

А. В. ШВАБ В. А. ШВАБ

**МЕТОД
ГЕНЕРАЦИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ
В РАСЧЕТАХ
СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ**

Томск — 1986

Научно-исследовательский институт прикладной математики и
механики при Томском государственном университете

А.В.Шваб, В.А.Шваб

Метод генерации турбулентности в расчётах
сдвиговых течений

Издательство Томского университета

Томск - 1986

УДК 532.517.4+532.582+536.24

Шваб А.В., Шваб В.А. Метод генерации турбулентности в расчётах сдвиговых течений. – Томск: Изд-во Тсм.ун-та, 1986. –112 с. с ил. – 80к. 500 экз. 1703040000.

В книге рассмотрена проблема генерации пульсационного движения в сдвиговых турбулентных течениях гомогенной и гетерогенной (запылённой) среды и физические основы процесса образования турбулентных напряжений. Разработанная теория расчёта поля осреднённых скоростей не содержит эмпирических констант и определяет это поле соотношением вязких и турбулентных напряжений. Метод "генерации турбулентности" использован при расчёте сдвиговых турбулентных течений в пограничном слое, при установившихся течениях в закрытых и открытых каналах произвольной формы поперечного сечения, в автомодельных струях и следах за телами в диффузорных каналах и других частных случаях. Результаты проведённых исследований сдвиговых турбулентных течений показали высокую степень согласования с опытными данными и свидетельствуют о возможности существенного упрощения всех необходимых расчётов.

Для специалистов по гидромеханике, интересующихся проблемами турбулентных сдвиговых течений.

Рецензент – проф., д.т.н., засл. деятель
науки и техники И.К. Лебедев

III 1703040000 56-86
177(012)-86



Издательство Томского университета, 1986

1. ПРИСТЕННАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ДВУХФАЗНОЙ ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЫ

1.1. Метод расчёта турбулентных напряжений и осреднённых скоростей в пристенных потоках двухфазной гетерогенной среды

Основным исходным положением исследования механизма турбулентного дополнительного движения среды в установившихся турбулентных потоках является существование взаимно конкурирующих процессов генерации и диссипации энергии турбулентного движения при относительно слабом влиянии диффузионного перераспределения генерируемой энергии. Предполагается, что процесс генерации дополнительного движения носит локальный и периодический характер, осуществляется в некоторой области, ограниченной линейными масштабами турбулентности. Во всей области турбулентного течения место положения центров генерации турбулентности в данный момент времени и их периодичность действия регулируются интенсивностью процесса диссипации энергии дополнительного движения. В случае двухфазной гетерогенной среды, содержащей частицы примесей с плотностью, отличной от несущей среды, возникают определённые отклонения в механизме генерации дополнительного движения, зависящие от объёмной концентрации примесей, размера частиц и их плотности. В дальнейшем допускается, что сопротивление частиц при движении в несущей среде подчиняется закону Стокса и при достаточно ограниченных значениях концентрации отсутствует их взаимодействие через столкновения. Предполагается также, что при развитом турбулентном течении сохраняется постоянное значение концентрации примесей для всего потока. Принятый ниже метод исследования аналогичен методу исследования, применённому авторами для турбулентного течения гомогенной среды [1, 2].

Характер локального возмущения при вырождении турбулентного движения рассматривается в случае установившегося течения двухфазной гетерогенной среды между двумя параллельными стенками. С этой целью мысленно выделим некоторую область, не ограниченную по длине в направлении оси X , совпадающей с направлением движения, при помощи условно введённых двух плоскостей, расположенных параллельно стенкам канала, с расстоянием между ними 2ℓ и центром области в некоторой точке y_0 . В этом случае течение несжимаемой гетеро-

генной среды в рассматриваемой области определяется системой нестационарных уравнений:

$$\epsilon \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \epsilon_i \rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \rho \frac{\partial^2 (v+u)}{\partial y^2} + \frac{\partial (\delta \rho)}{\partial y} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \delta \rho) - \epsilon \rho F_x - \sum_{i=1}^n \epsilon_i \rho_i F_{ix}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \kappa_i (u - u_i), \quad (1.2)$$

$$\epsilon + \sum_{i=1}^n \epsilon_i = 1, \quad (1.3)$$

где $U = U(y)$ — установившееся осреднённое по времени значение скорости несущей среды, совпадающее по направлению с координатной осью x ; $u = u(y, t)$ — скорость дополнительного движения несущей среды того же направления, которая представляет отклонение от скорости U в связи с периодическим характером изменения турбулентного напряжения. Из условия непрерывности движения следует $\partial U / \partial x = \partial u / \partial x = 0$, и при равенстве нулю поперечной составляющей скорости осреднённого движения в уравнении (1.1) отсутствует конвективная часть ускорения. Очевидно также, что производная $\partial U / \partial t = 0$. Кроме того, $\delta = \delta(y)$ — турбулентное напряжение установившегося движения и $\Delta \delta = \Delta \delta(y, t)$ соответствует значению периодического отклонения величины турбулентного напряжения от среднего напряжения, $U_i = U_i(y)$ и $u_i = u_i(y, t)$ — соответственно скорости среднего и дополнительного движения частиц некоторой i -той по размерам фракции, ϵ , ϵ_i и ρ , ρ_i — соответственно объёмные концентрации и плотности несущей среды и примесей i -той фракции, F и F_i — массовые силы, в частности, гравитационные силы. Если ограничиться законом сопротивления для сферических частиц по Стоксу, то для коэффициента сопротивления имеем

$$C_i = \frac{24}{Re_{\delta_i}}; \quad \kappa_i = \frac{24}{Re_{\delta_i} m_i} (u - u_i) = \frac{18 \gamma \rho}{\rho_i \delta_i^2}, \quad (1.4)$$

где $Re_{\delta_i} = (u - u_i) \delta_i / \nu$ и δ_i — диаметр частицы i -той фракции. Градиент давления в уравнении (1.1) может быть представлен в виде двух слагаемых:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho_2}{\partial x}.$$

Первое из слагаемых эквивалентно действующему в данный момент времени сопротивлению со стороны движущейся среды, которое включает возникающие внутренние напряжения и действующие массовые силы:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 (v+u)}{\partial y^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \sigma) - \varepsilon f_x - \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i \rho_i}{\rho} f_{ix}. \quad (I.5)$$

Второе слагаемое эквивалентно в тот же момент времени освобожденной энергии в связи с изменением величины турбулентного напряжения

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \sigma) \quad (I.6)$$

и соответствует сопротивлению инерционного ускорения среды. Используя представление градиента давления в виде двух слагаемых в (I.I) и учитывая (I.5) и (I.6), получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i \rho_i}{\varepsilon \rho} \frac{\partial u_i}{\partial t} = - \frac{1}{\varepsilon \rho} \frac{\partial \rho_2}{\partial x}$$

или в соответствии с (I.6)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i \rho_i}{\varepsilon \rho} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \sigma). \quad (I.7)$$

Таким образом, ускорение в дополнительном движении гетерогенной среды определяется изменением турбулентного напряжения в зависимости от времени. Вторичное осреднение уравнения (I.I) или, что то же самое, уравнение установившегося движения, определяется таким образом

$$- \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} - \varepsilon f_x - \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i \rho_i}{\rho} f_{ix} + \nu \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d\sigma}{dy} = 0, \quad (I.8)$$

интегрирование которого приводит к зависимости

$$\sigma = \frac{\tau_w}{\rho} \left(1 - \frac{y}{R}\right) - \nu \frac{dv}{dy} \quad (I.9)$$

при условии, следующем из баланса сил для элементарного участка канала:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \varepsilon f_x + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i \rho_i}{\rho} f_{ix} = - \frac{\tilde{\tau}_w}{\rho R} = \text{const.}$$

Из сопоставления зависимостей (I.5), (I.6) и (I.8) находим

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = \frac{d\rho}{dx} = \text{const.}$$

Таким образом, все энергетические переходы периодического характера при генерации дополнительного движения находятся в пределах энергии, определяемой градиентом давления установившегося движения.

Дополнительная, переменная часть турбулентного движения в уравнении (I.1) $\Delta \delta(y, t)$, если предполагать периодический характер изменения турбулентного переноса импульса, будет также периодической функцией, зависящей от амплитуды изменения напряжения и может быть представлена в виде произведения

$$\Delta \delta(y, t) = \gamma \delta(y) f(\xi) \varphi(\omega t), \quad (\text{I.10})$$

где $\gamma \delta(y)$ - амплитуда изменения напряжения, пропорциональная величине турбулентного напряжения при установившемся движении в некоторой плоскости с координатой y ; γ - коэффициент пропорциональности, равный 0,5, при полном изменении турбулентной части напряжения, при практических расчётах принятый равным 0,47; $\varphi(\omega t)$ - периодическая функция времени, $\omega = 2\pi/\tau$; $f(\xi)$ - функция, характеризующая изменение напряжения в зависимости от безразмерной координаты $\xi = (y - y_0)/\ell$ в области ℓ_+ и $\xi = (y_0 - y)/\ell$ в области ℓ_- (рис. I.I). Основываясь на зависимости (I.10), уравнение (I.7) преобразуем к форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i \rho_i}{\varepsilon \rho} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} [\gamma \delta(y) f(\xi)] \varphi(\omega t)$$

или, выполняя дифференцирование по y ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i \rho_i}{\varepsilon \rho} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\gamma}{\varepsilon} \left[\frac{\delta(y)}{\ell} f'(\xi) - \left(\frac{\tilde{\tau}_w}{\rho R} + \nu U'' \right) f(\xi) \right] \varphi(\omega t),$$

где $f'(\xi) = df/d\xi$ и $U'' = d^2 U/dy^2$. Напряжение $\delta(y)$ в пределах области ℓ_+ можно представить через $\delta_0(y_0)$, соответствующее напряжению в центральной плоскости при $y = y_0$:

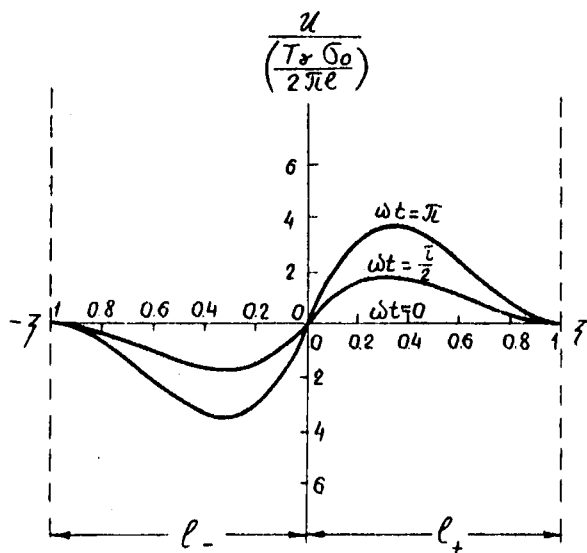


Рис. I. I. Зависимость безразмерной скорости дополнительного движения от времени и координат

$$\sigma(y) = \tilde{\sigma}_0(y_0) - \left(\frac{\tilde{\tau}_w}{\rho R} + \nu U'' \right) \ell \xi,$$

где

$$\tilde{\sigma}_0(y_0) = \frac{\tilde{\tau}_w}{\rho} \left(1 - \frac{y_0}{R} \right) - \nu U'_0.$$

Выполняя замену $\tilde{\sigma}(y)$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i \rho_i}{\varepsilon \rho} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\tilde{\tau} \tilde{\sigma}_0}{\varepsilon \ell} [\beta \ell f(\xi) - f'(\xi) - \beta \ell \xi f'(\xi)] \varphi(\omega t), \quad (I.11)$$

где

$$\beta = \frac{\frac{\tilde{\tau}_w}{\rho R} + \nu U''}{\tilde{\sigma}_0}.$$

Функция $f(\xi)$, определяющая характер изменения напряжения в области ℓ_+ , устанавливается в результате аппроксимации по граничным условиям. Полагая

$$f(\xi) = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 + e\xi^4, \quad (I.12)$$

определим неизвестные коэффициенты этой зависимости из следующих условий: $f(\xi) = 1$ при $\xi = 0$, $f(\xi) = f'(\xi) = f''(\xi) = 0$ при $\xi = 1$. Кроме того, в центре образующей волны возмущения ($\xi = 0$), при переходе от отрицательного направления дополнительного движения к положительному, скорость дополнительного движения и её производная по времени должны быть равны нулю, поэтому из уравнения (I.11) следует $\beta \ell f(0) = f'(0)$ при $\xi = 0$, но $f(0) = 1$ и, следовательно, $f'(0) = \beta \ell$. Поставленные выше пять условий позволяют определить все коэффициенты зависимости (I.12), получим

$$f(\xi) = 1 + \beta \ell \xi - (6 + 3\beta \ell) \xi^2 + (8 + 3\beta \ell) \xi^3 - (3 + \beta \ell) \xi^4,$$

$$f'(\xi) = \beta \ell - (12 + 6\beta \ell) \xi + (24 + 9\beta \ell) \xi^2 - (12 + 4\beta \ell) \xi^3. \quad (I.13)$$

Интегрирование уравнения (I.11) приводит к определению суммы скоростей дополнительного движения

$$u + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i \rho_i}{\varepsilon \rho} u_i = \frac{\tilde{\tau} \tilde{\sigma}_0}{\varepsilon \omega \ell} [\beta \ell f(\xi) - f'(\xi) - \beta \ell \xi f'(\xi)] \int \varphi(\omega t) d\omega t + C(\xi).$$

Здесь значение функции $C(\xi)$ определяется из условия $u = u_i = 0$ при $t = 0$. Функция $\varphi(\omega t)$ удовлетворяющая периодическому процессу изменения турбулентной части напряжения, в общем случае может быть аппроксимирована нечётным рядом Фурье. Если ограничиться приближённым представлением этой функции, учитывая главную составляющую разложения, следует принять $\varphi(\omega t) = \sin \omega t$. В этом случае, учитывая начальные условия, получим

$$u + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i \rho_i}{\varepsilon \rho} u_i = \frac{T \gamma \zeta_0}{2 \varepsilon \kappa \ell} [\beta \ell f(\xi) - f'(\xi) - \beta \ell \xi f'(\xi)] (1 - \cos \omega t). \quad (I.14)$$

Скорость дополнительного движения частиц примесей u_i определяется уравнением (I.2), которое, учитывая (I.14), можно представить в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \kappa_i \left(1 + \frac{\varepsilon_i \rho_i}{\varepsilon \rho}\right) u_i = \kappa_i \frac{T \gamma \zeta_0}{2 \varepsilon \kappa \ell} F(\xi) (1 - \cos \omega t).$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка при условии $u_i = 0$ при $t = 0$ приводит в результате интегрирования к зависимости

$$u_i = \frac{\kappa_i}{S_i} \frac{T \gamma \zeta_0}{2 \varepsilon \kappa \ell} F(\xi) \left[1 - \frac{S_i^2}{S_i^2 + \omega^2} (\cos \omega t + \frac{\omega}{S_i} \sin \omega t) - \frac{\omega^2}{S_i^2 + \omega^2} e^{-S_i t} \right]. \quad (I.15)$$

где $S_i = \kappa_i (1 + \varepsilon_i \rho_i / \varepsilon \rho)$ и $F(\xi) = \beta \ell f(\xi) - f'(\xi) - \beta \ell \xi f'(\xi)$.

Среднее по времени значение $\bar{u}_i$ в пределах одного периода будет

$$\bar{u}_i = \frac{\kappa_i}{S_i} \frac{T \gamma \zeta_0}{2 \varepsilon \kappa \ell} F(\xi) \left[1 - \frac{\omega^2}{2 \pi (S_i^2 + \omega^2) S_i} (1 - e^{-S_i t}) \right].$$

В результате, учитывая (I.14) и (I.15), определим скорость дополнительного движения несущей среды

$$u = \frac{T \gamma \zeta_0}{2 \varepsilon \kappa \ell} \left\{ 1 - \cos \omega t - \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i \rho_i}{\varepsilon \rho + \varepsilon_i \rho_i} \left[1 - \frac{S_i^2}{S_i^2 + \omega^2} (\cos \omega t + \frac{\omega}{S_i} \sin \omega t) - \frac{\omega^2}{S_i^2 + \omega^2} e^{-S_i t} \right] \right\} F(\xi). \quad (I.16)$$

Скорость u имеет положительное направление, совпадающее с на -

правлением осреднённого течения, в области ℓ_+ и противоположное с симметричным распределением в области ℓ_- . Волнообразный характер распределения скорости дополнительного движения несущей среды показан на рис. I.I.

В реальных условиях локальные процессы генерации дополнительного движения осуществляются в замкнутой области, которую можно представить в рассматриваемой задаче как некоторую полосу, выделенную линейными масштабами турбулентности и также ограниченную по длине в направлении оси X . В этом случае в процессе генерации дополнительного движения как следствие непрерывности движения возникает вытеснение среды из области ℓ_+ в область ℓ_- и так же в обратном направлении. Возникает нестационарное вихреобразное движение при противоположном направлении скоростей дополнительного движения по обеим сторонам центральной плоскости выделенного объёма. В связи с этим возникает перенос импульса, определяющий величину турбулентного напряжения.

Среднее по времени значение турбулентного напряжения в центральной плоскости рассматриваемой области при $y = y_0$ определяется зависимостью [I]:

$$\bar{\sigma}_{0\epsilon} = \frac{4}{T} \int_{t=0}^T \int_{\xi=0}^1 u_{\epsilon} (u_{\epsilon} + U_0' \ell_{\xi}) dt d\xi. \quad (I.I7)$$

Здесь, используя соотношения

$$\rho_{\epsilon} = \epsilon \rho + \sum_{i=1}^n \delta_i \rho_i = \epsilon \rho (1 + \sum_{i=1}^n q_i),$$

$$\rho_{\epsilon} u_{\epsilon} = \epsilon \rho u + \sum_{i=1}^n \delta_i \rho_i u_i = \epsilon \rho (1 + \sum_{i=1}^n q_i) u_i$$

и относя величину напряжения к плотности смеси, турбулентное напряжение $\bar{\sigma}_{0\epsilon}$ в соответствии с зависимостью (I.9) определяется следующим образом:

$$\bar{\sigma}_{0\epsilon} = \frac{\bar{\sigma}_0}{\epsilon (1 + \sum_{i=1}^n q_i)} = \frac{\tilde{\tau}_w}{\epsilon \rho (1 + \sum_{i=1}^n q_i)} (1 - \frac{y}{R}) - \frac{\gamma U_0'}{\epsilon (1 + \sum_{i=1}^n q_i)}, \quad (I.I8)$$

где $q_i = \delta_i \rho_i / \epsilon \rho$. В соответствии с (I.I4) имеем также

$$u_{\epsilon} = \frac{u + \sum_{i=1}^n q_i u_i}{1 + \sum_{i=1}^n q_i} = \frac{T_f \bar{\sigma}_0}{2 \epsilon \pi \ell (1 + \sum_{i=1}^n q_i)} F(\xi) (1 - \cos \omega t). \quad (I.I9)$$

Выполняя интегрирование в (I.17), придём к соотношению

$$\left(\frac{T\gamma}{\ell}\right)^2 + \frac{4\pi F_2 U'_0 \ell}{3F_3 \delta_{oe}} \left(\frac{T\gamma}{\ell}\right) - \frac{2\pi^2}{3F_3 \delta_{oe}} = 0,$$

из которого следует

$$\frac{T\gamma}{\ell} = \frac{2\pi F_2 U'_0 \ell}{3F_3 \delta_{oe}} \left(\sqrt{1 + \frac{3F_3 \delta_{oe}}{2F_2^2 (U'_0 \ell)^2}} - 1 \right). \quad (I.20)$$

Здесь

$$F_2 = \int_{\xi=0}^1 \xi F(\xi) d\xi,$$

$$F_3 = \int_{\xi=0}^1 F^2(\xi) d\xi.$$

Скорость дополнительного движения несущей среды по (I.16) после исключения комплекса $T\gamma/\ell$

$$u(\xi, t) = \left(1 + \sum_{i=1}^n q_i\right) \frac{F_2 U'_0 \ell}{3F_3} F(\xi) \left(\sqrt{1 + \frac{3F_3 \delta_{oe}}{2F_2^2 (U'_0 \ell)^2}} - 1 \right) \left\{ 1 - \cos \omega t - \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i \rho_i}{\varepsilon \rho + \varepsilon_i \rho_i} \left[1 - \frac{S_i^2}{S_i^2 + \omega^2} (\cos \omega t + \frac{\omega}{S_i} \sin \omega t) - \frac{\omega^2}{S_i^2 + \omega^2} e^{-S_i t} \right] \right\} \quad (I.21)$$

и осреднённое значение этой скорости по времени в пределах всего периода T

$$\bar{u}(\xi) = \left(1 + \sum_{i=1}^n q_i\right) \frac{F_2 U'_0 \ell}{3F_3} F(\xi) \left(\sqrt{1 + \frac{3F_3 \delta_{oe}}{2F_2^2 (U'_0 \ell)^2}} - 1 \right) \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i \rho_i}{\varepsilon \rho + \varepsilon_i \rho_i} \left[1 - \frac{\omega^3}{2\pi (S_i^2 + \omega^2) S_i} (1 - e^{-S_i T}) \right] \right\}. \quad (I.22)$$

Процесс реализации энергии дополнительного движения через переносимый импульс в турбулентное напряжение так же, как и в случае однородной среды [2], не является полностью непосредственным. Частично этот импульс реализуется через мелкомасштабное турбулентное движение, которое возникает как явление, сопутствующее крупномасштабному вихревому движению. Таким образом, турбулентное напряжение следует представить в виде двух слагаемых $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$,

где $\delta_1 = \gamma \delta$ — часть турбулентного напряжения, которая реализуется крупномасштабным вихревым движением, и $\delta_2 = (1-\gamma)\delta$ — часть напряжения, реализуемая мелкомасштабным турбулентным движением. Наиболее вероятным будет предположение о постоянном уровне энергонасыщенности мелкомасштабного движения в рассматриваемой области потока, суммирующей приток энергии от многих вихревых движений главного масштаба, и поэтому перенос импульса этим движением следует считать не зависящим от времени. Кинематический коэффициент вязкости мелкомасштабной турбулентности в связи с этим также не зависит от времени и определяется следующим образом:

$$A_2 = \frac{(1-\gamma)\delta_0}{U'_0} \quad (1.23)$$

Полное значение напряжения в центре волнового возмущения при $\xi = 0$ представляется зависимостью

$$\frac{\tilde{\tau}_w}{\rho} \left(1 - \frac{y}{R}\right) = (A_2 + \gamma) U'_0 + \gamma \delta_0 \quad (1.24)$$

В момент времени полного вырождения крупномасштабного переноса импульса в центре волнового возмущения ($\xi = 0$) напряжение полностью компенсируется молекулярной вязкостью и вязкостью мелко-масштабного движения и поэтому

$$\frac{\tilde{\tau}_w}{\rho} \left(1 - \frac{y}{R}\right) = (A_2 + \gamma)(U'_0 + \bar{u}'_0), \quad (1.25)$$

где $\bar{u}'_0 = (\partial \bar{u} / \partial y)_{\xi=0}$ — предельное значение производной в центре волны возмущения от средней по времени скорости дополнительного движения. Учитывая (1.22), найдём

$$\bar{u}'_0 = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_{\xi=0} = \left(1 + \sum_{i=1}^n q_i\right) \frac{F_2 F_0 U'_0}{3 F_3} \left(\sqrt{1 + \frac{3 F_3 \delta_0 \varepsilon}{2 F_2^2 (U'_0 \ell)^2}} - 1 \right) N \quad (1.26)$$

Здесь

$$N = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i \rho_i}{\varepsilon \rho + \varepsilon_i \rho_i} \left[1 - \frac{\omega^2}{2k(S_i^2 + \omega^2)S_i} (1 - e^{-S_i \ell}) \right], \quad (1.27)$$

$$F_0 = \left(\frac{dF(\xi)}{d\xi} \right)_{\xi=0}$$

Из сопоставления зависимостей (1.24) и (1.25) следует

$$(A_2 + \gamma) \bar{u}'_0 = \gamma \sigma_0 \quad (1.28)$$

или, учитывая (1.23) и (1.26), получим уравнение, устанавливающее зависимость между безразмерными величинами $\gamma u'_0 / \sigma_{0\epsilon}$ и $\sigma_{0\epsilon} / (v'_0 \ell)^2$:

$$\frac{\epsilon \gamma}{\epsilon (1-\gamma) (1 + \sum_{i=1}^n q_i) + \frac{\gamma u'_0}{\sigma_{0\epsilon}}} = \frac{F_2 F_0}{3 F_3} \left(\sqrt{1 + \frac{3 F_3 \sigma_{0\epsilon}}{2 F_2^2 (v'_0 \ell)^2}} - 1 \right) \cdot N. \quad (1.29)$$

Решение этой зависимости относительно комплекса $\sigma_{0\epsilon} / (v'_0 \ell)^2$ можно представить в форме, определяющей величину турбулентного напряжения для произвольной точки области турбулентного течения при установившемся потоке в рассматриваемом случае плоского канала

$$\sigma_\epsilon = \chi_\epsilon^2 (v'_0 \ell)^2, \quad (1.30)$$

где

$$\chi_\epsilon^2 = \frac{2 F_2^2}{3 F_3} \left\{ \left[\frac{\frac{3 F_3 \epsilon \gamma}{F_0 F_2 N}}{\epsilon (1-\gamma) (1 + \sum_{i=1}^n q_i) + \frac{\gamma u'_0}{\sigma_{0\epsilon}}} + 1 \right]^2 - 1 \right\}, \quad (1.31)$$

$$F_0 = \left(\frac{dF(\xi)}{d\xi} \right)_{\xi=0} = 12 + 6\beta\ell \approx 12,$$

$$F_2 = \int_0^1 F(\xi) \xi \, d\xi = 0,4 - 0,05\beta\ell - 0,0166(\beta\ell)^2 \approx 0,4,$$

$$F_3 = \int_0^1 F^2(\xi) \, d\xi = 1,3714 + 0,0875\beta\ell + 0,0875(\beta\ell)^2 + \\ + 0,0190(\beta\ell)^3 + 0,0063(\beta\ell)^4 \approx 1,3714,$$

значение $\beta\ell$ определяется зависимостью

$$\beta\ell = \frac{(\tau_w / \rho R + \gamma u'') \ell}{\sigma_\epsilon \epsilon (1 + \sum_{i=1}^n q_i)}$$

и, кроме того,
$$\sigma_\epsilon = \frac{\tau_w / \rho (1 - \gamma / R) - \gamma u'}{(1 + \sum_{i=1}^n q_i) \epsilon}.$$

Полученный результат можно представить в другой форме, если турбулентное напряжение относить к плотности несущей среды по (1.9),

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho} \left(1 - \frac{y}{R}\right) - \nu U' = \bar{\sigma}_\varepsilon \varepsilon \left(1 + \sum_{i=1}^n q_i\right).$$

Выполняя эту замену в (1.30), получим

$$\bar{\sigma} = \alpha^2 (U' \ell)^2, \quad (1.32)$$

где

$$\alpha^2 = \frac{2 F_2^2}{3 F_3} \varepsilon \left(1 + \sum_{i=1}^n q_i\right) \left\{ \left[\frac{3 F_3 \gamma}{F_0 F_2 N \left(1 + \sum_{i=1}^n q_i\right)} + 1 \right]^2 - 1 \right\}. \quad (1.33)$$

Безразмерная форма зависимости (1.32)

$$1 - \frac{\eta}{\ell_R} - \varphi' = \alpha^2 (\varphi' \ell_*)^2, \quad (1.34)$$

$$\alpha_\varepsilon^2 = \frac{2 F_2^2}{3 F_3} \varepsilon \left(1 + \sum_{i=1}^n q_i\right) \left\{ \left[\frac{3 F_3 \gamma \left(1 - \frac{\eta}{\ell_R} - \varphi'\right)}{F_0 F_2 N \left(1 + \sum_{i=1}^n q_i\right) \left[\left(1 - \gamma\right) \left(1 - \frac{\eta}{\ell_R} - \varphi'\right) + \varphi' \right]} + 1 \right]^2 - 1 \right\}. \quad (1.35)$$

где $\varphi = U/\gamma$, $\eta = y v_* / \nu$, $\ell_* = \ell v_* / \nu$, $\ell_R = R v_* / \nu$,

$$\varphi' = d\varphi/d\eta, \quad v_*^2 = \bar{\tau}_w / \rho.$$

На тех же основаниях, что и для однородного потока [2], полагая

$$\ell_* = - \frac{\varphi'}{\varphi''} \left(\frac{\bar{\sigma}_*}{1 - \eta/\ell_R} \right)^{1/2}, \quad (1.36)$$

получим

$$\frac{\varphi''}{(\varphi')^2} = - \frac{\alpha_\varepsilon}{\sqrt{1 - \eta/\ell_R}}. \quad (1.37)$$

Из сравнения полученных зависимостей для двухфазного гетерогенного потока с аналогичными зависимостями для однородного при турбулентном течении видно, что различие определяется влиянием

на коэффициент $\mathcal{K}_\varepsilon^2$ в формуле (I.35) появившихся множителей $1 + \sum_{i=1}^n q_i$, $S_i = \kappa_i (1 + q_i)$ и

$$N = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{1 + q_i} \left[1 - \frac{\omega^3}{2\kappa(S_i^2 + \omega^2)S_i} (1 - e^{-S_i T}) \right]. \quad (\text{I.38})$$

Отсюда следует зависимость N от частоты ω или периода пульсационного движения $T = 2\pi/\omega$, которая в соответствии с (I.20) определяется величиной возникающего дополнительного напряжения $\Delta \bar{\sigma}$, масштаба турбулентности ℓ и изменения осреднённой скорости dU/dy в центре волны возмущения.

Вводя безразмерное значение периода T в виде

$$T_* = \frac{T v_*^2}{\gamma}, \quad (\text{I.39})$$

из соотношения (I.20) получим

$$T_* = \frac{2\kappa F_2 \psi' \ell_*^2}{3\rho F_3 \bar{\sigma}} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{3F_3 \bar{\sigma}}{2F_2^2 \psi'^2 \ell_*^2}} \right). \quad (\text{I.40})$$

Здесь $\psi = U/v_*$, $\psi' = d\psi/d\eta$, $\bar{\sigma} = 6\alpha/v_*^2$.

Величина $S_i T$, входящая в соотношение (I.38), может быть представлена в следующем виде:

$$S_i T = \left(1 + \sum_{i=1}^n q_i\right) \kappa_i T = \left(1 + \sum_{i=1}^n q_i\right) \frac{18\rho\gamma}{\rho_i \bar{\sigma}_i^2} T = \frac{9}{2} \frac{\rho}{\rho_i} \left(1 + \sum_{i=1}^n q_i\right) \frac{T_*}{\gamma_o^2} \left(\frac{\mathcal{D}}{\bar{\sigma}_i}\right)^2. \quad (\text{I.41})$$

Здесь $\gamma_o = Rv_*/\gamma$; $\mathcal{D} = 2R$.

Окончательно для N получим

$$N = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{1 + q_i} \left[1 - \frac{4\kappa^2}{[(S_i T)^2 + 4\kappa^2] S_i T} (1 - e^{-S_i T}) \right], \quad (\text{I.42})$$

где в соответствии с (I.41)

$$S_i T = \frac{9}{2} \frac{\rho}{\rho_i} \left(1 + \sum_{i=1}^n q_i\right) \frac{T_*}{\gamma_o^2} \left(\frac{\mathcal{D}}{\bar{\sigma}_i}\right)^2. \quad (\text{I.43})$$

Таким образом, можно отметить, что характерными параметрами, определяющими пристенное турбулентное течение двухкомпонентной гетерогенной среды, служат: отношение диаметров частицы и канала (трубы) - $\Delta = \delta/\eta$, отношение плотностей транспортируемой частицы и несущей среды ρ_i/ρ и величина объёмной концентрации твёр-

дой примеси ϵ_i . Часто в литературе используют расходную (массовую) концентрацию μ , равную отношению расходов массы материала к массе несущей среды в единицу времени. Очевидно, что при достаточно тонкой структуре гетерогенной среды эта величина будет близка к значению $\mu \approx q = \epsilon_i \rho_i / \epsilon \rho$.

По заданным значениям параметров турбулентного потока $\Delta = \delta/\varphi$, z_0 , $q = \epsilon_i \rho_i / \epsilon \rho$, ρ_i / ρ из численного решения дифференциального уравнения (I.37) с учётом соотношений (I.36), (I.40), (I.42), (I.43) может быть найдено поле безразмерной осреднённой скорости $\varphi = \varphi(\eta)$ турбулентного потока и соответственно среднее по сечению значение скорости при течении, например, в круглой трубе

$$\bar{\varphi} = \frac{2}{z_0} \int_0^{z_0} \varphi \left(1 - \frac{\eta}{z_0}\right) d\eta \quad (I.44)$$

и соответственно найдено значение коэффициента сопротивления трения λ_c :

$$\lambda_c = \frac{8}{\bar{\varphi}^2} \quad (I.45)$$

Значение критерия Re может быть установлено по заданной величине $z_0 = R v_* / \nu$ и значению средней скорости по сечению турбулентного потока из соотношения (I.44)

$$Re = \frac{2RU}{\nu} = 2 \frac{v_* R}{\nu} \cdot \frac{\bar{U}}{v_*} = 2 z_0 \bar{\varphi} \quad (I.46)$$

Результаты численных расчётов для турбулентного течения двухкомпонентной гетерогенной, мелкодисперсной среды в круглой трубе приводятся на рис. I.2-I.7. На рис. I.2 представлены опытные данные Соу [3], иллюстрирующие характер изменения отношения перепадов давления $\Delta p_c / \Delta p$ в зависимости от расходной концентрации. Здесь Δp_c , Δp - перепады давлений соответственно для гетерогенного и гомогенного потоков. На этом же графике приводится расчётная кривая λ_c / λ - отношения коэффициентов сопротивления - от концентрации при тех же параметрах гетерогенного потока ($\delta/\varphi = 2,74 \cdot 10^{-4}$; $\rho_i / \rho = 3550$; $Re = 2,9 \cdot 10^5$). Здесь λ_c , λ - коэффициенты сопротивления трения соответственно для двухфазного и однофазного потоков. Кривая I соответствует расчёту, 2 - опыту [3].

Удовлетворительное согласование численного расчёта и опытных данных позволяет надеяться на удовлетворительную "работу" приведённой модели турбулентного потока с тонкодиспергированными твёрдыми примесями.

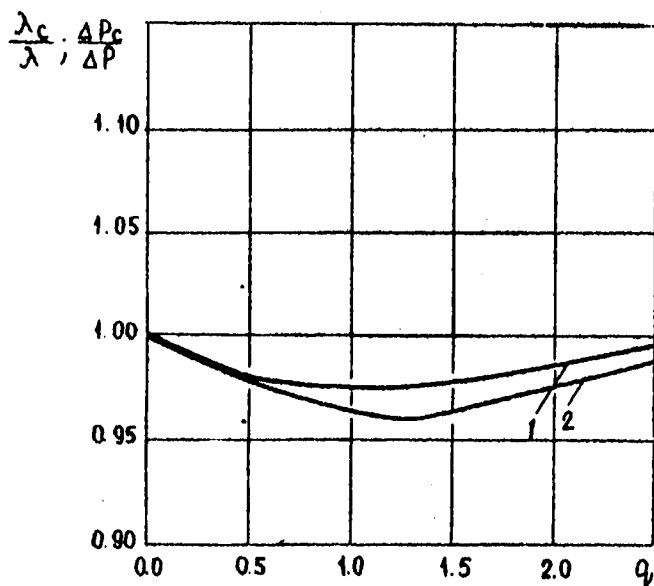


Рис.1.2. Характер изменения λ_c/λ в зависимости от массовой концентрации в сопоставлении с опытными данными Соу [3] :

1 - расчетная кривая;

2 - опытная-кривая

Проведённый численный анализ дифференциального уравнения (I.37) сделал возможным выявление тенденций по влиянию характерных параметров двухфазного потока (Re , δ/η , ρ_1/ρ , $\varepsilon_1 \rho_1/\varepsilon \rho$) на изменение коэффициента сопротивления трения и, следовательно, перепада статического давления по длине канала.

Влияние отношения плотностей твёрдой примеси и несущей среды ρ_1/ρ на величину λ_c/λ при турбулентном гетерогенном течении в круглой трубе иллюстрирует рис. I.3 для частного случая течения $Re = 2,9 \cdot 10^5$; $\delta/\eta = 2,75 \cdot 10^{-4}$ и различных значений расходных концентраций $\varepsilon_1 \rho_1/\varepsilon \rho = \mu$: кривая (1) - $\mu = 0,5$; (2) - $\mu = 1$; (3) - $\mu = 1,5$.

Характерным является тенденция к снижению значений коэффициента сопротивления трения с ростом плотности дисперсных частиц, причём при достаточно больших значениях ρ_1/ρ может быть, по-видимому, получена величина перепада давления, меньшая чем для гомогенного турбулентного потока ($\lambda_c/\lambda < 1$).

Влияние критерия Re на отношение λ_c/λ для двухфазного турбулентного потока показано на рис. I.4. Численные расчёты проводились для случая $Re = 2,9 \cdot 10^5$; $\delta/\eta = 2,75 \cdot 10^{-4}$; $\rho_1/\rho = 3550$ и для различных значений $\varepsilon_1 \rho_1/\varepsilon \rho$: кривая (1) - 0,5; (2) - 1; (3) - 1,5. Увеличение числа Re , так же как и параметра ρ_1/ρ , приводит к снижению отношения λ_c/λ .

Характер изменения λ_c/λ в зависимости от концентрации твёрдых примесей в турбулентном потоке иллюстрирует рис. I.5 для частного случая $\rho_1/\rho = 3550$ при значениях чисел Re : кривая (1) - $Re = 1,2 \cdot 10^5$; (2) - $Re = 2,65 \cdot 10^5$; (3) - $Re = 4,6 \cdot 10^5$; (1') - $2,9 \cdot 10^4$; (2') - $5,9 \cdot 10^4$; (3') - $Re = 3 \cdot 10^5$. Расчёты проводились для двух значений $\delta/\eta = 10^{-4}$ и для кривых со штрихом $\delta/\eta = 10^{-3}$.

Численный анализ выявил существенное влияние твёрдых примесей на образование турбулентных напряжений, причём в зависимости от набора параметров δ/η , ρ_1/ρ , q , Re эти напряжения могут быть больше или меньше, чем в турбулентном потоке без наличия твёрдых примесей. Для иллюстрации на рис. I.6 приведено распределение профиля осреднённых турбулентных напряжений по сечению потока для случая $U_* R/\eta = 6200$; $\rho_1/\rho = 3550$ и различных значений $\varepsilon_1 \rho_1/\varepsilon \rho$: кривая (1) и (1') - $q = 0,5$; (2) и (2') - $q = 1,25$; (3) и (3') - $q = 2$. В расчёте принималось $\delta/\eta = 2,75 \cdot 10^{-4}$, а для кривых со штрихом $\delta/\eta = 5 \cdot 10^{-4}$.

На рис. I.7 показан характер изменения безразмерной осреднённой

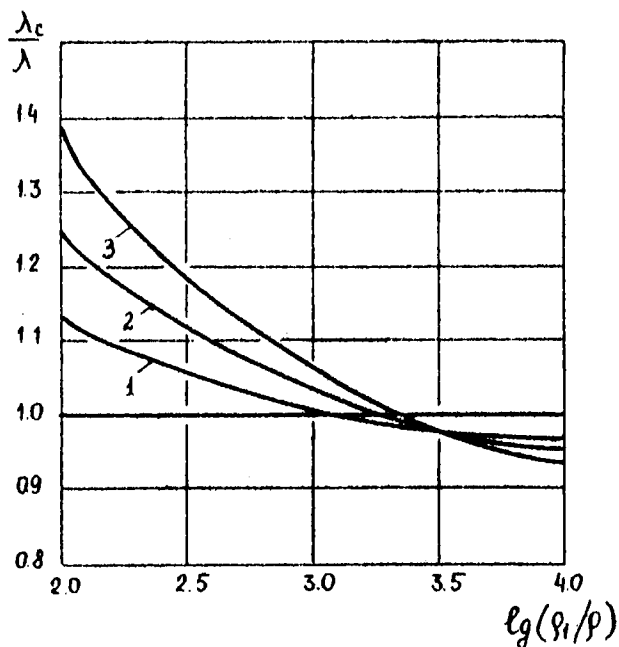


Рис.1.3. Характер изменения λ_c/λ в зависимости от отношения плотностей твёрдой примеси и несущей среды при турбулентном течении в круглой трубе:

- 1 - массовая концентрация = 0,5;
- 2 - массовая концентрация = 1;
- 3 - массовая концентрация = 1,5

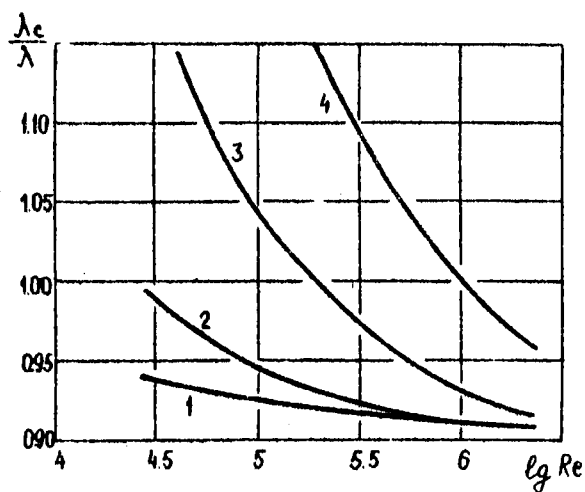


Рис. I.4. Влияние числа Re на отношение λ_c/λ для двухфазного турбулентного потока:

- 1 - массовая концентрация = 0,5;
- 2 - массовая концентрация = 1;
- 3 - массовая концентрация = 1,5;
- 4 - массовая концентрация = 2

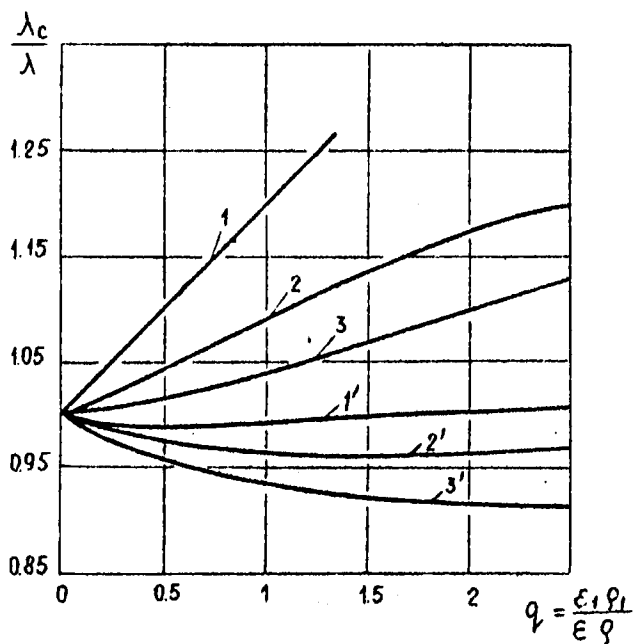


Рис. I.5. Характер изменения λ_c / λ в зависимости от массовой концентрации твёрдых примесей в турбулентном потоке:

- 1 - $Re = 1,2 \cdot 10^5$;
- 2 - $Re = 2,65 \cdot 10^5$;
- 3 - $Re = 4,6 \cdot 10^5$;
- 1' - $Re = 2,9 \cdot 10^4$;
- 2' - $Re = 5,9 \cdot 10^4$;
- 3' - $Re = 3 \cdot 10^5$;

расчёты проводились для двух значений $\delta/D = 10^{-4}$ и для кривых со штрихом $\delta/D = 10^{-3}$

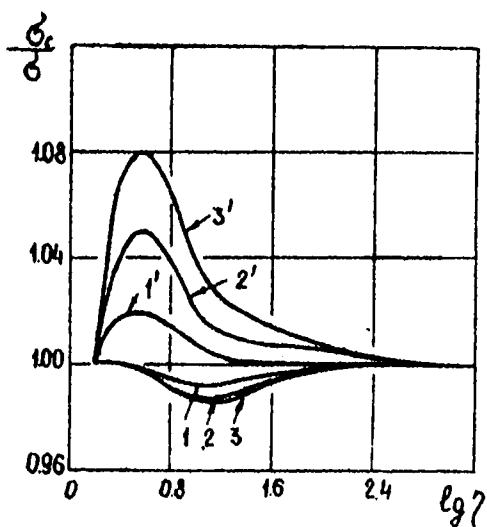


Рис. I.6. Распределение турбулентных напряжений по сечению двухфазного потока:

1 - $q = 0,5$;

2 - $q = 1,25$;

3 - $q = 2$;

в расчёте принималось $\delta/D = 2,75 \cdot 10^{-4}$, а для кривых со штрихом $\delta/D = 5 \cdot 10^{-4}$

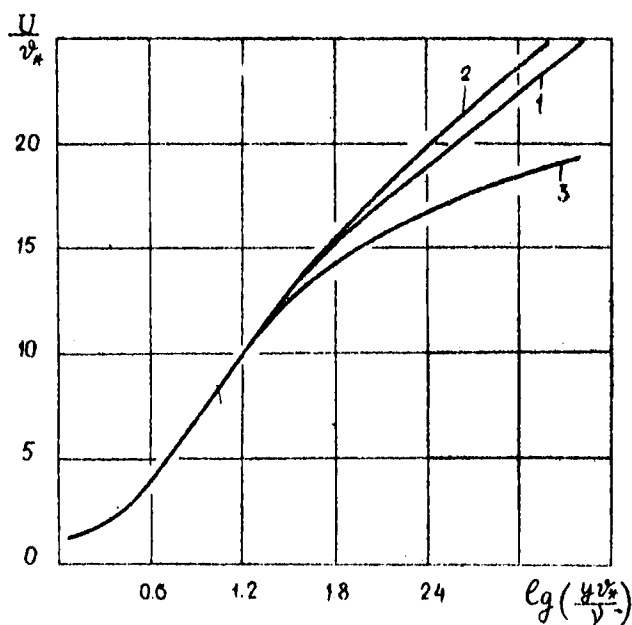


Рис. I. 7. Характер изменения безразмерной осреднённой скорости по сечению потока:

1 - гомогенный поток;

2 - $\delta/D = 10^{-4}$;

3 - $\delta/D = 10^{-5}$

скорости ψ в зависимости от $\lg(v_*\psi/\nu)$. Кривая (1) соответствует профилю скорости гомогенного потока, кривая (2) - случай, когда двухфазный поток имеет некоторую ламинаризацию и кривая (3) - случай, когда имеет место дополнительная турбулизация гетерогенного потока. Численные значения параметров были: $Re_{v_*/\nu} = 6200$; $\rho_1/\rho = 4 \cdot 10^3$; $q = 2$; $\delta/\delta_0 = 10^{-4}$ (кривая 2); $\delta/\delta_0 = 10^{-5}$ (кривая 3).

Рассмотренные выше примеры численных расчётов гетерогенного турбулентного течения показывают, что наличие тонкодиспергированных твёрдых частиц в турбулентном потоке существенным образом влияет на образование дополнительных турбулентных напряжений, причём это влияние для различных значений параметров Re , δ/δ_0 , ρ_1/ρ , $\epsilon_1\rho_1/\epsilon\rho$ может проявиться в ламинаризации или дополнительной турбулизации потока.

2. ПРИСТЕННЫЕ ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГОМОГЕННОЙ СРЕДЫ

2.1. Основные соотношения для пристенных турбулентных течений гомогенной среды

Зависимость между полем осреднённых скоростей и полем действующих касательных напряжений для установившихся турбулентных течений гомогенной среды можно представить в безразмерной форме следующим образом [1, 2]:

$$\bar{\sigma}_* = \bar{\tau}_* - \varphi', \quad \bar{\sigma}_* = \mathcal{K}^2 \ell_*^2 (\varphi')^2, \quad (2.1)$$

где $\bar{\tau}_* = \bar{\tau} / \rho \bar{v}_*^2$, $\eta = y \bar{v}_* / \nu$, $\ell_* = \ell \bar{v}_* / \nu$, $\eta_R = R \bar{v}_* / \nu$, $\varphi' = \partial \varphi / \partial \eta$, $\bar{v}_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$.

$$\mathcal{K}^2(\bar{\sigma}_*, \varphi') = \frac{2}{3} \frac{F_2^2}{F_3} \left[\left(\frac{3 F_3 \bar{\sigma}_*}{(F_0 F_2 [(1-\eta) \bar{\sigma}_* + \varphi'])} + 1 \right)^2 - 1 \right]. \quad (2.2)$$

Теоретическое значение функций $F_0 = 12$, $F_2 = 0,4$, $F_3 = 1,37$. Зависимость (2.1) соответствует известному соотношению Прандтля для турбулентного напряжения, но отличается тем, что коэффициент $\mathcal{K}$ не является постоянной величиной, а изменяется в зависимости от соотношения между вязким и турбулентным напряжением. В непосредственной близости от стенки на границе, соответствующей начальному возбуждению дополнительного движения, при доминирующем влиянии вязкости имеем $\bar{\sigma}_* = 0$, что по (2.2) приводит к значению $\mathcal{K} = 0$. При слабом влиянии вязкого трения в области развитой турбулентности значение $\mathcal{K}$, как показывают вычисления, хорошо согласуется с опытными данными (рис. 2.1).

Следует отметить, что зависимость (2.1) определяет универсальную закономерность, устанавливающую для стабилизированного сдвигового турбулентного течения строго определённую связь между полем осреднённых скоростей и действующим полем напряжений.

Зависимости (2.1) и (2.2) получены непосредственно в работах [1, 2], но, учитывая, что турбулентное течение гомогенной среды представляет собой предельный частный случай течения двухфазной гетерогенной среды при исчезающем значении концентрации твёрдых примесей δ_i , эти уравнения могут быть получены из уравнений (1.37) и (1.38), полагая $\delta_i = 0$.

Использование метода Т. Кармана при определении линейного масштаба турбулентности с коррекцией на относительное содержание турбулентных напряжений в рассматриваемой точке приводит к безразмерной зависимости

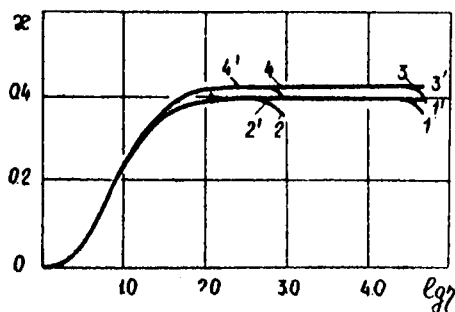


Рис.2.1. Зависимость x от $\lg \eta$:

1 и 1' - получены при $\eta_0 = 5 \cdot 10^5$ и $\gamma = 0,47$;

2 и 2' - получены при $\eta_0 = 10^3$ и $\gamma = 0,47$;

3 и 3' - получены при $\eta_0 = 5 \cdot 10^5$ и $\gamma = 0,5$;

4 и 4' - получены при $\eta_0 = 10^3$ и $\gamma = 0,5$;

зависимости, отмеченные штрихом, вычислены при
постоянном значении функций: $F_0 = 12$; $F_2 = 0,4$;

$F_3 = 1,37$

$$\ell_* = -\frac{\varphi'}{\varphi''} \left(\frac{\delta_*}{\tilde{\ell}_*} \right)^{1/2}. \quad (2.3)$$

При таком определении ℓ_* имеем на границе с чисто вязким подслоем, где $\delta_* = 0$, значение $\ell_* = 0$. Кроме того, в области развитой турбулентности при производной φ' , стремящейся к нулю, отношение $\delta_*/\tilde{\ell}_*$ стремится к единице и, следовательно, $\ell_* \sim -(\varphi'/\varphi'')$, что согласуется со значением, полученным Т. Карманом. Зависимость (2.1) с учётом (2.3) приобретает форму

$$\delta_* = \mathcal{R}^2 \frac{(\varphi')^4}{(\varphi'')^2} \frac{\delta_*}{\tilde{\ell}_*} \quad (2.4)$$

или

$$\tilde{\ell}_* = \mathcal{R}^2 \frac{(\varphi')^4}{(\varphi'')^2}. \quad (2.5)$$

Для достаточно больших чисел Re предполагается существование очень тонкого вязкого подслоя толщиной δ_* . Численный расчёт выполняется от границы этого слоя при значениях производных скоростей на ней $\varphi' = 1$.

Численное решение уравнения (2.5) выполняется в форме, представленной относительно производной

$$\frac{\varphi''}{(\varphi')^2} = -\frac{\mathcal{R}(\delta_*, \varphi')}{\sqrt{\tilde{\ell}_*}}. \quad (2.6)$$

Это уравнение имеет весьма универсальный смысл, так как определяет установившееся безразмерное поле осреднённых скоростей непосредственно по полю безразмерных касательных напряжений $\tilde{\ell}_*$, и в связи с этим имеются широкие возможности применения при расчёте стабилизированных турбулентных течений в каналах различной формы поперечного сечения, в открытых русловых потоках произвольной формы сечения, при свободных турбулентных течениях в струях, в следе за телом, в турбулентном пограничном слое и т.д. Предположение о существовании на твёрдой стенке тонкого слоя чисто вязкого течения приводит к тому, что решение уравнения (2.6) определяет всё поле осреднённых по времени скоростей области турбулентного течения, включая и переходную зону с влиянием вязких напряжений до самой границы с вязким подслоем. Таким образом, решение уравнения (2.6) должно быть действительным во всем поле турбулентного течения, где $\delta_* > 0$, и может быть представлено зависимостью

$$\varphi = \varphi_1 + F(\eta, \eta_0), \quad (2.7)$$

где $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Z}_1$ - значение безразмерной скорости на границе вязкого подслоя; $\mathcal{Z}_1$ - безразмерная координата этой границы или "толщина" вязкого подслоя ($\mathcal{Z}_1 = 1,6$).

2.2. Турбулентное течение в круглой цилиндрической трубе и плоском канале

Для обоих рассматриваемых течений безразмерное поле касательных напряжений определяется зависимостью

$$\tilde{\tau}_* = \frac{\tilde{\tau}}{\rho v_*^2} = 1 - \frac{\eta}{\mathcal{Z}_0},$$

где

$$\eta = \frac{y v_*}{\nu}, \quad \mathcal{Z}_0 = \frac{R v_*}{\nu}, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tilde{\tau}_w}{\rho}}.$$

Уравнение (2.6) в развёрнутом виде для рассматриваемых течений будет

$$\psi'' = \frac{-(\psi')^2}{\sqrt{1 - \frac{\eta}{\mathcal{Z}_0}}} \sqrt{\frac{2F_2^2}{3F_3} \left[\left(\frac{3F_3 \eta (1 - \frac{\eta}{\mathcal{Z}_0} - \psi')}{F_0 F_2 [(1-\eta)(1 - \frac{\eta}{\mathcal{Z}_0} - \psi') + \psi']} + 1 \right)^2 - 1 \right]}, \quad (2.8)$$

где численные значения входящих в уравнение функций: $F_2 = 0,4$, $F_3 = 1,37$, $F_0 = 12$ и $\gamma = 0,5$.

Численное решение уравнения (2.6) представлено в форме универсальной зависимости $\mathcal{Y}$ от $\lg \eta$ и приводится на рис. 2.2-2.3. Очень хорошее согласование с опытными данными в переходной области и турбулентном ядре потока для всех чисел $Re > 10^4$ достигается при значении безразмерной толщины вязкого подслоя $\mathcal{Z}_1 = 1,6$. Из графика рис. 2.2 видно, что в области $\eta > 70$ экспериментальные точки вполне удовлетворительно располагаются на прямой, которая соответствует зависимости

$$\mathcal{Y} = 5,75 \lg \eta + 5,5. \quad (2.9)$$

В очень узкой области $0 < \eta < 2$, смежной с твёрдой поверхностью, распределение скоростей в достаточной степени удовлетворяет закономерности вязкого течения $\mathcal{Y} = \eta$. В переходной области, ориентировочно в пределах $2 < \eta < 70$, в связи с постепенно усили-

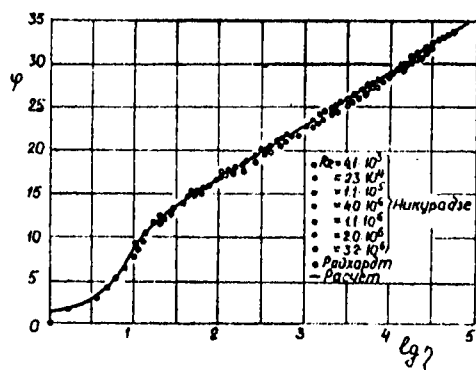


Рис.2.2. Зависимость φ от $\lg \eta$, установленная в результате расчёта, в сопоставлении с опытными данными

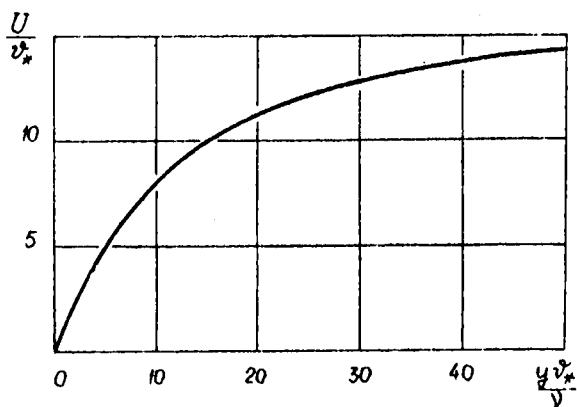


Рис.2.3. Зависимость φ от η в пристенной области, установленная расчётом

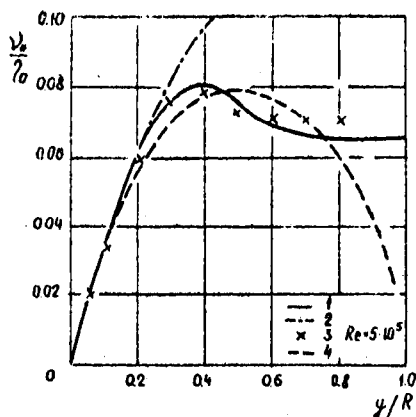


Рис.2.4. Зависимость коэффициента турбулентной вязкости от y/R при течении в трубе:

- 1 - расчёт с учётом переноса энергии турбулентности;
- 2 - расчёт без учёта переноса энергии;
- 3 - опытные данные Лаубера;
- 4 - зависимость Никурадзе

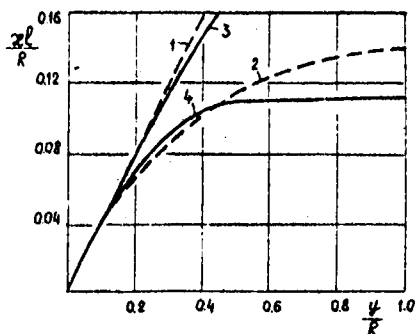


Рис.2.5 Зависимость линейного масштаба турбулентности: $\chi l/R$ от y/R при течении в трубе:

- 1 - $\chi l/R = 0,4 y/R$; 2 - по зависимости Никурадзе;
- 3 - расчёт без учёта переноса энергии турбулентности;
- 4 - расчёт с учётом переноса энергии

вающимся влиянием турбулентного напряжения имеет место переход - ный характер распределения скоростей от закономерности $z \sim y$ до логарифмического характера распределения (2.9).

На рис. 2.4 [2] показано изменение безразмерного коэффи - циента турбулентной вязкости ν_t/ν или $\nu_t/\nu_\star$ от безразмерной координаты y/R по радиусу цилиндрической трубы, полученное, в частности, с учётом переноса энергии турбулентности (кривая I) и хорошо согласующееся с опытными данными Лаундера и Никурадзе. На рис. 2.5 показано изменение безразмерного комплекса x^l/R , содержащего линейный масштаб турбулентности, от y/R .

2.3. Стабилизированное турбулентное течение в каналах произвольной формы поперечного сечения [4]

Стабилизированные турбулентные потоки жидкости в каналах различной формы поперечного сечения являются весьма важным в прикладном отношении классом турбулентных течений, поскольку такие каналы широко применяются в самых различных технологических устройствах. Теплообмен в этих устройствах существенным образом зависит от распределения гидродинамических характеристик теплоносителя по сечению канала. Имеющиеся немногочисленные методы расчёта гидравлических сопротивлений и полей скорости в каналах сложной формы отличаются, как правило, большой трудоёмкостью и, кроме того, опираются на использование тех или иных эмпирических констант. В связи с этим возникает необходимость создания метода расчёта гидродинамики сложных каналов, позволяющего по возможности исключить необходимость опытной коррекции теоретических результатов, обеспечив при этом их большую общность и сохранив адекватность реальным измерениям.

В монографии [2] на основе анализа физического механизма генерации турбулентности в установившихся потоках построена теория пристенных турбулентных течений и разработан метод определения, без использования эмпирических констант, полей осреднённой скорости, турбулентных напряжений, вихревой вязкости и других параметров пристенного потока. Некоторые дополнительные соображения позволяют применить полученные зависимости к исследованию стабилизированных течений в каналах различной формы поперечного сечения и, более того, позволяют построить обобщённый метод расчёта гидродинамических характеристик турбулентного течения в каналах

произвольного сечения.

Установившееся турбулентное течение в каналах или трубах, имеющих различные формы сечения, в общем случае определяется уравнением, которое, будучи представлено в прямоугольной системе координат, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \text{const.} \quad (2.10)$$

Здесь предполагается, что движение осуществляется в направлении оси z . В случае напорного движения в закрытых каналах

$$\text{const} = -\frac{1}{\rho} (dP/dz).$$

Компоненты тензора напряжений определяются соотношениями:

$$\tau_{xx} = \mu \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} - \rho \overline{u_x u_x}; \quad \tau_{yx} = \mu \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial y} - \rho \overline{u_y u_x}.$$

Эти напряжения, используя представление о вихревой или турбулентной вязкости, можно представить в виде

$$\frac{\tau_{xx}}{\rho} = (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x}, \quad \frac{\tau_{yx}}{\rho} = (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial y}. \quad (2.11)$$

В случае чисто вязкого течения, когда кинематический коэффициент турбулентной вязкости ν_t обращается в нуль и остаётся влияние только молекулярной вязкости, имеем

$$\frac{\tau_{xx}}{\rho} = \nu \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \frac{\tau_{yx}}{\rho} = \nu \frac{\partial U_x}{\partial y}. \quad (2.12)$$

Следует отметить, что уравнение (2.10) является следствием уравнения Рейнольдса для рассматриваемых условий течения, но одновременно остаётся справедливым и для чисто вязкого течения. Таким образом, уравнение (2.10), не включающее непосредственно скоростей течения, остаётся верным и для любой из указанных выше форм определения компонент тензора напряжений τ_{xx} и τ_{yx} и, следовательно, определяет поле напряжений в каждом конкретном случае с известными граничными условиями единственным образом как для вязкого, так и для турбулентного течения.

Из вышесказанного следует, что при известном решении для установившегося вязкого течения в канале некоторой заданной формы сечения полученное аналитическое определение поля

напряжений остаётся верным и для турбулентного течения. Предположи, что это решение при заданном градиенте давления dP/dx можно представить зависимостью

$$U_x = f(x, y)$$

и, следовательно, компоненты напряжений будут

$$\frac{\tau_{xx}}{\rho} = \nu \frac{\partial f}{\partial x}; \quad \frac{\tau_{yx}}{\rho} = \nu \frac{\partial f}{\partial y},$$

а главное напряжение, определяемое как их геометрическая сумма, найдётся из соотношения

$$\frac{\tau}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\tau_{xx}}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{yx}}{\rho}\right)^2} = \nu \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}. \quad (2.13)$$

Направление нормали к плоскости действия главного напряжения, совпадающее одновременно с направлением градиента скорости, устанавливается следующим образом:

$$\sin \alpha = \frac{\partial f / \partial x}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{\partial f / \partial y}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}. \quad (2.14)$$

В итоге определяется значение главного напряжения в любой точке поперечного сечения и направление нормали к поверхности, в которой действует это напряжение. Непрерывные линии, нормальные в каждой точке сечения канала плоскости действия главного напряжения, имеют начало в некоторой точке на контуре, соответствующем стенкам канала, и заканчиваются в пределах центральной области, где напряжение становится равным нулю и скорость достигает максимального значения.

При турбулентном течении тензор напряжений является суммой вязкой и турбулентной составляющих с общей ориентацией нормали главного напряжения. Метод расчёта поля осреднённой скорости, предложенный в работе [1], позволяет по соотношению вязкой и турбулентной частей главного напряжения определить изменение скорости в направлении нормали к плоскости действия этого напряжения.

С целью возможного обобщения получаемых результатов воспользуемся безразмерной системой координат, полагая

$$\xi = \frac{x V_0}{\nu}, \quad \eta = \frac{y V_0}{\nu},$$

где $V_0 = \sqrt{\tau_0/\rho}$ - динамическая скорость в некоторой точке контура канала, в которой напряжение τ_0 имеет наибольшее значение. Кроме того, введём безразмерные значения параметров потока

$$T_{\xi z} = \frac{\tilde{\tau}_{xz}}{\rho V_0^2}, \quad T_{zz} = \frac{\tilde{\tau}_{zz}}{\rho V_0^2}, \quad T = \frac{\tilde{\tau}}{\rho V_0^2},$$

$$\psi = \frac{U_z}{V_0}; \quad \varphi = \frac{\bar{U}_z}{V_0}; \quad \gamma_* = \frac{\partial t}{\partial \xi}.$$

Записанные выше соотношения представим в инвариантной форме. Так, компоненты тензора напряжений в соответствии с уравнениями (2.11) определяются следующим образом:

$$T_{\xi z} = (1 + \gamma_*) \frac{\partial \psi}{\partial \xi}; \quad T_{zz} = (1 + \gamma_*) \frac{\partial \psi}{\partial \eta}. \quad (2.15)$$

При известном решении для вязкого течения $\psi = \psi(\xi, \eta)$ получим для них, учитывая (2.12),

$$T_{\xi z} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}; \quad T_{zz} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}. \quad (2.16)$$

При этом значение главного напряжения найдётся из соотношения

$$T = \sqrt{T_{\xi z}^2 + T_{zz}^2} = \sqrt{(\partial \psi / \partial \xi)^2 + (\partial \psi / \partial \eta)^2}, \quad (2.17)$$

а направление нормали к плоскости действия этого напряжения определится уравнениями:

$$\sin \alpha = \frac{\partial \psi / \partial \xi}{\sqrt{(\partial \psi / \partial \xi)^2 + (\partial \psi / \partial \eta)^2}} = \frac{T_{\xi z}}{\sqrt{T_{\xi z}^2 + T_{zz}^2}};$$

$$\cos \alpha = \frac{\partial \psi / \partial \eta}{\sqrt{(\partial \psi / \partial \xi)^2 + (\partial \psi / \partial \eta)^2}} = \frac{T_{zz}}{\sqrt{T_{\xi z}^2 + T_{zz}^2}}. \quad (2.18)$$

Предположим теперь, что контур стенок рассматриваемого канала задан функциональной зависимостью $z_l = P(\xi_l)$. При численном решении задачи индекс l можно рассматривать как порядковый номер точек, при помощи которых контур стенок канала делится на малые, но конечные отрезки. Напряжение на стенках канала в принятой системе обозначений определяется соотношением

$$T_l = \sqrt{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right)_l^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)_l^2} = \frac{V_l^2}{V_0^2}, \quad (2.19)$$

где $V_l = \sqrt{\epsilon_l/\rho}$ — динамическая скорость в некоторой l -той точке на контуре. Как было показано, из каждой точки на поверхности канала может быть построена кривая в сечении последнего, каждый линейный элемент которой, малый, но конечный по размерам, является нормалью к направлению главного напряжения. Обозначим этот элемент через δ и воспользуемся его безразмерной формой $\Delta n = \delta V_0/\psi$. Если координаты начала этого элемента (ξ^j, η^j) , то координаты его конца будут, учитывая (2.18),

$$\xi^{j+1} = \xi^j - \Delta n \cdot \sin \alpha^j; \quad \eta^{j+1} = \eta^j - \Delta n \cdot \cos \alpha^j. \quad (2.20)$$

В пределах этого элемента значение напряжения $T^{j,j+1}$ можно принять равным средней величине

$$T^{j,j+1} = \frac{1}{2} (T^j + T^{j+1}).$$

При турбулентном течении это напряжение представляет сумму вязкой и турбулентной составляющих. Определение поля осреднённой скорости выполняется на основе закономерности пристенного турбулентного течения, которая в пределах элементарного участка нормальной линии может быть представлена уравнением [1]:

$$\psi'' = -(\psi')^2 \sqrt{\frac{2 F_2^2}{3 F_3 T^{j,j+1}} \left\{ \left[\frac{3 F_3 \gamma (T^{j,j+1} - \psi')}{F_0 F_2 [(1-\gamma) T^{j,j+1} + \gamma \psi']} + 1 \right]^2 - 1 \right\}}, \quad (2.21)$$

где $\psi' = d\psi/dn$; $\psi'' = d^2\psi/dn^2$; значение безразмерной амплитуды турбулентных возмущений $\gamma = 0,5$; главные значения функции F соответствуют следующим: $F_0 = 12$; $F_2 = 0,4$; $F_3 = 1,371$. ψ и ψ' в начале элементарного участка нормали являются граничными условиями для уравнения (2.21). Последнее соотношение можно также представить в виде

$$\psi'' = -(\psi')^2 \frac{\mathcal{X}(\gamma, \psi', \psi')}{\sqrt{T^{j,j+1}}}, \quad (2.22)$$

где переменная

$$\mathcal{X} = \sqrt{\frac{2 F_2^2}{3 F_3} \left\{ \left[\frac{3 F_3 \gamma \psi_*}{F_0 F_2 [(1-\gamma) \psi_* + 1]} + 1 \right]^2 - 1 \right\}} \quad (2.23)$$

соответствует коэффициенту пропорциональности в известной формуле Кармана для турбулентных напряжений, но, в отличие от него, не является величиной постоянной, а изменяется в зависимости от соотношения между вязкой и турбулентной частью полного напряжения.

Если предположить существование на стенке канала тонкого слоя чисто вязкого течения, то решение уравнения (2.21) или (2.22) с учётом (2.23) определяет всё поле осреднённых скоростей области турбулентного течения, включая и переходную зону с влиянием вязких напряжений до самой границы с вязким подслоем. Что касается последнего, то в литературе почти полностью отсутствуют сведения о структуре подслоя в каналах сложного поперечного сечения, в частности, сведения об изменении его толщины по периметру канала. Дело в том, что вследствие существенного изменения гидродинамических характеристик потока по периметру сложного канала турбулентное течение в таких каналах имеет ряд особенностей по сравнению с течением в прямой круглой трубе [5]. Так, в узких частях сечения вследствие интерференции пограничных слоёв образуются так называемые застойные зоны - области с ламинарным режимом течения, и если в круглых трубах толщина ламинарного подслоя при развитом турбулентном течении весьма мала по сравнению с размерами трубы, то в каналах сложного профиля размеры зоны ламинарного течения в углах могут быть значительными и соизмеримыми с размером канала даже при высоких значениях числа Рейнольдса. Оценка размеров вязкого подслоя, сохраняющегося непосредственно на твёрдой стенке, представляет значительные трудности как в теоретическом, так и в экспериментальном плане. Из соображений, связанных с универсальностью условий течения вблизи стенки при достаточно больших числах Рейнольдса, установлено, что безразмерная толщина вязкого подслоя удовлетворяет условию

$$\Delta n = \frac{\delta V_*}{\sqrt{}} = const,$$

где V_* - динамическая скорость на твёрдой поверхности, а значение константы, по данным [1], равно 1,6. Используя такое определение толщины подслоя, получим в принятой системе обозначений для любой точки периметра сложного канала

$$\Delta n_i = 1,6 \frac{V_*}{V_i}. \quad (2.24)$$

Координаты конца нормали к плоскости действия главного напряжения на верхней границе подслоя с учётом (2.18) определяются зависимос-

тями:

$$\xi_i^{j+1} = \xi_i^{j=0} - \Delta n_i \sin \alpha_i^{j=0}; \quad \eta_i^{j+1} = \eta_i^{j=0} - \Delta n_i \cos \alpha_i^{j=0}.$$

Таким образом, на границе вязкого подслоя безразмерные значения скорости φ и её производной, учитывая, что на стенке $\varphi = 0$ и имея в виду линейный характер изменения скорости в пределах этого слоя, получим в виде

$$(\varphi')_i^{j+1} = T_i^{j=0, j+1}; \quad (\varphi)_i^{j+1} = (T_i^{j=0, j+1}) \cdot 1,6 \cdot \frac{V_0}{V_i}. \quad (2.25)$$

Общий расход Q жидкости через сечение канала при установившемся турбулентном течении определяется суммированием расходов по всем элементарным ячейкам, которые при численном расчёте находятся между кривыми n_i и n_{i+1} , имеющими в каждой своей точке направление, нормальное к плоскости действия главного напряжения. Площадь элементарного четырёхугольника с координатами вершин

$$\left\{ \begin{array}{cc} M_i^j(\xi_i^j, \eta_i^j) & M_{i+1}^j(\xi_{i+1}^j, \eta_{i+1}^j) \\ M_i^{j+1}(\xi_i^{j+1}, \eta_i^{j+1}) & M_{i+1}^{j+1}(\xi_{i+1}^{j+1}, \eta_{i+1}^{j+1}) \end{array} \right\}$$

определяется зависимостью

$$S_{i,i+1}^{j,j+1} = \frac{1}{2} | (\xi_i^j \eta_{i+1}^j - \xi_{i+1}^j \eta_i^j) + (\xi_{i+1}^j \eta_{i+1}^{j+1} - \xi_{i+1}^{j+1} \eta_{i+1}^j) + (\xi_{i+1}^{j+1} \eta_i^{j+1} - \xi_i^{j+1} \eta_{i+1}^{j+1}) + (\xi_i^{j+1} \eta_i^j - \xi_i^j \eta_i^{j+1}) |. \quad (2.26)$$

Таким образом, расход через каждую элементарную ячейку найдётся из соотношения

$$q_{i,i+1}^{j,j+1} = S_{i,i+1}^{j,j+1} \cdot (\varphi_c)_{i,i+1}^{j,j+1}, \quad (2.27)$$

где $(\varphi_c)_{i,i+1}^{j,j+1}$ — среднее значение скорости в этой ячейке. Полагая площадь сечения канала равной S , среднерасходное значение скорости определим следующим образом:

$$\varphi_{cp} = Q/S. \quad (2.28)$$

Как следует из предыдущего изложения, для расчёта гидродинамических характеристик стабилизированного турбулентного течения в каналах произвольной формы поперечного сечения в каждом конкрет-

ном случае необходимо предварительно решить задачу о распределении главного напряжения в сечении канала. При этом показано, что если удастся найти аналитическое выражение $U_x = f(x, y)$, определяющее распределение скорости установившегося вязкого течения в канале некоторой заданной формы, то рассчитанное по этому распределению поле напряжений остаётся справедливым и для турбулентного течения при том же градиенте давления dP/dx . В настоящей работе с целью построения обобщённой схемы расчёта параметров турбулентного течения в каналах произвольной формы для решения задачи о вязком течении используется метод, позволяющий определить распределение скоростей в канале любого поперечного сечения [6].

Уравнение, описывающее распределение скоростей полностью развитого ламинарного течения в канале, имеет вид

$$\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} = \text{const}. \quad (2.29)$$

Используя преобразование

$$U_x \left(-\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \right) = u^* - \frac{1}{4}(x^2 + y^2), \quad (2.30)$$

соотношение (2.29) можно привести к уравнению Лапласа для величины u^* :

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} = 0. \quad (2.31)$$

Граничное условие для u^* запишется следующим образом:

$$u^* = \frac{1}{4}(x_c^2 + y_c^2), \quad (2.32)$$

где x_c и y_c — координаты контура стенок канала. Известно, что для любого положительного числа N действительная и мнимая части комплексной переменной $(x + iy)^N$ являются точным решением уравнения Лапласа. В работе [6] приведены первые семнадцать таких решений $g_i(x, y)$ для $N = 0, 1, 2, 3, \dots$:

$$g_1 = 1; \quad g_2 = x; \quad g_3 = y; \quad g_4 = x^2 - y^2; \quad g_5 = 2xy; \quad g_6 = x^3 - 3xy^2;$$

$$g_7 = 3x^2y - y^3; \quad g_8 = x^4 + y^4 - 6x^2y^2; \quad g_9 = 4x^3y - 4xy^3;$$

$$g_{10} = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4; \quad g_{11} = y^5 - 10x^2y^3 + 5x^4y;$$

$$g_{12} = x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6; \quad g_{13} = 6x^6y + 6xy^5 - 20x^3y^3;$$

$$g_{14} = x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 - 7xy^6;$$

$$g_{15} = 7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7;$$

$$g_{16} = x^8 + y^8 - 28x^6y^2 + 70x^4y^4 - 28x^2y^6;$$

$$g_{17} = 8x^7y - 56x^5y^3 + 56x^3y^5 - 8xy^7.$$

Располагая значениями $g_i(x, y)$, решение для u^* можно представить в виде линейной суперпозиции этих функций

$$u^*(x, y) = \sum_{i=1}^N a_i g_i(x, y), \quad (2.33)$$

где коэффициенты ряда a_i представляют собой произвольные постоянные. Для того чтобы получить решение уравнения Лапласа (2.31) в интересующей нас области, ограниченной контуром стенок канала, необходимо удовлетворить граничному условию (2.32), которое с учётом (2.33) можно записать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^N a_i g_i(x_c, y_c) = \frac{1}{4} (x_c^2 + y_c^2). \quad (2.34)$$

Соотношение (2.34) служит основой для нахождения постоянных a_i .

Как можно видеть, зависимость (2.34) аналогична уравнениям, из которых определяются коэффициенты ряда Фурье, однако в отличие от ряда Фурье функции g_i , которые обычно появляются в связи с произвольностью задания контура поперечного сечения канала, не являются ортогональными. Для формирования из системы заданных на контуре канала C функций $g_i(x_c, y_c)$ соответствующей системы ортонормированных функций φ_i таких, что

$$\oint_C \varphi_i^2 dl = 1; \quad \oint_C \varphi_i \varphi_j dl = 0,$$

используется методика ортонормирования Грама-Шмидта [7,8]. Согласно процедуре ортонормирования рекуррентную формулу для нахождения искомой ортонормированной системы функций можно записать следующим образом:

$$\varphi_{n+1} = \frac{\varphi'_{n+1}}{\sqrt{N \varphi'_{n+1}}}; \quad \varphi'_{n+1} = g_{n+1} - \sum_{k=1}^n \varphi_k (\varphi_k, g_{n+1}). \quad (2.35)$$

Здесь под скалярным произведением двух функций (φ, g) понимается взятый по контуру C интеграл

$$(\varphi, g) = \oint_C \varphi g dl,$$

а норма функции есть скалярное произведение её на себя.

$$N\varphi = (\varphi, \varphi) = \oint_C \varphi^2 dl.$$

Функции φ_i являются линейными комбинациями исходных функций g_i , а именно:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_{11} g_1; & \varphi_2 &= \alpha_{21} g_1 + \alpha_{22} g_2 + \dots; \\ \varphi_j &= \sum_{k=1}^j \alpha_{jk} g_k, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где величины α_{ij} можно определить из соотношений

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{\sqrt{N g_1}}; & \alpha_{ii} &= \frac{1}{\sqrt{N \varphi_i}}; \\ \alpha_{ij} &= \frac{-[\alpha_{ij}(\varphi_j, g_i) + \alpha_{j+1,j}(\varphi_{j+1}, g_i) + \dots + \alpha_{i-1,j}(\varphi_{i-1}, g_i)]}{\sqrt{N \varphi_i}}. \end{aligned}$$

Правая часть уравнения (2.32) $F = \frac{1}{4}(x_c^2 + y_c^2)$ обладает свойством разложения в ряд Фурье, составленный из найденных ортонормированных функций

$$F = \sum_{i=1}^N K_i \varphi_i, \quad (2.37a)$$

где коэффициенты K_i определяются следующим образом:

$$K_i = \oint_C F \varphi_i dl. \quad (2.37b)$$

Определив указанным выше способом функции φ_i , постоянные α_{ij} и коэффициенты K_i ряда (2.37a), решая совместно уравнения (2.34) и (2.35) и проводя соответствующие преобразования, находим окончательное выражение для искомых коэффициентов a_i :

$$a_i = \sum_{j=1}^N (F, \varphi_j) \alpha_{ji}. \quad (2.38)$$

После того как определены эти коэффициенты, решение для распределения скоростей U_x в канале данного сечения получим, решая совместно уравнения (2.30) и (2.33), в следующем виде:

$$U_x = \left(-\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \right) \left[\sum_{i=1}^N a_i g_i(x, y) - \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \right]. \quad (2.39)$$

Распределение компонент напряжения по сечению канала легко получить, дифференцируя, в соответствии с соотношениями (2.12) и с учётом выражения для функций $g_i(x, y)$, последнюю зависимость по соответствующей координате.

Таким образом, запрограммировав функции $g_i(x, y)$ и $F = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ и введя эту программу вместе с программой ортонормирования в общую схему расчёта распределения напряжений по сечению канала, а также используя зависимость (2.21) для нахождения поля осреднённой скорости, получим обобщённый метод определения гидродинамических параметров стабилизированного турбулентного течения в каналах произвольной формы поперечного сечения. При этом на практике, в частном случае геометрии канала, необходимо только точно задать точки (x_c, y_c) ; контура его стенок.

Для оценки возможности использования предлагаемой методики расчёта характеристик турбулентного потока в прямых каналах некруглого сечения было проведено численное исследование гидродинамики турбулентного течения в каналах с различной формой профиля стенки с последующим сравнением получаемых результатов с имеющимися теоретическими и экспериментальными данными.

Прежде всего необходимо отметить, что использование описанной выше схемы ортонормирования Грама-Шмидта для нахождения коэффициентов ряда A_i в соотношении (2.39) приводит в итоге к практически тождественному совпадению расчётных профилей скорости и напряжения с аналитически определёнными распределениями указанных характеристик в случае гидродинамически стабилизированного ламинарного течения в каналах самой различной формы. Сравнение рассчитанных полей скорости было проведено для течений в каналах эллиптического, квадратного, прямоугольного поперечных сечений, сечения в форме равностороннего треугольника [9], равнобедренного треугольника [10]. Хорошее совпадение найденного по уравнению (2.39) поля скорости имеет место также при сопоставлении с экспериментально наблюдаемой картиной течения в канале с поперечным сечением в форме кругового сегмента [6].

На рис. 2.6 приведено сравнение рассчитанного распределения трения на стенке при турбулентном течении в канале, представляющем собой круглую трубу с пазом, с результатами экспериментов, выполненных Никурадзе [11]. На рис. 2.7 показано сравнение аналогичных характеристик для случая течения в канале с поперечным сечением, имеющим форму равнобедренного треугольника с отношением высоты к основанию 5:1. Представлено безразмерное распределение

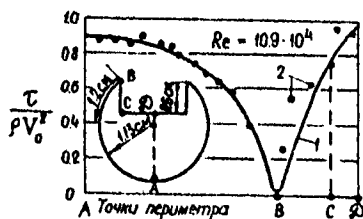


Рис.2.6. Безразмерное распределение напряжения на стенке канала, представляющего собой круглую трубу с пазом:
1 - теоретическая кривая;
2 - опытная кривая Никурадзе [11]

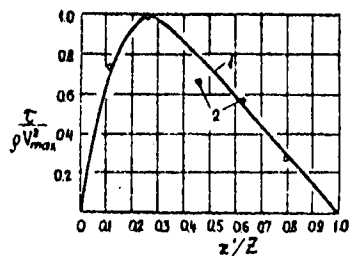


Рис.2.7. Распределение безразмерного напряжения на боковой стенке канала с поперечным сечением в форме равнобедренного треугольника с отношением высоты к основанию 5 : 1 : 1 - расчёт с использованием методики ортонормирования Грама-Шмидта; 2 - опытные данные Кромерса и Эккерта [12]; z' - координата, отсчитываемая параллельно боковой стенке канала; $z' = 0$ соответствует пересечению боковых стенок длиной Z с основанием треугольного сечения

трения на боковой стенке канала; при этом в качестве масштаба выбрана максимальная динамическая скорость $V_{\max}$ на этой стенке, достигающая значения $V_{\max} = 0,53$ м/с при числе Рейнольдса $Re = 10,9 \cdot 10^3$. Сопоставление теоретического и экспериментального распределений безразмерной осреднённой скорости при турбулентном течении в канале аналогичной формы при значении $Re = 26,1 \cdot 10^3$ дано на рис. 2.8.

Вообще говоря, при сравнении распределений изотак в каналах некруглой формы, построенных по экспериментальным данным и полученных в результате расчёта с использованием предлагаемых в настоящей работе зависимостей, следует ожидать некоторого расхождения указанных кривых. Дело в том, что в турбулентном потоке жидкости в таких каналах существует также вторичное течение в плоскости, перпендикулярной направлению основного потока. Однако прямые измерения [13,14] показывают, что скорости вторичного течения весьма незначительны и составляют величину порядка 1-3% от максимальной скорости на оси канала и, кроме того, при увеличении числа Рейнольдса относительная скорость вторичного течения уменьшается, что, по-видимому, объясняется интенсификацией процессов турбулентного перемешивания. Вышесказанное дало возможность пренебречь в данном исследовании вторичными течениями, существенно упростив этим расчёт параметров потока. Результат подобного приближения можно оценить путём сравнительного анализа расчётных и экспериментальных картин течения в каналах некруглой формы, в частности, сравнением полей изотак в канале квадратного сечения, где вторичные токи жидкости проявляются наиболее заметно [14]. Такое сравнение проведено на рис. 2.9, где представлены данные измерений Льюэксера [15] в сопоставлении с результатами расчёта поля осреднённых скоростей по соотношению (2.21). Видно, что хотя и наблюдается некоторое отклонение теоретических кривых постоянной скорости от экспериментальных, всё же это отклонение нельзя считать достаточно значительным.

На рис. 2.10 приведены рассчитанные профили осреднённой скорости вдоль осей симметрии прямоугольного канала с отношением сторон $a:b = 3,5$ в сопоставлении с экспериментальными данными [15]. Наблюдается достаточно хорошее совпадение теоретических и экспериментальных кривых осреднённой скорости.

Результаты численного расчёта коэффициентов сопротивления каналов треугольного поперечного сечения, а также расчётные данные по коэффициентам сопротивления прямоугольного с отношением

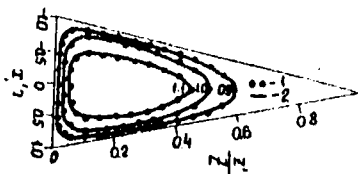


Рис.2.8. Контурный график распределения относительной скорости $\bar{U}/\bar{U}_c$ при турбулентном течении в канале, имеющем форму равнобедренного треугольника с отношением высоты к основанию 5:1 :
 1 - расчёт по зависимости 2.21 ;
 2 - опытные данные [12]

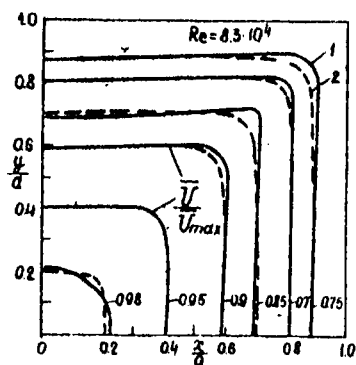


Рис.2.9. Распределение изотех при турбулентном течении в квадратном канале:

1 - измерения Льюбьюссера [15];

2 - теоретические кривые;

$\bar{U}_{max}$ - максимальная скорость на оси канала;

a - сторона канала

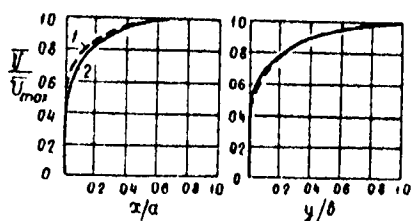


Рис.2.10. Профили безразмерной осреднённой скорости вдоль осей симметрии прямоугольного канала с отношением сторон $\alpha:\delta = 3,5$:

1 - расчёт по зависимости (2.21) ;

2 - опытные данные [15]

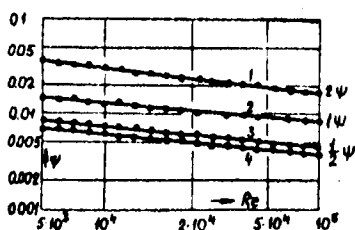


Рис.2.11. Зависимость коэффициентов сопротивления трения каналов различной формы поперечного сечения от числа Рейнольдса:

1 - равнобедренный прямоугольный треугольник (опытные данные [17]) ;

2 - равносторонний треугольник (опытные данные [17]) ;

3 и 4 - квадрат и прямоугольник с соотношением сторон 1:2 (эксперименты Гартнегга, Коха и Маккомаса [18])

сторон 1:2 и квадратного каналов приведены на рис.2.II . Для сравнения показаны результаты измерений [17] (треугольные каналы) и [18] (квадратное и прямоугольное поперечные сечения). При этом число Рейнольдса рассчитывалось по среднерасходной скорости, а коэффициент сопротивления ψ определялся как

$$\psi = - \frac{dP}{dx} \cdot \frac{2z_h}{\rho V_{cp}},$$

где z_h - гидравлический радиус.

В заключение следует отметить, что использование модели механизма генерации турбулентности [1] и разработанного на её основе метода расчёта параметров пристенных турбулентных потоков позволяет определить целый ряд представляющих несомненный интерес характеристик турбулентного течения. Так, при построении полей осреднённых скоростей в каналах различной формы были рассчитаны распределения турбулентных напряжений и вихревой вязкости по сечению этих каналов. Это обстоятельство, а также достаточно хорошее соответствие теоретических результатов опытным данным во всех исследованных случаях течения позволяет, по-видимому, использовать построенный обобщённый метод расчёта параметров турбулентных потоков в каналах произвольного поперечного сечения в качестве основы для изучения гидродинамики турбулентного течения жидкости в этих каналах.

2.4. Стабилизированное турбулентное течение в открытых каналах произвольной формы сечения [19]

Установившееся течение в открытых каналах произвольной формы, но неменяющегося по площади поперечного сечения, может быть представлено уравнением в напряжениях

$$(\text{Div } \mathcal{P})_x = -\rho g i, \quad (2.40)$$

где $\mathcal{P}$ - тензор напряжений, нижний индекс обозначает проекцию на ось, соответствующую основному направлению движения. Это уравнение удовлетворяет в приведённой форме одновременно вязкому и турбулентному режимам. Различие, однако, заключается в том, что тензор напряжений при турбулентном течении дополнительно включает турбулентную часть, соответствующую вихревой вязкости. Дополнительным и общим для обоих режимов течения может быть выбрано условие равен-

ства сил на некоторые, соответствующим образом так же выбранных, участках канала

$$\int_0^{S_0} \tilde{\tau}_w dS = -\rho g i f, \quad (2.41)$$

где $\tilde{\tau}_w$ - касательное напряжение на стенках канала; f - площадь живого сечения канала; S_0 - длина смачиваемого контура поперечного сечения канала. Тождественность уравнений и граничных условий при установившемся течении в открытом канале для турбулентного и вязкого режимов приводит к необходимости использования подобия полей напряжений для обоих режимов течения. Возможные отклонения могут иметь место лишь в связи с возникновением дополнительных, вторичных движений при турбулентном течении.

Предлагаемый метод расчёта полей осреднённых скоростей при установившемся турбулентном течении в открытых каналах сводится прежде всего к решению задачи о вязком течении в открытом канале заданной формы поперечного сечения и на основе этого решения к определению поля напряжений, которое может быть представлено сеткой линий главных напряжений U и нормальных к ним линий нулевого напряжения V или эквивалентной ортогональной сеткой изотак и линий градиентов скоростей. Заключительным этапом является расчёт поля осреднённых скоростей на основе метода [1], дающего возможность выполнить его по известному полю напряжений.

Ортогональная криволинейная сетка линий $U-V$, характеризующая поле напряжений, определяется следующим образом. В общем случае касательные напряжения на площадках с произвольной ориентацией вокруг оси X , совпадающей с направлением движения потока, имеют вид

$$\tilde{\tau}_{N\alpha} = \tilde{\tau}_{yx} \cos(N, y) + \tilde{\tau}_{zx} \cos(N, z), \quad (2.42)$$

где N - направление нормали; $\cos(N, y)$, $\cos(N, z)$ - направляющие косинусы; y , z - декартовы координаты по вертикали и поперёк потока; $\tilde{\tau}_{yx}$ и $\tilde{\tau}_{zx}$ - составляющие главного напряжения $\tilde{\tau}$, имеем

$$\tilde{\tau}^2 = \tilde{\tau}_{yx}^2 + \tilde{\tau}_{zx}^2. \quad (2.43)$$

Из (2.42) следует, что линии V , совпадающие с площадками нулевых касательных напряжений, определяются уравнением

$$\tilde{\tau}_{yx} dy - \tilde{\tau}_{zx} dz = 0, \quad (2.44)$$

а дифференциальное уравнение ортогональных к ним линий U имеет

вид

$$\tau_{xx} dx + \tau_{yx} dy = 0. \quad (2.45)$$

Записывая компоненты касательного напряжения в развёрнутом виде, можно установить, что при отсутствии вторичных течений линии U совпадают с изотаксами продольных скоростей, а V - с линиями градиентов скоростей как для ламинарных, так и для турбулентных потоков. Тогда из условия о подобии полей напряжений при различных режимах установившегося равномерного движения можно утверждать, что изотаксы турбулентных потоков отличаются по форме от ламинарных только в результате возникновения вторичных течений.

Остановимся на примерах построения поля $U-V$ для течений в открытых каналах различной формы сечений. Исходя из решения задачи для вязкого течения в открытом канале трапециoidalного сечения имеем уравнение изотакс

$$\frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right) \left[A^4 - 2A^2 \left(\frac{x^2}{h^2 m^2} + \left(1 - \frac{y}{h} \right)^2 \right) + \left(\frac{x^2}{h^2 m^2} - \left(1 - \frac{y}{h} \right)^2 \right)^2 \right] = const, \quad (2.46)$$

где $A = 1 + \frac{b}{2hm}$, m - коэффициент заложения откосов, b - ширина по дну, h - глубина. Аналогично строится поле $U-V$ для треугольных сечений. Сопоставление расчётных данных с опытными для турбулентных течений свидетельствует об отклонении за счёт возникающих вторичных движений только в угловых зонах поперечного сечения. Некоторые специфические особенности имеют место у свободной поверхности движущейся жидкости в связи с тем, что эта поверхность не является строго горизонтальной и при расчёте поля $U-V$ приходится это учитывать [20, 21]. Следует отметить, что возникающие отклонения за счёт вторичных течений больше для треугольных сечений по сравнению с трапециoidalными. Для открытых каналов параболического сечения были использованы приближённые решения Пуассона [22], для прямоугольных сечений сетка $U-V$ строилась по точному аналитическому решению в виде рядов Фурье. На основе полученных результатов об установившемся ламинарном движении жидкости в открытых каналах можно установить сетку $U-V$, определив форму кривых изотакс и градиентов скоростей для турбулентных течений.

Расчёт полусреднённых скоростей при установившемся турбулентном течении в закрытых каналах выполняется при известном поле напряжений, представленном ортогональной сеткой $U-V$, при помощи метода [1], который устанавливает аналитическую зависи-

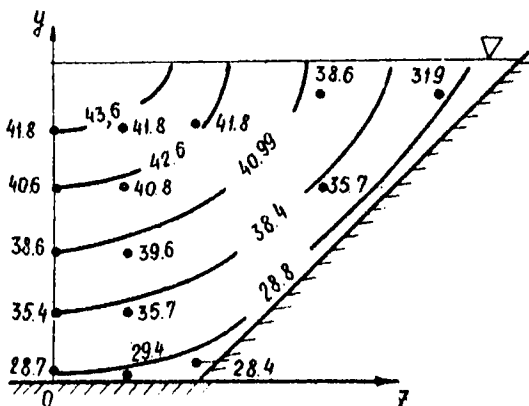


Рис.2.12. Результаты расчётов для каналов трапециевидальной формы сечения в сопоставлении с опытными данными

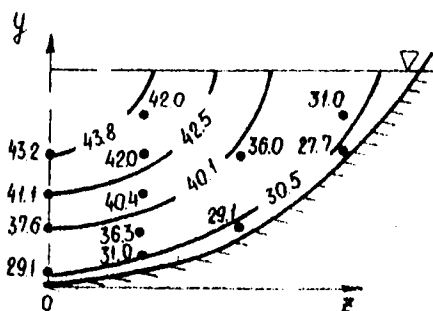


Рис.2.13. Результаты расчётов для каналов параболической формы сечения в сопоставлении с опытными данными

мость между главным напряжением и осреднённой скоростью по зависимости (2.6).

Результаты расчётов для каналов трапецеидальной и параболической формы сечения приводятся на рис. 2.12, 2.13 в сопоставлении с опытными данными [20, 23]. Результаты эти показаны в виде изотак (сплошные линии) с указанием скорости в см/с. Там же точками отмечены измеренные скорости, причём на оси симметрии отклонение значений расчётных скоростей от опытных не превышало 3-5 %. Все расчёты проводились для гладких стенок, но при использовании соответствующих условий на стенках метод расчёта может быть использован для открытых каналов с шероховатыми стенками.

2.5. Автомодельный турбулентный пограничный слой

Содержание работы касается исследования стационарного автомодельного турбулентного пограничного слоя в связи с открывающейся возможностью аналитического представления характера распределения касательных напряжений как функции поля осреднённых скоростей, которое следует непосредственно из анализа уравнения пограничного слоя, и, кроме того, возможностью использования связи касательных напряжений с производными от значений осреднённых скоростей, следующей из теории пристенных турбулентных течений в модифицированной форме по работе [24], что приводит к существенно уточнённому определению основных характеристик турбулентного пограничного слоя.

Рассмотрим автомодельный турбулентный пограничный слой ($\rho = \text{const}$) на пластине при скорости внешнего потока, подчиняющейся степенному закону $U = Cx^m$. Частный случай при $m = 0$ соответствует обтеканию пластины потоком постоянной скорости $U = C = \text{const}$. Соответствующие варианты для ламинарного пограничного слоя рассмотрены в работах [25 и 26].

Уравнение пограничного слоя, соответствующее рассматриваемому случаю

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho} \right), \quad (2.47)$$

учитывая уравнение непрерывности и степенную зависимость для внешнего потока, преобразуем к форме, использующей определение функции тока

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = c^2 m x^{2m-1} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho} \right). \quad (2.48)$$

Толщина автомодельного пограничного слоя δ и функция тока ψ определяются в зависимости от безразмерной координаты $\xi = y/\delta$:

$$\delta = a Re_x^k; \quad Re_x = \frac{Ux}{\nu} = \frac{cx^{m+1}}{\nu}; \quad (2.49)$$

$$\psi = U\delta \varphi(\xi) = a\nu Re_x^k \varphi(\xi). \quad (2.50)$$

Значение безразмерного напряжения на поверхности при $y = 0$ определяется уравнением

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} \delta^{**} (2+H) = \frac{\tau_w}{\rho U^2}, \quad (2.51)$$

где $\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{U} (1 - \frac{u}{U}) dy$; $\delta^* = \int_0^\infty (1 - \frac{u}{U}) dy$; $H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$; $h = \frac{\delta^{**}}{\delta}$. (2.52)

Учитывая зависимость для δ по (2.49), уравнение (2.51) приводится к такой форме:

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = Re_x^{k-1} [k(m+1) + m(1+H)] ah. \quad (2.53)$$

Полагая безразмерное значение напряжения функцией

$$\frac{\tau}{\tau_w} = f(\xi) \quad (2.54)$$

и принимая во внимание (2.53), получим для отношения

$$\frac{\tau}{\rho U^2} = Re_x^k ah [k(m+1) + m(1+H)] f(\xi). \quad (2.55)$$

С целью преобразования уравнения пограничного слоя к уравнению в полных производных составим значения производных от функции тока

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U\varphi'; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{U}{\delta} \varphi''; \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{U}{\delta^2} \varphi''';$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = aU Re_x^{k-1} \left\{ k(m+1) \left[\varphi - \left(1 - \frac{m}{k(m+1)} \right) \xi \varphi' \right] \right\};$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = k(m+1) \frac{U \delta}{x} \left[\varphi - \left(1 - \frac{m}{k(m+1)}\right) \xi \varphi' \right]. \quad (2.56)$$

Выполняя замену в уравнении (2.48), после необходимых сокращений и замены функции $f(\xi)$ получим

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}_w} \right) = - \frac{k(m+1) \varphi \varphi'' + m(1 - \varphi'^2)}{h[k(m+1) + m(1+H)]}. \quad (2.57)$$

В результате интегрирования этого уравнения по ξ получим распределение безразмерного напряжения $\tilde{\tau}_* = \tilde{\tau}/\tilde{\tau}_w$ в поперечном сечении пограничного слоя

$$\tilde{\tau}_* = C - \frac{\int_0^\xi [k(m+1) \varphi \varphi'' + m(1 - \varphi'^2)] d\xi}{h[k(m+1) + m(1+H)]}. \quad (2.58)$$

При интегрировании учитывалось, что безразмерное напряжение на стенке при $y = 0$ соответствует $\tilde{\tau}_* = 1$ и поэтому постоянная интегрирования $C = 1$, так как при этом интеграл равен нулю.

Учитывая соотношения (2.56), имеем

$$\varphi = \int \frac{u}{U} d\xi; \quad \varphi' = \frac{u}{U}; \quad \varphi'' = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{u}{U} \right)$$

и, следовательно, зависимость (2.58) можно представить в такой форме, которая устанавливает зависимость напряжения $\tilde{\tau}_*$ как функцию осреднённых скоростей

$$\tilde{\tau}_* = 1 - \frac{k(m+1)}{h[k(m+1) + m(1+H)]} \int_0^\xi \left[\left(\int \frac{u}{U} d\xi \right) \frac{d}{d\xi} \left(\frac{u}{U} \right) + \frac{m}{k(m+1)} \left(1 - \frac{u^2}{U^2} \right) \right] d\xi. \quad (2.59)$$

В пределе, при $\xi = 1$, на внешней границе пограничного слоя $\tilde{\tau}_* = 0$ и, следовательно,

$$1 = \frac{1}{h \left[1 + \frac{m}{k(m+1)} (1+H) \right]} \int_0^1 \left[\left(\int \frac{u}{U} d\xi \right) \frac{d}{d\xi} \left(\frac{u}{U} \right) + \frac{m}{k(m+1)} \left(1 - \frac{u^2}{U^2} \right) \right] d\xi.$$

Интегрирование по частям приводит к зависимости, устанавливающей эквивалентность полученных выражений,

$$\frac{k(m+1) Re^{**}}{\left(\frac{U_*}{U} \right)^2 Re_x} \left[1 + \frac{m}{k(m+1)} (1+H) \right] = 1. \quad (2.60)$$

Здесь также учтены соотношения (2.49) и (2.53) и использованы обозначения

$$h = \frac{Re^{**}}{Re_{\delta}} = \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right); \quad Re^{**} = \frac{\delta^{**} U}{\nu};$$

$$h(1+H) = \int_0^1 \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right); \quad H = \frac{Re^*}{Re^{**}};$$

$$Re^* = \frac{\delta^* U}{\nu}; \quad v^* = \frac{\tilde{v}_w}{\rho}; \quad Re_x = \frac{x U}{\nu}; \quad Re_{\delta} = \frac{\delta U}{\nu}.$$

Установленную зависимость между безразмерным напряжением и безразмерной осреднённой скоростью в форме (2.58) или (2.59) целесообразно преобразовать к виду, в котором используются универсальные переменные, принятые в закономерностях пристенных турбулентных течений. Примем обозначения:

$$\varphi = \frac{u}{v_*}; \quad \eta = \frac{v_* y}{\nu}; \quad \varphi_{\delta} = \frac{U}{v_*}; \quad \eta_{\delta} = \frac{v_* \delta}{\nu}.$$

В результате преобразования получим

$$\tilde{\tau}_* = 1 - A \int_0^{\eta} \left[\left(\int \varphi d\eta \right) \varphi' + \frac{m}{k(m+1)} (\varphi_{\delta}^2 - \varphi^2) \right] d\eta. \quad (2.61)$$

Здесь значение коэффициента A определяется зависимостью

$$A = \frac{k(m+1)}{h(k(m+1) + m(1+H)Re_{\delta}\varphi_{\delta})} = \frac{1}{Re^{**}\varphi_{\delta} \left[1 + \frac{m}{k(m+1)} (1+H) \right]}, \quad (2.62)$$

или в развёрнутом виде

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_* = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}_w} = 1 - \frac{1}{Re^{**}\varphi_{\delta} \left[1 + \frac{m}{k(m+1)} (1+H) \right]} \int_0^{\eta} \left[\left(\int \varphi d\eta \right) \varphi' + \right. \\ \left. + \frac{m}{k(m+1)} (\varphi_{\delta}^2 - \varphi^2) \right] d\eta. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Если принять во внимание зависимость (2.60), значение коэффициента A можно представить в более компактной форме

$$A = \frac{k(m+1)}{Re_x} \varphi_{\delta}. \quad (2.64)$$

Общая характеристика пограничного слоя определяется, как было установлено, зависимостями (2.49) и (2.55), определяющими толщину пограничного слоя и закономерность сопротивления при условии, что значение постоянных коэффициентов, входящих в эти формулы, будет найдено. С этой целью предварительно преобразуем указанные выше зависимости к такой форме:

$$Re^{**} = C_0 Re_x^k; \quad (2.65)$$

$$\frac{1}{\varphi_\delta^2} = B_0 Re_x^{k-1}, \quad (2.66)$$

где

$$C_0 = \alpha h = const;$$

$$B_0 = C_0 [k(m+1) + m(1+H)] = const.$$

Очевидно, что определению подлежат коэффициент C_0 и показатель k в формуле (2.65). Чтобы определить их, запишем значение числа Рейн-льда, составленного по толщине потери импульса в переменных φ и η :

$$Re^{**} = \int_0^\infty \frac{\varphi}{\varphi_\delta} \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_\delta}\right) d\eta. \quad (2.67)$$

Выполняя замену φ_δ по соотношению (2.62) и решая относительно Re^{**} , найдём

$$Re^{**} = \frac{\int_0^\infty \varphi d\eta}{1 - A \left[1 + \frac{m}{k(m+1)} (1+H) \right] \int_0^\infty \varphi^2 d\eta}. \quad (2.68)$$

Таким образом, любому заданному значению коэффициента A в уравнении (2.61) соответствует определённое значение числа Re^{**} , по которому можно найти соответствующее значение числа Re_x .

Воспользуемся зависимостями (2.62) и (2.64) для определения коэффициента C_0 в формуле (2.65), имеем

$$Re_x = \frac{k(m+1)\varphi_\delta}{A} = \frac{k(m+1)}{A^2 Re^{**} \left[1 + \frac{m(1+H)}{k(m+1)} \right]} \quad (2.69)$$

и после замены $Re_x = (Re^{**}/C_0)^{1/k}$ получим

$$C_0 = \left[\frac{A^2}{k(m+1)} \right]^k (Re^{**})^{(1+k)} \left[1 + \frac{m(1+H)}{k(m+1)} \right]. \quad (2.70)$$

Значение числа Re^{**} определяется из численного расчёта поля осреднённой скорости. Значение показателя k устанавливается в результате сравнения зависимости (2.65) для двух различных значений Re_x , имеем

$$\frac{Re_1^{**}}{Re_2^{**}} = \left(\frac{Re_{x1}}{Re_{x2}} \right)^k$$

и, следовательно,

$$k = \frac{\lg (Re_1^{**} / Re_2^{**})}{\lg (Re_{x1} / Re_{x2})}.$$

Замена значений Re_x по зависимости (2.69) приводит

$$k = \frac{\lg \left(\frac{Re_1^{**}}{Re_2^{**}} \right)}{\lg \left\{ \frac{A_2^2 Re_2^{**}}{A_1^2 Re_1^{**}} \frac{[k + m(2 + H_2)]}{[k + m(2 + H_1)]} \right\}}. \quad (2.71)$$

Необходимо отметить, что в общем случае в зависимости для напряжения входит значение показателя k , в связи с чем возникает необходимость итерационного процесса при использовании соотношения (2.63).

В частном случае, когда скорость набегающего потока не изменяется, $m = 0$ и $U = const$, установленная зависимость для напряжения примет вид

$$\tilde{v}_* = 1 - A \int_0^z \left(\int \varphi d\eta \right) \varphi' d\eta, \quad (2.72)$$

где $A = 1/(Re^{**} \varphi_\delta)$. В этом случае имеем явную зависимость напряжения от осреднённой скорости и её производной и при заданном наперёд значении коэффициента A согласно (2.68) имеем

$$Re^{**} = \frac{\int_0^\infty \varphi d\eta}{1 - A \int_0^\infty \varphi^2 d\eta} \quad (2.73)$$

и соответственно коэффициенты

$$C_0 = \left(\frac{A^2}{k} \right)^k (Re^{**})^{(1+k)}; \quad (2.74)$$

$$k = \frac{\lg \left(\frac{Re_1^{**}}{Re_2^{**}} \right)}{\lg \left(\frac{A_2^2 Re_2^{**}}{A_1^2 Re_1^{**}} \right)}. \quad (2.75)$$

Найденное распределение полного напряжения позволяет построить метод расчёта профиля осреднённой скорости в турбулентном пограничном слое на гладкой пластине. В соответствии с работой [1] дифференциальное уравнение для осреднённой скорости может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\varphi''}{\varphi'^2} = -\frac{x}{\sqrt{\tau_*}}, \quad (2.76)$$

где

$$x = \sqrt{\frac{2F_2^2}{3F_3} \left\{ \left[\frac{3F_3}{F_0 F_2} \frac{\delta^6}{[(1-\delta)\delta_* + \varphi']} + 1 \right]^2 - 1 \right\}}.$$

Здесь в соответствии с [1]: $\delta_* = \tilde{\tau}_* - \varphi'$; $F_0 = 12$; $F_2 = 0,4$; $F_3 = 1,37$; $\delta = 0,47$. Подставляя найденное значение для напряжения в соотношение (2.76), получим

$$\varphi'' = \frac{x \varphi'^2}{\sqrt{1 - A \int_0^x \int \varphi d\eta \cdot \varphi' d\eta}}. \quad (2.77)$$

Численное интегрирование уравнения (2.77) при заданном наперёд значении коэффициента A позволяет определить профиль скорости в пограничном слое. Заданное значение коэффициента A в соответствии с (2.73) отвечает определённому значению числа Re^{**} , по которому в дальнейшем в соответствии с вышеполученными зависимостями определяются другие параметры и коэффициенты турбулентного пограничного слоя.

Результаты разработанного численного алгоритма решения уравнения (2.77) показали хорошее соответствие распределения скорости с опытными данными в пристеночной области и характерными отклонениями во внешней области пограничного слоя. Это отклонение может быть объяснено тем обстоятельством, что уравнение (2.76) было получено без учёта переноса турбулентной энергии и перемежающего характера турбулентного движения вблизи верхней границы пограничного слоя. Поэтому, по-видимому, для внешней области турбулентного пограничного слоя необходимо рассмотрение более полного урав-

нения турбулентной энергии аналогично тому, как это было сделано авторами в случае турбулентного течения несжимаемой жидкости в трубах [2]. Однако для упрощения поставленной задачи во внешней области пограничного слоя был взят хорошо известный метод Клаузера [27], который для турбулентной вязкости в этой области даёт следующую зависимость:

$$\nu_* = \frac{\nu_T}{\delta} = \frac{6_*}{\varphi'} = \frac{\tilde{\tau}_* - \varphi'}{\varphi'} = 0,0168 Re^* \beta. \quad (2.78)$$

Здесь Re^* - число Рейнольдса, составленное по толщине вытеснения, и β - коэффициент, учитывающий перемежающийся характер турбулентного движения вблизи верхней границы пограничного слоя

$$\beta = \frac{1}{\left[1 + 5,5 \left(\frac{y}{\delta}\right)^6\right]}.$$

Таким образом, подставляя значение напряжения $\tilde{\tau}_*$ в соответствии с (2.72) в соотношение (2.78), получим дифференциальное уравнение относительно осреднённой скорости во внешней части турбулентного пограничного слоя

$$\varphi' = \frac{1 - A \int_0^{\infty} \varphi d\eta \varphi' d\eta - \varphi'}{0,0168 Re^* \beta}. \quad (2.79)$$

Сращивание решений, получаемых в результате расчётов в пристеночном слое по соотношению (2.77) и во внешней области соответственно по соотношению (2.79), может быть осуществлено условием равенства производных скоростей. Из этого условия, кроме того, определяется координата сращиваемых решений, которая, как показывают расчёты, равна $y/\delta \approx 0,15$. Также необходимо отметить, что в уравнение (2.79) входит заранее неизвестный параметр $Re^* = H Re^{**}$, относительно которого необходимо проводить итерационный процесс, который, как показывают расчёты, быстро сходится.

Результаты вышеуказанного метода расчёта турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости для гладкой пластины в частном случае, когда $m = 0$ и, следовательно, $U = const$, иллюстрируются на рис. 2.14 - 2.17.

На рис. 2.14 показано распределение полного безразмерного напряжения $\tilde{\tau}/\tilde{\tau}_w$ в зависимости от безразмерной координаты y/δ .

На рис. 2.15 приводится зависимость местного коэффициента сопротивления трения $C_f = 2/\varphi_\delta^2$ от числа Рейнольдса, составлен-

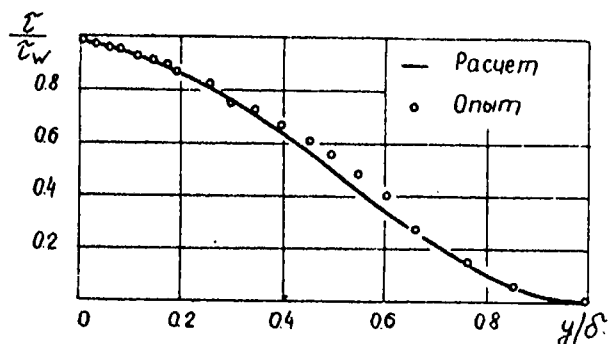


Рис.2.14. Распределение касательного напряжения по сечению пограничного слоя

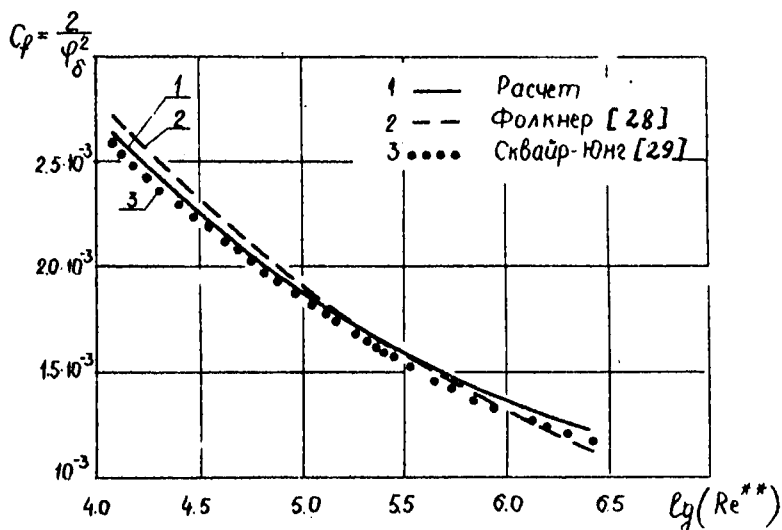


Рис.2.15. Зависимость местного коэффициента сопротивления трения от $\lg(Re^{**})$ в сопоставлении с опытными данными

ного по толщине потери импульса $Re^{**} = U\delta^{**}/\nu$. Из этого рисунка видно, что расчётная кривая 1 хорошо согласуется с экспериментальной формулой Фолкнера [28] (кривая 2)

$$C_f = 0,0131 (Re^{**})^{-1/2}$$

и также с опытной зависимостью Сквайра-Днга [29] (кривая 3)

$$C_f = \frac{2}{\varphi_\delta^2} = \frac{2}{[5,89 \lg(4,075 Re^{**})]^2}.$$

На рис. 2.16 представлено распределение дефекта осреднённой скорости $\varphi_\delta - \varphi$ в зависимости от безразмерной координаты $\lg(\eta/\delta)$ во внешней области турбулентного пограничного слоя. Результаты, приведённые на этом графике, показывают хорошее соответствие расчётной кривой и опытных данных Клебанава, Дили, Шульц-Грунова и других авторов. Данные расчётов профиля осреднённой скорости показали также хорошее согласование с экспериментальной зависимостью Хама [30] для внешней части пограничного слоя

$$\varphi_\delta - \varphi = 9,6 \left(1 - \frac{\eta}{\delta}\right)^2.$$

На рис. 2.17 показано распределение безразмерной осреднённой скорости $\varphi = u/v_*$ в зависимости от безразмерной координаты $\lg(v_*\eta/\nu)$. На этом графике кривая 1 соответствует расчёту с параметрами $2\delta = 10^4$, $Re^{**} = 2,61 \cdot 10^4$; $H = 1,3$; $\varphi_\delta = 29,3$; кривая 2 - $2\delta = 10^5$; $Re^{**} = 2,74 \cdot 10^5$; $H = 1,23$; $\varphi_\delta = 35,0$; кривая 3 - $2\delta = 10^6$; $Re^{**} = 2,82 \cdot 10^6$; $H = 1,19$; $\varphi_\delta = 40,7$; кривая 4 соответствует логарифмической кривой следующего вида:

$$\varphi = 2,44 \ln \frac{v_*\eta}{\nu} + 4,9.$$

Таким образом, сравнение профиля осреднённой скорости по всему сечению пограничного слоя с опытными данными показало хорошее согласование. Расчёты, проведённые по исследованию значений показателя k и величины C_0 в соответствии с формулами (2.74) и (2.75), показали их слабую зависимость от числа Re^{**} . Так, для широкого изменения числа Re^{**} от 10^4 до $3 \cdot 10^6$ показатель k соответствует - веноно менялся от 0,85 до 0,86, что довольно хорошо согласуется с опытным значением Фолкнера [28] $k = 6/7 = 0,857$.

Полученное близкое соответствие результатов предложенного метода расчёта турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости на гладкой пластине с опытными данными свидетельствует о хорошем приближении, полученном для распределения касательного напряжения

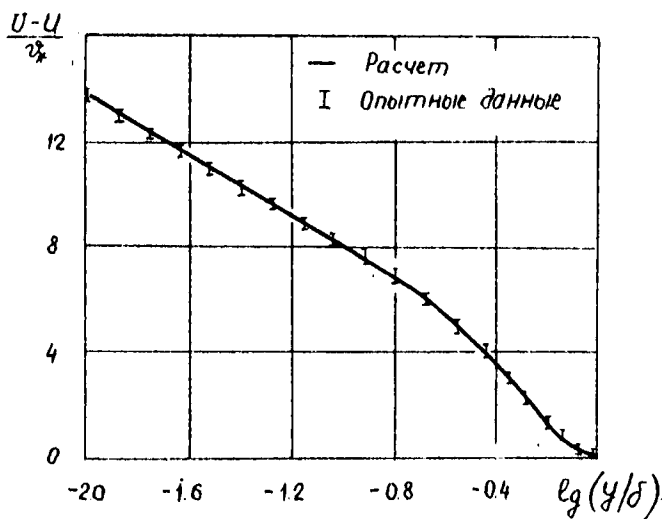


Рис.2.16. Распределение дефекта осреднённой скорости по сечению пограничного слоя

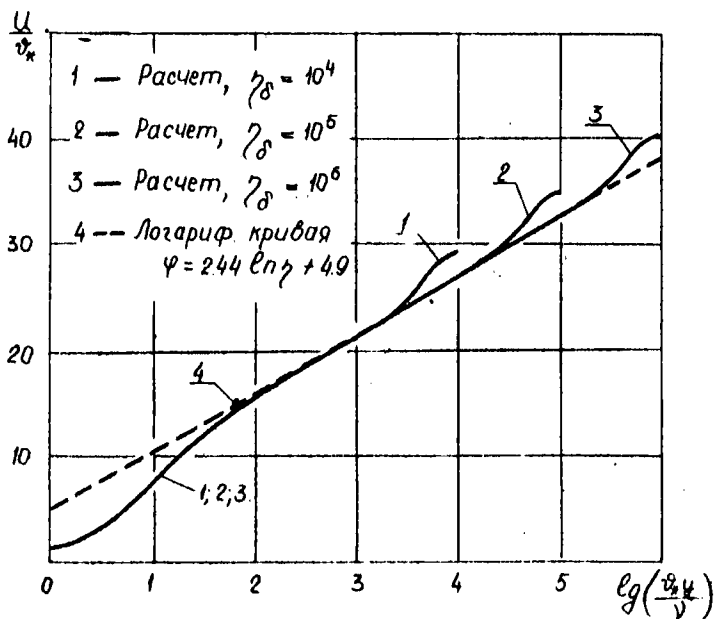


Рис. 2.17. Распределение безразмерной осреднённой скорости φ в зависимости от безразмерной координаты γ

как функции поля осреднённых скоростей, и, кроме того, возможности использования связи этого напряжения с производными от значений осреднённых скоростей согласно работе [24].

2.6. Установившееся турбулентное течение в плоском конфузоре с малым углом раствора

Рассматривается задача, касающаяся установившегося симметричного турбулентного течения в слабо расширяющихся или сужающихся каналах, образованных двумя плоскостями, установленными под некоторым углом α друг к другу. Рассматриваемая задача является турбулентным аналогом известной задачи Гамеля [31], решённой для вязкого течения.

На основе анализа осреднённых уравнений турбулентного движения получена связь полного касательного напряжения с полем осреднённой скорости при определении турбулентной (вихревой) вязкости как функции напряжения во всём поле пристенного турбулентного течения по методу работы [2].

При рассмотрении турбулентного течения в конфузоре можно, очевидно, так же как и для вязкой задачи, использовать предположение о том, что осреднённое турбулентное движение в рассматриваемом случае будет чисто радиальным. На основании этого можно положить, что составляющие осреднённой скорости в цилиндрической системе координат будут

$$V_z = V(z, \theta), \quad V_\theta = V_z = 0.$$

В соответствии с этим система уравнений для осреднённого турбулентного течения в цилиндрических координатах может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} v \frac{\partial v}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] + \\ & + (\nu + \nu_T) \frac{1}{z} \frac{\partial v}{\partial z} - (\nu + \nu_T) \frac{v}{z^2}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{z} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2(\nu + \nu_T)}{z^2} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial (v \cdot z)}{\partial z} = 0. \quad (2.82)$$

Здесь $\bar{v}$ - осреднённая скорость турбулентного течения; z - радиус; θ - угол; ν и ν_t - кинематический коэффициент молекулярной и турбулентной вязкости; P - давление; ρ - плотность среды.

Проинтегрировав уравнение неразрывности (2.82), получим

$$\bar{v} \cdot z = \text{const},$$

причём константа, очевидно, является функцией угла θ , и если ввести обозначение $U(\theta) = \text{const}$, получим

$$\bar{v} = \frac{U(\theta)}{z}. \quad (2.83)$$

Так как осреднённая скорость турбулентного течения существенно зависит от турбулентной вязкости ν_t , то соотношение (2.83) можно представить в виде

$$\bar{v}(z, \theta, \nu_t) = \frac{U(\theta)}{z}. \quad (2.84)$$

Правая часть соотношения (2.84) является функцией только угла θ , очевидно, коэффициент турбулентной вязкости ν_t является также функцией только θ , т.е.

$$\nu + \nu_t = \nu_\epsilon(\theta). \quad (2.85)$$

Уравнение (2.80) с учётом (2.84) и (2.85) можно привести к виду

$$-\frac{u^2}{z^3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{z^3} \frac{d}{d\theta} (\nu_\epsilon \frac{du}{d\theta}). \quad (2.86)$$

Используя условие (2.84), проинтегрируем уравнение (2.81) получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{1}{z} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{2\nu_\epsilon}{z^3} \frac{du}{d\theta}.$$

или

$$\frac{P}{\rho} = \frac{2}{z^2} \int \nu_\epsilon(\theta) \frac{du}{d\theta} d\theta + f(z), \quad (2.87)$$

где $f(z)$ - некоторая произвольная функция, зависящая только от координаты z .

Найдём величину $1/\rho \cdot dP/dz$ из соотношения (2.87), предварительно его продифференцировав, и затем, подставляя значение $1/\rho \cdot dP/dz$ в уравнение (2.86), получим

$$-\frac{u^2}{z^3} = \frac{4}{z^3} \int \nu_\epsilon(\theta) \frac{du}{d\theta} d\theta - \frac{df}{dz} + \frac{1}{z^3} \frac{d}{d\theta} (\nu_\epsilon \frac{du}{d\theta}). \quad (2.88)$$

Собирая члены, зависящие только от θ , в левую часть и от r - в правую, получим

$$u^2 + 4 \int v_\theta(\theta) \frac{du}{d\theta} d\theta + \frac{d}{d\theta} (v_\theta \frac{du}{d\theta}) = r^3 \frac{df}{dr} = const. \quad (2.89)$$

Уравнение (2.89) распадается на два:

$$u^2 + 4 \int v_\theta(\theta) \frac{du}{d\theta} d\theta + \frac{d}{d\theta} (v_\theta \frac{du}{d\theta}) = const; \quad (2.90)$$

$$r^3 \frac{df}{dr} = const. \quad (2.91)$$

Уравнение (2.90) описывает поле скорости в зависимости от угла θ для произвольного значения r . Для другого значения радиуса r поле скорости $u(\theta)$ будет связано соотношением (2.84):

$$v_* = \frac{u(\theta)}{r}.$$

Поэтому, если ввести значение динамической скорости $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$, где τ_w - касательное напряжение на стенке для некоторого произвольного значения r , то, очевидно, можно записать

$$v_* = \frac{u_*}{r}, \quad (2.92)$$

причём значение $u_* = r v_* = const$ будет характеризовать определённый режим течения.

Учитывая, что касательное напряжение можно представить в виде

$$\tau = \rho v_\theta \frac{dv}{dr} \quad (2.93)$$

и используя соотношение (2.91), можно уравнение (2.90) привести в безразмерной форме к виду

$$\varphi^2 + \int \tilde{\tau}_* d\theta + \frac{d\tilde{\tau}_*}{d\theta} = const. \quad (2.94)$$

Здесь $\varphi = v/v_*$ и $\tilde{\tau}_* = \tau/\tau_w$.

Интегрируя уравнение (2.94) по координате θ , получим

$$\int \varphi^2 d\theta + 4 \iint \tilde{\tau}_* d\theta d\theta + \tilde{\tau}_* = C\theta + C_1. \quad (2.95)$$

Постоянные C и C_1 определяются через известные параметры потока. Для этого пусть ось симметрии канала совпадает с осью цилинд-

рической системы координат (Ox), тогда выполняются следующие граничные условия: при $\theta = 0$, будем иметь $\tilde{\tau}_* = 0$ в силу симметричности осреднённого турбулентного движения. Используя это условие, найдём C_1 из соотношения (2.95):

$$C_1 = \int_0^{\alpha/2} \varphi^2 d\theta + 4 \int_0^{\alpha/2} \int \tilde{\tau}_* d\theta d\theta. \quad (2.96)$$

Соотношение (2.95) с учётом (2.96) примет вид

$$\int \varphi^2 d\theta + 4 \iint \tilde{\tau}_* d\theta d\theta + \tilde{\tau}_* = C\theta \int_0^{\alpha/2} \varphi^2 d\theta + 4 \int_0^{\alpha/2} \int \tilde{\tau}_* d\theta d\theta. \quad (2.97)$$

Для определения постоянной C используется граничное условие на стенке канала: при $\theta = \alpha/2$, $\tilde{\tau}_* = \tilde{\tau}/\tilde{\tau}_w = 1$. Получим

$$C = \frac{2}{\alpha} \left[1 - \int_0^{\alpha/2} \varphi^2 d\theta - 4 \int_0^{\alpha/2} \int \tilde{\tau}_* d\theta d\theta \right]. \quad (2.98)$$

Зависимость (2.97) с учётом найденного значения C по соотношению (2.98) примет вид

$$\int \varphi^2 d\theta + 4 \iint \tilde{\tau}_* d\theta d\theta + \tilde{\tau}_* = \frac{2}{\alpha} \theta + \left(1 - \frac{\alpha}{2} \theta\right) \left[\int_0^{\alpha/2} \varphi^2 d\theta + 4 \int_0^{\alpha/2} \int \tilde{\tau}_* d\theta d\theta \right]. \quad (2.99)$$

Введём новую переменную

$$\eta = \left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) \frac{v_* z}{\nu} = \left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) \frac{u_*}{\nu}, \quad (2.100)$$

причём на оси симметрии значение этой переменной будет

$$\eta_0 = \frac{\alpha}{2} \frac{v_* z}{\nu} = \frac{\alpha}{2} \frac{u_*}{\nu}. \quad (2.101)$$

Имеют место также очевидные равенства

$$\eta = \eta_0 - \theta \frac{v_* z}{\nu}, \quad \frac{v_* z}{\nu} = \frac{u_*}{\nu} = \frac{2\eta_0}{\alpha}, \quad \theta = (\eta_0 - \eta) \frac{\alpha}{2\eta_0},$$

$$d\theta = -\frac{\alpha}{2\eta_0} d\eta.$$

Переходя к новым переменным, зависимость (2.99) принимает следующий вид:

$$\frac{\alpha}{2\eta_0} \int \varphi^2 d\eta + \frac{\alpha^2}{\eta_0^2} \iint \tilde{\tau}_* d\eta d\eta + \tilde{\tau}_* = 1 - \frac{\eta}{\eta_0} + \frac{\alpha}{2\eta_0^2} \eta \int \varphi^2 d\eta + \frac{\alpha^2}{\eta_0^2} \eta \iint \tilde{\tau}_* d\eta d\eta. \quad (2.102)$$

Необходимо отметить, что в случае отсутствия наклона стенок ($\alpha = 0$) имеем случай плоского канала. В этом случае зависимость (2.102) переходит в хорошо известное соотношение для касательного

напряжения в плоском канале

$$\tilde{v}_* = 1 - \frac{2}{2_0}.$$

Соотношение (2.102) можно рассматривать как зависимость, определяющую закономерность изменения полного напряжения от профиля осреднённой скорости, угла α и радиуса канала z . Для расчёта поля осреднённых скоростей используется метод, установленный в работе [1], приводящий к зависимости

$$\frac{\varphi''}{(\varphi')^2} = -\sqrt{\frac{x^2}{\tilde{v}_*}}. \quad (2.103)$$

где

$$x^2 = \frac{2F_2^2}{3F_3} \left[\left(\frac{3F_3 r (\tilde{v}_* - \varphi')}{F_0 F_2 [(1-r)(\tilde{v}_* - \varphi') + \varphi']} \right)^2 - 1 \right] \quad (2.104)$$

и теоретические значения постоянных $F_2 = 0,4$; $F_3 = 1,37$; $r = 0,47$; $F_0 = 12$.

Решение уравнения (2.103) совместно с уравнением (2.102) позволяет определить распределение осреднённой скорости и полного напряжения во всём поле течения при турбулентном режиме. Необходимо отметить, что параметрами, входящими в зависимость (2.102) и (2.103), являются величины $z_0 = d/2$, $\tilde{v}_* \tilde{v}_s = du_{*2}$ и α .

Представляет интерес в качестве оценки определение приближённого распределения касательного напряжения по сечению исследуемого канала.

Из опытных данных хорошо известно, что в суживающихся каналах толщина пограничного слоя значительно меньше, чем при продольном обтекании пластины без градиента давления. Поэтому, по-видимому, для оценки распределения напряжения $\tilde{v}_*$ в качестве первого приближения может быть взято $\tilde{v}_* = 1$. После подстановки в уравнение (2.102) и его интегрирования и удовлетворения граничным условиям второе приближение получим в виде

$$\tilde{v}_* = 1 + \operatorname{ctg} \alpha \sin 2\theta - \cos 2\theta.$$

Наоборот, в расширяющихся каналах пограничный слой значительно толще, чем на пластине, и поэтому в качестве первого приближения выбирается линейная зависимость напряжения от угла θ : $\tilde{v}_* = \theta/(d/2)$. После подстановки в соотношение (2.102), интегрирования и удовлетворения граничным условиям для второго приближения получим

$$\tilde{v}_* = \frac{\theta}{\alpha} - \frac{3 \sin 2\theta}{\sin \alpha}.$$

2.7. Осесимметричная турбулентная струя

Турбулентные течения, развивающиеся в условиях, когда отсутствует влияние каких-либо твёрдых поверхностей, характеризуются как "свободные" турбулентные течения. В качестве классических примеров таких течений, которые исследовались теоретически и экспериментально, могут служить частные случаи: течение на границе между двумя параллельными потоками с различными значениями осреднённой скорости, плоские и осесимметричные струи, вытекающие в заполненное средой пространство, плоский или осесимметричный след за телом, помещённым в потоках. В современной технике течения этого типа имеют большое практическое значение, а раздел гидромеханики, включающий теорию "свободных" течений, получил самостоятельное развитие и имеет многочисленные практические приложения [32, 33, 34].

Основное и характерное отличие "свободных" турбулентных течений от пристенных заключается в различии граничных условий. В "свободных" течениях граничные условия определяются контактом с окружающей средой при имеющемся различии в осреднённых скоростях. Вследствие этого контакта осуществляется перенос энергии за счёт влияния вязких и турбулентных напряжений, приводящий к уменьшению скорости движения одной среды и вовлечению в дополнительное движение другой. Эти особенности граничных условий в конечном счёте определяют закономерность в образовании осреднённых полей скорости при "свободных" течениях.

Понятие "свободная турбулентность" связано с представлением о существовании этой турбулентности в "свободных" турбулентных течениях. Следует, однако, отметить, что едва ли возможно указать какие-либо существенные особенности "свободной турбулентности", которые позволили бы найти отклонения от установившихся представлений о природе пульсационных движений, о механизме процесса генерации турбулентности и в процессах диссипации и переноса энергии турбулентности. Причиной этому служит имеющийся в действительности локальный характер природы всех основных причинных условий в организации процессов, определяющих структуру турбулентности, и вследствие этого эти процессы в известной степени имеют универсальный характер.

Основной и нерешённой в достаточной мере проблемой "свободной турбулентности" остаётся необходимость использования различных гипотез для определения закономерностей, которым подчиняется турбулентная вязкость. По предложению Л. Прандтля принято считать

либо постоянным путь перемешивания ℓ , либо вообще предполагать значение турбулентной вязкости постоянной величиной, подчиняющейся зависимости $\nu_T = \beta(U_{x, \max} - U_x \frac{1}{2})$. При использовании теории переноса завихренности также предполагается постоянным значение ℓ_ω , но увеличенным в $\sqrt{2}$ раза по сравнению с ℓ . Следует отметить, что предположения относительно постоянства ν_T , ℓ или ℓ_ω являются недостаточно обоснованными и не вполне адекватными действительности. Выполнение в этих предположениях расчёты полей скоростей и особенно полей температур, как известно, приводят к недостаточно полному согласованию с опытом.

Как будет показано в частном случае осесимметричной турбулентной струи, возможно существенное улучшение соответствия теоретических результатов с опытными данными при использовании развитых в этой книге представлений о пристенной турбулентности, которые без труда обобщаются и на случай "свободной" турбулентности. Применение метода, основанного на этих представлениях, приводит к необходимому соответствию расчётные и опытные данные для полей скорости и температур и, кроме того, открывается возможность установить закономерности изменения турбулентной вязкости и турбулентных напряжений, интенсивности переноса тепла и некоторых других параметров.

В рассматриваемом случае осесимметричной турбулентной струи уравнения Рейнольдса в цилиндрической системе координат с упрощениями, аналогичными общим положениям теории пограничного слоя, приводятся к системе двух уравнений:

$$\rho \left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (z \hat{t}_{xz}); \quad (2.105)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (z U_x) + \frac{\partial}{\partial z} (z U_z) = 0. \quad (2.106)$$

Здесь принято во внимание, что на периферии струи давление не изменяется и поэтому $dp/dx = 0$. Дополнительно используется условие сохранения импульса струи

$$2\pi \rho \int_0^\infty z U_x^2 dz = \text{const}. \quad (2.107)$$

Полагая, что условия течения в последовательно расположенных сечениях струи, начиная с некоторого расстояния от отверстия, со-

хранятся подобными и учитывая условие сохранения импульса (2.107) устанавливаются следующие соотношения:

$$\frac{U_{x, \max}}{U_0} = A \frac{d}{(x+a)} ; \quad \frac{U_x}{U_0} = A \frac{d}{(x+a)} f(\xi_2);$$

$$\frac{U_z}{U_0} = A \frac{d}{(x+a)} g(\xi_2); \quad \frac{\tau_{xz}}{\rho U_0^2} = A^2 \frac{d^2}{(x+a)^2} h(\xi_2), \quad (2.108)$$

где $\xi_2 = z/(x+a)$; a — расстояние между геометрическим центром подобия и началом системы координат; $U_{x, \max}$ — максимальная осреднённая скорость на оси струи и U_0 — скорость в выходном отверстии.

Следуя методу решения И.О. Хинце [35], позволяющему не принимать предварительно каких-либо предположений о закономерности изменения напряжения τ_{xz} , уравнение (2.105) можно привести при помощи соотношений (2.108) к обыкновенному дифференциальному уравнению в безразмерной форме. Предварительно исключив функцию $g(\xi_2)$ при помощи уравнения неразрывности (2.106), получим

$$\frac{d}{d\xi_2} \left(\frac{\xi_2 h}{f} \right) = - f \xi_2.$$

Интегрирование этого уравнения приводит к зависимости

$$\xi_2 h = - f \int_0^{\xi_2} f(\xi_2) d\xi_2.$$

Возвращаясь к размерной форме при помощи соотношений (2.108), окончательно находим

$$\frac{\tau_{xz}}{\rho U_{x, \max}} = \frac{1}{\xi_2} \frac{U_x}{U_{x, \max}} \int_0^{\xi_2} \frac{U_x}{U_{x, \max}} \xi_2 d\xi_2, \quad (2.109)$$

где значение напряжения τ_{xz} в общем случае определяется зависимостью

$$\frac{\tau_{xz}}{\rho} = \nu \frac{\partial U_x}{\partial z} + \sigma_{xz} = \nu (1 + \nu_*) \frac{\partial U_x}{\partial z}. \quad (2.110)$$

Здесь $\sigma_{xz} = - \overline{u_x u_z}$ — турбулентная часть напряжения и $\nu_* = \nu \tau / \nu$ — безразмерное значение кинематического коэффициента турбулентной вязкости.

Для дальнейшего решения уравнения (2.109) вместо обычно принимаемых предположений о постоянстве ν_* или ℓ воспользуемся результатами, полученными в главе 2, на основании которых следует считать, что возникающие турбулентные напряжения σ_{xz} определяются локальными условиями и в результате поле скоростей подчиняется уравнению (2.6), которое необходимо привести к форме, отвечающей требованиям рассматриваемой задачи. С этой целью предварительно преобразуем уравнение (2.109) к безразмерной форме вводя обозначения

$$\varphi = U_x / U_{x, \max}; \quad \varphi' = d\varphi / d\eta; \quad \eta = 2U_{x, \max} y / \nu.$$

В результате получим

$$\tilde{\tau}_* = \frac{\tau_{xz}}{\rho U_{x, \max}^2} = - \frac{\varphi \int_0^2 \varphi \eta d\eta}{\frac{(x+a)}{d} \eta \left(\frac{U_{x, \max} d}{\nu} \right)} = \frac{\varphi \int_0^2 \varphi \eta d\eta}{A \frac{U_0 d}{\nu} \eta}. \quad (2.111)$$

Турбулентные напряжения, учитывая (2.110), определяются зависимостью

$$\sigma_* = \frac{\sigma_{xz}}{U_{x, \max}^2} = - \left[\frac{\varphi \int_0^2 \varphi \eta d\eta}{2A \left(\frac{U_0 d}{\nu} \right)} + \varphi' \right]. \quad (2.112)$$

Полученные безразмерные зависимости для полного и турбулентного напряжений могут быть теперь использованы в уравнении (2.6), которое при этом устанавливает зависимость поля безразмерной скорости в поперечном сечении струи от напряжений, в ней возникающих, имеем

$$\frac{\varphi''}{\varphi'^2} = \mp \kappa \left[\frac{A \eta \left(\frac{U_0 d}{\nu} \right)}{\varphi \int_0^2 \varphi \eta d\eta} \right]^{1/2}, \quad (2.113)$$

где

$$\kappa^2 = \frac{2F_2^2}{3F_3} \left[\left(\frac{3F_3 \gamma (\tilde{\tau}_* - \varphi')}{F_0 F_2 [(1-\gamma)(\tilde{\tau}_* - \varphi') + \varphi']} + 1 \right)^2 - 1 \right]. \quad (2.114)$$

Граничные условия для уравнения (2.113) будут: на оси струи $\varphi = 1$ и $\varphi' = 0$ при $\eta = 0$ и на периферии струи $\varphi \rightarrow 0$ и $\varphi' \rightarrow 0$

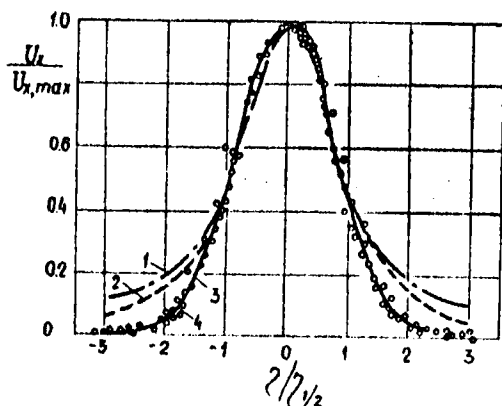


Рис.2.18. Распределение безразмерной скорости в поперечном сечении осесимметричной турбулентной струи :
 1 - теория переноса завихренности;
 2 - постоянный коэффициент турбулентной вязкости;
 3 - расчёт по уравнению (2.113);
 4 - измерения Корсина [36]

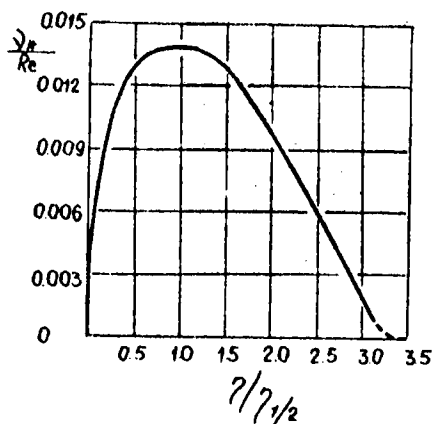


Рис.2.19. Распределение обобщённого коэффициента турбулентной вязкости по сечению струи

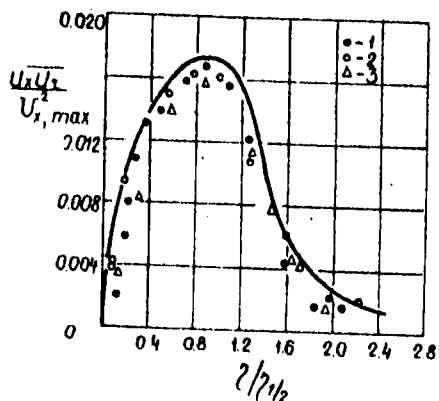


Рис.2.20. Радиальное изменение турбулентного напряжения:

— расчёт по зависимости (2.112);
 1, 2, 3 - опытные данные Рослера и Банкоффа при
 1 - $x/d = 15$;
 2 - $x/d = 20$;
 3 - $x/d = 30$

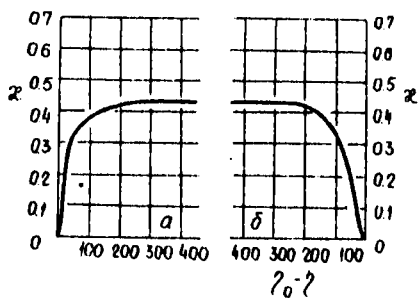


Рис.2.21. Изменение функции α по сечению струи:
 а - в приосевой области;
 б - в периферийной области струи

при $2 \rightarrow \infty$.

Результаты численного расчёта профиля безразмерной скорости $\tilde{\varphi} = U_x / U_{x, \max}$ в зависимости от $2/\eta y_2$ по уравнению (2.113) приводятся на рис. 2.18 в сопоставлении с опытными данными Корсина [36] и также с теоретическими зависимостями, полученными по модифицированной теории Тейлора и при постоянном значении турбулентной вязкости по Прандтлю. Необходимо отметить весьма удовлетворительное соответствие расчётной зависимости (2.113) с опытными данными. Изменение безразмерного кинематического коэффициента турбулентной вязкости $\nu_* = \delta^*/\varphi'$ в зависимости от отношения $2/\eta y_2$ приводится на рис. 2.19. Эта зависимость имеет универсальный характер и удовлетворяется при всех Re для турбулентных течений в струе. На рис. 2.20 показан найденный характер распределения турбулентного напряжения в сечении струи в сопоставлении с опытными данными Рослера и Банкоффа [37] для сечений струи, находящихся от начального сечения на расстоянии в пределах x/d от 15 до 30. Определённый интерес представляет характер изменения функции $\mathcal{K}$, определяемой зависимостью (2.114). На рис. 2.21а показано изменение $\mathcal{K}$ вблизи оси струи и на рис. 2.21б – на периферии этой струи. В средней части струи значение $\mathcal{K}$ сохраняется приблизительно постоянным.

Сделанный обзор результатов расчёта параметров турбулентной струи свидетельствует о том, что применение разработанного метода расчёта установившихся турбулентных течений повышает соответствие между теорией и экспериментом и, кроме того, позволяет получить новые сведения о тех параметрах потока, которые ещё не исследовались. Следует также отметить, что использованная здесь теория исключает необходимость какой-либо коррекции со стороны эксперимента.

2.8. Распределение скорости в следе за цилиндром

Распределение скорости в соответствии с классическими теориями предполагается подчиняющимся условию подобия в последовательных расположенных сечениях следа. Хорошо известное решение этой задачи [35] приводит к такой зависимости для определения напряжения сдвига:

$$\frac{\tilde{\tau}_{xy}}{\rho U_{x, \max}} = - \frac{y}{2A\sqrt{(x+a)d}} \frac{U_x}{U_{x, \max}}, \quad (2.115)$$

где U_x - отклонение скорости в следе от скорости набегающего потока U_0 ; $U_{x,\max}$ - максимальное отклонение на оси следа; α - расстояние между центром цилиндра и геометрическим центром образующих следа. Между скоростями $U_{x,\max}$ и U_0 имеет место соотношение

$$\frac{U_{x,\max}}{U_0} = A \sqrt{\frac{d}{(x+\alpha)}},$$

где A - коэффициент пропорциональности. На этом основании зависимость (2.II5) может быть представлена в форме, исключаящей координату x . Вводя безразмерные переменные $\varphi = U_x/U_{x,\max}$, $\eta = x U_{x,\max}/d$ для модуля величины напряжения, получим

$$\tau_* = \frac{\tau_{xy}}{\rho U_{x,\max}^2} = \frac{2\varphi}{2A\left(\frac{U_0 d}{\eta}\right)}. \quad (2.II6)$$

Турбулентная часть напряжения $\tau_* = \tau_{\tau}/\rho U_{x,\max}^2$ определится, следовательно, зависимостью

$$|\tau_*| = \frac{2\varphi}{2A\left(\frac{U_0 d}{\eta}\right)} - \varphi'. \quad (2.II7)$$

Распределение осреднённой безразмерной скорости φ будет подчиняться зависимости (2.6), учитывая (2.II6) и (2.II7), получим

$$\frac{\varphi''}{\varphi'^2} = \mp \eta \sqrt{\frac{2AU_0 d}{2\varphi\eta}}. \quad (2.II8)$$

Здесь также

$$\eta^2 = \frac{2F_2^2}{3F_3} \left[\left(\frac{3F_3 \gamma (\tau_* - \varphi')}{F_0 F_2 [(1-\gamma)(\tau_* - \varphi') + \varphi']} + 1 \right)^2 - 1 \right],$$

где $|\tau_*|$ определяется по (2.II6). Уравнение (2.II8) имеет граничное условие на оси следа $\varphi' = 1$, $\varphi' = 0$ при $\eta = 0$ и на периферии $\varphi \rightarrow 0$, $\varphi' \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \infty$. Кроме того, необходимо иметь в виду, что в области оси следа $\varphi'' < 0$ и за точкой перегиба ($\varphi'' = 0$) будет $\varphi'' > 0$. В связи с этим в области, прилежащей к оси, знак в уравнении (2.II8) должен быть отрицательным и в

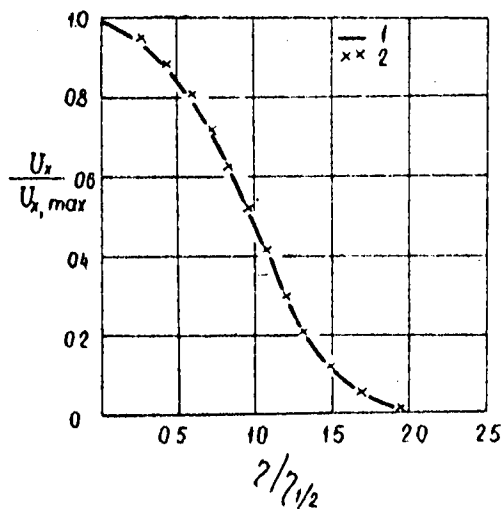


Рис.2.22. Распределение безразмерной осреднённой скорости в следе за круглым цилиндром:

1 - расчёт по зависимости (2.118) ;

2 - опытные данные Таунсенда;

$$Re = 1,4 \cdot 10^3$$

области периферии – положительным. Численное решение уравнения (2.118) выполняется так же, как и для струи. Результаты численного расчёта зависимости (2.118) в сопоставлении с опытными данными [38] и [39] приводятся на рис. 2.22 .

Необходимо отметить , что использование модели турбулентного течения, описанного в главе 2, приводит к вполне удовлетворительно-му согласованию с экспериментальными результатами и открывает, по-видимому, возможность более глубокого изучения задач "свободной" турбулентности.

3. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛА

3.1. Взаимосвязь между процессом турбулентного переноса тепла и импульса

Турбулентный перенос любой субстанции и в том числе импульса тепла, вещества и энергии турбулентности обычно представляется в градиентном виде. Так, например, в случае одномерного переноса имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} -\overline{u_2 u_1} &= \gamma_T \frac{dU}{dx_2}; \\ \overline{u_2 \vartheta} &= a_T \frac{d\theta}{dx_2}; \\ \overline{u_2 c} &= \gamma_T \frac{dc}{dx_2}; \\ \overline{u_2 \left(\frac{\rho}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right)} &= \gamma_T \frac{d}{dx_2} \left(\frac{\rho}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Обращаясь непосредственно к турбулентному переносу импульса и тепла, можно записать по порядку величины

$$\begin{aligned} -\overline{u_1 u_2} &\sim \overline{u_2 \ell'} \frac{dU}{dx_2}; \\ \overline{u_2 \vartheta} &\sim N \overline{u_2 \ell'} \frac{d\theta}{dx_2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тепло и импульс переносятся в пульсационном движении одной и той же элементарной массой, поэтому произведение $\gamma_T \sim \overline{u_2 \ell'}$ имеет одинаковое значение в обеих зависимостях и соответствует кинематическому коэффициенту турбулентной вязкости. Произведение $N \overline{u_2 \ell'} \sim a_T$ соответствует коэффициенту турбулентной теплопроводности. Коэффициент $N = a_T / \gamma_T = 1 / \rho \chi_T$ является обратной величиной турбулентного числа $\rho \chi_T$.

Завершение процесса переноса осуществляется при вырождении движения за счёт вязких сил и молекулярной теплопроводности в конце спектра мелкомасштабного движения. Условно этот завершающий

процесс можно представить зависимостями

$$\begin{aligned} -\overline{u_1 u_2} &\sim \nu f_u \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right); \\ -\overline{u_2 \theta} &\sim \alpha f_v \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где f_u и f_v - условное обозначение функций от градиентов скоростей и температур в предельном мелкомасштабном движении. Из (3.2) и (3.3) следует

$$\frac{\overline{u_2 \theta}}{\overline{u_1 u_2}} \sim \frac{a_\tau}{\nu_\tau} \cdot \frac{\frac{\partial \theta}{\partial x_2}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} \sim \frac{a}{\nu} \frac{f_v}{f_u}$$

или

$$\frac{\left(\frac{d\theta}{dx_2} \right) f_u \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}{\frac{dU_1}{dx_2} f_v \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right)} \sim \frac{\rho_{z\tau}}{\rho_z}. \quad (3.4)$$

Таким образом, отношение $\rho_{z\tau}/\rho_z$ определяет градиентная структура мелкомасштабной турбулентности. В том случае, когда $\rho_z = 1$ и в рассматриваемой локально выделенной области можно предполагать подобие температурных и скоростных полей, имеем также $\rho_{z\tau} = 1$.

Несколько отличный результат может быть получен для крупномасштабной турбулентности. Воспользуемся с целью определения переноса импульса крупномасштабным движением зависимостью (1.17), характеризующей этот перенос в поле скорости U в процессе генерации турбулентности

$$\frac{\tilde{\tau}_\tau}{\rho} = \nu_\tau U' = \frac{4}{T} \int_0^T \int_{\xi=0}^1 U(\xi, t) [U(\xi, t) + U' \ell \xi] dt d\xi, \quad (3.5)$$

где $U(\xi, t)$ - скорость дополнительного движения, определяемая соотношением (1.26); T - период изменения скорости; $\xi = (y - y_0)/\ell$; ℓ - значение линейного масштаба турбулентности. Построим аналогичную зависимость, определяющую сопутствующий крупномасштабному движению перенос тепла

$$\frac{q}{c_p \rho} = |a_{\tau 1} \theta'| = \frac{4}{T} \int_{t=0}^T \int_{\xi=0}^1 u(\xi, t) \theta' l \xi dt d\xi. \quad (3.6)$$

Отношение зависимостей (3.5) и (3.6) может быть представлено в таком виде при $\theta' = U'$:

$$\frac{\frac{\tilde{q}_\tau}{\rho}}{\frac{q}{c_p \rho}} = \frac{\partial_\tau U'}{a_\tau \theta'} = \left[1 + \frac{\int_0^T \int_0^1 u^2 dt d\xi}{U' l \int_0^T \int_0^1 u \xi dt d\xi} \right]. \quad (3.7)$$

Здесь значение скорости $u(\xi, t)$ по

$$u(\xi, t) = \frac{F_2}{3F_3} U' l \left(\sqrt{1 + \frac{3F_3 x^2}{2F_2^2}} - 1 \right) F(\xi) (1 - \cos \omega t).$$

Выполняя интегрирование в (3.7), получим

$$P_{z\tau 1} = \frac{\partial_\tau}{a_{\tau 1}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{3F_3 x^2}{2F_2^2}} - 1 \right). \quad (3.8)$$

Таким образом, из зависимости (3.8) следует, что в случае переноса импульса и тепла крупномасштабной турбулентностью значение турбулентного числа $P_{z\tau}$ больше единицы. Необходимо обратить внимание также на то, что $P_{z\tau}$ не зависит от значения молекулярного числа P_z . Причиной этому явилось то обстоятельство, что в переносе крупномасштабным движением учитывается лишь механическая сторона этого процесса, которая соответствует перемещению массы в крупномасштабном вихревом движении, следовательно, в данном случае отсутствует непосредственная связь с физическими константами переноса. Однако следует иметь в виду, что завершение процесса переноса должно осуществляться в мелкомасштабном движении после перехода в него крупномасштабного движения.

Полное значение теплового потока определяется зависимостью

$$q = -a \left(1 + \frac{a_\tau}{a} \right) \theta'.$$

Безразмерное значение суммарного коэффициента температуропроводности $\mathcal{E} = 1 + a_\tau/a$ можно представить через значения $P_{z\tau}$ и P_z :

$$\mathcal{E} = 1 + \partial_\tau \frac{P_z}{P_{z\tau}}, \quad (3.9)$$

где $\nu_* = \nu_\tau / \nu$.

Относительное содержание энергии крупномасштабной турбулентности, от которой зависит перенос тепла, определяется значением $\gamma = 0.5 \, \overline{6^*} / \overline{\epsilon^*}$. Полный перенос тепла в этом случае соответствует сумме потоков тепла за счёт переноса крупномасштабной турбулентностью $q_{\kappa}/c_p \rho = -\gamma a_{\tau\kappa} \theta'$ и за счёт полной энергии мелкомасштабной турбулентности, включающей и диссипированную энергию крупномасштабного движения, $q_{\kappa}/c_p \rho = -a_{\tau\kappa} \theta'$. Турбулентное число P_{z_τ} определяется в этом случае зависимостью

$$P_{z_\tau} = \frac{\nu_\tau}{a_\tau} = \frac{1}{\gamma \frac{a_{\tau\kappa}}{\nu_\tau} + \frac{a_{\tau\kappa}}{\nu_\tau}}.$$

Здесь при $P_z = 1$ для мелкомасштабной турбулентности имеем $\nu_\tau/a_{\tau\kappa} = P_{z_{\tau\kappa}} = 1$ и по (3.8) для крупномасштабной

$$P_{z_{\tau\kappa}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{3F_3 x^2}{2F_2^2}} - 1 \right). \quad (3.10)$$

Таким образом, значение турбулентного числа P_{z_τ} при $P_z = 1$ определяется соотношением

$$\frac{1}{\beta} = P_{z_\tau} = \left[1 + \frac{0.5 \frac{\overline{6^*}}{\overline{\epsilon^*}}}{1 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{3F_3 x^2}{2F_2^2}} - 1 \right)} \right]^{-1} \quad (3.11)$$

и безразмерный коэффициент суммарной теплопроводности

$$\beta = 1 + \nu_* \left[1 + \frac{0.5 \frac{\overline{6^*}}{\overline{\epsilon^*}}}{1 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{3F_3 x^2}{2F_2^2}} - 1 \right)} \right]. \quad (3.12)$$

Более полный анализ турбулентного числа Прандтля P_{z_τ} с учётом переноса турбулентной энергии (диффузией) выполнен в монографии [2].

Коэффициент P_{z_τ} , рассчитанный по зависимости (3.11) непосредственно в пристенной области, имеет тенденцию к очень быстрому уменьшению значения P_{z_τ} от 1 на стенке до $P_{z_\tau} = 0,733$ при $z_2 =$

$= 100$ и $X = 0,4$ и постоянным в дальнейшем значении $P_{2r} = 0,733$ по сечению течения.

Рассмотрим теперь турбулентный перенос тепла при значении чисел P_2 , больших единицы. Зависимость (3.9), полагая $P_{2r} = 1/\beta F(P_2)$, можно представить в виде

$$\beta = 1 + \gamma_* \beta F(P_2), \quad (3.13)$$

где $F(P_2)$ — функция числа P_2 , корректирующая интенсивность переноса при $P_2 > 1$ и удовлетворяющая значению $F(P_2) = 1$ при $P_2 = 1$. Из этого следует, что введённая функция должна характеризовать относительное изменение коэффициента турбулентного тепло-

переноса при увеличении числа P_2 по сравнению с его значением $P_2 = 1$. Механизм влияния числа P_2 определяется главным образом

изменением переноса тепла в конечной стадии переноса, в процессе вырождения пульсационного движения, когда перенос импульса и тепла определяется молекулярными коэффициентами переноса. Очевидно, что при увеличении числа $P_2 = \mu C_p / \lambda$, но при сохранении неизменным значения коэффициента вязкости μ относительно уменьшается коэффициент теплопроводности λ или увеличивается теплоёмкость

C_p , поэтому при тех же характеристиках конечной стадии турбулентного движения интенсивность переноса тепла относительно изменяется. Для количественной оценки условий переноса тепла при $P_2 > 1$ представим $F(P_2)$ как отношение тепловых потоков в завершающей стадии переноса при $P_2 > 1$ и $P_2 = 1$ для одного и того же турбулентного течения и, следовательно, без изменения параметров μ , ρ и Re . Получим

$$F(P_2) = \frac{\left(\frac{q}{C_p \rho}\right)_{P_2 > 1}}{\left(\frac{q}{C_p \rho}\right)_{P_2 = 1}} = K \frac{\alpha \left(\frac{d\theta}{dx_2}\right)_{P_2 > 1}}{\alpha \left(\frac{d\theta}{dx_2}\right)_{P_2 = 1}}, \quad (3.14)$$

полагая, что отношение градиентов температур, под влиянием которых осуществляется перенос тепла в конечной стадии турбулентного движения, следует считать пропорциональным отношению градиентов осреднённых температур в рассматриваемой, локально выделенной области потока. Коэффициент пропорциональности K , очевидно, равен 1 при $P_2 = 1$ и может быть лишь слабой функцией P_2 при больших значениях этого числа. Проведённые расчёты теплообмена в трубах показали, что значение коэффициента K может быть приня-

то равным единице при всех значениях числа P_2 . Учитывая, что $\alpha = \gamma$ при $P_2 = 1$, значение $F(P_2)$ можно представить в виде

$$F(P_2) = \frac{1}{P_2} \cdot \frac{(\theta')_{P_2 > 1}}{(\theta')_{P_2 = 1}}, \quad (3.15)$$

и на основании (3.13) имеем

$$\beta = 1 + \beta \gamma_* \frac{(\theta')_{P_2 > 1}}{(\theta')_{P_2 = 1}}. \quad (3.16)$$

Неизвестное отношение градиентов температур $\theta'_{P_2 > 1}$ и $\theta'_{P_2 = 1}$ может быть найдено, если рассматривать один и тот же тепловой поток при $P_2 > 1$ и $P_2 = 1$:

$$\frac{Q}{c_p \rho} = \gamma (1 + \beta \gamma_*) \theta'_{P_2 = 1} = \alpha (1 + \beta \gamma_* \frac{\theta'_{P_2 > 1}}{\theta'_{P_2 = 1}}) \theta'_{P_2 > 1}.$$

Отсюда следует

$$\frac{\theta'_{P_2 > 1}}{\theta'_{P_2 = 1}} = \frac{P_2 (1 + \beta \gamma_*)}{1 + \beta \gamma_* \frac{\theta'_{P_2 > 1}}{\theta'_{P_2 = 1}}}. \quad (3.17)$$

Определяя из зависимости (3.17) отношения градиентов и учитывая (3.16), получим для значений $P_2 \geq 1$:

$$F(P_2) = \frac{1}{2 \beta \gamma_* P_2} (\sqrt{4 P_2 (1 + \beta \gamma_*) \beta \gamma_* + 1} - 1) \quad (3.18)$$

и, следовательно,

$$P_{2\tau} = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2 P_2 \gamma_*}{\sqrt{4 P_2 (1 + \beta \gamma_*) \beta \gamma_* + 1} - 1}. \quad (3.19)$$

Соответственно из (3.13) имеем

$$\beta = \frac{1}{2} (\sqrt{4 P_2 (1 + \beta \gamma_*) \beta \gamma_* + 1} + 1). \quad (3.20)$$

Турбулентный перенос тепла при значениях числа P_2 , меньших

единицы, характеризуется той особенностью, что молекулярная теплопроводность становится больше вязкости среды и вследствие этого в зависимости (3.14) значение $\theta'_{\rho_2 < 1} / \theta'_{\rho_2 = 1}$ при очень маленьком числе $a/\lambda = \rho_2$, процесс турбулентного перемешивания массы жидкости в пульсационном движении будет сильно запаздывать от передачи тепла молекулярной теплопроводностью, поэтому можно записать

$$\partial = 1 + \beta \lambda_* \rho_2 \quad \text{при} \quad \rho_2 < 1. \quad (3.21)$$

Разработанная система расчёта турбулентного переноса тепла проверялась многочисленными расчётами турбулентного теплообмена в трубах при $\rho_2 \geq 1$ и показала весьма удовлетворительное соответствие с экспериментальными данными во всей области изменений числа ρ_2 и в том числе при очень больших и очень маленьких значениях этого числа.

Дополнительно следует отметить, что, основываясь на принципе аналогии процесса переноса тепла и концентрации вещества, приведённая система расчёта переноса тепла может быть использована при турбулентном течении однородных газовых или жидких смесей.

В последующих разделах проводится исследование теплообмена в трубах при турбулентном течении, основываясь на постановке задач, включающих непрерывную закономерность изменения коэффициентов теплопроводности, установленную в этом разделе, и расчёт поля осреднённых скоростей по методу, приведённому в главе 2. В результате принятая постановка задачи приводит к дифференциальным уравнениям с заданными граничными условиями на стенках трубы, отличающаяся от аналогичной постановки задачи по теплообмену при вязком течении сложными зависимостями, определяющими поле осреднённых скоростей, и закономерностями турбулентного переноса тепла, в связи с этим возникает необходимость применения численных методов решения.

3.2. Теплообмен при постоянном тепловом потоке на стенке трубы

Уравнение распределения тепла, если пренебречь теплопроводностью среды в направлении движения, имеет вид

$$\frac{1}{z^n} \frac{\partial}{\partial z} \left[z^n (a + a_\tau) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = U \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (3.22)$$

Предполагается, что температура $\theta = t - t_w$ в некотором сече-

нии трубы при $x = 0$ имеет значение на стенке $\theta = 0$ при $z = R$ и, очевидно, дополнительно должно быть $d\theta/dz = 0$ при $z = 0$. Используя известный метод разделения переменных в данном частном случае, положим

$$\theta = Kx + f(z).$$

В результате подстановки (3.22) получим два уравнения:

$$\frac{d}{dz} \left[z \left(1 + \frac{a_r}{a} \right) \frac{df}{dz} \right] = -K U \frac{z}{a}; \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -K = \text{const.} \quad (3.24)$$

Значение постоянной K определяется из теплового баланса для некоторого элемента трубы длиной dx :

$$K c_p \rho U_c \pi R^2 = 2 \pi R \alpha \theta_c$$

или

$$\frac{K R}{\theta_c} = 2 \frac{\alpha}{c_p \rho U_c} = 2 St, \quad (3.25)$$

где θ_c — среднее по сечению значение температуры; α — коэффициент теплоотдачи; $St = \alpha / c_p \rho U_c = Nu / (Pr \cdot Re)$.

Введём безразмерную температуру по зависимости $\vartheta = \theta / \theta_c$ и, полагая $y = R - z$, $\eta = y \sqrt{v_* / \nu}$, $\eta_0 = R \sqrt{v_* / \nu}$, $\varphi = U / v_*$, получим

$$\frac{d}{d\eta} \left[\left(1 - \frac{\eta}{\eta_0} \right) \vartheta \frac{d\vartheta}{d\eta} \right] = - \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0} \right) \varphi \frac{\rho z}{\eta_0}. \quad (3.26)$$

Первый интеграл этого уравнения находим, учитывая, что на оси трубы при $\eta = \eta_0$ из условия симметрии должно быть $d\vartheta/d\eta = 0$:

$$\frac{d\vartheta}{d\eta} = \frac{\rho z \varphi_c}{2 \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0} \right) \vartheta} \left[1 - \frac{2}{\varphi_c \eta_0} \int_0^{\eta} \varphi \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0} \right) d\eta \right]. \quad (3.27)$$

Здесь учтено, что среднее значение скорости φ_c равно

$$\varphi_c = \frac{2}{\eta_0} \int_0^{\eta_0} \varphi \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0} \right) d\eta. \quad (3.28)$$

Значение производной безразмерной температуры на стенке трубы при $\eta = 0$ получим, учитывая, что $\vartheta = 1$:

$$\left(\frac{d\vartheta}{d\eta} \right)_w = \frac{\rho z \varphi_c}{2}. \quad (3.29)$$

Вторичное интегрирование определяет поле безразмерной температуры

$$\vartheta = \frac{\varphi_c \rho_z}{2} \int_0^2 \frac{1}{(1 - \frac{z}{z_0})^3} \left[1 - \frac{2}{\varphi_c z_0} \int \varphi(1 - \frac{z}{z_0}) d\eta \right] d\eta. \quad (3.30)$$

Значение средней температуры определяется

$$\vartheta_c = \frac{2}{\varphi_c z_0} \int_0^2 \varphi \vartheta (1 - \frac{z}{z_0}) d\eta. \quad (3.31)$$

Значение критерия Нуссельта, учитывая (3.29), определяется следующим образом:

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} = \frac{2}{\vartheta_c} \left(\frac{d\vartheta}{d\eta} \right)_{\eta=0} z_0 = \frac{\varphi_c z_0 \rho_z}{\vartheta_c}. \quad (3.32)$$

Если учесть, что $Re = 2\varphi_c z_0$, получим значение числа Стантена

$$St = \frac{Nu}{Re \cdot \rho_z} = \frac{1}{2\vartheta_c}. \quad (3.33)$$

3.3. Теплообмен при постоянной температуре стенки трубы

Уравнение распространения тепла (3.22) будет решаться при граничных условиях

$$\begin{aligned} \theta &= 0 & \text{при} & \quad z = R, \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0 & \text{при} & \quad z = 0, \end{aligned}$$

где $\theta = t - t_w$.

Используя подобие температурных полей для установившегося режима, уравнение (3.22) можно привести к виду

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[z \left(1 + \frac{\alpha_r}{\alpha} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = \frac{U_c R}{\alpha} \frac{U}{U_c} \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (3.34)$$

Разделение переменных в этом уравнении выполняется подстановкой

$$\theta = \theta_{m0} \vartheta \left(\frac{z}{R} \right) f \left(\frac{x}{R} \right),$$

получим

$$\frac{d}{dz} \left[z \left(1 + \frac{a\tau}{a} \right) \frac{d\vartheta}{dz} \right] + z \frac{U}{U_c} \vartheta \varepsilon^2 = 0, \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{\theta_m} \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{f} \frac{df}{dx} = - \frac{\varepsilon^2}{\left(\frac{R U_c}{a} \right)}, \quad (3.36)$$

где ε^2 — некоторая постоянная.

Решение уравнения (3.36) приводит к зависимости

$$f = \frac{\theta_m}{\theta_{m0}} = \frac{\theta_c}{\theta_{c0}} = \exp \left[- \varepsilon^2 \left(\frac{a}{R U_c} \right) x \right]. \quad (3.37)$$

Из уравнения теплового баланса для некоторого участка трубы имеем

$$c \rho U_c \frac{d\theta_c}{dx} \pi R^2 = \alpha \theta_c 2\pi R.$$

Учитывая (3.36), находим

$$\varepsilon^2 = \frac{\alpha}{U_c c \rho} Re \cdot Pr = St \cdot Pr \cdot Re = Nu. \quad (3.38)$$

Используя обозначения

$$\gamma = \frac{\theta}{\theta_c}; \quad \varphi = \frac{U}{U_*}; \quad z = 1 - \xi; \quad \xi = \frac{z}{z_0}; \quad z = \frac{\varphi v_*}{\gamma}; \quad z_0 = \frac{R v_*}{\gamma}$$

и учитывая (3.20), получим

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1-\xi) \vartheta \frac{d\gamma}{d\xi} \right] + (1-\xi) \frac{\varphi}{\varphi_c} \gamma \cdot Nu = 0. \quad (3.39)$$

Дважды интегрируя и учитывая граничные условия, следуя работе [40], получим распределение безразмерной температуры

$$\gamma = \frac{Nu}{2} \int_0^\xi \frac{1}{(1-\xi)\vartheta} \left[1 - \frac{2}{\varphi_c} \int (1-\xi) \varphi \gamma d\xi \right] d\xi. \quad (3.40)$$

Значение числа Nu находится после интегрирования (3.40)

$$Nu = \left\{ \int_0^1 (1-\xi) \frac{\varphi}{\varphi_c} \int \frac{1}{(1-\xi)\vartheta} \left[1 - \frac{2}{\varphi_c} \int (1-\xi) \varphi \gamma d\xi \right] d\xi d\xi \right\}^{-1}.$$

3.4. Результаты численного расчёта установившегося теплообмена в трубах

Программа численного расчёта теплообмена при турбулентном течении в трубах содержала одновременно расчётные системы для определения поля осреднённой скорости и температурных полей.

Расчёт поля осреднённой скорости в соответствии с разделом 2 может быть выполнен по зависимости (2.6)

$$\varphi'' = - \frac{\alpha \varphi'^2}{\sqrt{\zeta}} \quad (3.41)$$

с учётом условия, что в тонком слое у стенки размером $\nu_* y_*/\nu_* = 1,6$ имеет место чисто вязкое течение. Для того чтобы вести численные расчёты непосредственно от стенки, зависимость (3.41) была преобразована следующим образом.

В непосредственной близости от стенки имеет место течение, близкое к ламинарному, и, следовательно, в пределе при $\zeta \rightarrow 0$ можно записать $\tilde{\zeta}_* = \zeta_* + \varphi' \approx \varphi'$. Если продифференцировать по координате ζ это выражение, то получим граничное условие для второй производной при $\zeta \rightarrow 0$ $\varphi'' = \tilde{\zeta}'_*$. Поэтому для согласования уравнения (3.41) с этим условием, а также чтобы не вносить в зависимость (3.41) никаких изменений по мере удаления от стенки, достаточно положить

$$\varphi'' = - (\alpha - \tilde{\zeta}') \frac{\varphi'^2}{\sqrt{\zeta}}. \quad (3.41a)$$

Для случая течения в канале или круглой трубе значение $\tilde{\zeta}'$ будет $\tilde{\zeta}' = -1/\zeta_0$, где $\zeta_0 = \nu_* R/\nu$. Зависимость (3.41a) примет вид

$$\varphi'' = - (\alpha + \frac{1}{\zeta_0}) \frac{\varphi'^2}{\sqrt{\zeta}}. \quad (3.41б)$$

Необходимо отметить, что вблизи стенки при расчёте по зависимости (3.41б) добавился член $-1/\zeta_0 \cdot \varphi'^2/\sqrt{\zeta}$, поэтому чтобы его компенсировать, необходимо уменьшить значение α вблизи тонкого слоя у стенки. Этого можно достигнуть, если использовать множителем величину $\zeta/(\zeta+c)$. Уравнение (3.41б) примет вид

$$\varphi'' = - \left[\alpha \frac{\zeta}{(\zeta+c)} + \frac{1}{\zeta_0} \right] \frac{\varphi'^2}{\sqrt{\zeta}}. \quad (3.42)$$

Если это уравнение проанализировать при $\zeta \rightarrow 0$, то выяснится, что

степень затухания турбулентной вязкости равна трём, т.е. при $z \rightarrow 0$ $\nu_t/\nu \rightarrow 0$ как z^3 . Для значений степени затухания турбулентной вязкости равной четырём при $z \rightarrow 0$ можно получить аналогичное уравнение

$$\varphi'' = - \left[x \frac{z^2}{z^2 + c_2} + \frac{1}{2c_0} \right] \frac{\varphi'^2}{\sqrt{z}}. \quad (3.42a)$$

Численные расчёты поля осреднённой скорости по зависимостям (3.42), (3.42a) при $C_1 = 0,55$ и $C_2 = 1,45$ в сопоставлении с расчётами по (3.41) показали полную согласованность при z больше ≈ 3 . Граничным условием уравнений (3.42) и (3.42a) является условие $\varphi' = 1$ и $\varphi = 0$ при $z = 0$. Коэффициент суммарной теплопроводности ϑ при $P_z \gg 1$ определялся зависимостью (3.20) и при $P_z \leq 1$ принимается по зависимости (3.21). Предварительно выполнялся расчёт поля скорости с целью определения среднего по сечению значения скорости U_c и коэффициента ξ .

Расчёт температурного поля при постоянном тепловом потоке на стенке выполнялся численным интегрированием уравнения (3.30). В результате расчёта устанавливалось среднее расходное значение безразмерной температуры ϑ_c по (3.31) и значения числа Nu и St по (3.32) и (3.33).

Для сопоставления результатов расчётов с опытными данными при $P_z > 1$ использована универсальная обработка этих данных, выполненная Д.Б. Сполдингом и Г. Джайтиллаком [41] в виде зависимости безразмерного числа

$$Y = \frac{P_z \cdot Re}{Nu} \sqrt{\frac{\xi}{18}}$$

от числа P_z . На рис. 3.1 приводится эта зависимость в логарифмических координатах. Там же показаны расчётные кривые 1 и 2, полученные при значениях $Re = 9 \cdot 10^3$ и $Re = 1,35 \cdot 10^6$. При общем хорошем согласовании расчётных и экспериментальных данных обнаруживается закономерная зависимость их в принятой форме обработки от числа Re . Аналогичные расчёты проведены для случая теплообмена в трубах при постоянной температуре стенки по соотношениям, установленным в данном разделе. В области значений $P_z > 1$ полученные результаты практически совпадают с теми результатами, которые получены для теплообмена при постоянном потоке тепла на стенке, но с некоторой незначительной тенденцией к уменьшению интенсивности теплообмена в области небольших чисел P_z . Результаты расчёта при

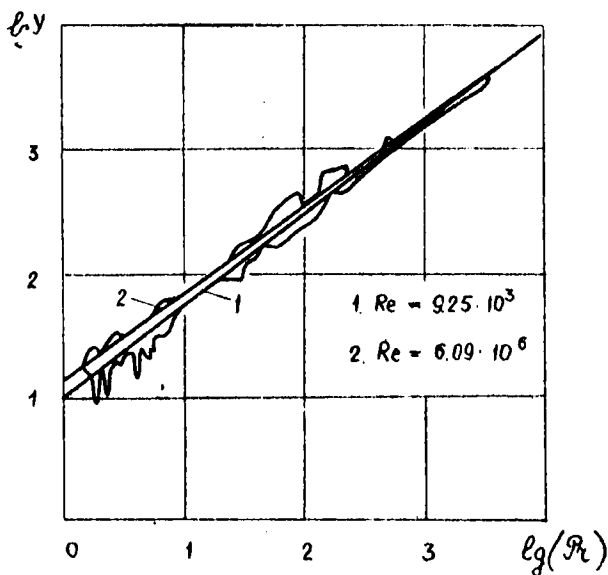


Рис.3.1. Сопоставление расчетной зависимости по теплообмену в трубе при турбулентном течении при $Pr > 1$ с обобщенными опытными данными Д.Б.Сполдинга и Г.Джайтиллака:
 1 - расчет, $Re = 9,25 \cdot 10^3$;
 2 - расчет, $Re = 6,09 \cdot 10^6$;

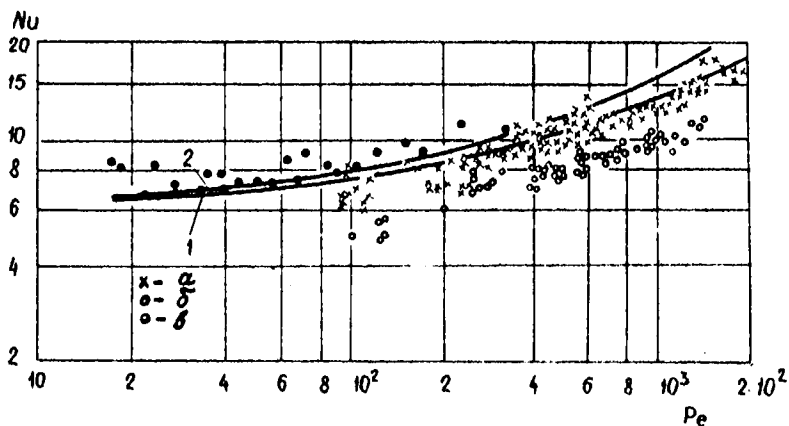


Рис.3.2. Теплообмен в трубе при турбулентном течении хорошо очищенного $Na(Pr < 1)$. Опытные данные:

а - Кириллов, Субботин, Суворов, Троянов;

б - Кутателадзе, Боршанский, Новиков, Федьинский;

в - Пирогов;

теоретические зависимости получены при различных значениях Pr и значениях:

1 - $Re = 9,25 \cdot 10^3$;

2 - $Re = 3,74 \cdot 10^4$

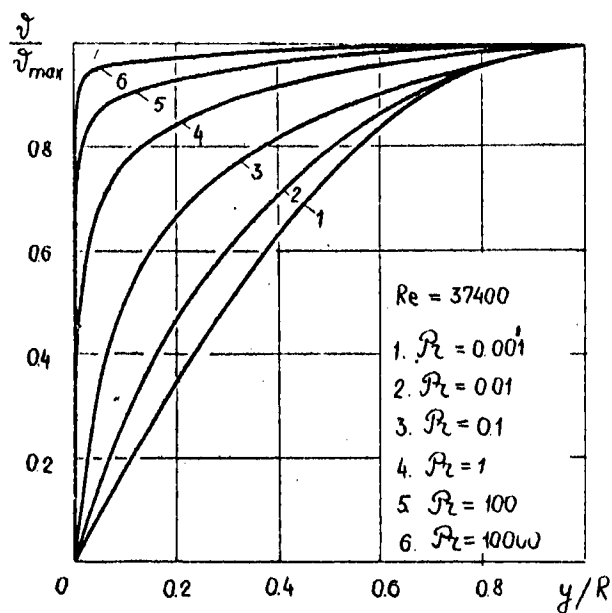


Рис.3.3. Распределение безразмерной температуры по радиусу трубы при различных значениях числа Pr

$q = \text{const}$ на стенке и $Pr < 1$ в сопоставлении с опытными данными [42-44] показаны на рис. 3.2 в виде зависимости $Nu = f(Pr)$, где $Pr = Pr_z \cdot Re$.

Показанные на этом графике теоретические кривые 1 и 2 соответствуют теплообмену при постоянном тепловом потоке на стенке и постоянным значениям чисел $Re = 9 \cdot 10^3$ и $Re = 3,7 \cdot 10^4$, но при различных значениях чисел Pr . Различие в этих кривых свидетельствует о том, что система обобщения опытных данных в виде зависимости числа Nu от числа Пекле Pe не является вполне универсальной. Однако с уменьшением числа Pr построенные кривые сближаются. Можно предполагать, что универсальность этой системы обработки опытных данных достигается при очень малых значениях числа Pr . Представляет несомненный интерес также заметное понижение интенсивности теплообмена в случае постоянной температуры стенки. Здесь имеет место некоторая аналогия с тем различием в интенсивности теплообмена, которое существует соответственно при $q = \text{const}$ и $\theta_w = \text{const}$ на стенке в случае ламинарного течения в трубе.

На рис. 3.3 приводится зависимость $\psi/\psi_{\max} = f(y/R)$ при $Re = 3,74 \cdot 10^4$ и различных значениях числа Pr .

В заключение следует отметить, что результаты теоретического исследования теплообмена при установившемся турбулентном течении в трубе хорошо согласуются с опытными данными при любом значении числа Pr , в области $Pr \geq 1$ и так же $Pr \leq 1$. Успешное решение проблемы о теплообмене основывается на использовании модели пристенной турбулентности и также на полученных соотношениях между кинематическими коэффициентами турбулентной теплопроводности при $Pr = 1$ и влиянием на это соотношение изменения числа Pr . Таким образом, полностью установлено определение турбулентного числа Прандтля.

3.5. Теплообмен при турбулентном течении в коаксиальном цилиндрическом канале

Рассматривается установившееся турбулентное течение в кольцевом канале между двумя коаксиальными цилиндрами при течении, совпадающем по направлению с образующими цилиндрических поверхностей. Предполагается также, что турбулентный теплообмен, развиваемый в кольцевом канале при постоянных, но различных по величине тепловых потоках на поверхностях цилиндров, носит вполне установившийся ха -

ракти. Рассматривается случай, когда обе стенки коаксиального канала либо нагреваются, либо охлаждаются. В этом случае профиль температуры по сечению канала имеет максимум или минимум температуры в зависимости от того, осуществляется подвод или отвод тепла движущемуся потоку жидкости.

Расчёт профиля осреднённой скорости при турбулентном течении в коаксиальном цилиндрическом канале проводился согласно работам [45, 46] с учётом дополнений, сделанных в п. 3.4.

Уравнение, описывающее перенос тепла в рассматриваемом случае, можно представить в следующей форме:

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left[z(a + a_r) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = U \frac{\partial \theta}{\partial x} . \quad (3.43)$$

Здесь $\theta = t - t_1$; t_1 — температура стенки внутреннего цилиндра. Уравнение (3.43), описывающее установившийся турбулентный теплообмен, используя известный метод разделения переменных, можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{U \cdot z} \frac{d}{dz} \left[z(a + a_r) \frac{d\theta}{dz} \right] = -N = const ; \quad (3.44)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -N = const . \quad (3.45)$$

Рассматриваемый случай установившегося турбулентного теплообмена характеризуется наличием максимума или минимума в профиле температуры. Для значения радиуса, при котором достигается экстремум температуры, очевидно, имеем $d\theta/dz = 0$ при $z = z_2$. Значение этого радиуса может быть определено из условия теплового баланса при заданном значении отношения удельных тепловых потоков $\epsilon = q_1/q_2$.

Для случая установившегося теплообмена имеем

$$\left(\frac{d\theta}{dx} \right)_1 = \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_2 = \frac{d\theta}{dx} = -N = const .$$

Здесь индекс "1" относится к области, ограниченной радиусами $z_1 < z < z_2$, и индекс "2" — к области $z_2 < z < z_2$, причём при $z = z_2$, т.е. на поверхности, образованной вращением радиуса z_2 вокруг оси, тепловой поток отсутствует ввиду наличия экстремума температуры. Таким образом, получим

$$\frac{2\kappa z_1 q_1 + 2\kappa z_3 \cdot 0}{c_p \rho \bar{u}_1 \cdot \kappa(z_3^2 - z_1^2)} = \frac{2\kappa z_2 q_2 + 2\kappa z_3 \cdot 0}{c_p \rho \bar{u}_2 \cdot \kappa(z_2^2 - z_3^2)} =$$

$$= \frac{2\kappa z_2 q_2 + 2\kappa z_1 q_1}{c_p \rho \bar{u} \cdot \kappa(z_2^2 - z_1^2)} = N. \quad (3.46)$$

Здесь $\bar{u}$ — среднее значение скорости для всего канала, а $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ — средние значения скоростей соответственно для областей, ограниченных величинами $z_1 < z < z_3$ и $z_3 < z < z_2$:

$$\bar{u}_1 = \frac{2}{(z_3^2 - z_1^2)} \int_{z_1}^{z_3} u z dz; \quad \bar{u}_2 = \frac{2}{(z_2^2 - z_3^2)} \int_{z_3}^{z_2} u z dz. \quad (3.47)$$

На основании соотношения (3.46) получим

$$\varepsilon = \frac{q_1}{q_2} = \frac{z_2}{z_1} \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2} \frac{(z_3^2 - z_1^2)}{(z_2^2 - z_3^2)} \quad (3.48)$$

или

$$\varepsilon = \frac{z_2 \cdot \int_{z_1}^{z_3} u z dz}{z_1 \cdot \int_{z_3}^{z_2} u z dz}. \quad (3.49)$$

Используя условие неразрывности для величины расхода жидкости через сечение коаксиального канала, можно получить

$$\rho \bar{u}(z_2^2 - z_1^2) = \rho \bar{u}_1(z_3^2 - z_1^2) + \rho \bar{u}_2(z_2^2 - z_3^2). \quad (3.50)$$

Тогда на основании (3.48) будем иметь

$$z_3 = \sqrt{z_2^2 - \frac{(z_2^2 - z_1^2)}{(1 + \varepsilon \frac{z_1}{z_2})} \frac{\bar{u}}{\bar{u}_2}}. \quad (3.51)$$

Таким образом, решение задачи об установившемся турбулентном течении в коаксиальном канале сводится в основном к решению уравнения (3.43) для двух областей, разделяемых поверхностью, полученной вращением радиуса z_3 вокруг оси рассматриваемого канала. Причём граничным условием на этой поверхности является отсутствие теплового потока, т.е. $\partial \theta / \partial y = 0$ при $z = z_3$.

Для области течения, примыкающей к внутренней стенке канала, уравнение теплообмена (3.43) в безразмерной форме можно привести к

виду

$$\frac{d}{d\eta}[(z_{1*} + \eta) \vartheta \frac{d\gamma}{d\eta}] = - \frac{2\rho_z \cdot z_{1*} \cdot \varphi(z_{1*} + \eta)}{[(z_{1*} + \eta)^2 - z_{1*}^2]} \quad (3.52)$$

Здесь введены обозначения:

$$\gamma = \frac{\theta}{\bar{\theta}_1 St_1}; \quad St_1 = \frac{\alpha_1}{c_p \rho \bar{u}_1}; \quad z_{1*} = \frac{(z - z_1) v_*}{\gamma}; \quad q_1 = \alpha_1 \cdot \bar{\theta}_1, \quad (3.53)$$

α_1 - коэффициент теплоотдачи и $\bar{\theta}_1$, $\bar{u}_1$ - средние значения соответственно температуры и скорости для области течения $z_1 < z < z_2$,
 St_1 - критерий Стэнтона для этой же области течений. Безразмерный коэффициент суммарной температуропроводности в соответствии с (3.21) определялся для критерия Прандтля $Pz \leq 1$

$$\vartheta = 1 + \beta \gamma_* Pz \quad (3.54)$$

и для $Pz \geq 1$

$$\vartheta = \frac{1}{2} \left[\sqrt{4 Pz (1 + \beta \gamma_*) \beta \gamma_* + 1} + 1 \right] \quad (3.55)$$

Здесь $\beta = 1/\rho_{\gamma_*}$ - величина, обратная турбулентному числу Прандтля при значении $Pz = 1$ и $\gamma_* = \nu_*/\nu$ - отношение кинематических коэффициентов турбулентной и молекулярной вязкости.

Интегрируя уравнение (3.52) по $\eta = v_*(z - z_1)/\gamma$, получим

$$(z_{1*} + \eta) \vartheta \frac{d\gamma}{d\eta} = - \frac{2\rho_z \cdot z_{1*}}{(z_{2*}^2 - z_{1*}^2)} \int_0^{\eta} \varphi(z_{1*} + \eta) d\eta + C \quad (3.56)$$

Используя условие, $d\gamma/d\eta = 0$ при $z = z_2$, можно определить постоянную C :

$$C = \frac{2\rho_z \cdot z_{1*}}{(z_{2*}^2 - z_{1*}^2)} \int_0^{z_2} \varphi(z_{1*} + \eta) d\eta = \rho_z \cdot z_{1*} \bar{\varphi}_1 \quad (3.57)$$

Уравнение (3.56) примет вид

$$\frac{d\gamma}{d\eta} = \frac{\rho_z \cdot z_{1*} \bar{\varphi}_1}{(z_{1*} + \eta) \vartheta} \left[1 - \frac{2}{\bar{\varphi}_1 (z_{2*}^2 - z_{1*}^2)} \int_0^{\eta} \varphi(z_{1*} + \eta) d\eta \right] \quad (3.58)$$

Интегрируя уравнение (3.58) по η и используя граничное условие $\gamma = 0$ при $\eta = 0$, получим

$$\gamma = \rho_2 \cdot z_{1*} \bar{\varphi}_1 \int_0^z \frac{1}{\vartheta(z_{1*} + \eta)} \left[1 - \frac{2}{\bar{\varphi}_1(z_{2*}^2 - z_{1*}^2)} \int_0^{\eta} \varphi(z_{1*} + \eta) d\eta \right] d\eta. \quad (3.59)$$

Величина экстремальной температуры при $z = z_2$, очевидно, будет

$$\gamma_2 = \rho_2 \cdot z_{1*} \bar{\varphi}_1 \int_0^{z_2} \frac{1}{\vartheta(z_{1*} + \eta)} \left[1 - \frac{2}{\bar{\varphi}_1(z_{2*}^2 - z_{1*}^2)} \int_0^{\eta} \varphi(z_{1*} + \eta) d\eta \right] d\eta. \quad (3.60)$$

Для области, прилегающей к внешней стенке $z_3 < z < z_2$, уравнение (3.44), описывающее установившийся турбулентный теплообмен, можно привести к виду

$$\frac{d}{d\xi} \left[(z_{2**} - \xi) \vartheta \frac{d\vartheta}{d\xi} \right] = - \frac{2 z_{2**} \cdot \rho_2 \cdot \psi}{(z_{2**}^2 - z_{3**}^2)} (z_{2**} - \xi). \quad (3.61)$$

Здесь

$$\vartheta = \frac{\theta}{\theta_2 St_2}; \quad St_2 = \frac{\alpha_2}{c_p \rho u_2}; \quad z_{2**} = \frac{z_2 v_{**}}{\nu}; \quad \psi = \frac{U}{v_{**}}; \quad (3.62)$$

$$\xi = \frac{(z_2 - z) v_{**}}{\nu}; \quad \eta_2 = \alpha_2 \bar{\theta}_2; \quad v_{**} = \sqrt{\bar{\epsilon}_2 / \rho}.$$

Величина безразмерного коэффициента суммарной теплопроводности ϑ определяется аналогично по зависимостям (3.54) и (3.55).

Интегрируя уравнение (3.61) по ξ , получим

$$(z_{2**} - \xi) \vartheta \frac{d\vartheta}{d\xi} = - \frac{2 \rho_2 \cdot z_{2**}}{(z_{2**}^2 - z_{3**}^2)} \int_{\xi}^{\xi_2} \psi(z_{2**} - \xi) d\xi + C. \quad (3.63)$$

Учитывая, что при $z = z_2$, $d\vartheta/d\xi = 0$, найдём C :

$$C = \frac{2 \rho_2 \cdot z_{2**}}{(z_{2**}^2 - z_{3**}^2)} \int_0^{\xi_2} \psi(z_{2**} - \xi) d\xi = z_{2**} \rho_2 \cdot \bar{\psi}_2 \quad (3.64)$$

и соотношение (3.63) примет вид

$$\frac{d\vartheta}{d\xi} = \frac{\rho_2 \cdot z_{2**} \bar{\psi}_2}{(z_{2**} - \xi) \vartheta} \left[1 - \frac{2}{(z_{2**}^2 - z_{3**}^2) \bar{\psi}_2} \int_0^{\xi} \psi(z_{2**} - \xi) d\xi \right]. \quad (3.65)$$

Интегрируя по ξ , найдём

$$\vartheta = C + \rho_2 \cdot z_{2**} \bar{\psi}_2 \int \frac{1}{\vartheta(z_{2**} - \xi)} \left[1 - \frac{2}{(z_{2**}^2 - z_{3**}^2) \bar{\psi}_2} \int_0^\xi \psi(z_{2**} - \xi) d\xi \right] d\xi. \quad (3.66)$$

При $z = z_3$, значение безразмерной температуры ϑ_3 будет

$$\vartheta_3 = C + \rho_2 \cdot z_{2**} \bar{\psi}_2 \int_0^{z_3} \frac{1}{\vartheta(z_{2**} - \xi)} \left[1 - \frac{2}{(z_{2**}^2 - z_{3**}^2) \bar{\psi}_2} \int_0^\xi \psi(z_{2**} - \xi) d\xi \right] d\xi. \quad (3.67)$$

Постоянная интегрирования C равна безразмерной температуре стенки внешнего цилиндра. Действительно, в соотношении (3.66), полагая $\xi = 0$, получим $\vartheta = \vartheta_2 = C$. Значение безразмерной температуры ϑ_2 может быть найдено из условия равенства безразмерных температур в точке срачивания решений.

Учитывая зависимости (3.53) и (3.62), определим

$$\vartheta_3 = \gamma_3 \frac{St_1 \bar{\theta}_1}{St_2 \bar{\theta}_2}. \quad (3.68)$$

Используя условие теплового баланса, зависимость (3.68) можно представить в виде

$$\vartheta_3 = \gamma_3 \frac{z_2 (z_2^2 - z_1^2)}{z_1 (z_2^2 - z_3^2)}. \quad (3.69)$$

Подставляя в соотношение (3.69) значения ϑ_3 и γ_3 , соответствующие из уравнений (3.67) и (3.60), найдём значение $C = \vartheta_2$:

$$\begin{aligned} \vartheta_2 = & \frac{\rho_2 \cdot \bar{\psi}_1 z_{2**} (z_{3**}^2 - z_{1**}^2) K}{(z_{2**}^2 - z_{3**}^2)} \int_0^{z_3} \frac{1}{\vartheta(z_{1**} + \eta)} \left[1 - \frac{2}{\bar{\psi}_1 (z_{3**}^2 - z_{1**}^2)} \right. \\ & \times \left. \int_0^\eta \psi(z_{1**} + \eta) d\eta \right] d\eta - \rho_2 \cdot z_{2**} \bar{\psi}_2 \int_0^{z_3} \frac{1}{\vartheta(z_{2**} - \xi)} \left[1 - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\bar{\psi}_2 (z_{2**}^2 - z_{3**}^2)} \int_0^\xi \psi(z_{2**} - \xi) d\xi \right] d\xi. \end{aligned}$$

По найденным профилям безразмерных температур для рассмотренных областей течения можно найти их средние значения. Получим

$$\bar{\vartheta} = \frac{2}{(z_{2**}^2 - z_{3**}^2) \bar{\psi}_2} \int_0^{z_3} \psi \vartheta(z_{2**} - \xi) d\xi; \quad (3.70)$$

$$\bar{y} = \frac{2}{(z_{2*}^2 - z_{1*}^2) \bar{\varphi}_1} \int_0^{z_2} \varphi_1(z_{1*} + z) dz. \quad (3.71)$$

Тогда, используя зависимости (3.53) и (3.62), можно определить значения критериев Стэнтона для рассмотренных областей течения

$$St_1 = \frac{1}{\bar{y}}; \quad St_2 = \frac{1}{\bar{\varphi}}. \quad (3.72)$$

Определение числа Стэнтона для всего коаксиального канала не имеет физического смысла. Однако для практических результатов приобретает большое значение некоторое эффективное число Стэнтона, характеризующее процесс теплообмена для всего сечения коаксиального канала.

Если учесть долю поверхности стенок в процессе турбулентного теплообмена, то можно ввести эффективное число Стэнтона следующим образом:

$$St_{\text{эф}} = St_1 \frac{2\pi z_1}{(2\pi z_1 + 2\pi z_2)} + St_2 \frac{2\pi z_2}{(2\pi z_1 + 2\pi z_2)}$$

или

$$St_{\text{эф}} = \frac{St_1 \frac{z_1}{z_2} + St_2}{1 + \frac{z_1}{z_2}}. \quad (3.73)$$

Численный анализ результатов исследования установившегося турбулентного теплообмена в коаксиальном цилиндрическом канале показал, что профиль температуры существенным образом зависит от соотношений радиусов соосных цилиндров z_1/z_2 , величины числа Рейнольдса, составленного как $\bar{u}(z_2 - z_1)/\nu$, числа Прандтля Pr и отношения тепловых потоков q_1/q_2 на поверхностях цилиндрического канала. На рис. 3.3а представлено распределение безразмерной скорости U/U_{max} в зависимости от безразмерной координаты $(z - z_1)/(z_2 - z_1)$ в сравнении с опытными данными [51, 52].

Необходимо отметить, что величина радиуса, при котором в турбулентном потоке достигается максимальное значение осредненной скорости, существенно зависит от отношения z_1/z_2 , что иллюстрирует рис. 3.4. На рис. 3.5 приведено сравнение касательных сил $v_*/v_{*0} = \sqrt{\tau_1/\tau_2}$, возникающих при течении жидкости на стенках канала в зависимости от z_1/z_2 . Здесь же показано отношение коэффициентов

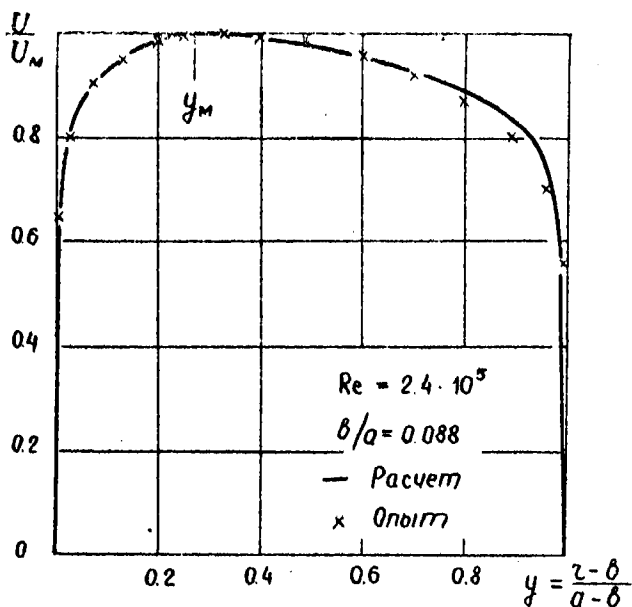


Рис.3.3а. Распределение безразмерной осредненной скорости U/U_m в зависимости от координаты y

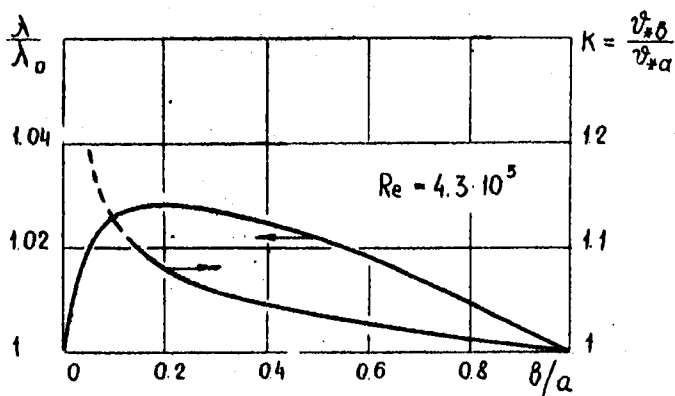


Рис.3.3б. Зависимость λ/λ_0 и K от отношения радиусов δ/a

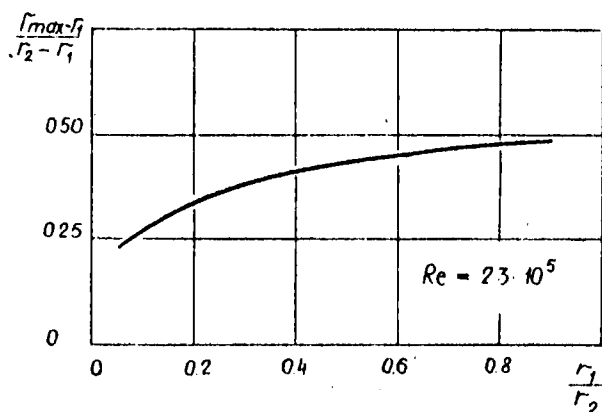


Рис.3.4. Зависимость местоположения максимума осредненной скорости от отношения радиусов коаксиального канала

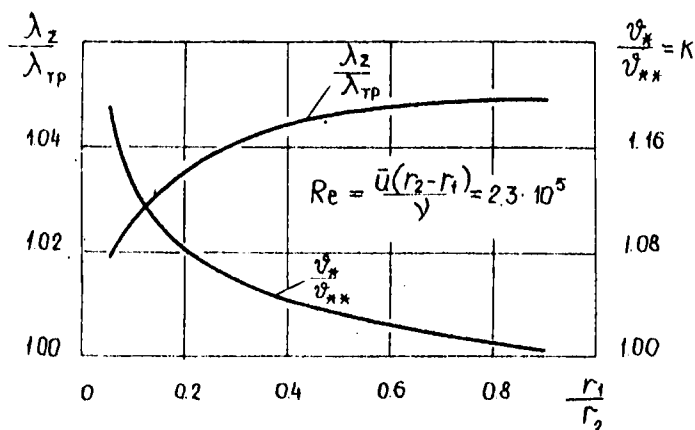


Рис.3.5. Влияние отношения радиусов r_1/r_2 на коэффициент сопротивления трения и отношение v_*/v_{*K}

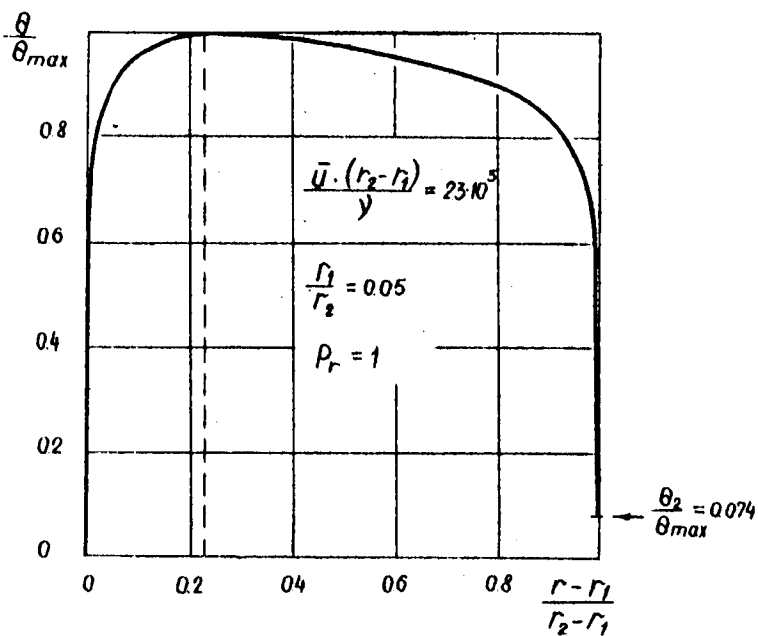


Рис.3.6. Распределение безразмерной температуры по радиусу в сечении коаксиального канала

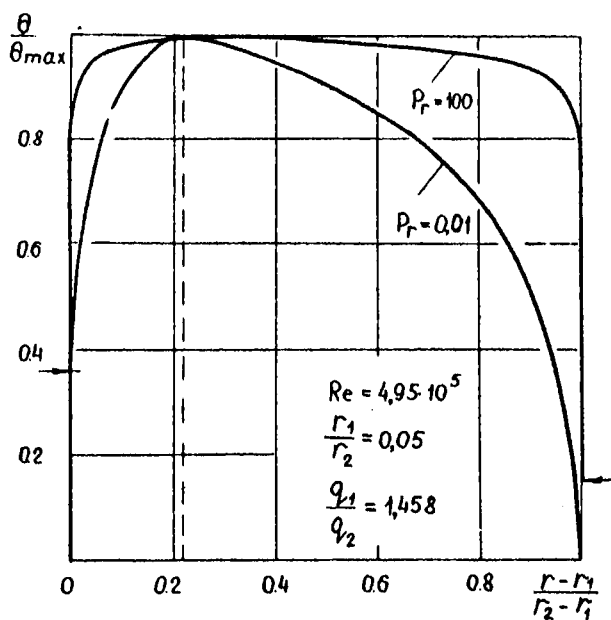


Рис.3.7. Распределение безразмерной температуры по радиусу коаксиального канала при $P_r = 100$ и $P_r = 0,01$

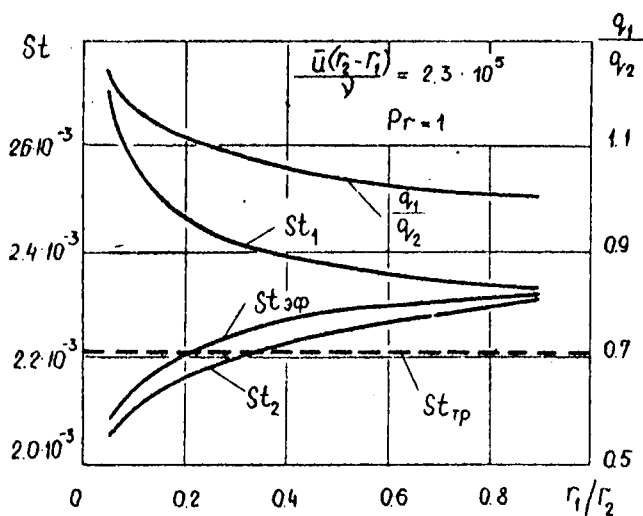


Рис.3.8. Зависимость St_1 , St_2 , $St_{\text{эф}}$ и отношение тепловых потоков на стенках коаксиального канала от отношения r_1/r_2

сопротивления трения для течения в коаксиальном канале и круглой трубе с гидравлическим радиусом $r_2 - r_1$ и той же средней скоростью потока в зависимости от r_1/r_2 .

Распределение безразмерной температуры по сечению коаксиального канала приводится на рис. 3.6 в частном случае, когда значения радиусов, при которых достигаются максимальные значения скорости и температуры, имеют одну и ту же величину $r_2 = r_m$ и это достигается для параметров потока $Pr = 1$; $r_1/r_2 = 0,05$; $Re = 2,3 \cdot 10^5$ и при отношении тепловых потоков $q_1/q_2 = 1,48$.

Влияние числа Прандтля на изменение профиля безразмерной температуры по сечению коаксиального канала иллюстрирует рис. 3.7. Необходимо отметить, что это влияние имеет ту же тенденцию, что и при установившемся турбулентном течении жидкостей в круглых трубах. Интересно отметить тот факт, что при тех же параметрах течения, но различных числах Прандтля имеет место различная температура стенок. Так, при $Pr = 100$ температура поверхности внутренней стенки ниже средней, а при $Pr = 0,01$, наоборот.

Представляет интерес сравнение теплообмена, протекающего в коаксиальном канале и круглой трубе, с эквивалентным радиусом при одних и тех же параметрах потока. На рис. 3.8 представлены значения критериев Стэнтона в круглой трубе St_{tr} и вводимого некоторого эффективного критерия $St_{эф}$, определяемого зависимостью (3.73), от соотношения радиусов соосных цилиндров r_1/r_2 . Из графика видно, что процессы турбулентного теплообмена, протекающие в круглой трубе и коаксиальном канале, могут заметно отличаться.

3.6. Турбулентный перенос тепла в осесимметричной "свободной" струе

Уравнение переноса тепла в рассматриваемом случае слабо нагретой ($\rho = const$), осесимметричной, автомодельной, турбулентной струи с учётом упрощений, аналогичных принимаемым в теории пограничного слоя, имеет вид

$$\rho c_p (U_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + U_r \frac{\partial \theta}{\partial r}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r), \quad (3.74)$$

где $\theta = t - t_0$ — осреднённая во времени температура. Полное значение теплового потока в направлении радиуса определяется зависимостью

$$\frac{q}{\rho c_p} = - \left(a \frac{\partial \theta}{\partial z} + \overline{u_z v} \right) = - a \left(1 + \frac{a_\tau}{a} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z}. \quad (3.75)$$

Здесь a_τ и λ — соответственно коэффициенты турбулентной и молекулярной теплопроводности.

Если принять предположение о подобии полей температуры в последовательно расположенных поперечных сечениях струи и при постоянной плотности среды, то из этого условия следуют такие соотношения:

$$\frac{\theta_{\max}}{\theta_0} = c \frac{d}{(x+a)}; \quad \frac{\theta}{\theta_0} = c \frac{d}{(x+a)} K(\xi_2). \quad (3.76)$$

Здесь $\xi_2 = z/(x+a)$; $\theta_{\max}$ и θ_0 — соответственно температуры на оси струи и в выходном отверстии. Учитывая соотношения (3.75) и (3.76), уравнение (3.74) можно привести к обыкновенному дифференциальному уравнению в безразмерной форме

$$K(\xi_2) \int_0^{\xi_2} f(\xi_2) d\xi_2 = \frac{a(1 + \frac{a_\tau}{a})}{A U_0 d} \xi_2 \frac{dK}{d\xi_2}.$$

Интегрирование приводит к зависимости

$$K(\xi_2) = \frac{\theta}{\theta_{\max}} = \exp \left[- \int_0^{\xi_2} \frac{A U_0 d}{a(1 + \frac{a_\tau}{a})} f(\xi_2) \frac{d\xi_2}{\xi_2} \right].$$

Возвращаясь к размерным величинам, на основании зависимостей (2.108), (2.109) и (3.76) получим

$$\frac{\theta}{\theta_{\max}} = \exp \left[\int_0^{\xi_2} \frac{\gamma(1+\gamma_*)}{a(1 + \frac{a_\tau}{a})} \frac{d}{d\xi_2} \left(\ln \frac{U_x}{U_{x,\max}} \right) d\xi_2 \right]. \quad (3.77)$$

Используя обозначения $\varphi = U_x/U_{x,\max}$, $z = U_{x,\max} z/\gamma$, уравнение можно представить в форме

$$\frac{\theta}{\theta_{\max}} = \exp \left[\int_0^z \frac{P_2(1+\gamma_*)}{(1+\gamma_*) \frac{\rho_z}{\rho_{z\tau}}} \frac{\varphi'}{\varphi} dz \right], \quad (3.78)$$

где для области значений числа Прандтля $0 < P_2 < 1$ в соответствии с (3.21) имеем

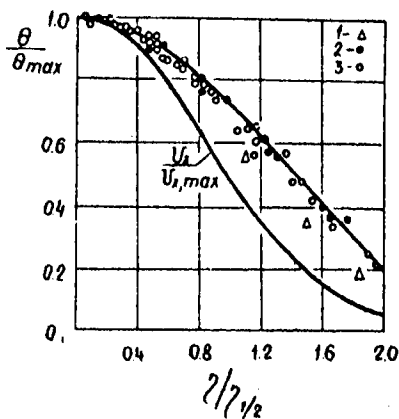


Рис.3.9. Радиальное изменение безразмерной температуры.
Опытные данные: 1 - Рудена, 2 - Старка, 3 - Пабста;
— расчет по зависимости (3.78)

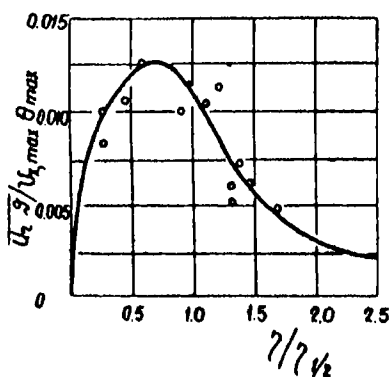


Рис.3.10. Радиальное изменение интенсивности
турбулентного переноса тепла:
• - опытные данные Корсина и Юберол
— расчет

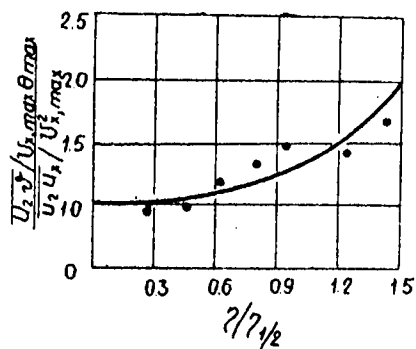


Рис.3.II. Отношение радиального переноса тепла к переносу импульса:

- - опытные данные Корсина и Юберя
- расчет; $Re = 2 \cdot 10^4$

$$\beta = 1 + \gamma_* \frac{p_2}{p_{2*}} = 1 + \beta \gamma_* p_2,$$

причём величина β определяется в соответствии с (3.II)

$$\beta = 1 + \frac{0.5 \frac{\sigma_*}{\tau_*}}{1 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{2} \frac{F_3 x}{F_2^2}} - 1 \right)}.$$

На рис. 3.9 приводится полученная по (3.78) зависимость осреднённой безразмерной температуры $\theta/\theta_{\max}$ от $2/2^{1/2}$ в сопоставлении с опытными данными разных авторов [47-49]. Полученное изменение турбулентного переноса тепла в безразмерной форме $\bar{u}_x v / U_{x, \max} \theta_{\max}$ в зависимости от $2/2^{1/2}$ показано на рис. 3.10 в сопоставлении с опытными данными Корсина и Юбероя [50]. Кроме того, отношение интенсивности турбулентного переноса тепла к турбулентному напряжению в форме

$$\frac{\bar{u}_x v / U_{x, \max} \theta}{\bar{u}_x \bar{u}_x / U_{x, \max}^2}$$

в зависимости от $2/2^{1/2}$ приводится на рис. 3.II также в сопоставлении с опытными данными при $Re_d = 2 \cdot 10^4$.

Хорошее согласование проведённых расчётов турбулентного теплопереноса в струе с экспериментальными данными подтверждает эффективность применённого метода, не требующего, к тому же, коррекции за счёт эмпирических констант.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шваб В.А., Шваб А.В. О модели механизма генерации турбулентности в установившихся турбулентных потоках. - В кн.: Методы гидрораэромеханики в приложении к некоторым технологическим процессам. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1977, с. 5-35.
2. Шваб В.А., Шваб А.В. Пристенные турбулентные течения. - Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1980. - 208 с.
3. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. - М.: Мир, 1971. - 536 с.
4. Шваб В.А., Безprozванных В.А. Обобщенный метод расчёта гидродинамических характеристик стабилизированного турбулентного течения в каналах произвольной формы поперечного сечения. - В кн.: Вопросы прикладной аэрогидромеханики и тепломассообмена. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 3-14.
5. Структура турбулентного потока и механизм теплообмена в каналах/ Под ред. Ибрагимова И.Х. и др. - М.: Атомиздат, 1978. - 178 с.
6. Спэрроу, Хаджи-Шейх. Течение и теплопередача в трубах произвольного поперечного сечения при произвольном задании тепловых граничных условий. - Теплопередача, 1968, № 4, с. II-20.
7. Davis P.J. *Orthogonalizing Codes in Numerical Analysis, in Survey of Numerical Analysis*. - New York, Mc Graw-Hill Book Company, 1962.
8. Курант, Гильберт. Методы математической физики. - М.-Л.: Гос. Изд-во технико-теоретической лит-ры, 1951, т. I. - 476 с.
9. Халпелл Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. - М.: Мир, 1976. - 224 с.
10. Sparrow E.M., *AIChE Journal*, v.8, №5, p.599, 1962.
11. Mikizadeh J. *Indr-Arch.*, 1, 1930, 306.
12. Кремерс, Эккерт. Измерение с помощью термоанемометра характеристик турбулентного воздушного потока в канале треугольного поперечного сечения. - Прикладная механика, 1962, т. 29, № I, с. 3-10.
13. Brandtlett E., Baines W.D. *J. Fluid Mech.*, v.19, part 3, p.375, 1964.
11. Gessner F.B., Jones J.B., *J. Fluid Mech.*, v.23, part 4, p.689, 1965.
15. Leuthausser H.J., *Hydrcaw J. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engns*, v.89, n.43, p.1, 1963.
16. Mikizadeh J. *Verelnes Ingenierie*, №37, 1926.
17. Шиллер Л. Движение жидкостей в трубах. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. - 323 с.
18. Hartnett J.P., Koh I.C., Mc Comas S.T. *Trans. ASME, ser C*, №1, 1962.

19. Гольдина В.Д., Шваб В.А. Исследование равномерного турбулентного движения в открытых каналах с различной формой поперечного сечения. - В кн.: Вопросы аэрогидромеханики и теплообмена. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1984, с. II4-II9.
20. Тепакс Лео. Равномерное турбулентное движение в трубах и каналах. - Таллин: Валгус, 1975. - 255 с.
21. Васильченко Г.В. Локальные характеристики турбулентного равномерного потока с прямоугольным поперечным сечением. - В кн.: Гидравлика и гидротехника. - Киев: Наукова думка, 1980, № 30, с. 3-II.
22. Машкилейсон А.А. Исследование равномерного движения жидкости в прямоугольных трубах: Автореф. дис... канд.тех.наук. - М., 1970. - 15 с.
23. Касьянов Н.Д. К расчёту поля скоростей в русле треугольной формы. - В кн.: Гидравлика и гидротехника. - Киев: Наукова думка, 1981, № 32, с. 27-31.
24. Шваб А.В., Шваб В.А. К проблеме автомодельного турбулентного пограничного слоя. - В кн.: Вопросы прикладной аэрогидромеханики и теплообмена. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 15-23.
25. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. - 711 с.
26. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1973. - 847 с.
27. Clauser F.H. *Advances in Appl. Mechanics*, 4, 1(1956).
28. Falkner V.M. *The resistance of a smooth flat plate with turbulent boundary layer, Aircraft Engineering*, 15, 65 (1943).
29. Squire H.B., Young A.D. *The calculation of the profile drag of aerofoils, R. and M., N1883, British A.R.C., 1938.*
30. Hama F.R. *Soc. Naval Architects Marine Engrs. Trans.*, 62, 333 (1954).
31. Hamel G. *Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten, Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung*, 25(1916), s. 34-60.
32. Абрамович Г.Н. Теория турбулентных струй. - М.: Физмат лит., 1960. - 715 с.
33. Бай Ши-и. Теория струй. - М.: Физматгиз, 1960. - 326 с.
34. Вулис Л.А., Кашкаров В.П. Теория струй вязкой жидкости. - М.: Наука, 1965. - 431 с.
35. Хинце И.О. Турбулентность. - М.: Физматгиз, 1963. - 680с.
36. Corrsin S., *NACA, 1943, wartime Repts., N94.*
37. Rosler R.S., Bankoff S.E. *A.I.Ch.E.I., 1963, vol 9, N5.*

38. Townsend A. *Proc. Soc. London*, 190A, 551 (1947).
39. Townsend A. *Australian J. Research*, 2A, 451 (1949)
40. Шваб В.А., Шваб А.В. Метод непрерывной модели в приложении к расчёту теплообмена при турбулентном течении в трубах. - В кн.: Методы гидроаэромеханики в приложении к некоторым технологическим процессам. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1977, с. 36-55.
41. Spalding D.B. and G.L.V. Lauatillaka, *Mech. Eng. Dept., Imperial College, London*, 1963.
42. Пирогов М.С. Теплоотдача к натрию при малых числах Pe . - М.: Атомная энергия, 1960, т.8, вып.4, с.367-368.
43. Кириллов П.Л., Субботин В.И., Суворов М.Я., Троянов М.Ф. Теплоотдача в трубе к сплаву натрия с калием и к ртути. - М.: Атомная энергия, 6, вып.4, 382 (1959), с. 159-163.
44. Кутателадзе С.С., Боришанский В.М., Новиков И.И. Федынский О.С. Жидкометаллические теплоносители. Приложение № 2 к журналу "Атомная энергия". М.: Атомиздат, 1958, с. 57-65.
45. Шваб А.В. Установившееся турбулентное течение в коаксиальном цилиндрическом канале. - В кн.: Вопросы аэрогидромеханики в приложении к некоторым технологическим процессам. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1981, с. 57-63.
46. Шваб А.В. Теплообмен при турбулентном течении в коаксиальном цилиндрическом канале. - В кн.: Вопросы аэрогидромеханики и тепломассообмена. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 35-45.
47. Старк С.Б. - ЖТФ, 1953, т.23, вып.10, с. 1802-1819.
48. Ruden P. *Naturwissenschaften*, 1933, Bd 21, 121-23.
49. Rüst O. F.W. *Flugzeugbau*, 1944, №6004, 8007.
50. Cozzini J. and Uberoi M.S., *NACA*, 1950, №2124.
51. Lawn C.I. 1970 Application of the turbulence energy equation to fully developed flow in simple ducts. C.E.G.B. Rep. RD/B 1575.
52. Hrnjalic K. and Launder B.E. 1972 A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *J. Fluid Mech.* 52, 609-638.

О Г Л А В Л Е Н И Е

I. Пристенная турбулентность двухфазной гетерогенной среды . . .	3
I.1. Метод расчёта турбулентных напряжений и осреднённых скоростей в пристенных потоках двухфазной гетерогенной среды	3
2. Пристенные турбулентные течения гомогенной среды	25
2.1. Основные соотношения для пристенных турбулентных течений гомогенной среды	25
2.2. Турбулентное течение в круглой цилиндрической трубе и плоском канале	28
2.3. Стабилизированное турбулентное течение в каналах произвольной формы поперечного сечения	31
2.4. Стабилизированное турбулентное течение в открытых каналах произвольной формы сечения	46
2.5. Автомодельный турбулентный пограничный слой	50
2.6. Установившееся турбулентное течение в плоском конфузоре с малым углом раствора	61
2.7. Осесимметричная турбулентная струя	66
2.8. Распределение скорости в следе за цилиндром	72
3. Турбулентный перенос тепла.	76
3.1. Взаимосвязь между процессом турбулентного переноса тепла и импульса	76
3.2. Теплообмен при постоянном тепловом потоке на стенке трубы	82
3.3. Теплообмен при постоянной температуре стенки трубы	84
3.4. Результаты численного расчёта установившегося теплообмена в трубах	86
3.5. Теплообмен при турбулентном течении в коаксиальном цилиндрическом канале	91
3.6. Турбулентный перенос тепла в осесимметричной "свободной" струе	103
Литература	108

Александр Вениаминович Шваб

Вениамин Андреевич Шваб

МЕТОД ГЕНЕРАЦИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В РАСЧЕТАХ
СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

ИБ 1692

Редактор Л.И.Дюканова

Подписано к печати 7/III 86 г. КЗ 06074.

Формат 60 x 84 1/16. Бумага типографская № 3. Печать офсетная.

Печ.л. 7,0; усл.п.л. 6,51; уч.-изл.л. 5,0.

Тираж 500 экз. Заказ 2/4 Цена 80к.

Издательство ТГУ. 634029, Томск, ул.Никитина, 4.

Ротапринт ТГУ, 634029, Томск, ул.Никитина, 4.



*Издательство
Томского университета*