На правах рукописи

Кабанова Татьяна Валерьевна

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СКАЧКА СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

05.13.01 – "Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)"

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Томск – 2004

Работа выполнена в Томском государственном университете на кафедре высшей математики и математического моделирования.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Воробейчиков Сергей Эрикович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, доцент Дмитриев Юрий Глебович, кандидат технических наук, доцент Шелестов Александр Андреевич
Ведущая организация:	Институт проблем управления РАН, г. Москва

Защита состоится 25 марта 2004 г. в 10.30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.12 при Томском государственном университете по адресу: 634050, г.Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан 20 февраля 2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор технических наук,
профессор В.И.Смагин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Данная диссертационная работа посвящена проблеме обнаружения разладки. Под обнаружением разладки понимается класс задач обнаружения изменения вероятностных характеристик случайной последовательности.

Впервые задача обнаружения разладки была сформулирована в 30-е годы XX века в работе Шьюхарта и нашла применение в промышленном производстве, экономике, медицинских исследованиях, геофизике, задачах технической диагностики, обработке сигналов.

С развитием информационных технологий и необходимостью автоматизации процессов накопления, обработки и анализа данных в науке, производстве и бизнесе появляются новые области применения данной задачи.

Таким образом, класс задач обнаружения разладки является очень широким. Эти задачи отличаются одна от другой предположениями о модели наблюдаемого процесса и подходами к ее решению. Существует два основных метода решения задачи разладки: методы апостериорного обнаружения по выборке фиксированной длины и последовательные методы обнаружения. В первом случае предполагается, что в имеющейся последовательности наблюдений в некоторый момент произошло изменение характеристик и на основе полученных наблюдений необходимо оценить момент изменений. При этом свойства получаемых оценок изучаются в асимптотической постановке при объеме наблюдений, стремящимся к бесконечности. Для различных моделей наблюдаемых процессов апостериорные методы обнаружения рассматривались Дарховским Б.С, Бродским Б.Е. и др.

При последовательном обнаружении на каждом шаге при поступлении нового наблюдения гипотеза о наступлении разладки либо принимается и наблюдения прекращаются, либо отклоняется и наблюдения продолжаются дальше. Поскольку для принятия решения о наличии разладки необходимо получить определенное количество наблюдений, описываемых новой моделью, возможно возникновение запаздывания в обнаружении. Но возможна и другая ситуация, когда решение о наличии разладки принимается тогда, когда реально изменение еще не произошло, т.е. имеет место ложная тревога. Ширяевым были введены показатели качества процедуры обнаружения: малое число ложных тревог или, что то же самое, большое среднее время между ложными тревогами и малое среднее время запаздывания. Требование одновременного выполнения этих условий является противоречивым, т.к. чем чувствительнее процедура к возможным изменениям, тем больше вероятность возникновения ложных тревог и наоборот, чем менее чувствителен детектор к шуму, тем больше среднее время запаздывания в обнаружениях. Процедура обнаружения считается оптимальной, если при фиксированном среднем времени между ложными тревогами запаздывание в обнаружении минимально.

Хорошо изученной является задача обнаружения изменения распределения в последовательности независимых случайных величин, для решения которой применяются методы скользящего среднего, метод экспоненциального сглаживания, методы, основанные на алгоритме кумулятивных сумм, предложенном Пейджем и метод усредненного отношения правдоподобия Гиршика-Рубина-Ширяева.

Лорденом было установлено, что оптимальной в классе последовательных процедур обнаружения (в смысле минимума среднего времени запаздывания при заданном среднем времени между ложными тревогами) в случае известного распределения наблюдаемого процесса является процедура кумулятивных сумм, представляющая собой многократно возобновляемую процедуру Вальда с нулевым нижним порогом. Там же было показано, что отношение среднего времени запаздывания к логарифму среднего времени между ложными тревогами стремиться к константе при стремлении среднего времени между ложными тревогами к бесконечности.

Многие работы, посвященные последовательному обнаружению разладки, рассматривают обнаружения изменения функции распределения в последовательности независимых случайных величин в предположении, что известны начальная и конечная модели процесса. Большой интерес на практике представляют случаи, когда распределение наблюдаемого процесса до и после момента разладки не известно.

Даже в случае независимых наблюдений аналитическое исследование характеристик процедуры кумулятивных сумм является довольно трудной задачей. В работах Поллака, Зигмунда, Якира получены асимптотические формулы для среднего времени между ложными тревогами и формулы для среднего времени запаздывания, содержащие неизвестные константы.

В работах таких авторов как Бассвиль, Бенвенист , Бородкин, Моттль, Никифоров, Клигене, Липейка, Липейкене, рассмотрены процедуры обнаружения момента разладки случайных процессов с зависимыми значениями. В большинстве этих работ в качестве моделей наблюдаемых процессов чаще всего используются процессы авторегрессионного типа. Аналитическое исследование качественных характеристик и свойств подобных процедур является очень сложной и порой невыполнимой задачей.

Таким образом, актуальным является разработка последовательных методов обнаружения произвольного скачка среднего значения в последовательности независимых случайных величин с неизвестным законом распределения и процессов с зависимыми значениями, а также анализ предложенных методов.

Целью настоящей работы является построение последовательных процедур обнаружения разладки, позволяющих обнаруживать как увеличение, так и уменьшение среднего значения наблюдаемого процесса для последовательности независимых наблюдений с неизвестным законом распределения и процесса авторегрессии с неизвестными параметрами с возможностью аналитического исследования характеристик данной процедуры.

Методы исследования. При решении поставленной задачи использовался аппарат теории вероятностей, теории случайных процессов, теории аналитических функций, теории матриц и методы статистического моделирования.

Научная новизна. В данной работе построены последовательные процедуры обнаружения разладки, позволяющие обнаруживать как положительное так и отрицательное изменение среднего значения наблюдаемого процесса для последовательности независимых наблюдений с неизвестным законом распределения и процесса авторегрессии с неизвестными параметрами. Получены формулы для расчета основных характеристик процедуры: среднего времени между ложными тревогами и среднего времени запаздывания.

Практическая ценность. Полученные результаты могут применяться в медицинских исследованиях, в экономике и финансовом анализе, геофизике, задачах климато-экологического мониторинга, технической диагностике, обработке сигналов.

Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации.

Постановка, изложенных в диссертации задач, была сделана научным руководителем, д.ф.-м.н., доц. Воробейчиковым С.Э. Результаты, полученные в диссертации, доказывались и обосновывались лично автором.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 128 страниц, библиография содержит 91 наименование.

На защиту выносятся следующие основные положения:

1. Последовательная процедура обнаружения изменения среднего значения в последовательности независимых случайных величин с неизвестным законом распределения.

2. Последовательная процедура обнаружения изменения среднего значения устойчивого процесса авторегрессии первого порядка с нормальным и произвольным распределениями шумов.

3. Последовательная процедура обнаружения изменения среднего значения устойчивого процесса авторегрессии $p-$того порядка с нормальным распределением шумов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, изложены цель исследования, научная новизна, теоретическая и практическая ценность результатов, методика исследования, дается общая характеристика диссертационной работы.

В первой главе предлагается последовательная процедура, позволяющая обнаруживать как увеличение, так и уменьшение среднего в наблюдениях. При построении процедуры используется метод обнаружения разладки в многоканальной системе. Получены формулы для определения среднего времени между ложными тревогами и среднего времени запаздывания в обнаружении разладки.

Постановка задачи

Предполагается, что наблюдается последовательность независимых случайных величин $\{X_i\}$ с функцией распределения $F(x)$ до момента разладки. Появление сигнала в некоторый момент θ (момент разладки) приводит к тому, что среднее значение наблюдений изменяется на неизвестную величину a. Наблюдения имеют распределение

$$F_i(x) = \begin{cases} F(x), & \text{если} \quad i < \theta, \\ F(x-a), & \text{если} \quad i \geq \theta. \end{cases} \tag{1}$$

Предполагается, что $F(x)$ имеет отличную от нуля производную $f(x) = F'(x)$ для $x \in R$. Требуется по наблюдениям $\{X_i\}$ обнаружить момент разладки θ.

Предлагается процедура обнаружения изменения среднего, основанная на алгоритме кумулятивных сумм (АКС), предложенном Пейджем.

Случай положительного сдвига среднего значения наблюдаемого процесса был изучен в работе Воробейчикова С.Э. Когда параметр сдвига $a > 0$, в качестве величин, реагирующих на изменение, в процедуре использовались величины

$$y_i = sign(x_i - x_{i-k}), \tag{2}$$

где k–натуральное число (параметр процедуры, характеризующий глубину памяти).

$$
\begin{aligned}
&M\{y_i|\ i<\theta\}=M_0\{y_i\}=0,\\
&M\{y_i|\ i\geq\theta\}=M_\theta\{y_i\}>0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

M_0 обозначает усреднение по распределению $F(x)$, а M_θ – по распределению $F(x-a)$.

Лорденом было показано, что АКС является оптимальным в классе последовательных процедур обнаружения в смысле минимума среднего времени запаздывания ($T_{\text{Зап}}$) при заданном среднем времени между ложными тревогами ($T_{\text{ЛТ}}$) в случае известной модели наблюдаемого процесса. Для оптимальной работы процедуры необходимо, чтобы до момента разладки математическое ожидание было меньше нуля, а после - больше нуля. Поскольку y_i имеют нулевое среднее до момента разладки θ, для эффективного использования процедуры кумулятивных сумм вводится параметр δ и полученная последовательность преобразуется следующим образом:

$$z_i=y_i-\delta,\quad \delta>0.$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&M_0\{z_i\}=-\delta<0,\\
&M_\theta\{z_i\}=M_\theta\{y_i\}-\delta=p-(1-p)-\delta=2p-1-\delta.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Параметр δ необходимо выбирать таким образом, чтобы мат. ожидание после разладки осталось положительным. Отсюда получаем условие на параметр δ :

$$0<\delta<2p-1. \tag{5}$$

Для упрощения последующих вычислений параметр δ выбирается в виде

$$\delta=\frac{m}{l}, \tag{6}$$

где m и l - натуральные числа, причем $m<l$. Обозначим

$$N=l+m, n=l-m. \tag{7}$$

Далее осуществляется переход к статистикам

$$z_i^1=l\cdot y_i-m=sign(x_i-x_{i-k})\cdot l-m. \tag{8}$$

Величины z_i^1 могут принимать значения n и $(-N)$. Среднее значение этих величин до и после разладки определяется равенствами

$$\begin{aligned} &M_0\{z_i^1\} = -m < 0, \\ &M_\theta\{z_i^1\} = l \cdot M_\theta\{y_i\} - m. \end{aligned} \tag{9}$$

К величинам z_i^1 применяется алгоритм кумулятивных сумм (АКС) [10]

$$S_i = max(N, z_i^1 + S_{i-1}), \quad S_0 = N. \tag{10}$$

Решение о наличии разладки принимается, если кумулятивная сумма S_i достигнет целочисленного порога $h > N$.

Переход от величин y_i к z_i^1 приводит к тому, что до момента разладки θ среднее значение z_i^1 меньше нуля. Это обеспечивает экспоненциальный рост T_0 при увеличении порога h.

В случае, когда параметр сдвига a меньше нуля (это соответствует уменьшению среднего значения наблюдений после разладки), процедуру обнаружения можно построить аналогичным образом, заменяя величины x_i на $-x_i$.

Для обнаружения уменьшения среднего значения наблюдений используется вторая процедура АКС:

$$\begin{aligned} &z_i^2 = sign(x_{i-k} - x_i) \cdot l - m, \\ &S_0 = l + m, \quad S_i = max(l + m, z_i^2 + S_{i-1}). \end{aligned} \tag{11}$$

В общем случае параметр сдвига a может быть как положительным, так и отрицательным. Одновременное использование двух АКС, один из которых ориентирован на обнаружение увеличения среднего, а другой – на уменьшение, приводит к появлению значительных трудностей при нахождении характеристик. Поэтому предлагается процедура, в которой АКС применяются поочередно. Переход от одного из них к другому происходит в моменты времени, когда соответствующая кумулятивная сумма достигает одного из крайних значений: N или h.

Процедуру кумулятивных сумм будем применять к последовательностям z_i^j, изменяя номер j последовательности z_i^j в определенные ниже моменты времени.

Будем считать ту последовательность, в которой после разладки среднее значение наблюдений увеличивается, первой, а ту, в которой среднее уменьшается – второй. Обозначим через z_i статистики z_i^j, используемые в текущий момент времени i в АКС; P_0– распределение величин z_i до момента разладки, а через P_1 и P_2– распределения этих величин после разладки соответственно в первой и второй последовательностях. Тогда до момента разладки для обеих последовательностей распределения z_i одинаковы

$$P_0(z_i = n) = P_0(z_i = -N) = \frac{1}{2}. \tag{12}$$

После разладки распределения z_i изменяются

$$\begin{aligned} &P_1(z_i = n) = p, \quad P_1(z_i = -N) = q < \tfrac{1}{2}, \\ &P_2(z_i = n) = q, \quad P_2(z_i = -N) = p > \tfrac{1}{2}, \\ &p + q = 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Зависимость вероятности p от параметра сдвига a определяется соотношением

$$p = 1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x-a)dF(x). \tag{14}$$

Если в наблюдаемой последовательности кумулятивная сумма S_i (10) достигает верхнего порога h, то принимается решение о наличии разладки. Если сумма S_i становится меньше N, то значение S_i полагается равным N и величины z_i выбираются далее из другой последовательности.

В работе производится расчет и анализ основных характеристик процедуры: обнаружения являются среднее время между ложными тревогами и среднее время запаздывания.

Для этих характеристик в работе были построены уравнения, получены асимптотически точные формулы для расчета данных характеристик при любом фиксированном значении порога h и исследованы асимптотические свойства полученных соотношений. Данные результаты сформулированы в Теореме 1.1.

Теорема 1.1. Если параметр процедуры обнаружения δ удовлетворяет неравенству $0 < \delta < 2p-1$, где p– вероятность, соответствующая изменению среднего значения наблюдаемого процесса a, то характеристики процедуры определяются соотношениями

$$T_{\text{лт}} = L_1 \widetilde{\lambda}^h + L_2 h + L_3 + o\left(1\right), \tag{15}$$

где $\widetilde{\lambda} > 1$– корень уравнения

$$\lambda^{N+n} - 2\lambda^N + 1 = 0, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} T_{\text{зап1}} &= Kh + K_1 + o\left(1\right), \\ T_{\text{зап2}} &= Kh + K_2 + o\left(1\right), \end{aligned} \tag{17}$$

где $L_1, L_2, L_3, K, K_1, K_2$–константы известного вида.

Из теоремы 1.1 следует, что среднее время между ложными тревогами $T_{\text{лт}}$ растет экспоненциально при $h \to \infty$, а $T_{\text{зап}1}$ и $T_{\text{зап}2}$ — линейно по h, что характерно для оптимальных процедур в случае известных моделей наблюдаемого процесса до и после момента разладки.

Соотношения теоремы 1.1 позволяют находить среднее время запаздывания в обнаружении разладки $T_{\text{зап}1}$ и $T_{\text{зап}2}$ в предположении, что в момент разладки применяется процедура обнаружения, ориентированная соответственно на увеличение или уменьшение среднего. При этом реально время запаздывания в обнаружении будет зависеть от того, в каком состоянии j находилась сумма S_j в момент разладки (чем ближе она к пороговому значению h, тем меньше будет запаздывание). Если же моменту разладки предшествует длительный период наблюдения, то в системе устанавливается стационарный режим, что позволяет получить точные формулы для среднего времени запаздывания $T_{\text{зап}}$ в обнаружении разладки с учетом того, с какой вероятностью сумма S_j будет находится в том или ином состоянии.

Запаздывание в стационарном режиме определяется формулой

$$\overline{T}_{\text{зап}} = \frac{1}{2} \sum_{j=N}^{h-1} \left(T_1(j) + T_2(j)\right) \pi_j, \tag{18}$$

где через π_j обозначены стационарные вероятности того, что в момент времени k сумма S_k имеет значение j.

$$\overline{T}_{\text{зап}} = Kh + \overline{K}_1 + o\left(1\right), \tag{19}$$

где $K, \overline{K}_1$– константы известного вида.

В таблице 1.3 приведены результаты, показывающие хорошее совпадение теоретических результатов для нахождения характеристик процедуры в соответствии с соотношениями теоремы 1.1 с результатами численного моделирования.

Таблица 1.3. Характеристики процедуры.

h	*Теоретические*			*Экспериментальные*		
	$T_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап1}}$	$T_{\text{зап2}}$	$\widehat{T}_{\text{лт}}$	$\widehat{T}_{\text{зап1}}$	$\widehat{T}_{\text{зап2}}$
150	765.824	116.524	119.162	754	114	116
100	205.177	69.186	71.824	204	69	70
50	32.316	26.766	29.389	32	21	23

Таблицы 1.4, 1.5 иллюстрируют влияние параметров процедуры на ее характеристики.

Таблица 1.4. Влияние параметра δ. $(a = 2, \quad r = 0.2)$

h	$\delta = \frac{1}{8}$		$\delta = \frac{1}{10}$		$\delta = \frac{1}{12}$	
	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$
30	253	15	292	10	575	6
50	56	35	107	24	171	17
100	6	102	17	60	30	44

Таблица 1.5. Влияние параметра a. $(\delta = 0.1, \quad r = 0.2)$

h	$a = 1$		$a = 3$		$a = 5$	
	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$
30	293	14	291	8	288	7
50	108	42	107	15	106	10
100	17	122	17	27	16	19

В работе было проведено сравнение качества построенной процедуры для случая неизвестного распределения наблюдаемого процесса с оптимальными процедурами для случаев известных распределений.

Случаи известного распределения

Для процедур обнаружения момента разладки, когда известны начальная и конечная модели наблюдаемого процесса, значение отношения известно и равно

$$\lim_{T_{\text{лт}} \to \infty} \frac{T_{\text{зап}}}{lnT_{\text{лт}}} = \frac{1}{K(\theta)}, \tag{20}$$

где

$$K(\theta) = M_\theta ln\left(\frac{f_\theta(x)}{f_0(x)}\right) \tag{21}$$

– информация по Кульбаку. В работе найдено значение этого отношения для различных типов распределения. Соответствующее значение параметра a определяется из уравнения (14).

ГАУСОВСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

$$K(\theta) = \frac{a^2}{2\sigma^2}, \tag{22}$$

$$\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = p. \tag{23}$$

ДВОЙНОЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

$$K(\theta) = e^{-\lambda a} + \lambda a - 1, \tag{24}$$

$$p = 1 - \frac{1}{4}(\lambda a + 2)e^{-\lambda a}. \tag{25}$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОШИ

$$K(\theta) = \frac{\lambda}{\pi} \cdot ln\left(\frac{a^2}{4\lambda^2} + 1\right), \tag{26}$$

$$a = 2\lambda\ tg\left(\left(p - \frac{1}{2}\right)\pi\right). \tag{27}$$

Случай неизвестного распределения

В соответствии с теоремой 1.1

$$\lim_{T_{\text{лт}} \to \infty} \frac{T_{\text{зап}}}{lnT_{\text{лт}}} = const, \tag{28}$$

причем данная константа определяется соотношением

$$\frac{T_{\text{зап}}}{lnT_{\text{лт}}} \approx \frac{1}{(pn - qN) \cdot ln\widetilde{\lambda}}. \tag{29}$$

Для сравнения полученных результатов было проведено численное моделирование, результаты которого представлены в таблице 1.6.

Таблица 1.6.

p	Неизвест. распред.	Распред. Коши	Двойн. эксп. распред.	Нормал. распред.
0.51	4272.0	3183.0	1591.0	1266.0
0.60	49.6	31.3	15.5	13.6
0.70	12.6	7.4	3.6	3.4
0.80	5.4	2.9	1.4	1.4
0.90	2.7	1.3	0.61	0.67
0.99	1.70	0.45	0.19	0.23

Во второй главе рассматривается задача обнаружения момента изменения среднего значения процесса авторегрессии первого порядка с неизвестными параметрами. Предлагается последовательная процедура обнаружения как положительного, так и отрицательного сдвига среднего наблюдаемого процесса. При этом на первом этапе производится оценивание неизвестных (мешающих) параметров авторегрессионной части. Далее осуществляется преобразование наблюдаемого процесса с целью ослабления влияния этих параметров. К полученному процессу применяется модифицированная процедура обнаружения. Получены формулы для нижней границы для среднего времени между ложными тревогами и верхней границы для среднего времени запаздывания в обнаружении разладки.

Постановка задачи.

Наблюдается устойчивый процесс авторегрессии первого порядка

$$x_{i+1} - M = \lambda(x_i - M) + \xi_{i+1}, \quad i = 0, 1, ..., \tag{30}$$

где

M - неизвестное среднее значение наблюдаемого процесса,

λ - неизвестный параметр процесса авторегрессии, $|\lambda| < 1$.

$\{\xi_i\}_{i\geq 0}$ - последовательность независимых случайных величин, распределенных по нормальному закону с $M\xi_i = 0$ и $D\xi_i = 1$.

В некоторый момент θ происходит изменение среднего значения наблюдаемого процесса на неизвестную величину a. Требуется по наблюдениям процесса оценить момент разладки θ.

Уравнение (30) можно записать в виде

$$x_{i+1} = \mu + \lambda x_i + \xi_{i+1}, \tag{31}$$

где

$$\mu = M\left(1 - \lambda\right). \tag{32}$$

В момент времени θ происходит изменение значения μ на величину

$$\widetilde{a} = a(1 - \lambda). \tag{33}$$

Поскольку значение λ неизвестно, в данной модели он является мешающим параметром. Для того, чтобы уменьшить его влияние на качество процедуры обнаружения, на начальном этапе наблюдений строится оценка этого параметра $\hat{\lambda}$ методом, предложенным Воробейчиковым С.Э.

Построенная оценка обладает свойством равномерной ограниченности среднеквадратичекого уклонения при любых распределениях шумов

$$M(\lambda - \hat{\lambda})^2 \leq \frac{1}{H}, \tag{34}$$

где H- порог процедуры оценивания.

Построение процедуры обнаружения

На основе исходных наблюдений с использованием полученной оценки строится новая вспомогательная последовательность

$$y_{i+1} = x_{i+1} - \hat{\lambda} x_i = \mu + \left(\lambda - \hat{\lambda}\right) x_i + \xi_{i+1}. \tag{35}$$

Рассмотрим сначала случай положительного сдвига среднего, когда параметр $a > 0$.

Предлагается процедура обнаружения увеличения среднего (a>0) для процесса авторегрессии, аналогичная случаю независимых наблюдений. Осуществляется переход к последовательности z_i^1 по формуле

$$z_i^1 = sign(y_i - y_{i-k} - \varepsilon) \cdot l - m. \tag{36}$$

Здесь l, m, k – натуральные числа $(m < l)$, $\varepsilon > 0$– вспомогательный параметр. К построенной последовательности применяется АКС

$$S_i = max(l + m, z_i^1 + S_{i-1}), \quad S_0 = l + m. \tag{37}$$

Решение о наличии разладки принимается при достижении суммой S_i порога h.

Для обнаружения уменьшения среднего значения наблюдений, то есть для случая $a < 0$, используется вторая процедура АКС, в которой величины x_i заменяются на $-x_i$:

$$\begin{aligned} &z_i^2 = sign(y_{i-k} - y_i - \varepsilon) \cdot l - m, \\ &S_0 = l + m, \quad S_i = max(l + m, z_i^2 + S_{i-1}). \end{aligned} \tag{38}$$

Процедуры АКС применяются последовательно, изменяя номер j последовательности z_i^j, если значение S_i становится меньше $l + m$.

Основными характеристиками построенной процедуры являются среднее время между ложными тревогами $T_{\text{ЛТ}}$ и среднее время запаздывания $T_{\text{зап}1}$, $T_{\text{зап}2}$ при наблюдении первой и второй последовательности соответственно. В работе получены асимптотически точные формулы для расчета этих характеристик при любом фиксированном значении порога процедуры h, а также исследованы асимтотические свойства. Соотношения для нахождения этих характеристик представлены в теоремах 2.1-2.4.

Теорема 2.1. Пусть существует такое p_0, для которого выполнено следующее условие

$$P_0(z_i > 0|\ z_{i-1}) \leq p_0 < \frac{1 + \delta}{2}. \tag{39}$$

Тогда для среднего времени между ложными тревогами справедлива оценка

$$T_{\text{ЛТ}} \geq \widetilde{T}_{\text{ЛТ}},$$

где $\widetilde{T}_{\text{ЛТ}}$ растет экспоненциально при увеличении порога h :

$$\widetilde{T}_{\text{ЛТ}} = L_1 \tilde{\lambda}^h + L_2 h + L_3 + o\,(1)\,, \tag{40}$$

где $L_1,\ L_2,\ L_3,\ \tilde{\lambda}$ – известные константы, $\tilde{\lambda} > 1$– корень уравнения

$$p_0 \lambda^{N+n} - \lambda^N + q_0 = 0. \tag{41}$$

Оценим вероятность $P_0(z_i > 0|\ z_{i-1})$. Рассмотрим последовательность

$$z_n = sign(y_n - y_{n-k} - \varepsilon) \cdot l - m, \tag{42}$$

$$y_{n+1} = x_{n+1} - \hat{\lambda} x_n = \mu + \left(\lambda - \hat{\lambda}\right) x_n + \xi_{n+1}. \tag{43}$$

Обозначим $\Delta_n = (\lambda - \hat{\lambda})(x_n - x_{n-k})$ и $P(\Delta_n \geq b) = P_\Delta$.

Теорема 2.2. Пусть параметры процедуры H (34), ε и b такие, что выполняется условие

$$\Phi\left(\frac{b-\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) + \frac{P_\Delta}{\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)} < \frac{1+\delta}{2}, \tag{44}$$

где $\Phi(x)$– функция стандартного нормального распределения. Тогда для вероятностей $P_0(z_{n+1} > 0 \mid z_n)$ выполнены условия теоремы 2.1, где $p_0 = \Phi\left(\frac{b-\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) + \frac{P_\Delta}{\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)}$.

Теоремы 2.1,2.2 показывают, что при подходящем выборе параметров процедуры имеет место экспоненциальный рост среднего времени между ложными тревогами при увеличении порога h.

Теорема 2.3. Пусть существует такое q_1, для которого выполнено следующее условие

$$P_1(z_n < 0|\ z_{n-1}) \leq q_1 < \frac{1-\delta}{2}. \tag{45}$$

Тогда для среднего времени запаздывания справедлива оценка

$$T_{\text{зап}1} \leq \widetilde{T}_{\text{зап}1}, \tag{46}$$

где $\widetilde{T}_{\text{зап}1}$ растет линейно при увеличении порога $h:$

$$\widetilde{T}_{\text{зап}1} = Kh + K_1 + o\left(1\right), \tag{47}$$

где $K,\ K_1$ – известные константы.

Теорема 2.4. Пусть сдвиг $\tilde{a}$ (33) и параметры процедуры H (34), ε и b такие, что выполняется условие

$$\Phi\left(\frac{b-\tilde{a}+\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) + \frac{P_\Delta}{\Phi\left(\frac{\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)} < \frac{1-\delta}{2}, \tag{48}$$

где $\tilde{a}$ – параметр сдвига, определенный в (33). Тогда для вероятностей $P_1(z_n > 0 \mid z_{n-1})$ выполнены условия теоремы 2.3, где

$$q_1 = \Phi\left(\frac{b - \tilde{a} + \varepsilon}{\sqrt{2}}\right) + \frac{P_\Delta}{\Phi\left(\frac{\varepsilon - \tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Теоремы 2.3 и 2.4 показывают, что при подходящем выборе параметров процедуры имеет место линейный рост среднего времени запаздывания при увеличении порога h.

Аналогичные результаты справедливы для среднего времени запаздывания при наблюдении второй последовательности.

Таблица 2.1 показывает, на сколько модификация процедуры обнаружения улучшает ее характеристики.

Таблица 2.1. Сравнение результатов работы немодифицированной и модифицированной процедур.

Параметры процедур $\lambda = 0.7, \quad a = 0.5, \quad \delta = 0.1$

Для модифицированной процедуры $\varepsilon = 0.1$

Немодифицированная			*Модифицированная*		
h	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$	h	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$
30	303	16	30	263	14
50	94	79	50	86	38
100	11	203	100	10	157

В таблицах 2.4, 2.7 представлено влияние параметров на характеристики процедуры.

Таблица 2.4. $a = 1, \quad \delta = 0.1, \quad \varepsilon = 0.1$

h	$\lambda = 0.5$		$\lambda = -0.5$	
	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$
30	251	9	254	3
50	85	37	84	8
100	10	60	10	15

Таблица 2.7. $\lambda = 0.7, \quad \delta = 0.1, \quad \varepsilon = 0.1$

h	$a = 2$		$a = -2$	
	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$
30	258	8	261	7
50	87	18	87	17
100	11	42	9	45

В третьей главе рассматривается задача обнаружения момента сдвига среднего значения процесса авторегрессии $p-$того порядка с неизвестными параметрами. На первом этапе производится оценивание неизвестных (мешающих) параметров авторегрессионной части. Далее осуществляется преобразование наблюдаемого процесса с целью ослабления влияния этих параметров. Предлагается последовательная процедура обнаружения на основе алгоритма кумулятивных сумм. Получены формулы для среднего времени между ложными тревогами и среднего времени запаздывания в обнаружении разладки.

Постановка задачи.

Пусть наблюдается процесс авторегрессии

$$x_n - M = \lambda_1(x_{n-1} - M) + \lambda_2(x_{n-2} - M) + \ldots + \lambda_p(x_{n-p} - M) + \xi_n, \quad n \geq 0, \quad (49)$$

где M - неизвестное среднее значение наблюдаемого процесса, $\lambda_i, \quad i = \overline{1,p}$ - неизвестные параметры, $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$ - последовательность независимых гауссовских случайных величин с $M\xi_n = 0$ и $D\xi_n = 1$.

В некоторый момент θ происходит изменение среднего значения наблюдаемого процесса на неизвестную величину a. Требуется по наблюдениям процесса оценить момент разладки θ.

Исходный процесс представим в виде

$$x_n = \mu + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_{n-i} + \xi_n, \quad \text{где} \quad \mu = M\left(1 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right). \quad (50)$$

В момент θ происходит сдвиг на неизвестную величину

$$\tilde{a} = a(1 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i). \quad (51)$$

Для уменьшения влияния мешающих параметров λ_i на качество процедуры обнаружения, аналогично тому, как это было сделано в предыдущей главе для случая авторегрессии первого порядка, по первым наблюдениям процесса строятся их оценки $\hat{\lambda}_i$.

Построенные оценки обладают свойством равномерной ограниченности среднеквадратичекого уклонения при любых распределениях шумов

$$M(\lambda_i - \hat{\lambda}_i)^2 \leq \frac{1}{H}, i = 1..p, \tag{52}$$

где H- порог процедуры оценивания.

Построение процедуры обнаружения.

Для решения задачи обнаружения, как и в предыдущей главе, используем модификацию алгоритма кумулятивных сумм для обнаружения момента изменения среднего в последовательности независимых случайных величин. На основе исходных наблюдений с использованием полученной оценки формируется вспомогательная последовательность

$$y_n = x_n - \sum_{i=1}^{p} \hat{\lambda}_i x_{n-i} = \mu + \sum_{i=1}^{p} \left(\lambda_i - \hat{\lambda}_i\right) x_{n-i} + \xi_n. \tag{53}$$

Процедура обнаружения выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} &z_n^1 = sign(y_n - y_{n-k} - \varepsilon) * l - m, \\ &S_0 = l + m, \quad S_n = max(l + m, z_n^1 + S_{n-1}), \\ &h - \text{порог}, \end{aligned} \tag{54}$$

где $k, l, m-$ натуральные числа, причем $m < l$, $h-$ порог, при достижении которого суммой S_n принимается решение о наличии разладки. Этот алгоритм кумулятивных сумм ориентирован на обнаружение увеличения среднего значения процесса $(a > 0)$. Для обнаружения момента уменьшения среднего $(a < 0)$ используется аналогичная последовательность S_n с заменой величин x_i на $-x_i$.

$$\begin{aligned} &z_n^2 = sign(y_{n-k} - y_n - \varepsilon) * l - m, \\ &S_0 = l + m, \quad S_n = max(l + m, z_n^2 + S_{n-1}), \\ &h - \text{порог}. \end{aligned} \tag{55}$$

Два алгоритма кумулятивных сумм используются поочередно.

Для построенной процедуры справедливы теоремы, аналогичные Теоремам 2.1 - 2.4 главы 2, дающие вычислительные формулы характеристик построенной процедуры.

Таблицы 3.1-3.3 показывают влияние параметров процедуры на ее характеристики.

Таблица 3.1. $a = 1, \quad \delta = 0.1, \quad \varepsilon = 0.1$

h	$\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.1$		$\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.8$		$\lambda_1 = 0.8$, $\lambda_2 = 0.1$	
	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$
30	66	5	73	25	68	26
50	12	9	18	94	14	98
100	1	20	3	202	1	233

Таблица 3.2.

h	$\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 0.3$		$\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = -0.3$	
	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$
30	65	35	61	5
50	10	141	11	12
100	1	339	1	22

Таблица 3.3.

h	$\lambda_1 = -0.6$, $\lambda_2 = 0.3$		$\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = -0.4$	
	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$	$K_{\text{лт}}$	$T_{\text{зап}}$
30	64	4	67	2
50	12	8	12	6
100	1	18	1	13

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Воробейчиков С.Э., Кабанова Т.В. Обнаружение момента изменения среднего в последовательности независимых случайных величин // Третий сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике. Ч. 4, Новосибирск, Изд–во ин–та математики СОРАН. – 1998. – С.90.

2. Воробейчиков С.Э., Кабанова Т.В. Обнаружение момента изменения среднего последовательности независимых случайных величин // Всероссийская научно - практическая конференция "Информационные технологии и математическое моделирование". Анжеро-Судженск: Изд-во "Твердыня". – 2002. – С. 69-71.

3. Кабанова Т.В. Сравнительный анализ процедур обнаружения момента разладки последовательности независимых случайных величин // Четвертая региональная научно - практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Научные основы АПК". Томск, ТСХИ НГАУ: Изд-во UFO-press. – 2002. – С. 162-171.

4. Кабанова Т.В. Обнаружение момента разладки процесса авторегрессии первого порядка // Региональная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Наука. Техника. Инновации"(НТИ-2002). Новосибирск, НГТУ: Изд-во НГТУ. – 2002. – С. 50

5. Воробейчиков С.Э., Кабанова Т.В. Обнаружение момента разладки последовательности независимых случайных величин // Радиотехника и электроника, РАН.– 2002. – Т.47, № 10.– С. 1198-1203.

6. Воробейчиков С.Э., Кабанова Т.В. Обнаружение момента изменения среднего процесса авторегрессии // Обозрение прикладной и промышленной математики, Москва.– 2003. – Т. 10, Вып.1.– С. 122.

7. Воробейчиков С.Э., Кабанова Т.В. Обнаружение момента разладки процесса авторегрессии // Вестник Томского государственного университета. – 2003. – № 280. - С. 170-174.