ системы в вариациях .

В следующих разделах изложенная выше схема применена для нахождения в явном виде спектральных серий и ГФ нелокальных взаимодействий с квадратичным и гауссовским потенциалами.

В девятом разделе для уравнения (2) линейный и нелинейный операторы выбраны в виде

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} + \frac{\rho(x\hat{p} + \hat{p}x)}{2} - eEx\cos\omega t, \tag{12}$$

$$\hat{V}(t, \Psi)\Psi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\,[ax^2 + 2bxy + cy^2]|\Psi(y,t)|^2\Psi(x,t). \tag{13}$$

Здесь a, b и c – параметры потенциала, $\varkappa$ – параметр нелинейности, $k > 0$, ρ, E – заданные постоянные, m, e – масса и заряд частицы, соответственно.

Для квазиэнергетических уровней и фазы Ааронова–Анандана, соответственно, получено

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n = \Big[-\frac{e^2E^2}{2m(\tilde{\Omega}^2 - \omega^2)} - \frac{e^2E^2[\omega^2 + \rho^2 - \omega_0^2 - \zeta(a+2b+c)\omega_{\rm nl}^2(a+2b+c)]}{4m(\tilde{\Omega}^2 - \omega^2)^2}\Big] + \\ +\hbar\Big(\Omega + \frac{\tilde{\varkappa}c}{2m\Omega}\Big)\Big(n + \frac{1}{2}\Big),\end{aligned} \tag{14}$$

$$\gamma_{\mathcal{E}_n} = \frac{1}{\hbar}\frac{Te^2E^2\omega^2}{2m(\tilde{\Omega}^2 - \omega^2)^2}. \tag{15}$$

Здесь

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{|\omega_0^2 + \zeta(a+b)\omega_{\rm nl}^2(a+b) - \rho^2|}, \tag{16}$$

$$\Omega = \sqrt{|\omega_0^2 + \zeta(a)\omega_{\rm nl}^2(a) - \rho^2|}. \tag{17}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_{\rm nl}(u) = \sqrt{\frac{|\varkappa u|}{m}}, \qquad \zeta(u) = \mathrm{sign}\ (\varkappa u). \tag{18}$$

В десятом разделе рассматриваются трех- и одномерное уравнения (2) с нелокальным гауссовским потенциалом. В трехмерном случае линейный оператор выбирается в виде

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x},t))^2 - e\langle\vec{E}(t),\vec{x}\rangle + \frac{k}{2}\vec{x}^2, \tag{19}$$

где внешнее поле в операторе (19) представляет собой суперпозицию постоянного магнитного поля $\vec{H} = (0, 0, H)$ с векторным потенциалом $\vec{A} = \dfrac{1}{2}\vec{H} \times \vec{x}$, периодически изменяющегося во времени с частотой ω электрического поля $\vec{E}(t) = (E\cos\omega t, E\sin\omega t, 0)$ и поля осциллятора с потенциалом $\dfrac{k}{2}\vec{x}^{\,2}$. Нелокальный оператор $\hat{V}(t, \Psi(t))$ в (2) выбран в виде

$$\hat{V}(t, \Psi(t))\Psi(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{y} V_0 \exp\left[-\frac{(\vec{x} - \vec{y})^2}{2\gamma^2}\right] |\Psi(\vec{y}, t)|^2 \Psi(\vec{x}, t), \tag{20}$$

где V_0 и γ – вещественные параметры.

Выражения для спектра квазиэнергий и фазы Ааронова-Анандана имеют следующий вид:

$$\mathcal{E}_\nu = -\frac{eE}{2}\xi + \tilde{\varkappa} V_0 + \hbar\left[\left(\omega_+ - \frac{\eta\omega_{\rm nl}^2}{\omega_+ + \omega_-}\right)\left(\nu_1 + \frac{1}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\omega_- - \frac{\eta\omega_{\rm nl}^2}{\omega_+ + \omega_-}\right)\left(\nu_2 + \frac{1}{2}\right) + \left(\omega_s - \frac{\eta\omega_{\rm nl}^2}{2\omega_{\rm s}}\right)\left(\nu_3 + \frac{1}{2}\right)\right] + O(\hbar^{3/2}), \tag{21}$$

$$\gamma_{\mathcal{E}_\nu} = \frac{T}{2\hbar}(2\omega^2 + \omega\omega_H)m\xi^2 + O(\hbar^{3/2}). \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

Здесь

$$\xi = \frac{eE}{m(\omega_0^2 - \omega_H\omega - \omega^2)}, \quad \omega_H = \frac{eH}{mc}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$
$$\omega_a = \omega_0\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_H}{2\omega_0}\right)^2}, \quad \omega_{\rm nl} = \sqrt{\frac{|\tilde{\varkappa} V_0|}{m\gamma^2}}$$
$$\tilde{\varkappa} = \varkappa\|\Psi\|^2, \qquad \eta = \mathrm{sign}(\tilde{\varkappa} V_0),, \quad \omega_{\rm s} = \sqrt{\omega_0^2 - \eta\omega_{\rm nl}^2}$$
$$\omega_+ = \sqrt{\omega_a^2 - \eta\omega_{\rm nl}^2} + \frac{\omega_H}{2}, \quad \omega_- = \sqrt{\omega_a^2 - \eta\omega_{\rm nl}^2} - \frac{\omega_H}{2}.$$

В одномерном случае в уравнении (2) линейный оператор $\hat{\mathcal{H}}(t)$ выбран в виде

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} - eEx\cos\omega t + \frac{k}{2}x^2, \tag{24}$$

а нелинейный оператор $\hat{V}(t, \Psi(t))$ определён как

$$\hat{V}(t, \Psi(t))\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy V_0 \exp\left[-\frac{(x - y)^2}{2\gamma^2}\right] |\Psi(y, t)|^2 \Psi(x, t). \tag{25}$$

Спектр квазиэнергий $\mathcal{E}_n$ и фаза Ааронова Анандана имеют вид:

$$\mathcal{E}_n = -\frac{1}{4}eE\xi + \tilde{\varkappa}V_0 + \hbar\Big(\omega_{\rm s} - \frac{\eta\omega_{\rm nl}^2}{2\omega_{\rm s}}\Big)\Big(n + \frac{1}{2}\Big) + O(\hbar^{3/2}), \tag{26}$$

$$\gamma_{\mathcal{E}_n} = \frac{T}{2\hbar}m\omega^2\xi^2 + O(\hbar^{3/2}). \tag{27}$$

Спектр квазиэнергий (21) представляет собой сумму энергий трех гармонических осцилляторов со сдвинутыми за счет нелинейности комбинационными частотами $\omega_\pm$ и $\omega_{\rm s}$. Геометрические фазы (22) не содержат квантовых поправок и не зависят от нелинейного потенциала с точностью $O(\hbar^{3/2})$. Последнее справедливо и для одномерного периодического потенциала (26), (27). Это связано с тем, что в рассматриваемых примерах нелинейность и квантовые поправки с заданной точностью по $\hbar$ не влияют на решения системы Гамильтона–Эренфеста и, как следствие, на геометрию системы. Поэтому геометрические фазы также не зависят от этих факторов. Отметим, что геометрическая фаза в трехмерном случае (22) (при $\omega_H = 0$) в два раза больше, чем в одномерном случае (27). Это связано с тем, что в трехмерном случае полю Ψ отвечает движение по спирали.

В пределе $T \to \infty$ $(\omega \to 0)$ оператор $\hat{\mathcal{H}}(t)$ в виде (19) (в трехмерном случае) и (24) (в одномерном случае) не зависит от t т.е. $\lim\limits_{\omega\to\ 0}\hat{\mathcal{H}}(t) = \hat{\mathcal{H}}$. Поэтому оператор Хартри также не зависит от t, и соответствующие квазиэнергетические серии в этом пределе переходят в дискретные спектральные серии нелинейной задачи

$$(\hat{\mathcal{H}} + \varkappa\hat{V}(\Psi)\}\Psi = \mathcal{E}\Psi.$$

В **третьей главе** изучаются свойства симметрии одномерного уравнения типа Хартри с квадратичным периодическим по времени потенциалом внешнего поля

$$\Big\{-i\hbar\partial_t + \hat{\mathcal{H}}(t) + \varkappa\hat{V}(t,\Psi)\Big\}\Psi = 0, \tag{28}$$

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} - eEx\cos\omega t,$$

$$\hat{V}(t,\Psi)\Psi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\,[ax^2 + 2bxy + cy^2]|\Psi(y,t)|^2\Psi(x,t).$$

Здесь $k > 0$, m, e, a, b и c – параметры потенциала, $\varkappa$ – параметр нелинейности. В одиннадцатом и двенадцатом разделах находится точное решение динамической системы (6) и параметрического семейства ассоциированных линейных уравнений Шрёдингера. В результате развитый выше метод (приближенный по определению) позволят найти точные решения исходного уравнения. В тринадцатом разделе показана справедливость следующих утверждений:

Теорема 1. *Пусть оператор* $\hat{U}_\varkappa(t, s, \cdot)$ *определен соотношением*

$$\hat{U}_\varkappa(t, s, \psi)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\varkappa(x, y, t, s, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}(\psi)), \mathfrak{g}(s, \mathfrak{C}(\psi))\psi(y)\, dy, \tag{29}$$

где $G_\varkappa(x, y, t, s, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}(\psi), \mathfrak{g}(s, \mathfrak{C}(\psi)))$ *– функция Грина задачи* (28) *(Явный вид которой приведен в диссертации), а параметры* $\mathfrak{C}(\psi)$ *определяются уравнением*

$$\mathfrak{g}(t, \mathfrak{C})|_{t=s} = \mathfrak{g}_0(\psi) = \langle\psi|\hat{\mathfrak{g}}|\psi\rangle. \tag{30}$$

Тогда функция

$$\Psi(x, t) = \hat{U}_\varkappa(t, s, \psi)(x) \tag{31}$$

является точным решением задачи Коши для уравнения типа Хартри(28) *с начальным условием* $\Psi(x, t)|_{t=s} = \psi(x)$, *а оператор* $\hat{U}_\varkappa(t, s, \cdot)$ *является оператором эволюции нелинейного уравнения типа Хартри* (28). *Здесь*

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}) = (P(t, \mathfrak{C}), X(t, \mathfrak{C}), \sigma_{pp}(t, \mathfrak{C}), \sigma_{px}(t, \mathfrak{C}), \sigma_{xx}(t, \mathfrak{C}))^\intercal, \\ &\mathfrak{C} = (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)^\intercal \end{aligned} \tag{32}$$

есть общее решение системы Гамильтона-Эренфеста, а $\hat{\mathfrak{g}}$ *– столбец операторов*

$$\hat{\mathfrak{g}} = (\hat{p}, \hat{x}, (\Delta\hat{p})^2, \frac{1}{2}(\Delta\hat{p}\Delta x - \Delta x\Delta\hat{p}), (\Delta x)^2)^\intercal. \tag{33}$$

Теорема 2. *Пусть оператор* $\hat{U}_\varkappa^{-1}(t, s, \cdot)$ *определен соотношением*

$$\begin{aligned} \hat{U}_\varkappa^{-1}(t, s, \psi)(x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\varkappa^{-1}(x, y, t, s, \mathfrak{g}(t, (\psi)), \mathfrak{g}(s, \mathfrak{C}(\psi)))\psi(y)\, dy = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\varkappa(x, y, s, t, \mathfrak{g}(s, \mathfrak{C}(\psi)), \mathfrak{g}(t, (\psi)))\psi(y)\, dy, \end{aligned} \tag{34}$$

Здесь функция $G_\varkappa(x, y, s, t, \mathfrak{g}(s, \mathfrak{C}(\psi)), \mathfrak{g}(t, (\psi)))$ *определена соотношением* (29), *в котором переменную* t *необходимо заменить на* s, *переменную* s *на* t, *а постоянные* $\mathfrak{C}$ *определяются из уравнения*

$$\mathfrak{g}(s, \mathfrak{C})|_{s=t} = \mathfrak{g}_0(\psi) = \langle\psi|\hat{\mathfrak{g}}|\psi\rangle. \tag{35}$$

Тогда оператор $\hat{U}^{-1}_{\varkappa}(t,s,\cdot)$ (34) *является левым обратным для оператора* $\hat{U}_{\varkappa}(t,s,\cdot)$ (29), *то есть*

$$\hat{U}^{-1}_{\varkappa}(t,s,\hat{U}_{\varkappa}(t,s,\psi))(x)=\psi(x), \qquad \psi\in\mathcal{P}^0_{\hbar}. \tag{36}$$

В четырнадцатом разделе с помощью построенных конструкций в явном виде найдены операторы симметрии нелинейного уравнения (28). Пусть $\hat{\mathsf{a}}$ – некоторый оператор, действующий в $\mathcal{P}^0_{\hbar}$ ($\hat{\mathsf{a}}:\mathcal{P}^0_{\hbar}\to\mathcal{P}^0_{\hbar}$) и $\Psi(x,t)$ – произвольная функция из класса $\mathcal{P}^t_{\hbar}$ ($\Psi(x,t)\in\mathcal{P}^t_{\hbar}$). Определим оператор $\hat{\mathsf{A}}(\,\cdot\,)$ соотношением

$$\Phi(x,t)=\hat{\mathsf{A}}(\Psi(t))(x)=\hat{U}_{\varkappa}(t,\hat{\mathsf{a}}\,\hat{U}^{-1}_{\varkappa}(t,\Psi(t)))(x). \tag{37}$$

Справедлива

Теорема 3. *Если функция* $\Psi(x,t)$ *– решение уравнения типа Хартри* (28), *то* $\Phi(x,t)$ (37) *– также решение уравнения* (28).

Все основные утверждения и конструкции данной главы обобщаются с заданной точностью по $\hbar$, $\hbar\to 0$, и для уравнения типа Хартри более общего вида. Однако, данное обобщение будет справедливо лишь в приближенном смысле, с точностью до $\hat{O}(\hbar^{(M+1)/2})$, $\hbar\to 0$, где M – порядок системы Гамильтона-Эренфеста. В частности, это позволяет построить особый вид приближенных операторов симметрии (а также симметрий) для указанных выше уравнений типа Хартри, которые естественно назвать квазиклассическими операторами симметрии (симметриями).

В **Приложении А** приведены свойства системы в вариациях, необходимые для полноты изложения.

В **заключении** перечислены основные результаты, приведенные в диссертации и выносимые на защиту.

Основные работы, опубликованные по теме диссертации:

1. Лисок А.Л., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В., Яковлев Д.Е. Квазиэнергетические спектральные серии и геометрические фазы для уравнения типа Хартри // Сб. «Новейшие проблемы теории поля» под ред. А.В. Аминовой. Труды XIII-XIV международных летних школ-семинаров по современным проблемам теоретической и математической физики. Казань: Изд-во «РегентЪ», 2003 г. С. 264-279.

2. Лисок А.Л., Литвинец Ф.Н., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Геометрические фазы и квазиэнергетические спектральные серии уравнения типа Хартри с квадратичным потенциалом // Известия вузов, Физика. — 2004. — Т. 47, № 4. — С. 55-62.
3. Lisok A.L., Trifonov A.Yu., and Shapovalov A.V. The evolution operator of the Hartree-type equation with a quadratic potential // J. Phys. A. — 2004. — Vol. 37. — P. 4535-4556 (**e-print math-ph/0312004**, 23 pp.).
4. Lisok A.L., Trifonov A.Yu. and Shapovalov A.V. Semiclassical Approach to the Geometric Phase Theory for the Hartree Type Equation // Proc. of Inst. of Math. of NAS of Ukraine. — 2004. — Vol. 50, № 3. — P. 1454-1465.
5. Лисок А.Л., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Квазиклассическое приближение в теории геометрических фаз для уравнения типа Хартри // Сб. «Новейшие проблемы теории поля» под ред. А.В. Аминовой. Труды XV международной летней школы-семинара по современным проблемам теоретической и математической физики. Казань, 2004 г. С. 191-202.
6. Лисок А.Л., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Функция Грина уравнения типа Хартри с квадратичным потенциалом // Теор. матем. физика. — 2004. — Т. 141, № 2. — С. 228-242.