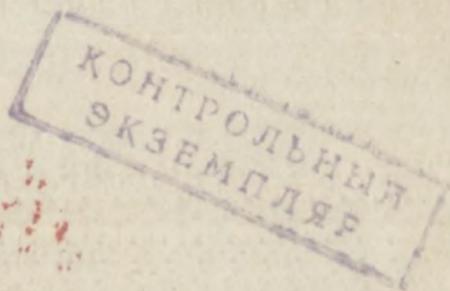

**ВОПРОСЫ
МЕХАНИКИ
И ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ**

2/5

100

ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1983

Вопросы механики и прикладной математики: Сб. статей/Ред. В. М. Муслимов. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983. — 5,8 л. — 90 коп. 500 экз., 173040000.

В сборнике помещены статьи, посвященные вопросам решения краевых задач, механики деформируемого твердого тела, теории фильтрации.

Для научных сотрудников, занимающихся в области прикладной математики и механики, а также для аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Рецензент — канд. техн. наук А. М. Болдышев

Редактор — канд. техн. наук В. М. Мусалимов

В 1703040000 — 66—82
177(012)—83

© Издательство Томского университета, 1983 г.

**ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ИБ 1160

Редактор Т. В. Зелёва
Технический редактор Г. Н. Гридина
Корректор И. И. Глазкова

Сдано в набор 6.04.82. Подписано к печати 7.02.83. К303015.
Формат 84×108¹/₃₂. Бумага типографская № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. П. л. 4; уч.-изд. л. 5,8; усл. п. л. 6,72. Тираж 500 экз. Заказ 177. Цена 90 коп.

Издательство ТГУ, 634010, Томск, пр. Ленина, 36.
Тип. «Красн. рабочий», г. Красноярск, пр. Мира, 91.

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В. И. БЕЛКОВ, Н. Н. КРУЛИКОВСКИЙ

Рассматривается уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, \lambda), \quad (1)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E^n, X(t, x, \lambda) = \begin{pmatrix} X_1(t, x, \lambda) \\ \vdots \\ X_n(t, x, \lambda) \end{pmatrix} \in E^n.$$

(E^n — n -мерное евклидово пространство).

Вектор-функция $X(t, x, \lambda)$ задана в $[0, T] \times G \times \Lambda$, где $t \in [0, T]$, T — конечное число, $x \in G$, G — подмножество пространства E^n , $\lambda \in \Lambda$, Λ — числовое множество, имеющее λ_0 предельной точкой.

Рассматривается следующая задача: при каких условиях, накладываемых на правую часть уравнения (1), $x(t, \lambda) \rightarrow x(t, \lambda_0)$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ равномерно по $t \in [0, T]$, где $x(t, \lambda)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$x_i(t_i, \lambda) = A_i(\lambda), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1')$$

$x(t, \lambda_0)$ — решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, \lambda_0), \quad (2)$$

удовлетворяющее условию

$$x_i(t_i, \lambda_0) = A_i(\lambda_0), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2')$$

причем имеет место либо $A_i(\lambda) = A_i(\lambda_0)$ для $\lambda \in \Lambda$, либо

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} A_i(\lambda) = A_i(\lambda_0).$$

Аналогичным вопросом в случае задачи Коши занимались И. И. Гихман [1], М. А. Красносельский, С. Г. Крейн [2], Я. Курцвейль, З. Ворел [3], Н. Н. Петров [4] и другие авторы.

В настоящей работе получены условия, обеспечивающие указанную выше сходимость для многоточечной краевой задачи. Применяемый при доказательстве метод является некоторым видоизменением метода работ Н. И. Гихмана [1] и Н. Н. Петрова [4], где сходимость существенно связана с локальным характером задачи Коши и возможна лишь при определенном выборе длины интервала $[0, T]$. В рассматриваемой задаче такое уменьшение длины интервала недопустимо ввиду наличия многоточечных условий.

Для удобства изложения введем некоторые обозначения, предварительно перейдя от уравнений (1) к системе интегральных уравнений

$$x_i(t, \lambda) = A_i(\lambda) + \int_{t_i}^t X_i(\tau, x(\tau, \lambda), \lambda) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Положим

$$A\lambda = \begin{Bmatrix} A_1(\lambda) \\ \vdots \\ A_n(\lambda) \end{Bmatrix}, \quad \Phi^t X(\tau, x, \lambda) = \begin{Bmatrix} \int_{t_1}^t X_1(\tau, x, \lambda) d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_n}^t X_n(\tau, x, \lambda) d\tau \end{Bmatrix},$$

$$\|X(\tau, x, \lambda)\| = \sum_{i=1}^n |X_i(\tau, x, \lambda)|.$$

Легко увидеть, что в наших обозначениях имеет место оценка

$$\|\Phi^t X\| \leq \int_0^t \|X\| d\tau.$$

Система интегральных уравнений примет вид

$$x(t, \lambda) = A(\lambda) + \Phi^t X(\tau, x(\tau, \lambda), \lambda). \quad (3)$$

Имеет место теорема:

Пусть

1. При каждом $\lambda \in \Lambda$ существует решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$x_i(t_i, \lambda) = A_i(\lambda), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

и определенное для $t \in [0, T]$.

2. Уравнение (2) имеет единственное решение, лежащее в G вместе с некоторой своей ρ — окрестностью, определенное на $[0, T]$ и удовлетворяющее условию

$$x_i(t_i, \lambda_0) = A_i(\lambda_0), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

3. Существует положительная функция $d(t, \omega)$, определенная на $[0, T] \times [0, 1]$, где $l > 0$ и удовлетворяющая условиям:

а) $d(t, \omega)$ для каждого $t \in [0, T]$ не убывает и дифференцируема по ω ;

в) для каждого $\omega \in [0, 1]$ функция $d(t, \omega)$ интегрируема на $[0, T]$ и $d(t, 0) = 0$ для $t \in [0, T]$;

с) для $x, z \in G, t \in [0, T], \lambda \in \Lambda$ имеет место следующее неравенство:

$$\|X(t, x, \lambda) - X(t, z, \lambda)\| \leq d(t, \|x - z\|).$$

$$4. \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \Phi^t X(\tau, x, \lambda) = \Phi^t X(\tau, x, \lambda_0)$$

равномерно относительно $t \in [0, T]$ и $x \in G$.

$$5. \quad \int_0^T d_\omega'(t, \omega) dt < 1 \quad \text{при } \omega \in [0, 1].$$

Тогда по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого решения $x(t, \lambda)$ уравнения (1), определенного на $[0, T]$ и удовлетворяющего условиям (1'), при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ справедливо неравенство

$$\|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)\| < \varepsilon$$

для всех $t \in [0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ.

Из 4-го условия теоремы следует:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} [\Phi^{\tau_2} X(\tau, x, \lambda) - \Phi^{\tau_1} X(\tau, x, \lambda)] &= \\ &= \Phi^{\tau_2} X(\tau, x, \lambda_0) - \Phi^{\tau_1} X(\tau, x, \lambda_0) \end{aligned} \quad (4)$$

$(0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq T, x \in G).$

Разобьем отрезок $[0, T]$ на интервалы точками $\tau_j: 0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_p = T$, $p \gg n$ и будем предполагать, что точки t_i из условий (1'), (2') являются точками деления.

Построим кусочно-постоянную функцию $x(t)$, определенную на $[0, T]$ следующим образом:

$$x(t) = x_j \in G \quad \tau_{j-1} \leq t < \tau_j, \quad j = 1, \dots, p$$

$$x(\tau_p) = x(T) = x_p \in G.$$

Тогда из (4) следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \Phi^t X(\tau, x(\tau), \lambda) = \Phi^t X(\tau, x(\tau), \lambda_0) \quad (5)$$

равномерно по $t \in [0, T]$.

Зададим произвольно $\varepsilon_0 > 0$. Выберем δ_1 так, чтобы $\delta_1 < c_3 \varepsilon_0$, где c_3 — некоторая положительная постоянная.

Существует очевидно, такое разбиение отрезка $[0, T]$, что построенная выше кусочно-постоянная функция $x(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$1) \max_{t \in [0, T]} \|x(t, \lambda_0) - x(t)\| < \delta_1 < C_3 \varepsilon_0;$$

2) $x(t)$ принадлежит ρ -окрестности решения $x(t, \lambda_0)$.

Далее, согласно (5) найдется такое $\delta_2 > 0$, что при $|\lambda - \lambda_0| < \delta_2$

$$\|\Phi^t X(\tau, x(\tau), \lambda) - \Phi^t X(\tau, x(\tau), \lambda_0)\| < C_1 \varepsilon_0$$

для всех $t \in [0, T]$, где c_1 — некоторая положительная постоянная.

Из уравнений (3) имеем:

$$\begin{aligned} & \|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)\| \leq \|A(\lambda) - A(\lambda_0)\| + \\ & + \|\Phi^t X(\tau, x(\tau, \lambda), \lambda) - \Phi^t X(\tau, x(\tau, \lambda_0), \lambda_0)\| \leq \\ & \leq \|A(\lambda) - A(\lambda_0)\| + \int_0^T \|X(\tau, x(\tau, \lambda), \lambda) - \\ & \quad - X(\tau, x(\tau, \lambda_0), \lambda)\| d\tau + \\ & + \int_0^T \|X(\tau, x(\tau, \lambda_0), \lambda) - X(\tau, x(\tau), \lambda)\| d\tau + \\ & + \|\Phi^t X(\tau, x(\tau), \lambda) - \Phi^t X(\tau, x(\tau), \lambda_0)\| + \\ & + \int_0^T \|X(\tau, x(\tau), \lambda_0) - X(\tau, x(\tau, \lambda_0), \lambda_0)\| d\tau. \end{aligned}$$

Найдется такое $\delta_3 > 0$, что при $|\lambda - \lambda_0| < \delta_3$

$$\|A(\lambda) - A(\lambda_0)\| \leq c_2 \varepsilon_0,$$

где c_2 — некоторая положительная постоянная.

Используя 3-е условие теоремы, предыдущие рассуждения при $\delta = \min(\delta_2, \delta_3)$, будем иметь при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)\| &\leq c_1 \varepsilon_0 + c_2 \varepsilon_0 + 2 \int_0^T d(\tau, c_3 \varepsilon_0) d\tau + \\ &+ \int_0^T d(\tau, \max_{\tau \in [0, T]} \|x(\tau, \lambda) - x(\tau, \lambda_0)\|) d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Положим

$$\begin{aligned} \int_0^T d(\tau, c_3 \varepsilon_0) d\tau &= \psi(\varepsilon_0), \quad \Delta(\lambda) + \max_{\tau \in [0, T]} \|x(\tau, \lambda) - \\ &- x(\tau, \lambda_0)\|, \quad \varphi(\Delta) = \int_0^1 d(\tau, \max_{\tau \in [0, T]} \|x(\tau, \lambda) - x(\tau, \lambda_0)\|) d\tau \end{aligned}$$

Из 3-го условия теоремы следует, что ψ и φ неубывающие функции, для которых

$$\psi(\varepsilon_0) \geq 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_0 \geq 0 \quad \text{и} \quad \psi(0) = 0$$

$$\varphi(\Delta) \geq 0 \quad \text{при} \quad \Delta \geq 0 \quad \text{и} \quad \varphi(0) = 0.$$

Так как правая часть в (6) не зависит от τ , то (6) можно переписать в виде

$$\Delta \leq (c_1 + c_2) \varepsilon_0 + 2\psi(\varepsilon_0) + \varphi(\Delta). \quad (6')$$

Кривая

$$f(\Delta, \varepsilon_0) = (c_1 + c_2) \varepsilon_0 + 2\psi(\varepsilon_0) + \varphi(\Delta) - \Delta = 0 \quad (7)$$

является границей множества (6') в плоскости $\Delta O\varepsilon_0$. Очевидно, что $f(0, 0) = 0$, $f_{\Delta}'(0, 0) \neq 0$. По теореме о неявной функции (7) в окрестности нуля можно однозначно разрешить относительно Δ

$$\Delta = \Delta(\varepsilon_0; c_1, c_2, c_3)$$

Из условия теоремы и уравнения (7) следует, что

$$\Delta_{\varepsilon_0}' = \frac{c_1 + c_2 + 2\psi'(\varepsilon_0)}{1 - \varphi_{\Delta}'} > 0$$

для любых положительных постоянных c_1, c_2, c_3 .

График функции $\Delta = \Delta(\varepsilon_0, c_1, c_2, c_3)$ расположен в I-м квадранте плоскости $\Delta O\varepsilon_0$ и функция $\Delta = \Delta(\varepsilon_0; c_1, c_2,$

c_3) возрастает по ε_0 при любых положительных постоянных c_1, c_2, c_3 .

Поэтому (6') можно записать

$$\Delta \leq \Delta(\varepsilon_0; c_1, c_2, c_3).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное малое положительное число. Выбирая положительные постоянные $\varepsilon_0, c_1, c_2, c_3$ так, чтобы

$$\Delta(\varepsilon_0; c_1, c_2, c_3) = \varepsilon, \quad (8)$$

что в данном случае возможно в силу возрастания и непрерывности функции $\Delta = \Delta(\varepsilon_0; c_1, c_2, c_3)$ при росте ε_0 от нуля, мы получим утверждение теоремы, если в приведенном выше доказательстве взять за ε_0 найденное значение из (8).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение теоремы остается в силе, если краевые условия заменить начальными условиями в точке $t = 0$. В этом случае, полагая $\tau = \frac{t}{\lambda}$, мы

получим обоснование принципа осреднения нелинейной механики при условиях более общих, чем условия в работах указанных выше авторов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В качестве условия 4 теоремы можно взять следующее:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \Phi^t X(\tau, x(\tau, \lambda_0), \lambda) = \Phi^t X(\tau, x(\tau, \lambda_0), \lambda_0)$$

равномерно по $t \in [0, T]$.

Оно более удобно для проверки в тех случаях, когда уравнение (2) легко интегрируется. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И. По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова. — Украин. матем. журн., 1952, т. 4, № 2, с. 215—219.
2. Красносельский М. А., Крейн С. Г. О принципе усреднения в нелинейной механике. — УМН, 1955, 10, № 3, с. 147—152.
3. Курцвейль Я., Ворел З. О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра. — Чехословацкий матем. журн., 1957, 7, № 82, 4, с. 568—580.
4. Петров Н. Н. Некоторые достаточные условия непрерывной зависимости решения дифференциальных уравнений от параметра. — Вестник ЛГУ, 1962, № 19, с. 26—40.

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ РАСЧЕТА БИСТАЛЬНЫХ МОСТОВ С АППРОКСИМАЦИЕЙ КРИВОЙ « σ — ϵ »

В. М. КАРТОПОЛЬЦЕВ

При расчете бистальных конструкций с частичным использованием пластической зоны работы элементов большое значение приобретает вопрос о том, каким образом учитывать в расчете пластические свойства сталей, не обладающих сколько-нибудь четко выраженной площадкой текучести, ибо применение диаграммы Прандтля—Рейсса неприемлемо. В исследованиях Бее-ра, Валлера (Австрия), Ажлейка, Массонэ (Бельгия), Фишера, Фрейнденталя, Бийлаарда, Цурлимана, Вийетта (США), Толманага, Таджама (Япония), Родерика, Раунлингса (Австралия) и др. в качестве расчетной диаграммы « σ — ϵ » использовалась билинейная кривая (рис. 1).

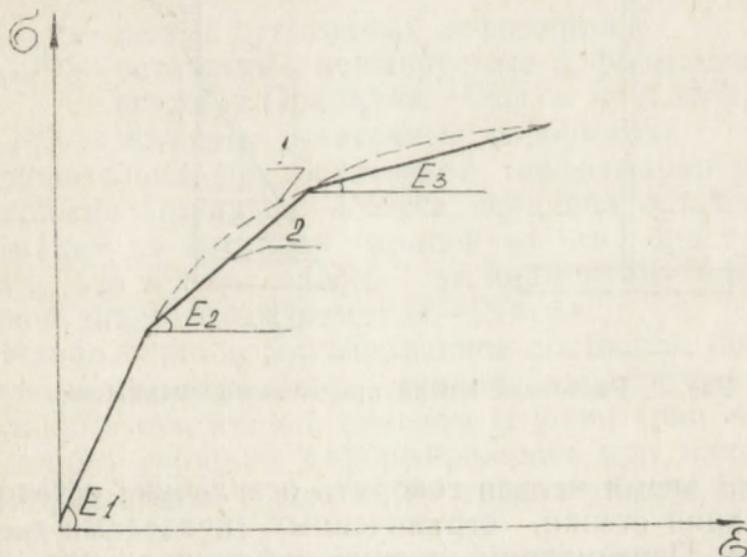


Рис. 1. Общий вид экспериментальной кривой — 1
и аппроксимированной билинейной — 2

Анализ теоретических исследований ряда советских ученых в области описания предельного состояния конструкций показывает, что, как правило, для упрощения расчетов и расчетных схем описывали упругопластическое состояние стенки идеализированной диаграммой Прандтля—Рейсса. Стенка, как правило, выполнялась из ВСтЗсп, у которой на диаграмме « σ — ϵ » явно выражена площадка текучести, и в этом случае такой прием вполне оправдан.

Применение в стенках низколегированных сталей обычной и повышенной прочности, где площадка текучести в явной форме отсутствует, предопределяет пересмотр существующих положений расчета и выбор расчетных диаграмм « σ — ϵ » по причине того, что стенка изготовлена из стали, истинная диаграмма деформирования которой не соответствует диаграмме Прандтля—Рейсса. В этом случае, пользуясь ранее принятыми расчетными предпосылками, по которым стенка следует по Прандтлю—Рейсса, получим предельное состояние бистальной балки, как показано на рис. 2.

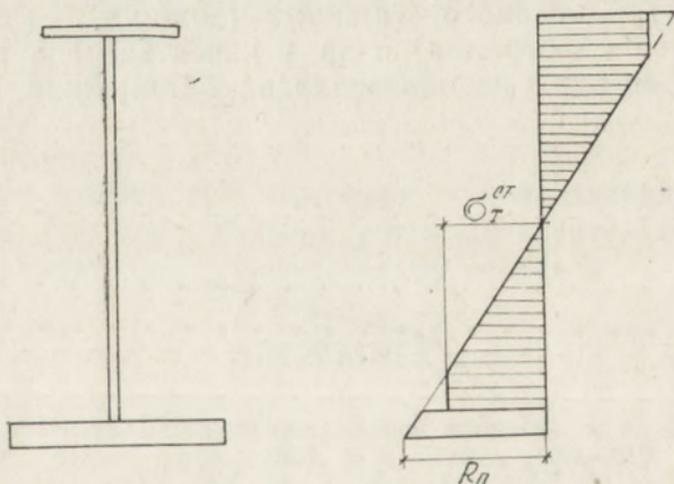


Рис. 2. Расчетная эпюра предельного напряжения

В это время нельзя говорить о величине остаточных деформаций стенки, ограниченных пределами $\epsilon_{ост}^{ст} = 0,25\%$. Пересмотрим кривую деформирования « σ — ϵ » в виде (рис. 3). Из кривых рис. 3 видно, что истинная картина деформирования дает дополнительный резерв

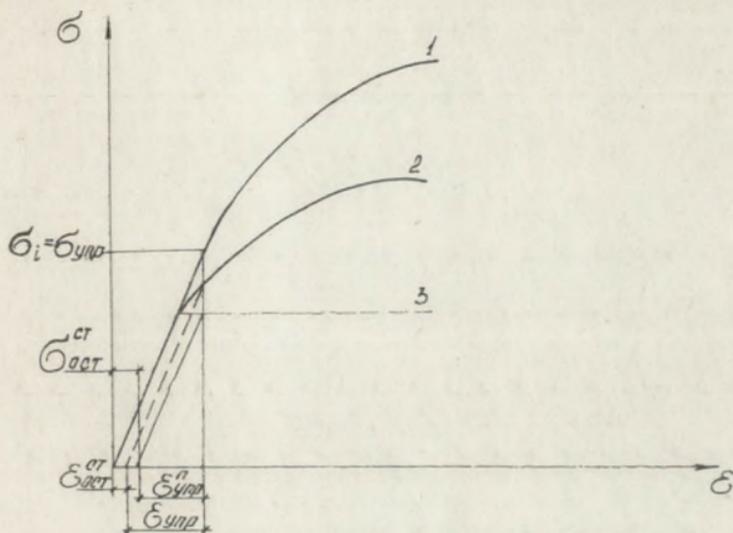


Рис. 3

прочности, так как в действительности остаточные деформации в стенке бистальной балки будут меньше, чем в случае работы стенки по диаграмме Прандтля—Рейсса, а именно:

$$\Delta \epsilon_{\text{ост}}^P = \epsilon_{\text{ост}}^{\text{Пр}} - \epsilon_{\text{ост}}^{\text{ист}}, \quad (1)$$

где
 $\Delta \epsilon_{\text{ост}}^P$ — резерв остаточных деформаций;
 $\epsilon_{\text{ост}}^{\text{Пр}}$ — остаточные нормируемые деформации по диаграмме Прандтля—Рейсса = 0,25%;
 $\epsilon_{\text{ост}}^{\text{ист}}$ — истинные остаточные деформации.

Следовательно, при остаточной деформации 0,25% на диаграмме Прандтля—Рейсса величина остаточных деформаций на истинной кривой « σ — ϵ » будет меньше 0,25%, это и есть ошибка от применения идеализированной диаграммы Прандтля—Рейсса.

Напряженно-деформированное состояние бистальных балок несимметричного сечения характеризуется несколькими стадиями в опасном сечении (рис. 4):

стадия упругого деформирования при напряжениях в фибрах стенки и поясов, не превышающих предела текучести (рис. 4, а);

стадия упругопластического деформирования, которая характеризуется упругими деформациями фибр нижнего пояса и прилегающей к нему стенки и распро-

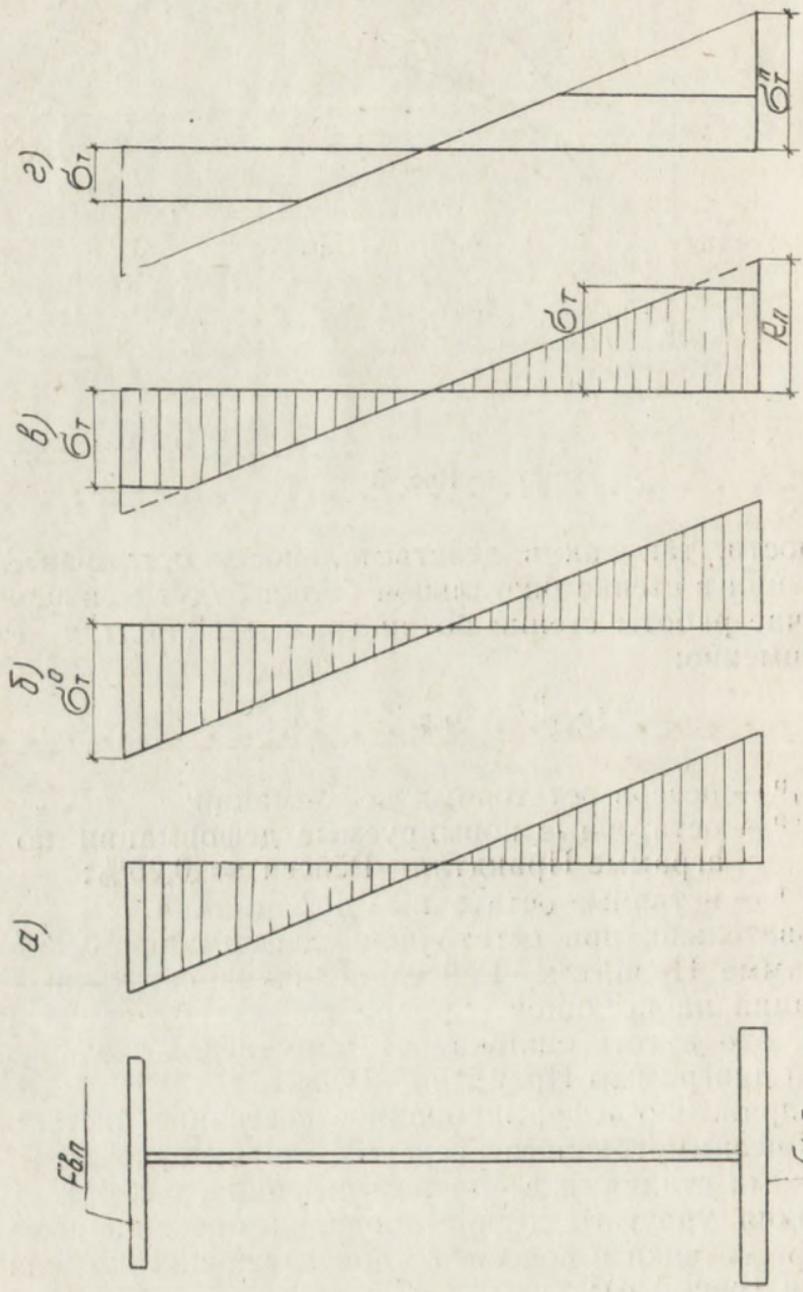


Рис. 4. Стадии напряженного состояния бистальных балок

странением малых пластических деформаций в верхнем поясе (рис. 4, б);

стадия нелинейного деформирования, при которой нижний пояс работает упруго, а в верхнем поясе и верхней и нижней частях стенки развиваются пластические деформации (рис. 4, в).

Предельное состояние бистальных балок.

Зная, что у высокопрочных сталей повышенной прочности напряжение за пределом упругости (σ_i) не остается const, а изменяется по некоторому закону, запишем в виде аналитической аппроксимации

$$(2) \quad \sigma_i = \frac{E \cdot \varepsilon}{\sqrt{1 + \left(\frac{E \cdot \varepsilon}{\sigma_{п. п}}\right)^2}} \quad (2)$$

Тогда при

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_T}{y_B} \cdot y; \text{ в. п.}$$

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{\sigma_T}{y_B} \cdot y \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_T^2 \cdot E^2 \cdot y^2}{y_B^2 (\sigma_{п. п})^2}} = \\ &= \frac{\sigma_T^{в. п.}}{y_B} \cdot y \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_T^{в. п.} \cdot y^2}{y_B^2 (\sigma_{п. п})^2}} \end{aligned}$$

При деформациях $\varepsilon = \varepsilon_T$ при определении напряжений σ_i необходимо ввести поправку на согласование, так как при $\varepsilon < \varepsilon_T$ используется линейная зависимость, а при $\varepsilon > \varepsilon_T$ описываем диаграмму аналитическим выражением вида (2)

$$\sigma_T^{п} = E \cdot \varepsilon_T = \sigma_T^{п} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_T^{п}}{\sigma_{п. п}}\right)^2} + \Delta \sigma',$$

$$\Delta \sigma' = \sigma_T^{п} - \sigma_T^{п} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_T^{п}}{\sigma_{п. п}}\right)^2}.$$

Тогда

$$(3) \quad \sigma_i = \frac{\sigma_T^{п}}{y_B} \cdot y \sqrt{1 + \frac{(\sigma_T^{п})^2 \cdot y^2}{y_B^2 \cdot (\sigma_{п. п})^2}} + \Delta \sigma' \quad (3)$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_T}{y_B} \cdot y.$$

Предельный изгибающий момент исходя из аппроксимированной кривой « $\sigma-\epsilon$ » запишется: $M = M_1 + M_2 + M_y$.

$$M_1 = \int_{y_B}^{y_B + \lambda_B} \sigma \cdot \delta \cdot y \cdot dy = K \int_{y_B}^{y_B + \lambda_B} \frac{y_2 \cdot dy}{\sqrt{R + y_2}}; \quad (4)$$

$$R = \frac{(y_B)^2 \cdot (\sigma_{п.п})^2}{(\sigma_{т.п})^2}$$

$$K = \sigma_{п.п} \cdot \delta.$$

Полный изгибающий момент равен:

$$M = M_1 + M_2 + F_{в.п} \cdot \delta_{т.п} \cdot h_B + F_{н.п} \cdot R_n \cdot h_n + \frac{2}{3} \sigma_{т.п} \cdot \delta \cdot y_B^2. \quad (5)$$

Поправка к несущей способности балки с использованием диаграммы Прандтля—Рейсса за счет поперечной силы рассматривается моментом, равным:

$$M' = \frac{\delta_{ст} \cdot a^3}{3} \cdot \sigma_{ст},$$

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{Q}{\sigma_{ст} \cdot \delta_{ст}},$$

где $\sigma_{ст}$ — предел текучести материала стенки.

Предельный изгибающий момент сечения (M) с учетом M' будет:

$$M' = M_1 + M_2 + F_{в.п} \cdot \sigma_{т.п} \cdot h_B + F_{н.п} \cdot R_n \cdot h_n + \frac{2}{3} \sigma_{т.п} \cdot \delta y_B^2 - M', \quad (6)$$

где M — изгибающий момент у формулы (5).

Аналогичное выражение получим из условия использования аппроксимированных кривых « $\sigma-\epsilon$ » и « $\tau-j$ » в виде

$$M' = 2 \int_0^{\lambda} \left[\tau_0 + \frac{3}{2} \frac{Q}{\delta_{ст} \cdot h_{ст}} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{\lambda^2} \right) \right] \cdot \delta_{ст} \cdot y \cdot dy. \quad (7)$$

Стенка и пояс разгружаются вместе упруго на вели-

чину $\varepsilon_{\text{CT}}^{\text{YPP}}$ и поражают возникновение дополнительно-го момента, уменьшающего остаточный прогиб:

Тогда:

$$M_{\text{H. П}}^P = (R_{\text{П}} - \sigma_{\text{T}}^{\text{B. П}}) \cdot F_{\text{H. П}} \cdot h_{\text{H}}. \quad (8)$$

Уравнение равновесия внутренних моментов после раз-грузки при условии, что ρ — максимальное удаление от н. о. центров тяжести верхнего пояса и стенки, одинако-во справедливо равенство

$$E \cdot \varepsilon_{\text{ост}} \cdot h_{\text{H}} \cdot F_{\text{H. П}} = E \cdot (\varepsilon_{\text{CT}}^{\text{ост}} - \varepsilon_{\text{ост}}) \cdot (W_{\text{B. П}} + W_{\text{CT}}), \quad (9)$$

где

$\varepsilon_{\text{ост}}^{\text{CT}}$ — остаточная деформация в стенке как у моно-стальной балки;

$\varepsilon_{\text{ост}}$ — остаточная деформация для бистальных балок при $E = \text{const}$,

$$E = \text{const},$$

$$\varepsilon_{\text{ост}} = \frac{\varepsilon_{\text{CT}}^{\text{ост}} \cdot (W_{\text{B. П}} + W_{\text{H. П}})}{W},$$

$$\varepsilon_{\text{CT}}^{\text{ост}} = \varepsilon_{\text{полн}} - \varepsilon_{\text{CT}}^{\text{T}}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_{\text{CT}}^{\text{T}}}{y_{\text{B}}} \cdot y,$$

$$\varepsilon_{\text{ост}}^{\text{CT}} = \varepsilon_{\text{CT}}^{\text{T}} \cdot \left(\frac{y}{y_{\text{B}}} - 1 \right); \quad \text{при } y \geq y_{\text{B}},$$

$$\varepsilon_{\text{ост}} = \frac{\varepsilon_{\text{CT}}^{\text{T}} \cdot (y - y_{\text{B}}) \cdot (W_{\text{B. П}} + W_{\text{CT}})}{y_{\text{B}} \cdot W}. \quad (10)$$

При определении остаточных деформаций и напря-жений исходя из криволинейной диаграммы « σ — ε », не-обходимо ввести поправку на упрочнение, ранее рас-смотренной как поправка на согласование между « σ и ε » диаграммы Прандтля—Рейсса и криволинейной ис-ходя из того, что

$$\Delta\sigma = \sigma_{\text{T}}^{\text{П}} / y_{\text{B}} \cdot (y_{\text{B}} + \lambda_{\text{H}}) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_{\text{T}}^{\text{П}} \cdot (y_{\text{B}} + \lambda_{\text{H}})}{y_{\text{B}} \cdot \sigma_{\text{П. П}}} \right)^2} - \sigma_{\text{T}}^{\text{П}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_{\text{T}}^{\text{П}}}{\sigma_{\text{П. П}}} \right)^2}. \quad (11)$$

Тогда

$$M = (R_{\text{П}} - \sigma_{\text{T}}^{\text{П}} - \Delta\sigma) \cdot F_{\text{H. П}} \cdot h_{\text{H}}$$

$$\varepsilon_{\text{ст}}^{\text{ост}} = \varepsilon_{\text{полн}} - \varepsilon_{\text{ст}}^{\text{T}} - \frac{\Delta\sigma}{E},$$

$$\varepsilon_{\text{ост}} = \frac{(\varepsilon_{\text{ст}}^{\text{T}}(y - y_{\text{в}}) - \Delta\sigma/E \cdot (W_{\text{в.п}} + W_{\text{ст}}))}{y_{\text{в}} \cdot W} \quad (12)$$

Соответственно уравнение для остаточной кривизны будет иметь вид:

$$\frac{1^*}{\rho_{\text{ост}}} = \frac{1}{\rho} - \frac{M + M_{\text{н.п}}}{EI}$$

по Прандтлю—Рейсса,

$$\frac{1}{\rho_{\text{ост}}} = \frac{1}{\rho} - \frac{M + M_{\text{н.п}} - M_{\text{н.п}}^{\text{P}}}{EI}$$

по аппроксимированной кривой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абаринов А. А., Чернова М. П., Кузнецов А. Ф. и др. Физико-механические свойства высокопрочной стали 14ХГ2МПР и 14ХМНДФР. — В кн.: Сварные металлоконструкции Челябинск, 1972, вып. 100, с. 8—10.
2. Кузьмин Н. А., Лукаш П. А., Милейковский Н. Е. Расчет конструкций из тонкостенных стержней и оболочек. М.: Стройиздат, 1960, с. 53.
3. Безухов Н. И. К теории пластического расчета на изгиб. — Вестник инженеров и техников, 1936, № 10, с. 36.

К ВОПРОСУ ЖЕСТКОСТИ ШПОНОЧНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

В. И. МАКСАК, И. Н. ТЕМНИК

Возможность определения контактных перемещений в сочленениях элементов конструкций представляет определенный практический интерес с позиции повышения точности и качества обработки деталей машин.

В работе рассматривается шпоночное соединение двух элементов универсально-сборных приспособлений (УСП), сжатых центральным усилием P_{Z_c} и сдвигаемых силой P_x . В качестве базовой теории использовались расчетные зависимости, изложенные в работах Н. Б. Демкина, Э. В. Рыжова, В. И. Максака.

Для определения упругих перемещений или жесткости контакта необходимо знать центральное сближение

$$\Delta q_{Z_c} = (\Delta q_{Z_1} + \Delta q_{Z_2})/2, \text{ угол разворота штампа } \alpha_y = \\ = (\Delta q_{Z_1} - \Delta q_{Z_2})/a \text{ и тангенциальное смещение } \Delta \tau_x.$$

Здесь Δq_{Z_1} и Δq_{Z_2} — сближение на площадке в крайних точках; a — длина контактной площадки.

Неизвестные Δq_{Z_1} , Δq_{Z_2} и $\Delta \tau_x$ находятся из решения системы уравнений

$$\sum P_z = 0; \int_{-1}^{+1} [(\Delta q_{Z_1} + \Delta q_{Z_2}) + (\Delta q_{Z_1} - \Delta q_{Z_2})X]^{1/\varepsilon} dx = \\ = 2(2\theta^{1/\varepsilon} P_{Z_c}/ab); \quad (1)$$

$$\sum M_0 = 0; \int_{-1}^{+1} [(\Delta q_{Z_1} + \Delta q_{Z_2}) + (\Delta q_{Z_1} - \Delta q_{Z_2})X]^{1/\varepsilon} X dx =$$



$$= 4(2\theta)^{1/\xi} Z_p P_x/a^2b;$$

$$\begin{aligned} \sum P_x = 0; \int_{-1}^{+1} [(\Delta q_{Z_1} + \Delta q_{Z_2}) + (\Delta q_{Z_1} - \Delta q_{Z_2})X]^{1/\xi} [1 - \\ - \left(\frac{2\Delta \tau_x}{fk_p [(\Delta q_{Z_1} + \Delta q_{Z_2}) + (\Delta q_{Z_1} - \Delta q_{Z_2})X]} \right)^{1/\xi}] dX = \\ = 2(2\theta)^{1/\xi} P_x/fab. \end{aligned}$$

Здесь $X = 2x/a$; b — ширина контактной прямоугольной площадки.

Конкретный расчет показал, что связь смещения $\Delta \tau_x$ и силы P_x оказалась не зависимой от координаты приложения силы. Однако с увеличением этой координаты увеличивается и изменение центрального сближения Δq_{Z_c} и угла разворота α_y . Поэтому с позиций увеличения тангенциальной жесткости стыка можно рекомендовать прокладки с меньшей толщиной располагать ближе к линии действия силы P_x .

Определенное влияние на взаимные перемещения оказывают контактные деформации в шпоночном соединении. Неограниченному развороту шпонки от внецентренной силы P_x в некоторой мере препятствуют возникающие в контакте боковой поверхности шпонки тангенциальные силы τ_z . Однако при определенных условиях, когда $\tau_z = fq_x$ (где f — коэффициент трения, q_x — давление на боковой поверхности шпонки), сила трения оказывается недостаточной и равновесие сил достигается тем, что шпонка заклинивается в пазу. Давление на боковой поверхности шпонки может быть определено по формуле

$$q_x = (\Delta q_x/\theta)^{1/\xi}, \quad (2)$$

где Δq_x — перемещение на шпонке; θ — параметр, учитывающий механические и геометрические характеристики поверхности; ξ — параметр распределения выступов шероховатой поверхности по высоте.

Сдвигающее усилие τ_z определяется по формуле

$$\tau_z = fq_x \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta \tau_z}{\Delta \tau_{zn}} \right)^{1/\xi} \right], \quad (3)$$

где $\Delta \tau_z$ — тангенциальное предварительное смещение; $\Delta \tau_{zn}$ — предельное смещение при $\tau_z = fq_x$.

$$\Delta\tau_{zN} = fK_{\mu} \Delta q_x,$$

где $K_{\mu} = (2 - \mu)/(1 - \mu)$; μ — коэффициент Пуассона. Δq_x и $\Delta\tau_z$ находятся из условий совместности контактных перемещений.

$$\Delta q_x = \Delta q_{x\min} + (\Delta q_{x\max} - \Delta q_{x\min}) 2Z/h; \quad (4)$$

$$\Delta\tau_z = (\Delta q_{x\max} - \Delta q_{x\min}) t/h, \quad (5)$$

где t — ширина шпонки; h — высота шпонки.

$\Delta q_{x\min}$ и $\Delta q_{x\max}$ определяются из решения системы уравнений равновесия сил

$$\sum P_x = 0 = l \int_0^{h/2} q_x = dZ - P_x, \quad (6)$$

$$\sum M_0 = 0 = 2 \int_0^{h/2} q_x \left(\frac{h}{2} - z \right) dz - t \int_0^{h/2} \tau_z dz, \quad (7)$$

где l — длина шпонки.

Условие проскальзывания, очевидно, зависит от соотношения ширины шпонки к ее высоте. Теоретический анализ показывает, что отношение t/h , при котором проскальзывание по боковой поверхности шпонки или только начинается, или распространяется по всему контакту, не зависит от сдвигающей силы P_x , длины шпонки l , параметра ϕ , а определяется коэффициентом трения f и в малой степени параметром ξ .

Так, при $\mu = 0.3$ и $f = 0.21$ отношение t/h , при котором начинается проскальзывание, с точностью до 5% можно принять равным 2.

Результаты конкретного расчета показали, что максимальное перемещение на боковой поверхности шпонки по нормали пропорционально перемещению на боковой поверхности шпонки по нормали при равномерном распределении давления.

$$\Delta q_{x\max} = K \Delta q_{xc}.$$

При минимальном отношении $t/h \approx 2$ влияние перекоса на контактные перемещения не превышает 9%.

По найденному из системы уравнений (6) и (7) значению $\Delta q_{x\max}$ с помощью формулы (2) можно определить и максимальное давление на боковой поверхности шпонки $q_{x\max}$, что в свою очередь позволяет дать оценку и контактной прочности.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ СОПРЯЖЕННЫХ ПРЕДНАПРЯЖЕННЫХ РЕЗИНОВЫХ СТЕРЖНЕЙ

В. М. МУСАЛИМОВ, С. М. ЭПШТЕИН

Вопросам механики систем, деформирующихся во времени, посвящено в настоящее время много работ, чему способствовали руководства А. Р. Ржаницина [1], Ю. Н. Работнова [2], А. С. Вольмира [3] и др. Кроме того, производство регулярно обновляет класс задач, расширяя возможности вязкоупругих постановок при расчетах на устойчивость.

Рассмотрим одну из таких задач, имеющих приложения к механике кабеля [4].

Сформируем двухэлементную конструкцию из двух резиновых стержней: активный стержень (АС) растянем силой P и скрутим моментом M_k , затем скрепим продольно с пассивным стержнем (ПС). Такую систему будем называть «сопряженными стержнями», причем число сопряженных стержней может быть любым. На рис. 1 показаны варианты сопряжения стержней. Дальнейшие рассуждения будут относиться к варианту рис. 1, б, где наружный «стержень» — труба (ПС).

Предоставим системе свободу после того, как скрепим стержни: АС будет релаксировать, ПС — ползти, — этим определится совокупное последствие. При определенных условиях система потеряет устойчивость — осуществится образование спирали.

Цель исследования состояла в разработке критерия устойчивости сопряженных стержней; в установлении зависимостей между углами закручивания и усилиями P и M_k , между осевыми перемещениями и P и M_k .

Предоставление свободы системе после скрепления сформирует две волны:

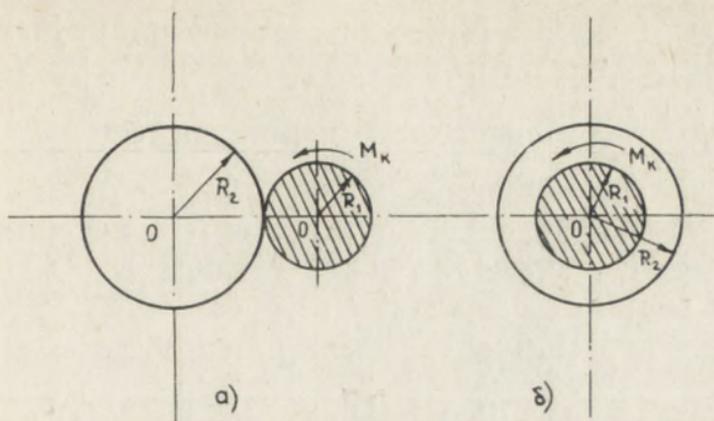


Рис. 1. Варианты сопряжения стержней:
а) внешнее сопряжение;
б) внутреннее сопряжение

$$G \frac{\partial_2 \varphi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{— кручения;} \quad (1)$$

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{— сжатия-растяжения,} \quad (2)$$

где G — модуль сдвига;

ρ — плотность материала системы;

E — модуль упругости системы.

В работе принимаются одинаковыми физико-механические характеристики для АС и ПС.

Запишем еще пару уравнений [5], используя для этого теоремы об изменении кинетического момента и количества движения системы:

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = GI_{p1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} L(t), \quad (3)$$

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = EF_1 \frac{\partial u}{\partial x} M(t), \quad (4)$$

где

$A = \rho x I_p$ — момент инерции системы;

GI_{p1} — жесткость на кручение АС;

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{M_k}{GI_{p1}}$ — угловая деформация АС;

$L(t)$ — ядро ползучести системы при кручении;
 EF_1 — жесткость при растяжении АС;

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{P}{EF} \quad \text{— линейная деформация АС;}$$

$M(t)$ — ядро ползучести системы при сжатии.

Совместное преобразование (1), (3) и (2), (4) приводят к системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{M_k}{GI_p x} L(t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{P}{EF x} M(t) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

или с использованием безразмерной переменной $\xi = x/l$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} &= \frac{M_k l}{\xi GI_p} L(t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} &= \frac{Pl}{\xi EF} M(t) \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

что после интегрирования дает

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{M_k l}{GI_p} L(t) \left[\xi \ln(C_1 \xi) - \frac{\xi}{C_1} \right] + C_2 \\ u &= \frac{Pl}{EF} M(t) \left[\xi \ln(C_3 \xi) - \frac{\xi}{C_3} \right] + C_4 \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Значения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 полностью определяются видом ядер ползучести и начальными и граничными условиями.

Для ядер ползучести экспоненциального типа

$$\left. \begin{aligned} L(t) &= \frac{G_\infty}{G} [1 - \exp(-\lambda t)] \\ M(t) &= \frac{E_\infty}{E} [1 - \exp(-\mu t)] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

при $\varphi|_{t=0} = 0$, $u|_{t=0} = 0$, получили $C_2 = C_4 = 0$; C_1 и C_3 определяются из условий

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi} = \frac{1}{2} = \frac{M_k l}{G I_p} L(0) \ln \frac{C_1}{2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\xi} = \frac{1}{2} = \frac{P l}{E F} M(0) \ln \frac{C_3}{2} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

откуда

$$\ln \frac{C_1}{2} = 0, \quad \ln \frac{C_3}{2} = 0,$$

т. е. $C_1 = C_3 = 2$

и система (6) запишется так:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{M_k l}{G I_p} L(t) \left[\xi \ln(2\xi) - \frac{\xi}{2} \right] \\ u &= \frac{P l}{E F} M(t) \left[\xi \ln(2\xi) - \frac{\xi}{2} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Таким образом, (10) представляют собой законы изменения $\varphi = \varphi(\xi, t)$ и $u = u(\xi, t)$, зависящие от момента кручения АС и растягивающего усилия АС. При этом критическое значение момента при закручивании АС компенсируется одновременным его растяжением.

Определим область критических значений M_k , P , а также предельных длин l_* .

Исследование будем проводить как для стержня АС — при растяжении-кручении, так и для системы — при сжатии-кручении.

Используем решения для консоли, данные в работе [3]:

$$\frac{\pi^2}{l_*^2} = \left(\frac{M_k}{E I_1} \right)^2 \mp 4 \frac{P}{E I_1}. \quad (11)$$

Для растянутого стержня АС получаем критическую длину

$$l_* = \frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{M_k}{E I_1} \right)^2 - 4 \frac{P}{E I_1}}}. \quad (12)$$

Критический момент для системы ($M_{S*\infty}$) вычисляется на основании (11) с учетом последействия

$$M_{S*\infty} = E_{\infty} I \sqrt{\frac{\pi^2}{l_*^2} - 4 \frac{P}{EI}} \quad (13)$$

Рассчитаем критические характеристики двухэлементной консольной системы сопряженных стержней для заданных $l_* = \pi/2$ и $\varphi = \pi$. Уравнения, удовлетворяющие критическим значениям M_K и P , на основании (11) представим в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{EI_1} &= \frac{1}{4} \left(\frac{M_K}{EI_1} \right)^2 - 1 \\ \frac{P}{EI} &= 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{M_S}{EI} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Очевидно, область устойчивых значений точек (P , M_K) удовлетворяет неравенствам

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4} \left(\frac{M_K}{EI_1} \right)^2 - \frac{P}{EI_1} &\leq 1 \\ \frac{1}{4} \left(\frac{M_S}{EI} \right)^2 + \frac{P}{EI} &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

На рис. 2 эта область обозначена двойной штриховкой.

Для расчета примем также $2R_1 = R_2 = 0,02$ м; приведем из [6] значения: $G = 1,3 \frac{МН}{М^2}$; $G_{\infty} = 0,73 \frac{МН}{М^2}$;

$$\begin{aligned} E &= 3,9 \frac{МН}{М^2}; E_{\infty} = 2,19 \frac{МН}{М^2}; L_{\infty} = M_{\infty} = \\ &= \frac{G_{\infty}}{G} = \frac{E_{\infty}}{E} = 0,5615 \end{aligned}$$

Производными этих данных будут:

$$I_{p1} = 1,57 \cdot 10^{-8} М^4; I_p = 25,13 \cdot 10^{-8} М^4; I_1 = 0,78 \cdot 10^{-8} М^4;$$

$$I = 12,56 \cdot 10^{-8} М^4; EI_1 = 3,06 \cdot 10^{-8} МНМ^2;$$

$$EI = 49,01 \cdot 10^{-8} МНМ^2.$$

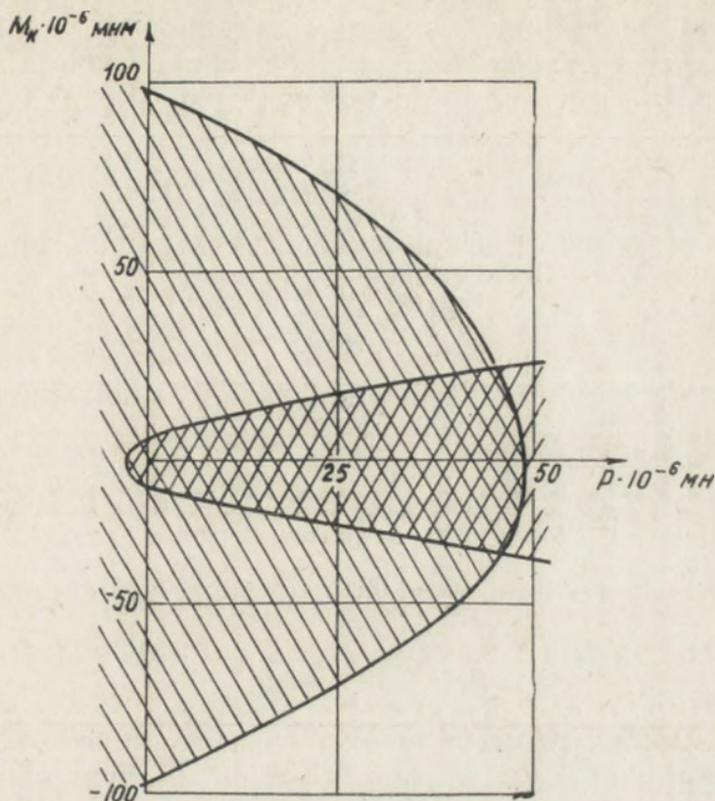


Рис. 2. Области устойчивости и неустойчивости сопряженных стержней

Для вычисления M_{k*} воспользуемся первым уравнением системы (10):

$$M_{k*} = - \frac{4 \varphi G I_p}{I_* L_\infty} = 4,65 \cdot 10^{-6} \text{ МНМ},$$

а для вычисления P_* — первым уравнением в (15):

$$P_* = E I_1 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{M_{k*}}{E I_1} \right)^2 - 1 \right] = 1,76 \cdot 10^{-4} \text{ МН}.$$

На рис. 2 точка А ($1,76 \cdot 10^{-4}$; $4,65 \cdot 10^{-6}$) лежит на параболе, уходящей ветвями в направлении положительных значений оси абсцисс. Отметим, кроме того, что она находится вне зоны второй параболы, что означает: данные значения P_* и M_{k*} выводят систему из устойчивости — формируется кольцо диаметром 0,5 м. В данном случае потеря устойчивости является положительным

фактором, предопределяющим заданное формообразование.

Проверим далее, удовлетворяет ли точка А условию прочности

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (16)$$

Проверочный расчет осуществим для АС, приняв

$$[\sigma] = 6 \frac{\text{МН}}{\text{М}^2}.$$

Преобразовав (16) и подставив значения P_* , M_{k*} , получим:

$$\sigma_p = \sqrt{\left(\frac{P_*}{F}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{k*} R_1}{I_{p1}}\right)^2} = 5,18 < 6 \frac{\text{МН}}{\text{М}^2}.$$

Вычислим также по (10) перемещение системы:

$$u = - \frac{P_* l_*}{4EF} M_\infty = - 7,95 \cdot 10^{-3} \text{ М}.$$

Таким образом, получены связывающие силовые и деформационные характеристики преднапряженного вязко-упругого резинового стержня, ответственного за формообразование, и системы сопряженных резиновых стержней.

Получены критерии устойчивости для сопряженных стержней, определены области устойчивости и неустойчивости системы для конкретного случая, причем неустойчивость считалась положительным фактором, предопределяющим заданное формообразование.

Результаты работы применялись при проектировании спиральных кабелей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р ж а н и ц ы н А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. ГИТТЛ, 1949, с. 252.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Наука, ГИФМЛ, 1966, с. 752.
3. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. ГИФМЛ, 1963, с. 879.
4. Мусалимов В. М., Соханев Б. В., Хлупин А. В., Кулемзин В. Г., Никольская М. М., Дворников В. А., Шалыгин И. И., Мокряк С. Я. Способ изготовления спи-

рального кабеля. Авторское свидетельство № 610181. Бюллетень № 21, 1978.

5. Musalimov V. M. The programmed shaping of some constructions made of elastomers. A preprint of the paper for IRC, Italy, 1979, s. 98.

6. Потураев В. И., Дырда В. И. Резиновые детали машин. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1977, 216 с.

К ВЫБОРУ РЕЖИМОВ ИСПЫТАНИЙ КАБЕЛЕЙ НА ДИНАМИЧЕСКОМ СТЕНДЕ

В. М. МУСАЛИМОВ, Б. В. СОХАНЕВ, А. С. ПЛОТНИКОВ

Испытания кабельных изделий проводятся на специальных установках и в зависимости от поставленных целей обычно подразделяются на лабораторные на малых образцах; лабораторные на экспериментальных образцах; опытно-экспериментальные.

Второй тип испытаний позволяет широко варьировать режимы работ установок. К этому классу относится стенд «Локомотив», представленный на рис. 1.

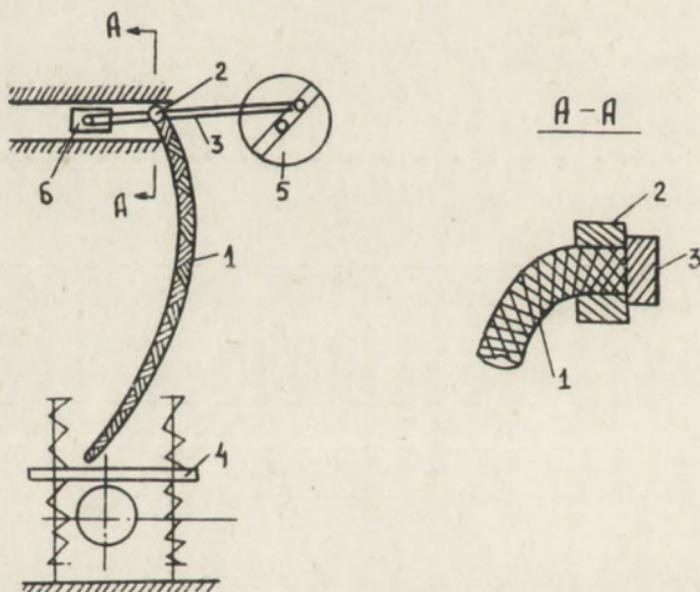


Рис. 1. Кинематическая схема стенда «Локомотив»

Образец кабеля 1 верхним концом крепится к стакану жесткого крепления 2 и шатуну 3 шатунно-кривошипного механизма. Нижний конец крепится к вибропло-

щадке 4. При работе стенда верхний конец кабеля совершает плоское движение (поступательное плюс вращательное), причем скорость движения регулируется скоростью вращения планшайбы 5.

Таким образом, на вход подаются вариации скорости v и частоты ω . В табл. 1, 2, 3, 4 помещены резуль-

Таблица 1

КПСРМ-ХЛ — 16×2,5 мм²

Зажимы	Повивы	Циклы — разрушения, +20° С			
Верхний	II (наружн.)	250000	8, 5, 14, 2, 14, 3, 10 — 82% 0	150000	0
	I (внутр.)				
Петля	II	250000	0	150000	0
	I				
Нижний	II	250000	100%	150000	100
	I				

Таблица 2

КПСРМ-ХЛ — 37×2,5 мм²

Зажимы	Повивы	Циклы — разрушения, +20° С			
Верхний	I (внутр.)	100000	2, 8, 2, 1, 2 — 0,8%	100000	
	II III (наружн.)				
Петля	I	100000	1, 4, 49, 13, 4, 2 — 4%	100000	
	II III				
Нижний	I	100000	32, 49, 5, 49, 49, 49, 2, 1, 1, 21, 0, 0, 0, 16, 11, 0, 2, 0, 0 — 13%	100000	
	II III				
В	III	100000	11 — 0,6%	100000	
П	III	100000	0	100000	
Н	III	100000	3, 13, 19, 2 — 2%	100000	
В	III	100000	16, 23, 49, 9, 49, 15, 17, 23 — 11,1%	100000	
П	III	100000	2	100000	
Н	III	100000	8, 0, 0, 0, 10, 7, 6, 1, 32 — 1,8%	100000	

Зажимы	Повивы	Циклы — разрушения, +20° С				
В	III	100000	49, 49, 49, 49, 2, 49 — 13%		100000	1, 5, 7, 3 0 3
П	III		1, 2, 3			
Н	III		6, 45, 1, 1, 49, 42, 49 — 13%			
В	III	100000	1		100000	1, 5, 7, 3 0 3
П	III		1			
Н	III		49, 49, 2, 49, 4, 35, 49, 49, 49, 36 — 20,5%			

Таблица 3

ПП СРВМ-ХЛ — 120 мм²

Зажимы	Повивы	Циклы — разрушения, +20° С							
В	I	60000	8%	60000	74%	60000	13%	60000	30
	II								
П	I	60000	50%	60000	0%	60000	0	60000	0
	II								
Н	I	60000	30	60000	100%	60000	47%	60000	16%
	II								

таты испытаний нескольких типов кабелей при температуре 20° С. Анализ результатов показывает, что процент полного разрушения для кабеля КПСРМ-ХЛ, 16×2,5 мм² на нижнем конце достигает 32% при 250 тыс. циклах. Кроме того, разброс данных разрушения — рис. 2 — для 50 тыс. циклов и стабильность результатов для 30 тыс. циклов рис. 3 дает основание не рекомендовать реализацию 60 тыс. циклов.

В табл. 5 приведены конструктивные данные исследованных кабелей, а также некоторые механические характеристики материала элементов кабеля. Соответствующие кабелям элементы поясняются рис. 4, 5.

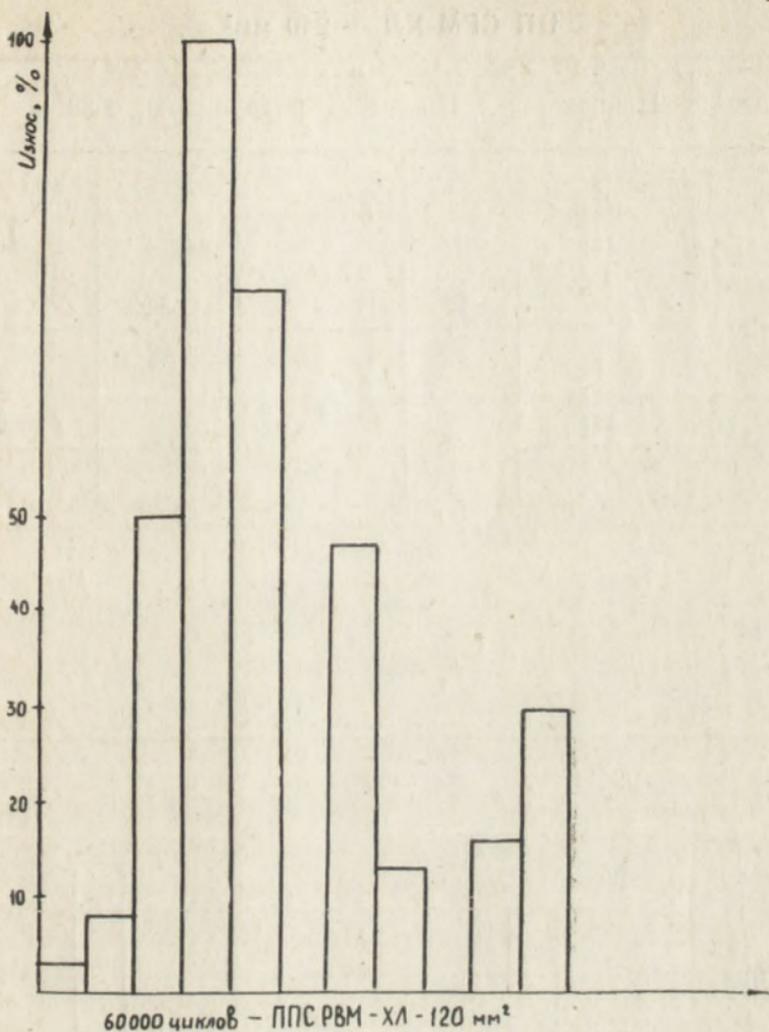


Рис. 2. Степень разрушения образцов кабеля ППСРВМ-ХЛ — 120 мм² при реализации 60 тыс. циклов

В табл. 6 представлены результаты исследования жесткости кабеля КПСРМ-ХЛ, 16×2,5 мм². На данном стенде нет возможности оперативно установить корреляцию между разрушающими напряжениями и жесткостями. Это возможно реализовать на стенде «Волна» при регистрации усилий на оси колес или на спицах, несущих ролики с одновременным сопоставлением с жесткостями, полученными на приборе по определению жесткости гибких кабелей [1].

ПП СРМ-ХЛ — 240 мм²

Зажимы	Повивы	Циклы — разрушения, +20° С			
В	I II III IV	30000	56	15,9%	40
			61		212
Н	I II III IV	30000	95	23,9%	32
			67		54
					23—31%

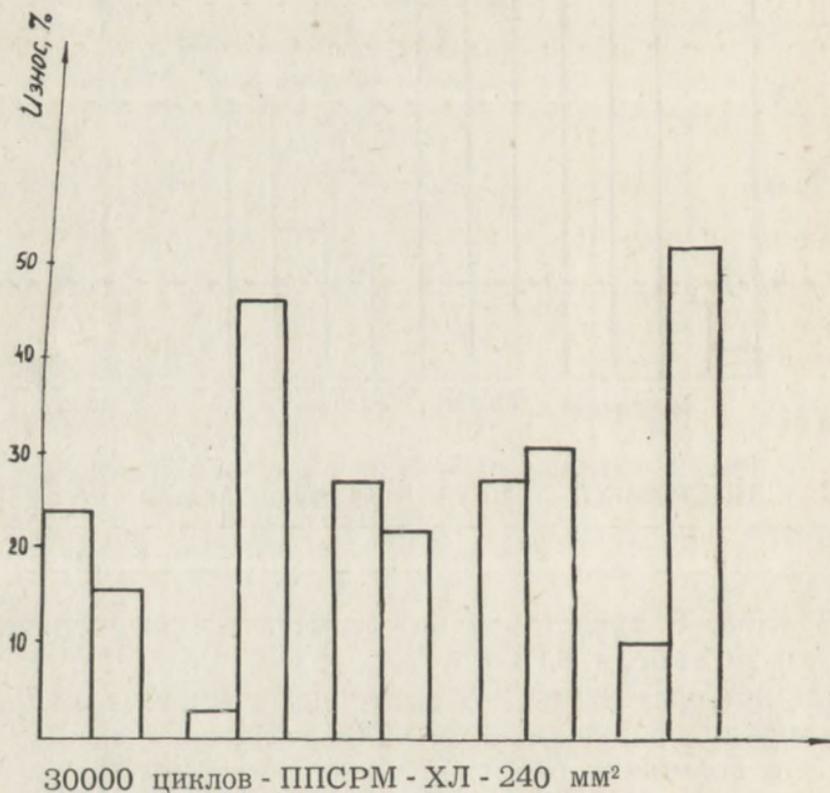


Рис. 3. Степень разрушения образцов кабеля ППСРМ-ХЛ — 240 мм² при реализации 30 тыс. циклов

Таблица 4

ПП СРМ-ХЛ—240 мм²

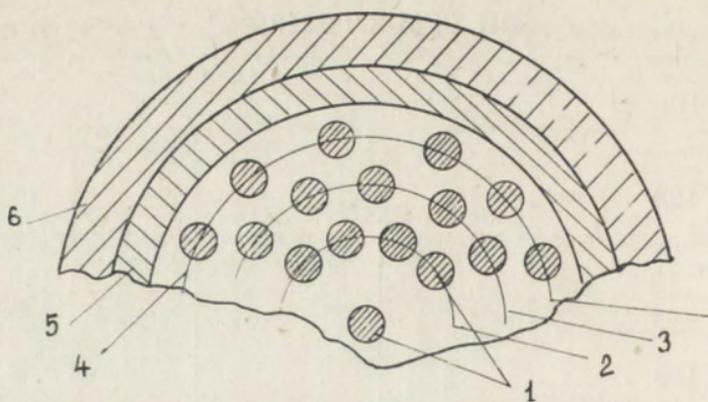
Циклы — разрушения, +20° С

30000	128 22%	30000	11 111 26,8%	30000	87 170 52,6%
	18 13		52 22		145
30000	108 27,3%	30000	18 145 30,6	30000	2 10,4%
	59 22		28 33		38 33

Таблица 5

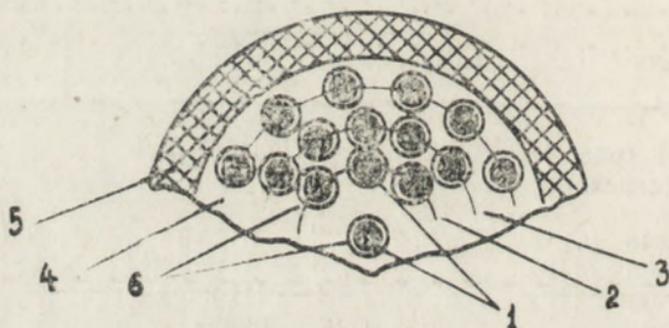
Тип кабеля	Сечение	Тип кабеля	Сечение
КПСРМ-ХЛ (рис. 4)	16×2,5 мм ²	ППСР ВМ-ХЛ	120 мм ²
1 — медь (стренг)	(табл. 1),	(рис. 5)	(табл. 3),
49 проводн.	37×2,5 мм ²	1 — медь	ППСРМ-ХЛ
2 — I-й повив (6)	(табл. 2)	2 — I повив	240 мм ²
3 — II-й повив (12)		3 — II повив	
4 — III-й повив (18)		4 — III наружный повив	
5 — оболочка резина, 45% нагрузка, морозостойкость 60°, прочность при разрыве, 7, 34 МПа		5 — оболочка.	
6 — изоляция жил, резина, 40% каучука, морозостойкость —55°		6 — оболочка, пластикат, разрушающ. напряжение при растяжении кг/см ² — 120, сопротивление кг/см — 40 т-ра хрупкос. —60° С	
		ППСРМ-ХЛ; негорючая	

Стенд «Волна» предназначен для ускоренных испытаний гибких кабелей на прочность и износ. Подобная схема испытаний реализует реальные условия работы кабелей, когда на деформации кабелей накладываются чисто адгезионные процессы, приводящие к износу, на-



ППС РВМ - ХЛ

Рис. 4. Сечение кабеля КПСРМ-ХЛ



КП СРМ - ХЛ

Рис. 5. Сечение кабеля ППСРВМ-ХЛ

Таблица 6

Сводка жесткостных характеристик

Тип кабеля и особенности	Чистый изгиб		Сдвиг		Кручение в закрутку		Кручение в раскрутку	
	нагр.	разгр.	нагр.	разгр.	нагр.	разгр.	нагр.	разгр.
	КПСРМ-ХЛ 16×2,5 с обмоткой лентой в раскрутку	508	815	521	579	336	372	424
КПСРМ-ХЛ 37×1,5	687	692	603	613	855	525	451	800

пример, за счет скатывания поверхностей соприкосновения резиновых оболочек кабелей с направляющими роликами.

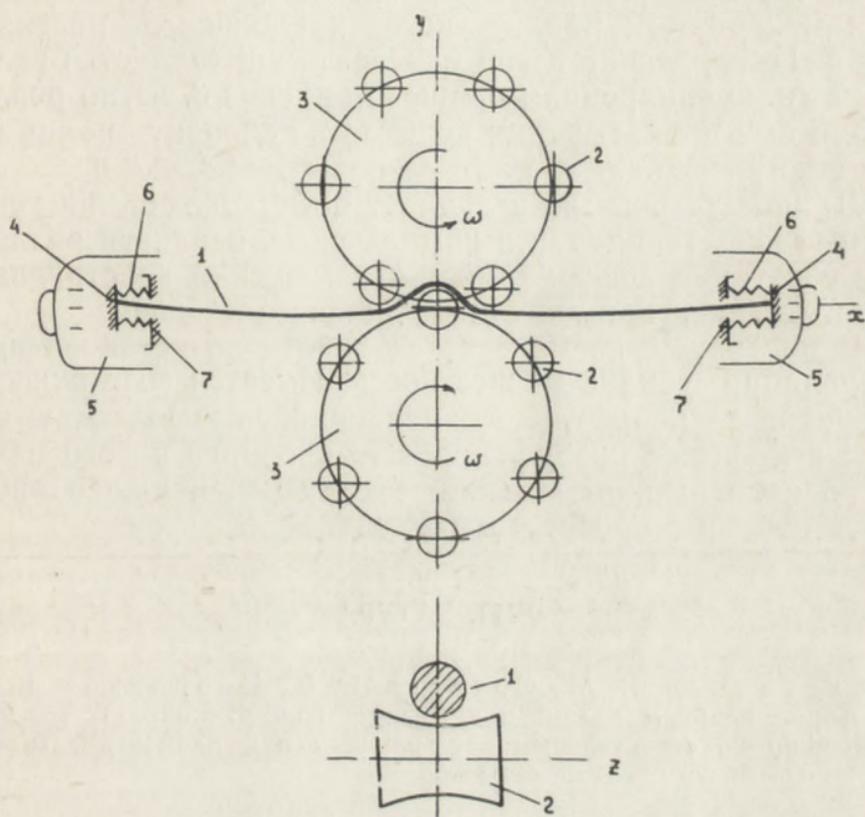


Рис. 6. Кинематическая схема стенда «Волга»

На рис. 6 приводится кинематическая схема стенда «Волна». Кабель 1 помещается между роликами 2 двух дисков 3, находящихся по обе стороны кабеля. Свободные концы кабеля крепятся в шпинделе 4 двигателей 5. Шпиндели через механизм циклического продольного растяжения 6 связаны с основанием 7 электродвигателей.

Работа устройства осуществляется следующим образом. Шпиндели 4 при работе двигателей 5 осуществляют вращение гибкого кабеля 1, причем вращение роторов двигателей предусматривается как в одном направлении, чтобы при одновременном вращении дисков 3 с любым законом изменения угловой скорости ω менять плоскость изгиба, так и в противоположном, чтобы реа-

лизовать кручение. Предусматривается также дрейф вращения ротора одного двигателя относительно вращения ротора другого, чтобы осуществлять кручение и менять плоскость изгиба. Регулирование натяга, а также циклического изменения растягивающей нагрузки осуществляется механизмом циклического продольного растяжения 6. Циклический изгиб кабелей осуществляется роликами 2 при синхронном вращении дисков 3, изгиб реализуется при прокатывании роликов по образцу «ролик гонит волну изгиба».

Данное устройство позволяет осуществлять как ускоренные испытания, так и комплексные, реализуя различные сочетания деформаций — перемещений конструкции, а также износ при контакте роликов с кабелем.

В настоящее время ведется работа по установлению корреляции: усилие — жесткость. Имеется возможность слежения за непрерывно изменяющейся жесткостью кабеля в процессе разрушения. Это прообраз нового метода по непрерывному механическому оцениванию прочности кабеля в процессе наработки.

ЛИТЕРАТУРА

Мусалимов В. М., Соханев Б. В., Дворников В. А. Некоторые вопросы механики кабельных конструкций. — В сб.: Исследования по строительным конструкциям и фундаментам. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1979, с. 58—66.

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ МОДЕЛИ ГРУНТОВОГО ОСНОВАНИЯ

С. С. ТИМОФЕЕВ

Многообразие механических свойств и физического состояния грунтов, многофакторность и сложность их влияния на поведение оснований под нагрузкой обусловили исключительные трудности в разработке и несовершенство современных способов расчета грунтовых оснований. Несущая способность оснований фундаментов, получаемая расчетом, во многих случаях оказывается значительно, нередко в несколько раз, меньше установленной опытом. Совершенствование методов расчета оснований в настоящее время является одним из необходимых условий развития технического прогресса и снижения затрат в фундаментостроении.

Руководитель советской школы механики грунтов и фундаментостроения член-корреспондент АН СССР Н. А. Цытович [1], [2] выдвинул ряд методологических положений о недостатках в современных методах расчета оснований: о недостаточной исследованности физических процессов при нарушении прочности грунтов, пределов применимости теории прочности Мора и кинематики деформирования оснований; о недостаточно точной оценке граничных условий, в частности глубины заложения (не заменяя ее пригрузкой), формы упругого ядра под фундаментами, линий скольжения в массиве выше подошвы, необходимости удовлетворения требованию статической и кинематической единственности решений и о важной роли структурной прочности грунта, не учитываемой в расчетах.

Приведенные положения указывают на далекое расхождение расчетной схемы Л. Прандтля (1921 г.), как современной теоретической базы, с действительным ме-

ханизмом распределения напряжений и деформирования оснований.

Задача настоящей работы состоит в установлении физически обоснованных предпосылок для разработки расчетной схемы и упрощенных инженерных способов расчета оснований с учетом влияния механических свойств и физического состояния реального грунта, обеспечивающих приближение результатов теоретических расчетов к опытным данным и точность расчетов, удовлетворяющую экономическим требованиям инженерной практики.

Накопившиеся к настоящему времени опытные данные, включая полученные автором, показывают, что для удовлетворяющего практику прогноза поведения оснований в широком диапазоне нагружения и деформирования необходимо создание модели грунтового основания, соответствующей постановке этого вопроса С. С. Вяловым [3], отражающей влияние механических свойств и физического состояния реального грунта: распределительной способности, уплотняемости, пластичности, внутреннего трения, структурной прочности, плотности, нелинейной деформируемости, изменения показателей характеристик некоторых из них под нагрузкой, дилатансии и наложения фаз деформирования.

Современный уровень развития механики грунтов не допускает возможности отдельного аналитического учета вклада множества сложных факторов, одновременно оказывающих влияние на напряженно-деформированное состояние и в конечном счете на несущую способность оснований. Устранить затруднения возможно путем разработки способов получения и использования в расчетах объективных обобщенных характеристик сопротивления оснований.

Очевидно, что это невозможно без установления качественного характера действительных механических процессов, происходящих в основаниях под местной нагрузкой, в частности форм образующегося под фундаментами упругого ядра.

До настоящего времени опыты по изучению деформаций оснований и уточнение параметров упругого ядра, называемого иногда уплотненным, жестким и т. п., проводятся на теоретической базе априорной расчетной схемы Л. Прандтля. В опытах устанавливается зависимость

относительных размеров области пластических деформаций и элементов поперечного сечения упругого ядра заранее заданной треугольной формы от угла внутреннего трения грунта.

Физически наиболее четко упругое ядро определил Н. А. Цытович, назвав его «ядром ограниченных смещений частиц грунта».

В исследованиях автор настоящей работы опирается на тезис, обоснованный и сформулированный А. Н. Зелениным [4]: «...основой и золотым фондом теории является вскрытая научным экспериментом физическая сущность изучаемого процесса, на базе которой возможно построение правильной гипотезы, исходной для математического обобщения», отвечающий фундаментальному положению, что единственным критерием теории является практика, опыт.

В публикациях некоторых исследователей содержатся фотографии или рисунки, показывающие выпуклую, плавно очерченную форму упругого ядра, в частности у В. Г. Березанцева [5], М. Ш. Минцковского [6], Ю. Биареза [2, рис. 5, а], А. Н. Зеленина и др. Наиболее систематические исследования упругого ядра провел А. Н. Зеленин, получивший такую форму и установивший, что «во всех случаях, независимо от длины резов, уплотненное ядро обладало высокой устойчивостью на профиле. Эта устойчивость проявлялась в равной степени для всех значений угла заострения, при которых наблюдалось образование уплотненного ядра. Ни длина пути резания, ни твердость грунта не влияли на устойчивость ядра».

Выявить механизм образования напряженного состояния оснований, вызывающий выпуклую, плавно очерченную форму упругого ядра, попыток не предпринималось. В конечном счете полукруговая форма интерпретировалась как треугольная или игнорировалась и в анализе напряженного состояния не учитывалась. Все возвращалось к расчетной схеме Л. Прандтля.

Автором настоящей работы поставлено множество опытов по исследованию деформаций грунтовых оснований. Получены новые важные данные. В частности, наблюдениями, фотографированием и киносъемкой установлено, что упругое ядро, образуемое под подошвами моделей жестких фундаментов, кругового в плане

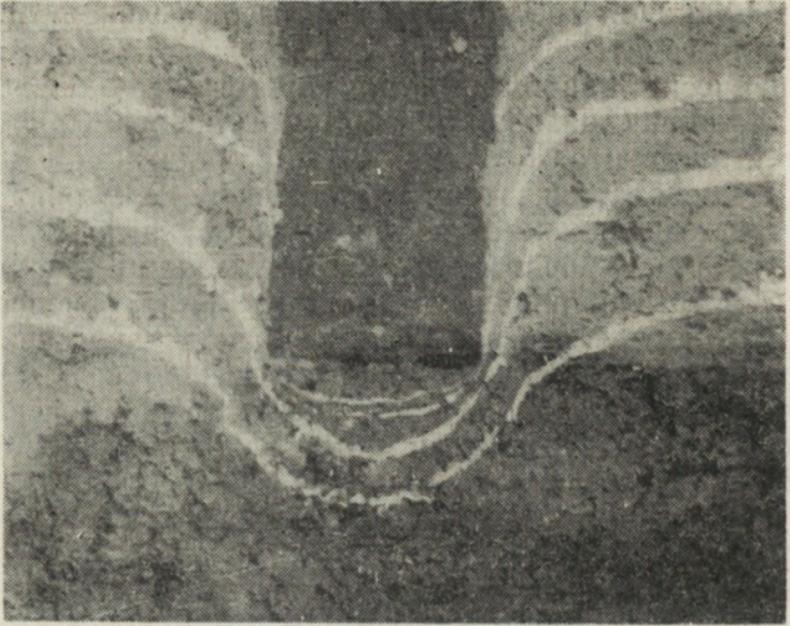


Рис. 1

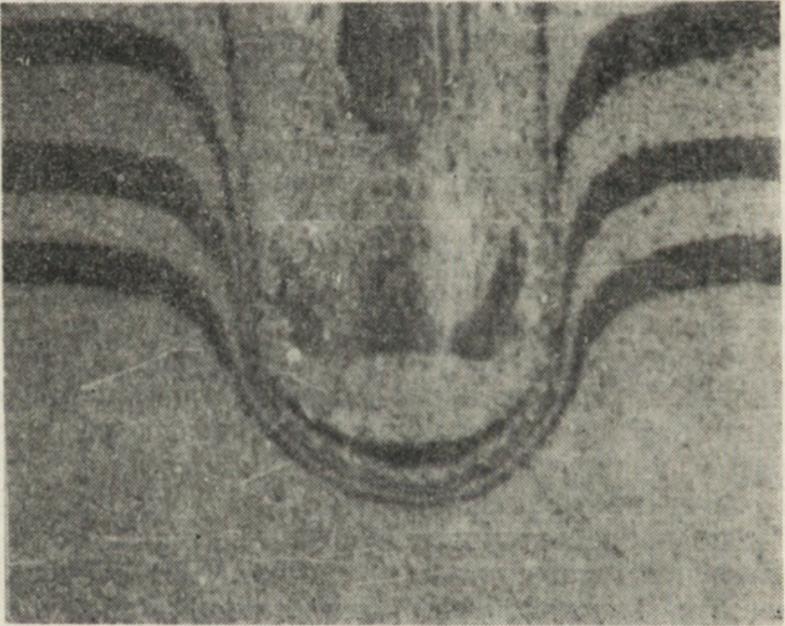


Рис. 2

(рис. 1, в суглинке), и в условиях плоской задачи (на рис. 2 — то же, в песке) имеет поперечное сечение полукруговой формы независимо от показателей характеристик механических свойств и физического состояния грунта, развития фаз деформирования, размеров, скорости, глубины и способа внедрения моделей в основание — с поверхности или предварительно заглубленных, статическим вдавливанием или забивкой. Признаков сдвига грунта по подошвам во всех без исключения опытах не обнаружено. Результаты исследований частично опубликованы в работах [7] и [8].

Наложение траекторий перемещения частиц грунта, полученных фотографированием по методу В. И. Курдюмова М. В. Малышевым [9], частиц грунта и специально заложенных марок на фотографиях, полученных нами, и модельного материала в опыте Ю. Биареца показывает два семейства активных поверхностей скольжения: первое образуется обтеканием пластическим грунтом упругого ядра снизу в стороны и вверх, а второе вызывается уплотнением и вытеснением грунта из-под подошвы в радиальных направлениях.

Н. В. Орнатский [10] и С. С. Вялов показали, что однородный грунт как сыпучая среда с отсутствующими или относительно слабыми межчастичными связями позволяет учесть радиально-лучевое распределение давления из-под местной нагрузки. Опытные данные о распределении плотности грунта ниже уровня конца тупой сваи, полученные В. И. Финаевым и В. Д. Токаревым [11], наглядно подтверждают радиальное распределение средних нормальных напряжений.

Плоская задача

Расчетная схема основания приведена на рис. 3.

Уравнения равновесия в полярных координатах для плоской задачи:

$$\frac{\partial \sigma_R}{\partial R} - \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_R - \sigma_\theta}{R} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial R} - \frac{2 \tau_{R\theta}}{R} = 0. \quad (2)$$

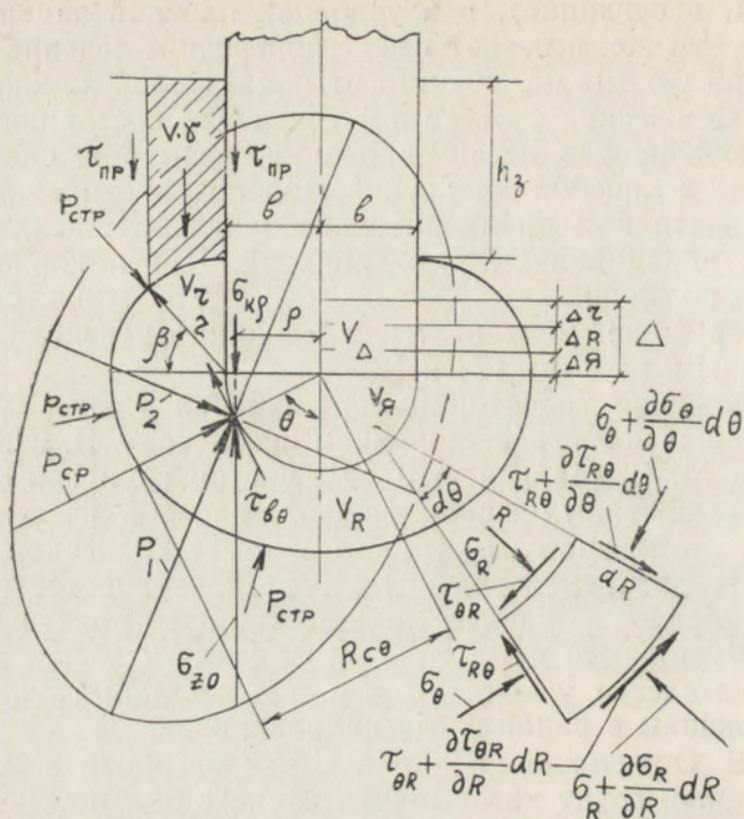


Рис. 3

Обозначим

$$\sigma_{\theta} = \psi \sigma_R, \quad \tau_{R\theta} = f \cdot \psi \cdot \sigma_R, \quad \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial \theta} = f \cdot \psi \cdot \frac{\partial \sigma_R}{\partial \theta};$$

$$\frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial R} = f \cdot \frac{\partial \sigma_R}{\partial R}; \quad \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = \psi \frac{\partial \sigma_R}{\partial \theta},$$

где ψ и f коэффициенты, зависящие от R и θ .

В результате соответствующих замен, совместного решения уравнений и интегрирования, получаем

$$\sigma_R = \frac{C}{R^{\nu_{\theta}}}, \quad (3)$$

где C — постоянная интегрирования;

$$v_{\theta} = \frac{1 - (1 + 2f^2)\psi}{1 - f^2}. \quad (4)$$

Постоянная интегрирования C определяется из граничных условий.

Начальное сопротивление грунта уплотнению на границе области деформаций зависит только от величины среднего нормального напряжения и в рассматриваемых случаях может быть интерпретировано как структурная прочность $P_{\text{стр}}$ независимо от наличия структурных связей.

Если опытную кривую сжимаемости грунта аппроксимировать логарифмическим уравнением, приведенным к виду изменения пористости

$$n_0 - n_i = m_{\text{ак}} \ln \frac{\sigma_i}{P_{\text{стр}}}, \quad (5)$$

начальное сопротивление уплотнению можно вычислить по результатам компрессионных испытаний:

$$P_{\text{стр}} = \sigma_i e^{-\frac{n_0 - n_i}{m_{\text{ак}}}}, \quad (6)$$

где

n_0 — начальная пористость грунта;

n_i и σ_i — соответственно пористость и среднее нормальное напряжение, до которых доведены испытания;

m — относительный объем частиц в единице объема грунта при начальной пористости;

e — основание натуральных логарифмов;

$a_{\text{к}}$ — коэффициент полной компрессии.

Из условий на границе области деформаций

$$C = P_{\text{стр}} \cdot R_{C\theta}^{v_{\theta}}, \quad (7)$$

в области деформаций ниже уровня подошвы фундамента

$$\sigma^{R\theta} = P_{\text{стр}} \left(\frac{R_{C\theta}}{R} \right)^{v_{\theta}}, \quad (8)$$

на поверхности упругого ядра

$$\sigma_{b\theta} = P_{\text{стр}} \cdot \left(\frac{R_{c\theta}}{b} \right)^{\nu_{\theta}}. \quad (9)$$

Подстановкой в выражение (4) известных реальных значений показателей характеристик механических свойств грунта, в частности $\psi=1$ и $f=0,5$, в данном случае получаем величину $\nu_{\theta} < 0$, что противоречит здравому смыслу. Это естественно, так как уравнения статического равновесия не учитывают сопротивления формоизменению.

Сопротивление формоизменению возможно учесть преобразованием уравнений равновесия.

Замена на рис. 3 σ_{θ} результирующими нормальных напряжений $\Sigma = \sigma_{\theta} - \sigma_{\theta}'$, где σ_{θ}' , учитывает предельное сопротивление формоизменению сил внутреннего трения и связности, придает преобразованному уравнению (1) вид

$$\frac{\partial \sigma_R}{\partial R} - \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_R - \Sigma_{\theta}}{R} = 0,$$

тогда с учетом уравнения (2)

$$\nu = \frac{1 + \mu - \psi}{1 - f^2},$$

где μ — коэффициент пропорциональности: $\sigma_{\theta}' = \mu \sigma_R$.

Таким образом, показатель ν_{θ} обобщает влияние на сопротивление основания деформированию:

- а) геометрического порядка задачи;
- б) сложной совокупности проявления механических свойств и физического состояния грунта, одновременности их реализации и перемещения частиц в соседние лучи за счет сдвиговых деформаций.

Численные значения показателей ν_{θ} как средних для радиусов области деформаций могут быть установлены по данным лабораторных исследований и полевых испытаний грунтов штампами, оснащенными датчиками контактных напряжений.

Нахождение величин ν_{θ} , отражающих указанные влияния в зависимости от осадки штампа Δ и эпюры контактных напряжений как функции угла Θ , вводится в программу для решения на ЭВМ задачи о распреде-

лении напряжений, форм и размеров областей деформаций ниже и выше подошвы и требуемого заглубления фундамента из условия устойчивости основания с использованием уравнения баланса объема частиц грунта в элементарных объемах осадки, упругого ядра и областей деформаций ниже и выше уровня подошвы.

Важнейшее значение для разработки модели грунтового основания имеет выяснение механизма распределения напряжений, вызывающего полукруговую форму упругого ядра.

Сдвиг в упругом грунте, как и в других твердых телах, происходит по площадкам максимальных касательных напряжений. Физика сдвига позволяет привлечь следующие зависимости между напряжениями:

$$\tau_{R\theta} = f \cdot \sigma_{\theta}; \quad (a_1)$$

$$\tau_{\theta R} = f \cdot \sigma_R, \quad (a_2)$$

т. е. на поверхности упругого ядра

$$\sigma_{\theta} = \sigma_R$$

и

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P_1 + P_2}{2}. \quad (10)$$

Поверхность упругого ядра формируется под воздействием максимальных сдвигающих напряжений

$$\tau_{\max} \frac{P_1 - P_2}{2},$$

действующих на площадках, ориентированных под углами 45° к главным направлениям.

В соответствии с приведенными зависимостями между напряжениями одни из этих площадок параллельны радиальным направлениям и являются «пассивными», так как в упругом ядре, вследствие симметрии нагружения, поверхностей сдвига нет.

Другие площадки, перпендикулярные радиальным, образуют поверхности сдвига, ограничивающие упругое ядро. Поверхности сдвига зарождаются под краями подошвы фундамента и развиваются по кривой, ортогональной радиальным направлениям, являющейся геометрическим местом точек максимальных тангенциальных касательных напряжений.

Таким образом, упругое ядро имеет полукруговое поперечное сечение с радиусом $R = b$.

Этот вывод согласуется с приведенными В. А. Флориным [12] результатами некоторых зарубежных опытов загрузки больших, ограниченных горизонтальной поверхностью массивов, сложенных глинистыми и песчаными грунтами. При развитии пластических деформаций, вызывающих боковые смещения грунта и силы трения по вертикальным плоскостям, коэффициенты бокового давления в этих грунтах оказались близкими к единице.

При деформациях сдвига гидростатическое напряженное состояние существовать не может. Очевидно, что в опытах зарегистрированы средние нормальные напряжения

$$P_{\text{ср}} = \frac{P_1 + P_2}{2},$$

действующие на взаимно перпендикулярных площадках максимальных сдвигающих напряжений, ориентированных под углами 45° к главным направлениям.

Площадки скольжения на поверхности упругого ядра перпендикулярны и параллельны радиальным направлениям. Следовательно, образуются два семейства поверхностей скольжения, получаемых в опытах, как показано ранее. Коэффициент бокового давления относительно радиальных направлений $\psi = 1$. Результаты опытов, приведенные В. А. Флориным, удовлетворяют теории прочности Кулона—Мора, условию ортогональности площадок сдвига на поверхности упругого ядра радиальным направлениям, т. е. полукруговой форме поперечного сечения упругого ядра и, следовательно, статической и кинематической единственности. Последнее в дальнейшем будет показано более обстоятельно.

Из условия пластичности

$$\sin \varphi = \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2 + 2P_e} \quad (11)$$

и выражения (10) следует (рис. 3):

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \sigma_{b0} (1 + \sin \varphi) + P_e \cdot \sin \varphi \\ P_2 &= \sigma_{b0} (1 - \sin \varphi) - P_e \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Изменение радиальных размеров области деформаций вследствие развития дилатансии незначительно, влияние дилатансии на величину действующих напряжений, как вытекает из выражения (9), несущественно.

Таким образом, при разработке практических способов расчета оснований влияние собственного веса грунта и дилатансии учитывать не следует.

Закон концентрации напряжений (8) в упругом ядре не выполняется, так как давление на основание передается всей площадью подошвы. Из условий равновесия упругого ядра контактное напряжение $\sigma_{кр}$ при $\rho = b \cdot \sin \theta$ равно нормальному напряжению на поверхности упругого ядра, действующему перпендикулярно подошве на том же ρ :

$$\sigma_{z\theta} = \sigma_{b\theta} (1 + \sin \varphi \cdot \sin \theta) + c \cdot \sin \theta. \quad (13)$$

Физический смысл этого выражения состоит в том, что полукруговая форма упругого ядра вызывает преобразование действующих по его поверхности сдвигающих напряжений в нормальные.

Касательные напряжения в упругом ядре не превышают величины

$$\tau = \frac{1 - \xi}{2} (\sigma_{b\theta} \cdot \sin \varphi + c) \sin \theta, \quad (14)$$

т. е. всегда меньше напряжений сдвига по его полукруговой поверхности

$$\tau_{b\theta} = \sigma_{b\theta} \cdot \sin \varphi + c. \quad (15)$$

Так раскрывается физическая сущность устойчивости полукруговой формы упругого ядра, наблюдавшейся А. Н. Зелениным и в наших опытах.

Ориентация главных напряжений в упругом ядре ($\sigma_1 \perp$ подошве) объясняет обнаруженное во всех опытах автора отсутствие сдвигов по подошвам моделей фундаментов.

Изменения эпюр контактных напряжений, соответствующие выражению (13)

$$\sigma_{кр} = \sigma_{b\theta} (1 + \sin \varphi \cdot \sin \theta) + c \cdot \sin \theta, \quad (16)$$

отражают развитие механических процессов во всех фазах деформирования оснований, что подтверждается результатами опытов Э. В. Ариной [13], полученными в

условиях осевой симметрии, более непосредственно относящимися к рассматриваемой в дальнейшем осесимметричной задаче.

Выражения с (7) по (16) описывают распределение напряжений в уровне и ниже подошвы заглубленного фундамента. Для разработки модели грунтового основания необходимо установить распределение напряжений также в массиве выше подошвы.

Радиально-лучевое распределение напряжений выше уровня подошвы относительно края фундамента позволяет переписать выражение (7) как

$$\sigma_b = P_{\text{стр}} \left(\frac{r_\theta + b}{b} \right)^\nu, \quad (17)$$

где σ_b — среднее нормальное напряжение на краю подошвы;

$$r_\theta = R_{c\theta} - b \text{ при } \theta = \frac{\pi}{2},$$

следовательно, распределение средних нормальных напряжений в радиальных направлениях соответствует выражению

$$\sigma_r = P_{\text{стр}} \left(\frac{r_\theta + b}{r + b} \right)^\nu. \quad (18)$$

Осадка фундамента Δ вследствие уплотнения грунта в основании выражается через уменьшение объема пор ниже и выше подошвы с использованием уравнения баланса объема твердых частиц в осадке, упругом ядре и областях деформаций ниже и выше подошвы фундамента или

$$\Delta = \Delta_{\text{я}} + \Delta_R + \Delta_r, \quad (19)$$

то есть

$$\Delta = \frac{1}{2b(1 - n_0)} \left[\int_{V_{\text{я}}} (n_0 - n_{\text{срЯ}}) dV_{\text{я}} + \int_{V_R} (n_0 - n_{\text{срR}}) dV_R + \int_{V_r} (n_0 - n_{\text{срr}}) dV_r \right], \quad (20)$$

где $n_{\text{ср}}$ означает среднюю пористость по объемам, а индексы я, R и r — соответствующие объемы.

Заглубление фундамента из условия предельного состояния по устойчивости основания с учетом сопротивления боковой поверхности сдвигу по грунту в первом приближении определяется из уравнения

$$(P_{\text{стр}} - P_e) \cdot \cos \beta = \frac{V\gamma}{r_0} + \left[\frac{2h_3}{r_0} - (1 - \sin \beta) \right] \cdot \tau_{\text{пр}} \quad (21)$$

где $\tau_{\text{пр}}$ — предельное сопротивление грунта сдвигу.

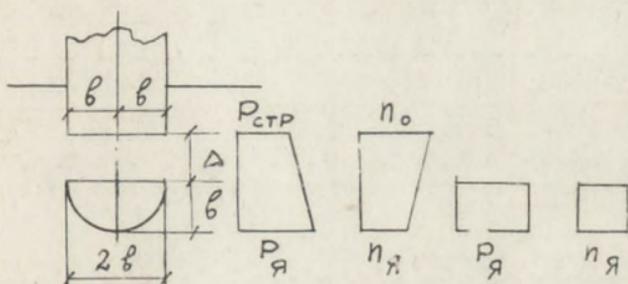


Рис. 4

Относительная осадка в момент завершения образования упругого ядра определяется в соответствии с рис. 4 из условия возрастания структурной прочности по глубине грунтового массива за счет уплотнения под воздействием собственного веса.

$$P_{\text{я}} = P_{\text{стр}} + \gamma (b + \Delta); \quad (a_1)$$

$$n_{\text{я}} = n_0 - a_k \ln \frac{P_{\text{я}}}{P_{\text{стр}}}; \quad (a_2)$$

$$n_{\text{ср}} = \frac{n_0 + n_{\text{я}}}{2}; \quad (a_3)$$

$$(1 - n_{\text{ср}}) (b + \Delta) = (1 - n_{\text{я}}) b; \quad (a_4)$$

$$\Delta = b \frac{a_k \ln \frac{P_{\text{я}}}{P_{\text{стр}}}}{2 + a_k \ln \frac{P_{\text{я}}}{P_{\text{стр}}}}. \quad (a_5)$$

С достаточной точностью можно принять:

$$\Delta \cong \frac{b}{2} a_k \ln \frac{P_{\text{стр}} + \gamma b}{P_{\text{стр}}}, \quad (a_6)$$

Осесимметричная задача

Расчетная схема основания жесткого кругового фундамента приведена на рис. 5.

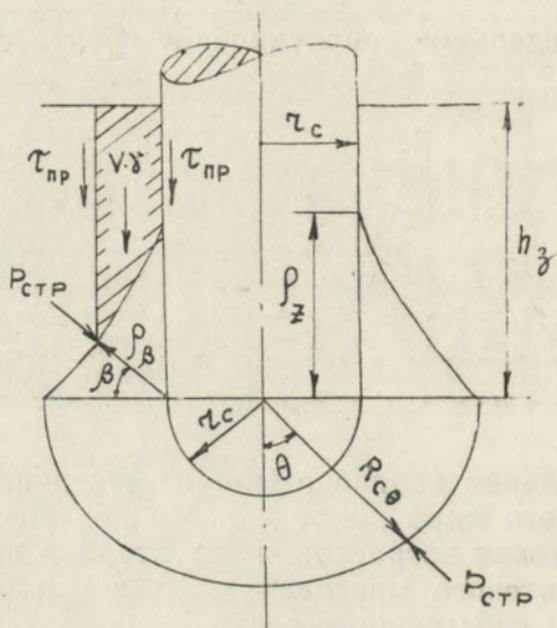


Рис. 5

Механизм образования напряженного состояния ниже уровня подошвы аналогичен плоской задаче, выражения с (8) по (16) остаются те же, в них только следует изменить обозначения на соответствующие осевой симметрии, что здесь опущено в целях краткости изложения.

Несколько изменяется решение задачи о распределении напряжений в массиве выше уровня подошвы.

Увеличением угла β от 0 до $\pi/2$ снижается геометрический порядок задачи на единицу. Допустимо принять

$$\nu_{\beta} = \nu - \frac{2\beta}{\pi}, \quad (22)$$

тогда аналогично плоской задаче

$$\sigma_{\rho\beta} = P_{\text{стр}} \left(\frac{\rho_{\infty}^c + r_c}{\rho + r_c} \right)^{\nu\beta} \quad (23)$$

и

$$\rho_z = r_c \left[\left(\frac{R_c}{r_c} \right)^{\frac{\nu}{\nu-1}} - 1 \right], \quad (24)$$

где $\sigma_c = \frac{P_1 + P_2}{2}$ на краю подошвы.

Глубина заложения фундамента из условия устойчивости основания определяется решением уравнения

$$\begin{aligned} (P_{\text{стр}} - P_e) [(\rho_{\beta} \cos \beta + r_c)^2 - r_c^2] &= 2r_c (h_3 - \rho_z) \tau_{\text{пр}} + \\ + 2(\rho_{\beta} \cos \beta + r_c) \cdot (h_3 - \rho_{\beta} \cdot \sin \beta) \cdot \tau_{\text{пр}} &+ [(\rho_{\beta} \cos \beta + \\ + r_c)^2 - r_c^2] \cdot \gamma \cdot h_{\text{ср}} \end{aligned} \quad (25)$$

В первом приближении допустимо принять

$$h_{\text{ср}} = h_3 - \frac{\rho_z + \rho_{\beta} \cdot \sin \beta}{2}. \quad (26)$$

Общая методика определения численных значений $\nu_{\theta} = f(\theta)$ идентична плоской задаче с учетом осевой симметрии. Расчет оснований фундаментов в условиях осевой симметрии запрограммирован для ЭВМ ЕС на языке фортран-4.

Сопротивление глубинного анкера

Имеется в виду цилиндрический глубинный анкер с вертикальной или наклонной осью.

Расчет основания анкера выполняется на ЭВМ идентично круговому фундаменту и дополняется расчетом устойчивости массива над областью деформаций в соответствии с рис. 6:

$$h_{\text{уст}} = \frac{r_b \cdot P_{\text{стр}} - P_e}{2 \tau_{\text{пр}} + r_b \cdot \gamma}, \quad (27)$$

Для анкеров с полусферической головкой упругое ядро из баланса объема частиц грунта исключается.

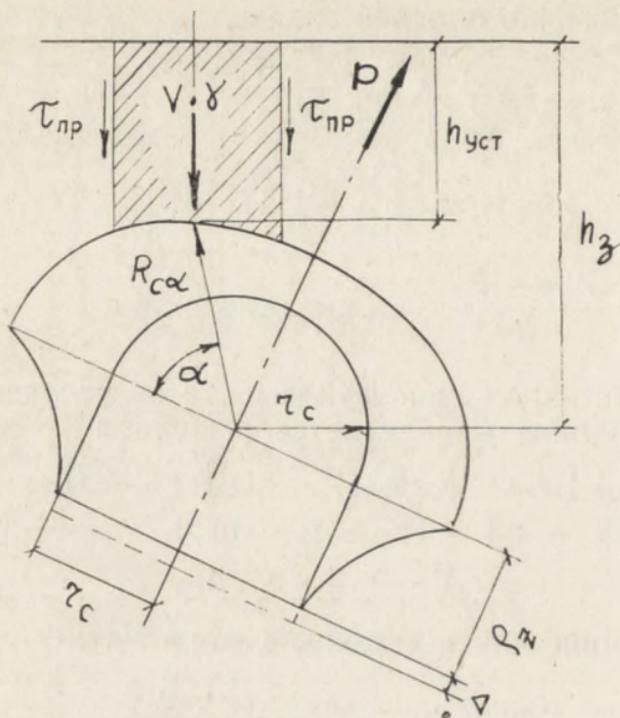


Рис. 6

Критическое сопротивление тупой цилиндрической сваи (зонда)

Обобщение накопившихся опытных данных, в частности полученных Ж. Керизелем, В. И. Ферронским и Т. А. Грязновым [14] и наших, показывает три фазы деформирования однородного основания (рис. 7, по Ж. Керизелю)! I — выпирание на поверхность, II — внутреннее выпирание, III — уплотнение. Начало III фазы свидетельствует о достижении критической глубины погружения $h_{кр}$. В этой фазе грунт из-под тупого конца вытесняется вниз и в стороны, выше конца модели не поднимается, кривая сопротивления основания под концом модели имеет вид прямой, проходящей под небольшим углом к оси глубины. Последнее вызывается увеличением плотности грунта по глубине.

Опытами И. В. Финаева и В. Д. Токарева установлены близкие к полусферическим формы поверхностей области деформаций и равных плотностей грунта ниже

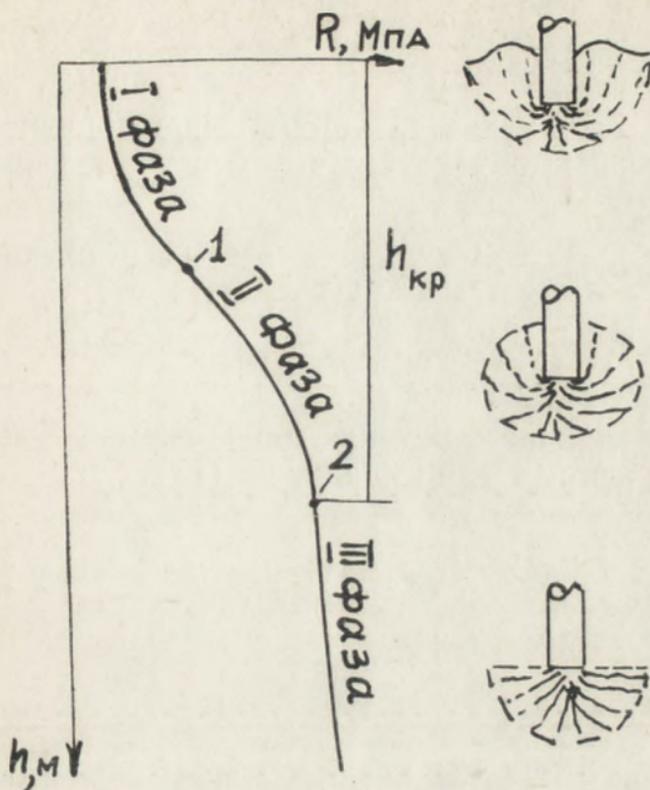


Рис. 7

тупого конца сваи, погруженной на глубину h больше $h_{кр}$.

Уравнение баланса объема частиц грунта в области деформаций ниже уровня конца сваи (сокращенное

$\frac{2}{3} \pi$):

$$R_c^3(1 - n_0) - (R_c^3 - r_c^3)(1 - n_{ср}) = 0 \quad (28)$$

где

R_c — радиус области деформаций;

r_c — радиус упругого ядра (сваи);

$n_{ср}$ — средняя пористость грунта в области деформаций.

Из выражения (4), отнесенного к распределению пористости по радиусу области деформаций:

$$n_{ср} = \frac{1}{V} \int_V n_R dV = n_0 - \frac{\nu m a}{3} +$$

$$+ \frac{r_c^3}{R_c^3 - r_c^3} \nu \operatorname{ma} \ln \frac{R_c}{r_c} . \quad (29)$$

Грунт, составляющий упругое ядро, привнесен сверху и в балансе объема частиц области деформаций не участвует.

Из (28) и (29), обозначив $\frac{R_c}{r_c} = U$, получаем:

$$u^3 - \ln u^3 = \frac{3}{\nu a} + 1 . \quad (30)$$

Сопrotивление основания вдавлпванию тупого конца сваи (зонда) с учетом выражения (13):

$$P_T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{z\theta} dF = \pi r_c^2 \left[P_{\text{стр}} \cdot U^\nu \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin \varphi \right) + \frac{2}{3} c \right] \quad (31)$$

или

$$\sigma_{zcp} = P_{\text{стр}} \cdot U^\nu \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin \varphi \right) + \frac{2}{3} c . \quad (32)$$

Неизвестные U и ν находятся из выражений (30) и (32) по данным лабораторных исследований и статического зондирования грунтов.

$$\text{Из выражения (32): } \nu = \frac{D}{\ln U} , \quad (33)$$

где

$$D = \ln \frac{\sigma_{zcp} - \frac{2}{3} c}{P_{\text{стр}} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin \varphi \right)} , \quad (34)$$

Решая совместно (30) и (33), получаем:

$$Da = \frac{\ln U^3}{U^3 - \ln U^3 - 1} . \quad (35)$$

По выражению (35) составляется график $Da=f(U)$ для произвольных значений U (рис. 8). По данным ста-

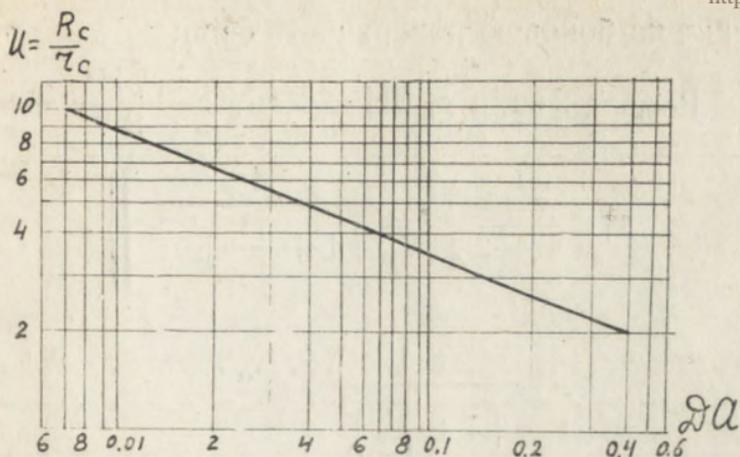


Рис. 8.

тического зондирования и компрессионных испытаний грунтов определяется величина Da , по графику $Da = f(U)$ находится величина U , а из выражения (33) — численное значение v .

Аналогично осесимметричной задаче:

$$\rho_z = r_c \left[\left(\frac{R_c}{r_c} \right)^{\frac{v}{v-1}} - 1 \right], \quad (36)$$

тогда упрощенно

$$h_{кр} = \rho_z + \frac{P_{стр} - P_e}{\gamma}. \quad (37)$$

Это выражение можно уточнить аналогично (25).

Б. В. Бахолдин и Н. Т. Игонькин [15] предложили формулу для определения предельного сопротивления по боковой поверхности свай:

$$f_{пр} = c + \xi_o \cdot H_{пл} \cdot \gamma \cdot \text{tg } \varphi, \quad (38)$$

где $H_{пл}$ — глубина залегания пласта.

В. Д. Фаерштейн [16] ввел в расчет увеличение силы трения вследствие распространения на боковую поверхность давления из-под конца.

Соединяя эти два предложения, можно написать:

$$\sigma_h = \xi_o \gamma (H - h) + \sigma_c \left(\frac{r_c}{r_c + h} \right)^{v-1}. \quad (39)$$

Давление на боковую поверхность сваи:

$$P_{\text{бок}} = 2 \pi r_c \int_0^H \sigma_h dH = 2 \pi r_c \left\{ \frac{\xi_0 \gamma H^2}{2} + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_c r_c}{\nu - 2} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{H}{r_c}\right)^{\nu-1}} \right] \right\}, \quad (40)$$

где

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{H}{r_c}\right)^{\nu-1}} \ll 2$$

поэтому можно принять:

$$f_{\text{пр}} = 2 \pi r_c \left[\left(\frac{\xi_0 \gamma H^2}{2} + \frac{\sigma_c r_c}{\nu - 2} \right) \operatorname{tg} \varphi + c \cdot H \right]. \quad (41)$$

Предельное сопротивление сваи при глубине погружения, равной $h_{\text{кр}}$:

$$P_{\text{кр}} = P_T + f_{\text{пр}}. \quad (42)$$

Здесь не учтено ослабляющее сопротивление сваи, образование вокруг ствола зазора связанного с технологией погружения, что не имеет места, например, при погружении вдавливанием.

Упрочнение глубинного анкера

Сопротивление глубинных анкеров может быть многократно увеличено протяжкой в грунте соосным усилием.

Механизм деформирования основания и распределение напряжений вокруг протягиваемого анкера идентичен тем же явлениям при вдавливании сваи, поэтому методика расчета упрочненного анкера та же, что и для сваи при достижении критической глубины погружения с дополнением расчетом устойчивости массива над областью деформаций в соответствии с рис. 9.

методологические положения Н. А. Цытовича, приведенные в начале статьи.

2. Предложенный метод открывает возможность расчета на ЭВМ по данным лабораторных исследований и полевых испытаний грунтов:

- а) распределения контактных напряжений;
- б) полей распределения напряжений и плотности грунта;
- в) форм и размеров активной зоны;
- г) осадки оснований;
- д) глубины заложения фундаментов с заданным запасом устойчивости.

3. Кроме приведенных в статье примеров, предложенный метод позволяет решать задачи: оптимизации размеров фундаментов, поперечных сечений и глубины погружения одиночных свай и свайных кустов; несущей способности свай с различной формой поперечного сечения и оснований в вытрамбованных котлованах; о взаимном влиянии напряженно-деформированных областей соседних опорных конструкций, в том числе прерывистых фундаментов и др. Открывается возможность разработки физически обоснованных способов расчета и оптимизации технологии разрушения и уплотнения грунтов.

4. Выявленный механизм распределения напряжений и деформирования оснований может быть использован в разработке реологической модели грунтового основания по С. С. Вялову. Учет временных эффектов наиболее удобно, по-видимому, выразить зависимостью $v_{\theta} = f(t)$.

Заключение

Для проверки и уточнения полученных результатов в целях разработки надежных и экономически эффективных практических способов расчета оснований в фазе уплотнения и пластического деформирования необходимо проведение целевых экспериментальных исследований по соответствующей программе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цытович Н. А. Механика грунтов. М.: Стройиздат, 1963. 635 с.

2. Цытович Н. А. Теория и практика фундаментостроения. М.: Стройиздат, 1964. 92 с.
3. Вялов С. С. Реологические основы механики грунтов. М.: Высшая школа, 1978. 446 с.
4. Зеленин А. Н. Основы разрушения грунтов механическими способами. М.: Машиностроение, 1968. 374 с.
5. Березанцев В. Г. Осесимметричная задача теории предельного равновесия сыпучей среды. М.: Гостехиздат, 1952. 120 с.
6. Минцковский М. Ш. Об упругом ядре в песчаном основании под предельно нагруженным штампом. — Основания и фундаменты, 1957, № 18—19, с. 23—32.
7. Тимофеев С. С. Формы несдвигаемого ядра. — В сб.: Совершенствование технологии строительного производства. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1978, с. 138—145.
8. Тимофеев С. С. О формах грунтового ядра под жесткими штампами. — В сб.: Исследования по строительным конструкциям и строительной механике. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1977, с. 115—125.
9. Малышев М. В. Теоретические и экспериментальные исследования несущей способности песчаного основания. ВНИИ Водгео, 1953, с. 142.
10. Орнатский Н. В. Механика грунтов. М.: Изд-во МГУ, 1962. с. 446.
11. Финаев И. В., Токарев В. Д. Исследование работы коротких забивных свай большого сечения в просадочных лессовидных грунтах. — В сб.: Проектирование и возведение фундаментов транспортных зданий и сооружений из свай и оболочек в сложных грунтовых условиях. Научно-техническое общество железнодорожного транспорта. Ленинград, 1974, с. 63—68.
12. Флорин В. А. Основы механики грунтов. М.: Стройиздат, 1959, с. 356.
13. Арнина Э. В. Проверка условий моделирования осесимметричного напряженно-деформированного состояния песчаного основания. — В сб.: Научные труды Новочеркасского политехнического института, 1971, т. 238, с. 52—58.
14. Ферронский В. И. Пенетрационно-каротажные методы инженерно-геологических исследований (теория и практика применения). М.: Недра, 1969, с. 238.
15. Бахолдин Б. В., Игонькин Н. Т. К вопросу о сопротивлении грунта на боковой поверхности свай. — В сб.: Основания, фундаменты и подземные сооружения. М.: Стройиздат, 1969, с. 73—79.
16. Фаерштейн В. Д. Определение несущей способности и выбор оптимальных размеров свай по результатам зондирования при 3-компонентной схеме работы свай. — Сборник докладов и сообщений по свайным фундаментам. М.: Стройиздат, 1968, с. 135—172.

О ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ ФИЛЬТРАЦИИ ПОЛИДИСПЕРСНЫХ МАСЛЯНЫХ СУСПЕНЗИЙ

Э. И. УДЛЕР, В. И. ЗУЕВ

При проектировании эффективных фильтров, предназначенных для очистки нефтяных топлив и масел, а также специальных жидкостей необходимо знание закономерностей фильтрации, описывающих изменение гидравлического сопротивления фильтра во времени. При наличии математических зависимостей такого типа становится возможным разработка расчетных методов оценки ресурса работы фильтров и их оптимизации на стадии проектирования.

Известные методы описания закономерностей фильтрации, применяемые, например, для промышленных суспензий в процессах химической технологии, сводятся к интегрированию уравнения фильтрования, описывающего темп роста гидравлического сопротивления фильтра в зависимости от физико-химических факторов и вида забивки пор фильтрующей перегородки [1]:

$$\frac{dR}{d\tau} = cR^b, \quad (1)$$

где

R — сопротивление фильтрующей перегородки;
 c , b — время;
 τ — константы фильтрования.

В уравнении (1) c — константа, зависящая от совокупности физико-химических факторов, а b — константа, зависящая от вида забивки пор. Для процессов фильтрования разнообразных промышленных суспензий константы c и b определяются экспериментально [1].

В работе [2] показано, что интегрирование уравнения (1) применительно к процессам фильтрования полидисперсных топливно-масляных суспензий через по-

ристую перегородку можно свести к виду, предполагающему более явную зависимость изменения гидравлического сопротивления фильтра во времени от основных факторов, определяющих процесс. Для процесса фильтрации, протекающего при постоянной скорости ($v = \text{const}$), эта зависимость имеет вид [2]:

$$\Delta P = \frac{\Delta P_0}{\left(1 - \frac{\beta \varphi c_0 v \tau}{\psi_0 \delta}\right)^{\frac{b}{b-1}}}, \quad (2)$$

где

ΔP_0 ; ΔP — начальный и текущий перепад давления на фильтрующей перегородке;

c_0 — начальная концентрация загрязнений;

φ — коэффициент полноты фильтрации;

v — скорость фильтрации;

δ , ψ_0 — толщина и пористость фильтрующей перегородки;

β — коэффициент, учитывающий соотношение среднего размера пор d_n и частиц d_{τ} суспензии.

В уравнении (2) b — константа, зависящая от вида забивки пор, который определяется соотношением размеров частиц загрязнений в суспензии и пор фильтрующего материала. Константа b определяется по следующей вероятностной формуле [2]:

$$b = 2 P_1 + 1,5 P_2, \quad (3)$$

где P_1 и P_2 — вероятности полного и постепенного закупоривания пор, определяемые по формулам:

$$P_1 = \sum_{i=1}^n \Gamma_i; \quad P_2 = 1 - P_1, \quad (4)$$

где Γ_i — относительная доля частиц загрязнений, размер которых больше или равен $0,5 d_n$ [2].

Коэффициент полноты фильтрации φ , входящий в уравнение (2), определяется экспериментально [3]. Для его определения может быть использован расчетный метод. В работе [4] расчет φ для стандартных кварцевых порошков рекомендуется проводить по формулам:

$$\varphi = 0,01(104,55 - 1,28 d_0) - \quad (5)$$

кварцевая пыль с удельной поверхностью

$$S_{уд} = 5600 \text{ см}^2/\text{г}; \quad (6)$$

$$\varphi = 0,01(103,7 - 2,07 d_0) -$$

кварцевая пыль с удельной поверхностью

$$S_{уд} = 10500 \text{ см}^2/\text{г}.$$

В формулах (5), (6) d_0 — номинальная толщина фильтрации пористого материала.

Практическое использование уравнения (2) возможно после уточнения предположительной зависимости коэффициента β от соотношения $\frac{d_n}{d_r}$. С целью нахождения

этой зависимости авторами проведено экспериментальное исследование закономерностей фильтрации индустриального масла, искусственно загрязненного стандартной кварцевой пылью с удельной поверхностью 5600 и 10500 $\text{см}^2/\text{г}$ через фильтрующие бумаги. Средний размер частиц вычислялся путем интегрального осреднения распределения частиц по размерам.

Для опытов были выбраны три серийных фильтрующих бумаги, отличающихся по толщине фильтрации. Основные характеристики бумаг и соответствующие им соотношения $\frac{d_n}{d_r}$ для использованных кварцевых порошков представлены в таблице. Средний размер пор фильтрующих бумаг определялся методом вытеснения воздуха из пор [2, 3].

Т а б л и ц а

Основные характеристики процесса фильтрации

Фильтрующий материал	ψ_0	$\delta, \text{ мм}$	d_0 мкм	Кварцевая пыль $S_{уд} = 5600 \text{ см}^2/\text{г}$			Кварцевая пыль $S_{уд} = 10500 \text{ см}^2/\text{г}$		
				φ	$d_n, \text{ мкм}$	d_n/d_r	φ	$d_n, \text{ мкм}$	d_n/d_r
1 БФМ	0,75	0,38	20	0,8	50	1,93	0,62	50	2,44
2 БТ-15П	0,72	0,38	15	0,85	40	1,53	0,72	40	1,94
3 БТ-15П	0,65	0,36	5	0,98	16,6	0,64	0,93	16,6	0,81

Опыты по фильтрации искусственно загрязненного индустриального масла И-30 при температуре 60°C проводились на испытательном стенде, позволяющем измерять изменение перепада давления на образце испытуемого фильтрационного материала во времени при постоянной скорости подачи масла. В опытах обеспечивалась производительность подачи масла $V=11,2\text{ м}^3/\text{с}$ через образцы, имеющие поверхность фильтрации $F=0,059\text{ м}^2$.

Результаты опытов обрабатывались в виде графических зависимостей $\Delta P=f(\tau)$, представленных на рис. 1—6 (сплошные линии). Как следует из графиков, получен-

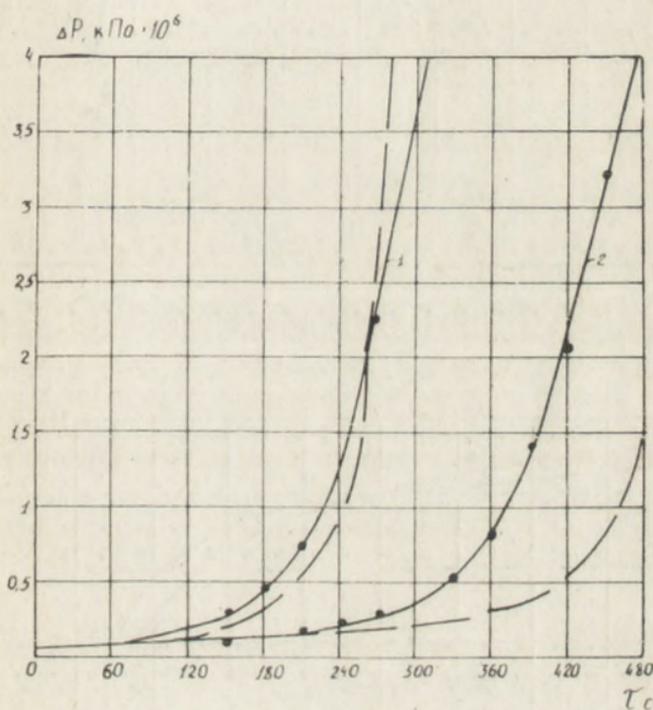


Рис. 1. Фильтрация кварцевой пыли ($S_{уд}=10500\text{ см}^2/\text{г}$) через бумагу БФМ, 1— $C_0=0,01\%$; 2— $C_0=0,05\%$.

ные кривые соответствуют функциям нелинейного вида, математическое описание которых соответствует уравнению (2).

На основании экспериментальных данных из уравнения (2) выражалось и рассчитывалось осредненное значение β для всех опытных точек кривых $\Delta P=f(\tau)$. За-

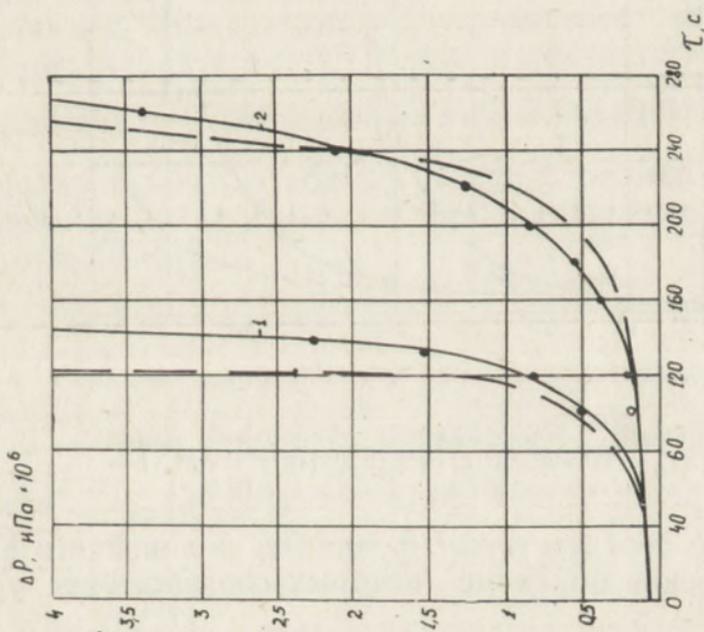


Рис. 2. Фильтрация кварцевой пыли через бумагу БФМ ($S_{уд} = 5600 \text{ см}^2/\text{г}$) через бумагу БФМ
1 — $C_0 = 0,01\%$; 2 — $C_0 = 0,005\%$

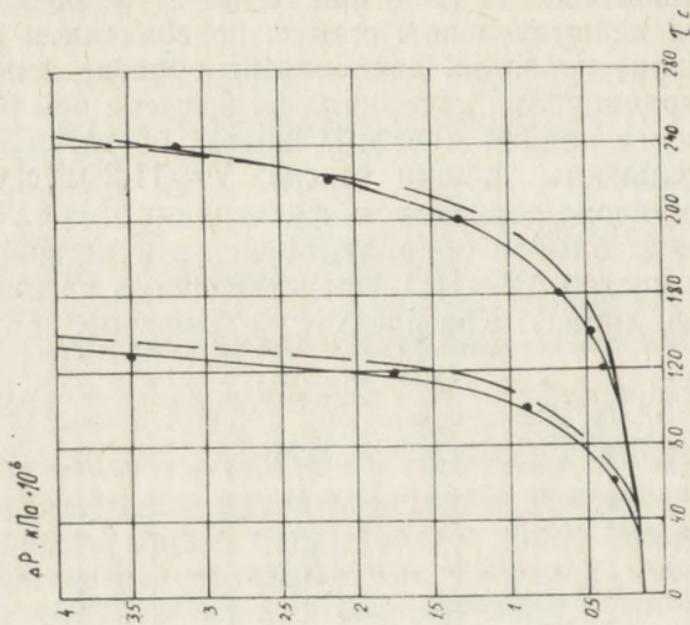


Рис. 3. Фильтрация кварцевой пыли (S_{уд} = 5600 см²/г) через бумагу БТ-15П
1 — $C_0 = 0,01\%$; 2 — $C_0 = 0,005\%$

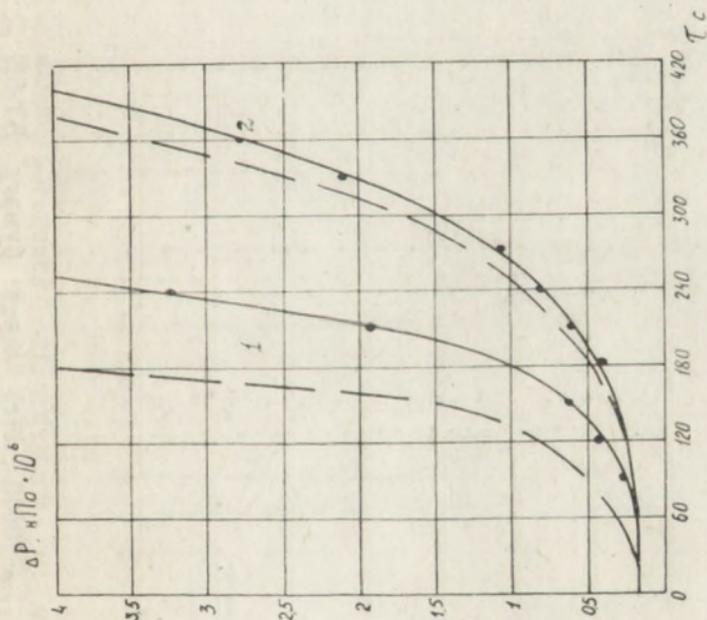


Рис. 4. Фильтрация кварцевой пыли
($S_{уд} = 10500 \text{ см}^2/\text{г}$) через бумагу БТ-15П
1 — $C_0 = 0,01\%$; 2 — $C_0 = 0,005\%$

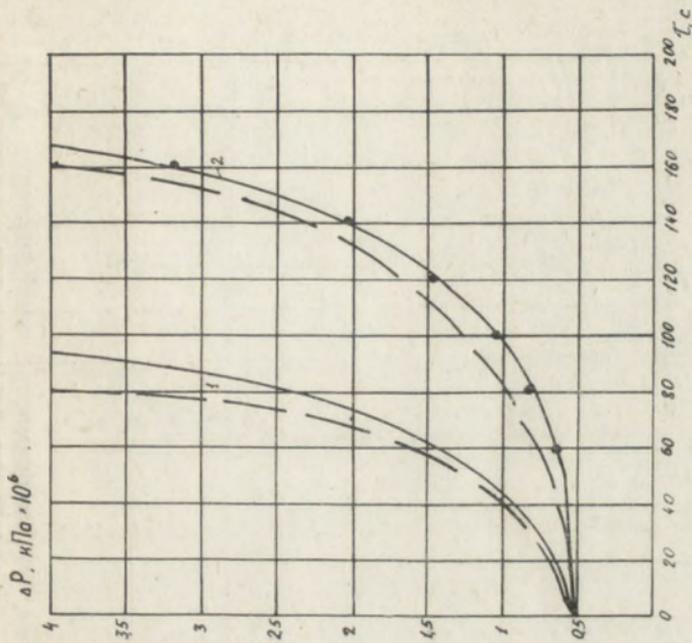


Рис. 5. Фильтрация кварцевой пыли
($S_{уд} = 5600 \text{ см}^2/\text{г}$) через бумагу БТ-5П
1 — $C_0 = 0,01\%$; 2 — $C_0 = 0,005\%$

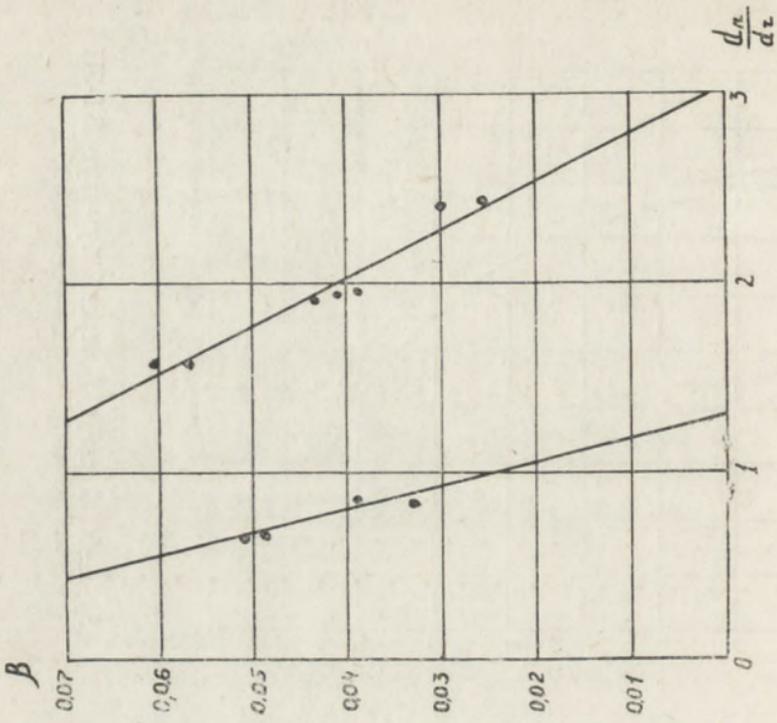


Рис. 7. Зависимость коэффициента β от соотношения размеров пор и частиц

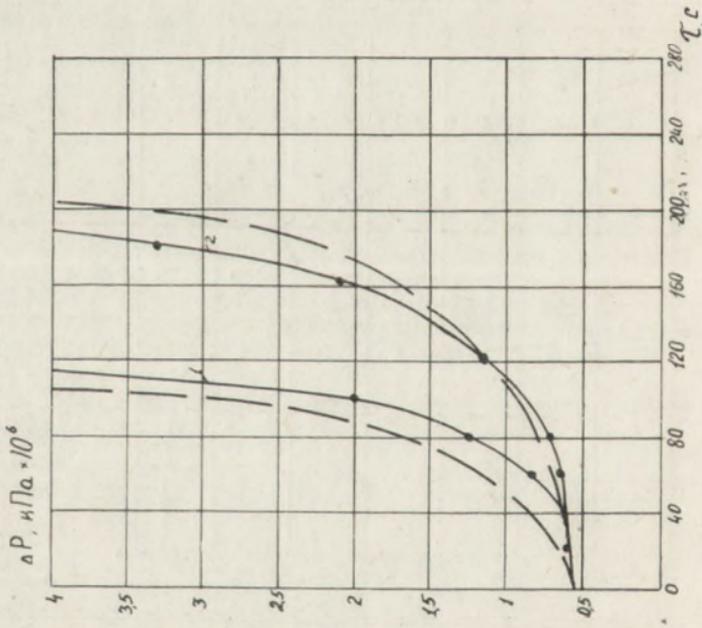


Рис. 6. Фильтрация кварцевой пыли ($S_{уд} = 10500 \text{ см}^2/\text{г}$) через бумагу БТ-5П
1 — $C_0 = 0,01\%$; 2 — $C_0 = 0,005\%$

тем, с учетом данных табл. 1, строилась зависимость $\beta = f\left(\frac{d_n}{d_q}\right)$, графическое изображение которой показано на рис. 7.

Из графика на рис. 7 следует, что зависимость коэффициента β от соотношения $\frac{d_n}{d_q}$ можно представить линейными зависимостями следующего вида:

$$\text{при } \frac{d_n}{d_q} < 1$$

$$\beta = 0,118 - 0,038 \left(\frac{d_n}{d_q}\right);$$

$$\text{при } \frac{d_n}{d_q} > 1 \quad \beta = 0,104 - 0,08 \left(\frac{d_n}{d_q}\right).$$

С учетом полученных формул (7) и (8) для β на рис. 1—6 по уравнению (2) были построены расчетные кривые $\Delta P = \hat{i}(\tau)$ (пунктирные линии). Сравнение показывает удовлетворительную сходимость экспериментальных и расчетных кривых.

Таким образом, уравнения (2), (7) и (8) можно рассматривать в качестве общего математического описания процессов фильтрования полидисперсных суспензий, включающих жидкую и малоконцентрированную мелкодисперсную твердую фазу, через пористые перегородки, с заданными характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жужиков В. А. Фильтрование. М.: Химия, 1980, 400 с.
2. Удлер Э. И. Фильтрация углеводородных топлив. Томск.: изд-во Томск. ун-та, 1981, 160 с.
3. Коваленко В. П. Загрязнения и очистка нефтяных масел. М.: Химия, 1978, 302 с.
4. Пономарев Н. Н., Григорьев М. А., Борисова Г. В., Усанов Ю. А. Фильтры для очистки топлива и масла автомобильных и тракторных двигателей. Обзорн. инф. НИИавтопром. М., 1979, 41 с.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

С. М. ЭПШТЕИН

Известно, что неупругое поведение металлов проявляется уже на самых ранних стадиях нагружения [1]. Это подтверждают и опыты по измерению потерь энергии при циклическом изменении нагрузки, и опыты по измерению дефекта модуля упругости. Реальные поликристаллы представляют собой конгломерат монокристаллических зерен. Предполагается, что механические свойства внутри отдельного зерна не претерпевают изменения, однако изменяются от зерна к зерну. Внешние нагрузки, приложенные к поликристаллическому телу, создают вокруг зерен сложное напряженное состояние, на которое влияют также дефекты структуры.

Попытки учесть структурную неоднородность и в соответствии с этим использовать статистические методы имеются уже в работах Мазинга [2], Фойгта [3], Вейбулла [4]. Зеренный подход к структуре материала наиболее полно представлен в трудах Н. Н. Афанасьева [5] и А. В. Гурьева [6]. Интересны попытки группы авторов [7] получить механические свойства макротела на базе его микросвойств.

По мнению авторов работы [8], металл в упругой области ведет себя как однородный, и по мере его нагружения происходит накопление повреждений, поэтому при определении пластических свойств поликристаллов необходимо считаться с гораздо более сложной структурой дефектов, чем при определении упругих свойств металла.

В цикле работ [9, 10] предлагается модель твердого деформируемого тела с учетом взаимодействия зерен. Предполагается, что до напряжения σ' отдельные микрообъемы деформируются еще упруго, в интервале

$\sigma' < \sigma < \sigma''$ — область упруго-пластической деформации;
 $\sigma'' < \sigma < \sigma_y$ — область формирования полосы Чернова — Людерса. На основании предложенной модели авторы решают задачу об изменении относительного числа пластически деформированных зерен с ростом внешнего напряжения. Для разных областей изменения σ получаются разные формулы доли пластически деформированных зерен, причем феноменологический подход связывается с физическими процессами, проходящими в структуре реального материала.

В настоящей статье рассматривается модель структурно-неоднородного деформируемого твердого тела и с помощью статистических методов изучается возможность перехода микропластической деформации, проходящей в отдельных зернах, в макропластическую деформацию деформируемого тела. При этом совершенно очевидно, что микропластическая деформация не дает остаточных деформаций, которые пронизывали бы весь объем материала. Если предполагать зерна совершенно несвязанными, то вероятность выделения полосы скольжения будет равна 100% лишь при 100%-ной доле зерен, через которые прошла микропластическая деформация. Другим крайним случаем является случай, когда достаточно микропластической деформации пройти через одно зерно, чтобы через весь образец прошла макропластическая деформация. Реальные материалы занимают некоторое промежуточное положение. Их переход в пластическое состояние связывается с некоторой критерияльной долей зерен, через которые прошла микропластическая деформация. Некоторые материалы обладают более тесной связью зерен, и микропластическая деформация отдельного зерна создает напряженное состояние, способное увлечь в микропластическое состояние не только соседние зерна, но и стоящие на расстоянии 2 и более зерен.

Другие материалы имеют значительно более слабую связь, и напряженное состояние «слабых» зерен окажет влияние лишь на близлежащее зерно. В этих двух случаях критерии перехода в макропластическое состояние будут существенно отличаться. Суть этого отличия станет более ясной ниже.

Математическая модель для изучения перехода в пластическое состояние представляет собой следующую

комбинаторную задачу. Образцу ставится в соответствие некоторая прямоугольная булева матрица [11], элементами которой являются 0 и 1. Соотношение нулей и единиц указывает соответственно на долю зерен в рассматриваемой модели, через которые прошла микроплас-

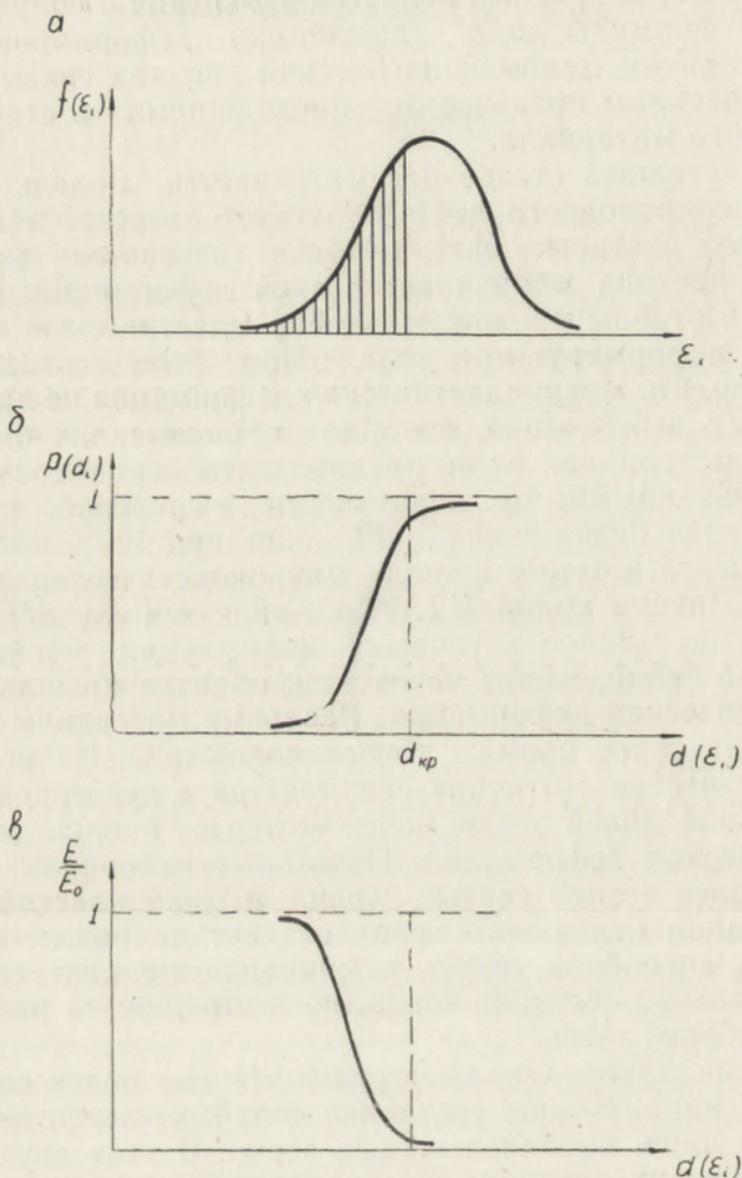


Рис. 1. Кривые распределения доли «слабых» зерен — *a*; вероятности прохождения полосы скольжения — *б*; дефекта модуля E — *в* в твердом деформируемом теле

тическая деформация. Имея кривую распределения микропластических деформаций отдельных зерен (рис. 1, а), можно записать общее количество (долю) зерен, через которые прошла микропластическая деформация в зависимости от деформации макрообразца ϵ . Эта доля представляет собой площадь под кривой частот распределения микродеформаций. Начало макропластической деформации связано с возможностью выделения в некоторой полосе достаточно непрерывной линии, наклоненной под углом 45° к линии действия растягивающего усилия. Под достаточно непрерывной линией понимается линия, допускающая один или два (в зависимости от материала) перескока через «сильные» (упругие) зерна. Критерий «достаточно непрерывной» линии будет различен для разных материалов, как это явствует из сказанного выше. Для мягких, пластичных, достаточно однородных материалов связь «слабых» и «сильных» зерен велика, и сдвиг в макротеле возможен при двух и более перескоках. Для хрупких материалов связь более слабая, и перескоки либо совсем не допускаются, либо допускается не более одного. Эту связь можно изучать с помощью автокорреляционных функций.

Выделим полосу из трех зерен, как показано на рис. 2. В «машинных» экспериментах реализуется критерий, в соответствии с которым на пересечении 3 строк и 3 столбцов, т. е. в девятке чисел (0 и 1), найдется не менее трех единиц («слабых» зерен). Этот критерий соответствует сильной связи зерен. Реализован также критерий, согласно которому в столбце полосы из трех зерен есть хотя бы одно «слабое» зерно, что соответствует более слабой связи зерен. Выбор критерия для поиска критического количества «слабых» зерен, при котором начинается макропластическая деформация, зависит от свойств конкретного изучаемого материала.

α -й доле «слабых» зерен ставится в соответствие такая же доля случайных чисел, равномерно распределенных по пластинке [12]. Случайные числа генерируются по подпрограмме в ЭВЦМ, и им присваивается значение 1. Итак, если в данной ячейке находится случайное число, то в ячейку заносится 1, нет — 0 (см. рис. 2). Увеличивая долю случайных чисел в общей совокупности чисел в прямоугольной матрице величиной $M \times N$ (M —

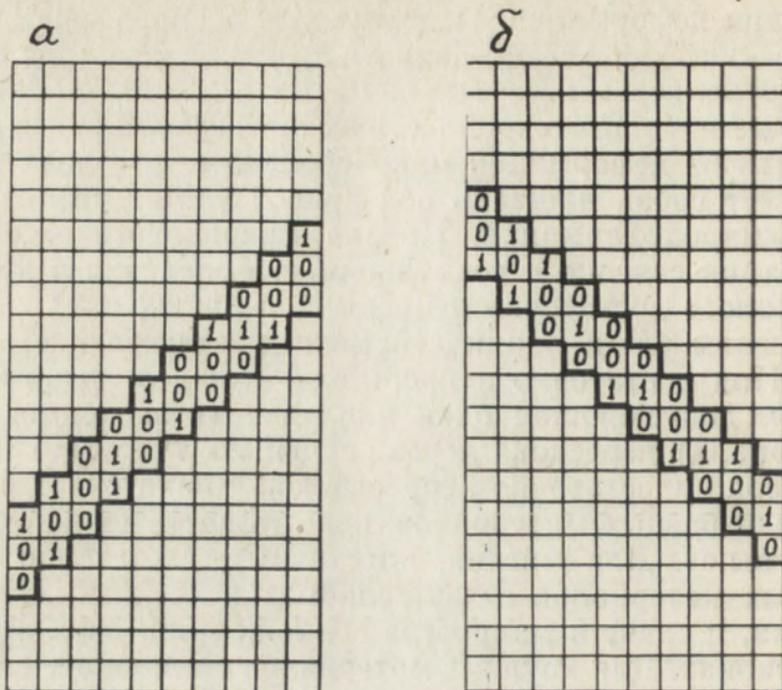


Рис. 2. Плоская модель для изучения возможности прохождения полосы скольжения

строк, N — столбцов), мы увеличиваем вероятность выделения полосы скольжения.

Настоящая задача запрограммирована на алгоритмическом языке «ФОРТРАН» и рассчитана на ЭВЦМ ЕС 10-20. Доля случайных чисел («слабых» зерен) автоматически увеличивается на каждом шаге на 1%. При каждом заданном проценте случайных чисел производится 100 «испытаний». Если из 100 опытов в K можно выделить достаточно непрерывную линию, то вероятность перехода материала в макропластическое состояние равна

$$P = \frac{K}{100}$$

Для экспериментальной проверки критериального значения доли «слабых» зерен, которая вызывает во всем теле пластическую деформацию, необходимо построить прецизионные диаграммы простого растяжения. Пользуясь формулами Н. Н. Афанасьева [5], получаем для

частоты распределения микропластических деформаций отдельных зерен следующее выражение:

$$f = - \frac{d^2 \varepsilon_j}{d \varepsilon^2} = - \frac{1}{E} \frac{d^2 \sigma_j}{d \varepsilon^2}. \quad (2)$$

По этой формуле, пользуясь численным дифференцированием, можно построить начало распределения частот микропластической деформации. Экстраполируя эту кривую частот распределения и подбирая параметры кривой m и $\sigma_{ск}$ (считая, что кривую можно аппроксимировать нормальным законом распределения), затем интегрируя функцию частот от $-\infty$ до ε , получим площадь под кривой S , заштрихованную на рис. 1, а:

$$S = \int_{-\infty}^{\varepsilon} f(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3)$$

В работе [13] приведена методика определения микронеоднородной деформации по длине реперной линии. Пользуясь этой методикой, можно получить кривую распределения микронеоднородных деформаций. Расчеты показывают, что

$$S \approx \alpha_{кр} \approx 30\%, \quad (4)$$

т. е. рассмотренная выше модель подтверждает результаты экспериментов. Следует отметить идентичность подходов для определения доли зерен, имеющих заданное распределение микропластических деформаций отдельных зерен или распределение пределов текучести их.

С функцией частот распределения микропластических деформаций тесно связан дефект модуля E . Эту связь можно выразить следующим соотношением:

$$E = E_0 [1 - P(\sigma)], \quad (5)$$

где E_0 — начальный модуль упругости,

E — текущий модуль упругости.

Совокупность графиков на рис 1, а, б, в дает наглядное представление изменения доли «слабых» зерен и в зависимости от этого вероятности прохождения пластической деформации через весь объем и изменения дефекта модуля E микрообъема.

Ответ на вопрос, как ведет себя материал при дальнейшем нагружении, остается открытым, хотя очевидно,

что упругие свойства его далеко еще не исчерпаны, так как около 70% от объема материала способно еще деформироваться пластически.

Ниже приводится таблица распределения вероятности прохождения полосы скольжения в зависимости от различных соотношений $M : N$, в котором критерий начала макроскопической деформации принят из наличия 3 «слабых» зерен из 9 рассматриваемых.

Т а б л и ц а

Р при $M \times N$									
160×20		200×20		300×20		320×40		200×40	
$\alpha_{кр}$ %	Р %								
10	0	10	0	10	0	16	0	31	3
11	0	11	0	11	1	17	0	32	1
12	0	12	0	12	0	18	0	33	3
13	0	13	0	13	0	19	0	34	9
14	0	14	0	14	1	20	1	35	7
15	0	15	2	15	3	21	2	36	12
16	2	16	6	16	1	22	0	37	12
17	6	17	7	17	8	23	3	38	22
18	5	18	9	18	19	24	10	39	16
19	11	19	21	19	26	25	14	40	21
20	10	20	30	20	32	26	14	41	27
21	21	21	42	21	58	27	34	42	43
22	41	22	48	22	61	28	33	43	42
23	43	23	59	23	77	29	37	44	55
24	58	24	73	24	78	30	46	45	51
25	58	25	80	25	93	31	63	46	68
26	71	26	82	26	98	32	79	47	66
27	85	27	94	27	99	33	86	48	75
28	91	28	96	28	100	34	90	49	73
29	97	29	99	29	100	35	99	50	84
30	98	30	100	30	100	36	94	51	96
31	100	31	100	31	100	37	100	52	100

Как видно из этой таблицы, вероятность перехода в пластическое состояние при увеличении $M : N$ повышается, но очень незначительно. Роль масштабного фактора в переходе из упругого состояния в пластическое определяется одновременным увеличением или уменьшением числа строк и столбцов в матрице. При этом критерий выделения полосы скольжения остается неизменным для одних и тех же материалов, иначе результаты

получились бы несравнимыми. Изучение критерия перехода в макропластическое состояние для других материалов приводит к изменению критерия выделения полосы скольжения.

Статистический подход, предложенный в настоящей работе, может быть также применен к изучению неоднородного распределения температур структурно-неоднородного тела с заданным распределением коэффициентов линейного расширения зерен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурьев А. В. К вопросу о происхождении упругих несовершенств поликристаллического сплава. — ФММ, 1956, т. 3, вып. 2, с. 349—359, Свердловск.
2. Masing G. Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern. Berlin, 1926, 5, 135.
3. Voigt. Lehrbuch der Kristallphysik, 1929, 9, 49. Berlin.
4. Weibull. A statistical theory of the strength of materials, Proceeding, 1939, N 151.
5. Афанасьев Н. Н. Статистическая теория усталостной прочности. Киев, 1953, 128 с.
6. Гурьев А. В. Теория упругих деформаций поликристаллического сплава. — ЖТФ, 1954, вып. 9, т. 24, с. 1644—1659.
7. Богачев И. Н., Вайнштейн А. А., Волков С. Д. Введение в статистическое металловедение. М., 1972, 216 с.
8. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Об учете микронапряжений в теории пластичности. — МТТ, 1968, № 3, с. 82—91.
9. Дикусар Л. Д., Дударев Е. Ф., Панин В. Е. Статистическая теория микродеформаций поликристаллов 1. — Изв. вузов, Физика, 1971, № 8, с. 96—101.
10. Дикусар Л. Д., Дударев Е. Ф., Панин В. Е. Статистическая теория микродеформаций поликристаллов 2. — Изв. вузов, Физика, 1971, № 10, с. 73—78.
11. Новиков П. С. Элементы математической логики. 1959, г. Москва, Физматгиз, 400 с.
12. Бусленко Н. П. и др. Метод статистических испытаний. 1962 г. М.; ГИФМЛ, 331 с.
13. Гурьев А. В., Маловечко Г. Н. Исследование механизма начальной стадии пластической деформации поликристаллического сплава. — В кн.: Металловедение и прочность материалов. Труды ВПИ, Волгоград, 1968, вып. 1, с. 5—16.

РАСЧЕТ ГИБКИХ СТЕРЖНЕЙ МЕТОДОМ БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА

А. М. ЧЕРНЯК, В. В. САФОНОВ

Дифференциальные уравнения гибких стержней постоянной жесткости в перемещениях имеют вид

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q + EF \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \frac{d^2 w}{dx^2};$$
$$\frac{d}{dx} \left\{ EF \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \right\} = 0. \quad (1)$$

Система уравнений (1) является нелинейной, поэтому для ее решения используются приближенные методы. Широкое применение получили шаговые методы, при которых система последовательно загружается небольшими долями от заданной нагрузки до полного ее исчерпания. Величина нагрузки одного этапа должна быть небольшой настолько, чтобы в пределах одного этапа задача рассматривалась как линейная, а нелинейности были бы пренебрежимо малы.

Таким образом, на каждом этапе загрузки задача решается как линейная, но учитываются внутренние силы и перемещения, накопившиеся в системе за все предыдущие этапы [1].

Линеаризованная система уравнений для каждого этапа загрузки представляет собой дифференциал Фреше нелинейного оператора исходной системы уравнений (1) и получается следующим образом. Пусть стержень к началу i -го этапа загружен нагрузкой q и имеет перемещения u и w . В конце i -го этапа нагрузка стала $q + \Delta q$, а перемещения соответственно $u + \Delta u$, $w + \Delta w$. Если записать уравнения (1) для начального и конечного состояний i -го этапа, а затем найти их разность и отбросить бесконечно малые высших порядков,

то получатся линеаризованные уравнения i -го этапа загрузки

$$EI \frac{d^4 \Delta w}{dx^4} = \Delta q + EF \left\{ \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \frac{d^2 \Delta w}{dx^2} + \left[\frac{d \Delta u}{dx} + \frac{dw}{dx} \frac{d \Delta w}{dx} \right] \frac{d^2 w}{dx^2} \right\};$$

$$\frac{d^2 \Delta u}{dx^2} - \frac{d^2 w}{dx} \frac{d \Delta w}{dx} - \frac{dw}{dx} \frac{d^2 \Delta w}{dx} = 0. \quad (2)$$

Уравнения (2) выгодно отличаются от (1) тем, что они линейны. Для их решения применяется вариационный метод Галеркина. Искомые функции перемещений аппроксимируются фундаментальными балочными функциями поперечных колебаний. Если применять эти функции на всех этапах загрузки, то получаемое решение нелинейной задачи будет отличаться от точного, кроме других факторов, еще и потому, что аппроксимирующие функции сохраняют подобие на всех этапах нагружения. Однако эту погрешность можно исключить или существенно уменьшить, если аппроксимировать перемещения собственными формами изгибных колебаний стержня, загруженного продольными силами N . Эти формы определяются решением уравнения

$$\frac{d^4 \chi}{dx^4} + \alpha^2 \frac{d^2 \chi}{dx^2} - \lambda^4 \chi = 0. \quad (3)$$

Здесь $\alpha^2 = N/(EI)$; $\lambda = [m\omega^2/(EI)]^{1/4}$ — характеристическое число, m — погонная масса, ω — круговая частота собственных поперечных колебаний.

Выражая N через критическую силу $P_{кр}$, можно получить числовое значение α и построить собственную форму колебаний [2]:

$$\chi(x) = C_1 \sin S_1 x + C_2 \cos S_1 x + C_3 \operatorname{sh} S_2 x + C_4 \operatorname{ch} S_2 x. \quad (4)$$

Здесь

$$S_{1,2} = [\pm \alpha^2/2 + (\lambda^4 + \alpha^4/4)^{1/2}]^{1/2}. \quad (5)$$

Для балки с защемленными концами нами построены функции $\chi(x)$ и ее производные при $-P_{кр} \leq N \leq P_{кр}$ с шагом изменения N через $0,1 P_{кр}$. По мере изменения N меняется функция $\chi(x)$.

Таким образом, на каждом этапе загрузки аппроксимирующая функция $\chi(x)$ соответствует продольной силе N , достигнутой стержнем к данному этапу. Поэтому результат расчета при таких меняющихся функциях должен быть выше, чем при функциях, сохраняющих подобие на всех этапах.

В качестве примера рассчитана защемленная балка, загруженная равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью $q=45$ Н/см при $l=4$ м, $E=2 \cdot 10^5$ МПа, $I=17,9$ см⁴, $F=12$ см². Нагрузка разбивается на шесть слоев. На первом этапе система (2) упрощается и получает вид $EI\Delta\omega^{IV}=\Delta q$.

Принимаем $\Delta\omega_0 = A_0\chi_0$, где A_0 — амплитуда перемещения, χ_0 — функция колебаний при $N=0$. Выполнив процедуру метода Бубнова — Галеркина, получаем

$$A_0 = \left(\int_0^l \Delta q \chi_0 dx \right) \left(\int_0^l EI \chi^{IV} \chi dx \right)^{-1} = 0,874.$$

Прогиб в центре балки равен $\Delta\omega_0(0,5l) = A_0\chi_0(0,5l) = 1,413$ см. Среднее значение продольной силы равно

$$\Delta N_0 = EF \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{d \Delta w}{dx} \right)^2 dx = 7,285 \text{ кН}.$$

Критическая сила стержня равна

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = 88,333 \text{ кН}.$$

Следовательно, ΔN составляет приблизительно $0,1 P_{кр}$, и для второго этапа загрузки аппроксимируем перемещения функцией колебаний при продольной силе, равной $0,1 P_{кр} - \chi_1$.

Для второго этапа загрузки принимаем

$$\Delta w_1 = A_1 \chi_1$$

$$\Delta u_1 = B_1 \chi'_1.$$

Уравнения (2) для второго этапа принимают вид

$$EIA_1 \chi^{IV} = \Delta q_1 + EF \left[\frac{1}{2} (A_0 \chi'_0)^2 A_1 \chi_1'' + \right.$$

$$\left. + (B_1 \chi_1'' + A_0 \chi_0' A_1 \chi'_1) A_1 \chi_1'' \right];$$

$$B_1 \chi_1''' = A_0 \chi_0'' A_1 \chi_1' - A_0 \chi_0' A_1 \chi_1''.$$

После применения к этой системе процедуры метода Бубнова — Галеркина получим

$$A_1 = 0,786$$

$$B_1 = -0,01268.$$

Прогиб в центре балки равен $\Delta w_1 = 1,184$, а среднее значение продольной силы $\Delta N_1 = 6,756$ кН. За два первых этапа продольная сила достигла значения

$$\Delta N_0 + \Delta N_1 = 14,041 \text{ кН},$$

что составляет около $0,16 P_{кр}$. Поэтому для следующего этапа аппроксимируем перемещения формой колебаний балки χ_2 при продольной силе $0,2 P_{кр}$.

Принимаем для следующего этапа загрузки

$$\Delta w_2 = A_2 \chi_2$$

$$\Delta u_2 = B_2 \chi'_2.$$

Расчет повторяется по методике предыдущего этапа. Результаты всех этапов расчета приведены в таблице.

Т а б л и ц а

Нагрузка		Прогибы в центре			Амплитуда продольных перемещений B_1
Δq_1	$\Sigma \Delta q_1$	A_1	Δw_1	$\Sigma \Delta w_1$	
7,5	7,5	0,874	1,413	1,414	—
7,5	15	0,786	1,184	2,597	-0,0127
7,5	22,5	0,733	1,045	3,642	-0,0122
7,5	30	0,699	0,996	4,638	-0,0117
7,5	37,5	0,669	0,911	5,549	-0,0111
7,5	45	0,648	0,882	6,431	-0,0106

По данным таблицы построены графики равновесных состояний в осях «нагрузка — прогиб в центре», где 1 — зависимость между нагрузкой и прогибом, полученная в нашей работе, 2 — зависимость, полученная при аппроксимации перемещений функцией колебаний без продольных сил, 3 — зависимость, полученная по линейной теории (рис. 1).

На основании проделанного исследования можно сделать следующие выводы.

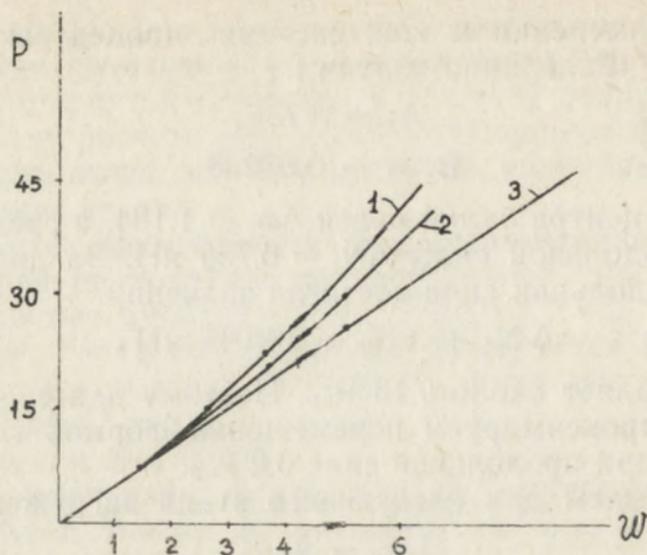


Рис. 1

1. Применение функций колебаний балки при действии продольных сил для расчета гибких стержней дает более точные результаты, так как эти функции лучше аппроксимируют перемещения на каждом этапе нагружения.

2. Названные функции можно применить для расчета гибких пластин по аналогичной методике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975, 120 с.

2. Справочник по динамике сооружений/ Под ред. Коренева Б. Г., Рабиновича И. М. М.: Стройиздат, 1972, 512 с.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИНТЕГРИРОВАНИЮ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СВЯЗЯМИ

А. В. ХЛУПИН

Рассматриваются упругие стержневые системы с распределенными параметрами, имеющие в своем составе дискретные «лишние» связи с кусочно-линейной упругой характеристикой под воздействием вибрационных сил, представленных рядом Фурье. В силу наличия в структуре нелинейных элементов (связей) исследование движения таких систем должно проводиться методами теории нелинейных колебаний [1]. Частный случай нелинейности связей — кусочный — несколько облегчает задачу и расширяет область применяемых методов. Эти методы представлены двумя группами — точные и приближенные.

В статье Ден Гартога [2] рассматривались колебания одномассового осциллятора с упругой восстанавливающей силой, представленной кусочно-линейным законом, при действии внешней гармонической силы вида $P \sin \omega t$. Решение строилось путем интегрирования линейных дифференциальных уравнений с константами, определяемыми из начальных условий на границах излома характеристики упругой силы. В работе [3] методами сплайн-преобразований получено уравнение свободных и вынужденных колебаний простейшего одномассового осциллятора при полигональной симметричной характеристике упругой силы. В статье [5] и монографии [1] приближенными методами решались подобные же задачи. Из краткого обзора видно, что получение уравнений движения сложных систем с нелинейными элементами указанными методами невозможно.

Выберем другой путь решения задачи. Прежде всего, проведем дискретизацию системы методом конечных элементов, выбрав узлы элементов в сечениях, где распо-

ложены связи системы c_1 , и таким образом сведем задачу к конечномерной. Тогда движение будет описываться системой обыкновенных дифференциальных уравнений с матрицей упругих коэффициентов (матрицей жесткости), в которой при смене области характеристики связи изменяются элементы главной диагонали.

$$F\ddot{\vec{Z}} + D\dot{\vec{Z}} + R(\bar{z})\vec{Z} = \vec{Q}_{ст} + \vec{r}(\bar{z}) + \vec{r}_g + \vec{P}_0(t), \quad (1)$$

где

F — матрица распределенных масс;

D — матрица демпфирования;

$R(\bar{z})$ — матрица жесткости как кусочно-постоянная функция границы смещения \bar{z} ;

$\vec{Q}_{ст}$ — вектор реакций статических внешних сил;

$\vec{r}(\bar{z})$ — вектор реакций от преднапряжения связей;

\vec{r}_g — вектор реакций от дополнительной упругой силы, возникающей при изломе характеристики связи;

$\vec{P}_0(t)$ — вектор реакций от внешних динамических сил, представленных рядом Фурье.

$$\vec{P}_0(t) = \sum_{j=1}^m \left[\vec{A}_j \cdot \cos(j \nu t) + \vec{B}_j \cdot \sin(j \nu t) \right]. \quad (2)$$

Система (1) нелинейна и не допускает прямого применения известных способов интегрирования, в частности аппарата преобразования Лапласа — Карсона, который широко используется при решении кусочно-линейных задач в теории автоматического регулирования [4]. Однако, это затруднение легко устранимо. Достаточно увязать внешние силы со шкалой отрезков времени движения системы в линейных областях упругих характеристик, т. е. представить (2) со сдвигом фаз:

$$\vec{P}_0(t) = \sum_{j=1}^m \left[\vec{A}_j \cdot \cos j \nu (t + t'_j) + \vec{B}_j \cdot \sin j \nu (t + t'_j) \right], \quad (3)$$

где t'_j — фиксированные моменты времени прохождения системой границ излома характеристик связей. Следовательно, в интервале движения между любыми соседними моментами $t'_{k'}$ и $t'_{k+1'}$ система уравнений (1) линейна и к ней можно применить интегральное преобразование Лапласа — Карсона. Интегрирование (1) с правой частью вида (3) возможно двумя способами. Первый за-

ключается в представлении решения системы изображающих уравнений по правилу Крамера и дальнейшем разложении детерминантов с помощью второй теоремы Хевисайда. Нам же представляется более эффективным метод перехода к нормальным координатам. Итак, сделаем подстановку

$$\vec{Z} = V \cdot \vec{Z}^* , \quad (4)$$

где V — матрица собственных векторов,

Z^* — вектор перемещений в нормальных координатах.

Подставляя (4) в (1) и выполнив переход к главным осям, получим систему разделенных дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{z}_i^* + 2 \operatorname{diag}(\varepsilon_i) \dot{z}_i^* + \operatorname{diag}[\omega_i^2(\bar{z})] z_i^* = R_{is}^* + \quad (5) \\ + P_0^*(t + t') ,$$

где ε_i и $\omega_i^2(\bar{z})$ — диагональные элементы соответственно матрицы демпфирования и жесткости после преобразования к главным осям; R_{is}^* — вектор реакций от статических сил в нормальных координатах; $P_0^*(t+t')$ — вектор-функция реакций от динамических сил в нормальных координатах.

Применив к (5) прямое и обратное преобразование Лапласа — Карсона, получаем решение:

$$z_i^* = \sum_{j=1}^m [(A_{ij}^* 2\varepsilon_i j\nu + B_{ij}^*(\omega_i^2 - j^2\nu^2))/\Delta_{ij}] \sin j\nu t + \\ + \sum_{j=1}^m [(A_{ij}^*(\omega_i^2 - j^2\nu^2) - B_{ij}^* 2\varepsilon_i j\nu)/\Delta_{ij}] \cos j\nu t - \\ - e^{\varepsilon_i t} \sum_{j=1}^m [(A_{ij}^*(j^2\nu^2 - \omega_i^2) + B_{ij}^* 2\varepsilon_i j\nu)/\Delta_{ij}] \cos \omega_{\varepsilon_i} t + \\ + \sum_{j=1}^m [(B_{ij}^*(2\varepsilon_i^2 - \omega_i^2 + j^2\nu^2) j\nu/\omega_i - A_{ij}^*(\varepsilon_i/\omega_{\varepsilon_i})(j^2\nu^2 + \\ + \omega_i^2))/\Delta_{ij}] \sin \omega_{\varepsilon_i} t + R_{is}^*/\omega_i^2 + e^{-\varepsilon_i t} [(z_i^0 - R_{is}^*/\omega_i^2) \times \\ \times \cos \omega_{\varepsilon_i} t + (\dot{Z}_i + \varepsilon_i(z_i^0 - R_{is}^*/\omega_i^2)) \sin \omega_{\varepsilon_i} t/\omega_{\varepsilon_i}] , \quad (6)$$

где

$$\Delta_{ij} = (\omega_i^2 - j^2\nu^2)^2 + 4\varepsilon_i^2 j^2\nu^2 ,$$

$\omega_{\varepsilon i} = \sqrt{\omega_i^2 - \varepsilon_i^2}$, Z_i^0 и Z_i начальные условия при $t = t_k'$.

Таким образом, (6) представляют собой уравнения движения системы в нормальных координатах и могут рассматриваться, как уравнения неустановившихся вынужденных колебаний одномассовых осцилляторов. Из уравнений вида (6), в частности, следуют:

а) выражения для перемещений упругой системы от статических сил, определяемые путем разложения последних по формам собственных колебаний;

б) уравнения свободных колебаний одномассового осциллятора с кусочно-линейным законом упругой силы;

в) уравнения неустановившихся вынужденных колебаний линейной системы с одной степенью свободы.

Для определения перемещений в исходных координатах необходима одна матричная операция (4). После проверки перемещений на выполнение неравенств типа

$$Z_k(t) \leq \bar{Z}_k, \quad (7)$$

т. е. на условия достижения границ излома характеристик связей, делается шаг движения по времени t . При нарушении неравенств (7) изменяются только значения компонент уравнений (6), а структура формул остается прежней, т. е. уравнения стыкуются.

Очевидно, что полученное решение для задач высокопорядка следует реализовать на ЭЦВМ, на которой решение проблемы собственных значений (определение $\omega_i^2(\bar{z})$ и V) не составляет принципиальных трудностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958, с. 408.

2. Den Hartog, R. M. Heiles. Journal of applied Mechanics. Cambridge, 1936, p. 127—130, v. 3, N 4.

3. Лазарян В. А., Конашенко С. И. Обобщенные функции в задачах механики. Киев: Наукова думка, 1974, с. 192.

4. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971, с. 108.

5. Лурье А. И., Чекмарёв А. И. Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из двух прямолинейных отрезков. — Прикладная математика и механика. ОН АН СССР, 1937, № 3, с. 308—323.

ИССЛЕДОВАНИЕ УДАРА ПОД УГЛОМ МЕТОДОМ «КРУПНЫХ ЧАСТИЦ»

В. А. ГРИДНЕВА, Л. И. ШАХТМЕЙСТЕР

Большой интерес при изучении ударного взаимодействия твердых тел представляет исследование удара под углом, так как в реальных условиях редко происходит столкновение двух тел по нормали. Изучение удара под углом вносит дополнительные трудности. Так, нельзя выделить ось симметрии, как это обычно делается при нормальном ударе, поэтому расчеты проводятся по двумерному методу в плоских координатах. Это существенно трехмерная задача, однако и в двумерной постановке возможно получить определенные закономерности такого взаимодействия.

Во всех случаях при расчетах в качестве материала бойка и преграды была выбрана сталь. Боек имеет форму круга с диаметром 0,6 см, преграда — толщиной 3 см. Боковые поверхности преграды жестко закреплены, тыльная сторона представляет собой свободную поверхность.

Рассмотрим процесс удара со скоростью $V_0 = 0,3$ см/мкс при $\alpha = 45^\circ$. Динамика внедрения и деформации соударяющихся тел показана в моменты времени $t = 0,5; 5; 10; 15$ мкс (рис. 1). В первый момент еще хорошо видна первоначальная форма бойка. Зона контакта представляет собой круг с диаметром около 0,75 диаметра бойка.

При $t = 5$ мкс верхний край бойка достиг уровня свободной поверхности преграды. Из-за интенсивного течения материала по краям кратера появляются выбросы в виде лепестков. Четко видна несдеформированная часть бойка. Картина явно несимметричная: боек сдвинут вправо. В следующий момент времени ($t = 10$ мкс) образовался кратер глубиной 0,5 диаметра

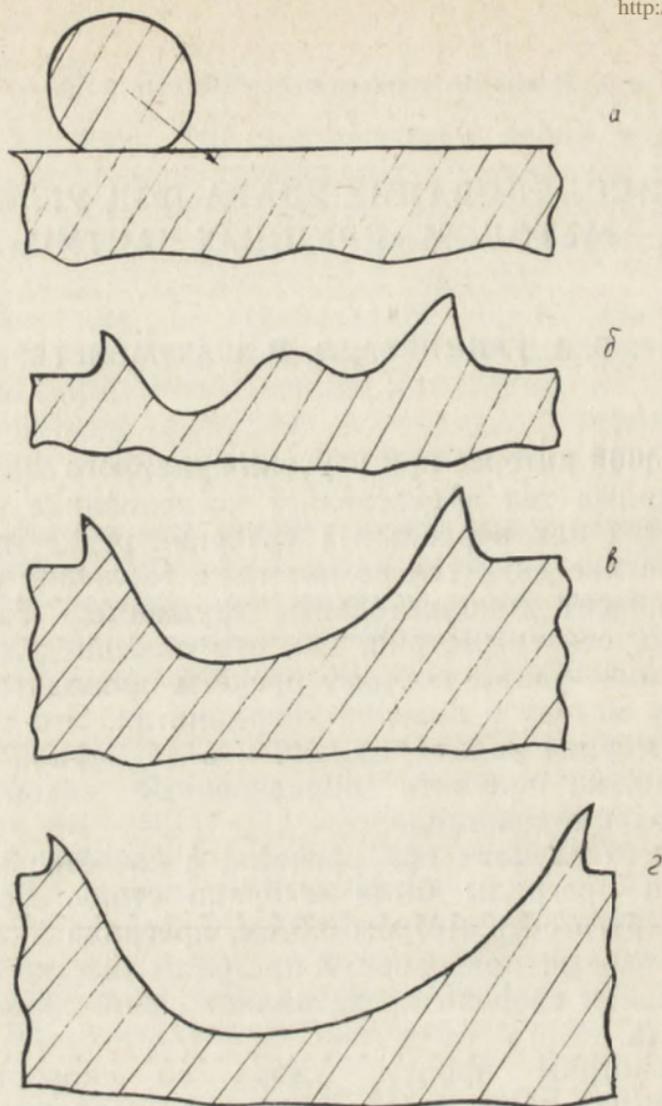


Рис. 1. Деформированное состояние ударника и преграды из стали при скорости встречи $v_0=0,3$ см/мкс и угла падения $\alpha=45^\circ$ в различные моменты времени: а — 0,5 мкс; б — 5 мкс; в — 10 мкс; г — 15 мкс

бойка. Лепестки практически не изменились. Кратер приобрел характерную антисимметричную форму. Интересно отметить, что он вытянут в направлении, перпендикулярном направлению начальной скорости удара. Это происходит из-за того, что масса бойка неравномерно распределяется по всему кратеру: бóльшая часть

массы бойка попадает на ту сторону, куда направлен удар. В дальнейшие моменты времени форма кратера подобна указанной, причем объем возрастает.

Далее обсуждаются формы кратеров при ударе со скоростью 0,2 и 0,4 см/мкс и углах встречи $\alpha = 90^\circ, 70^\circ, 45^\circ$. Размеры и форма кратера зависят от факторов: скорости удара, материала, угла встречи, формы бойка и т. д. Зафиксируем все определяющие параметры, кроме одного — угла встречи.

На рис. 2 представлены результаты для скорости

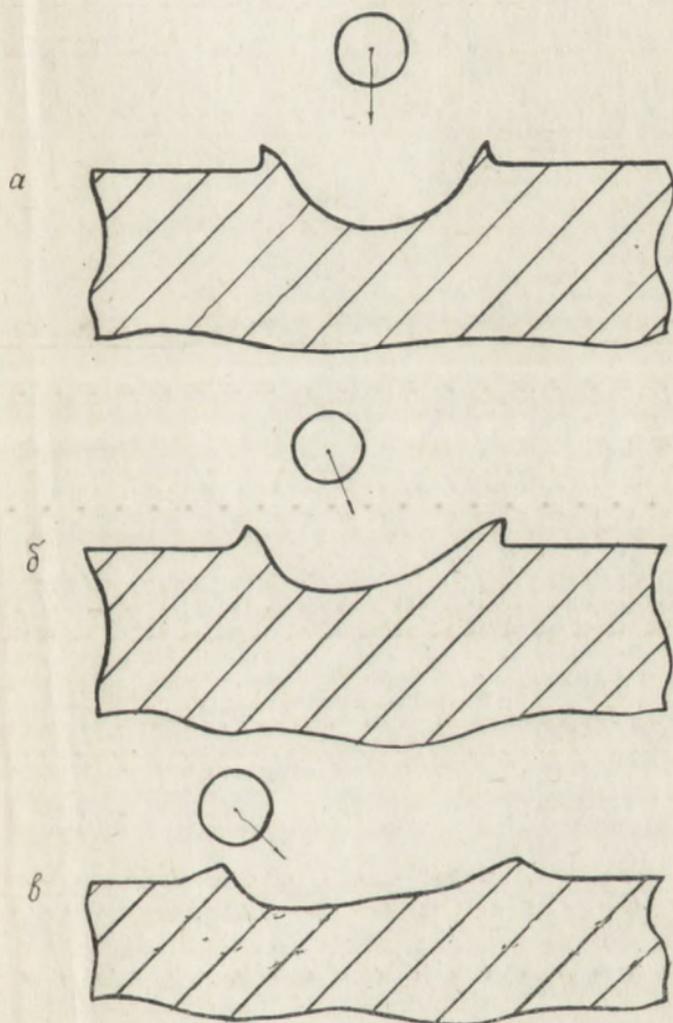


Рис. 2. Форма и размеры кратера и ударника при $v_0=0,2$ см/мкс и различных углах падения:
а — $\alpha=90^\circ$; б — $\alpha=70^\circ$; в — $\alpha=45^\circ$

удара $0,2$ см/мкс. При нормальном ударе (рис. 2, а) образуется симметричный кратер. Его глубина равна $0,83$ диаметра бойка, ширина на уровне свободной поверхности преграды составляет $2,5$ диаметра бойка. По краям кратера образуются лепестки, величина которых не превышает $0,33$ диаметра бойка.

При ударе под углом 70° глубина кратера несколько уменьшилась и составляет около $0,66$ диаметра бойка.

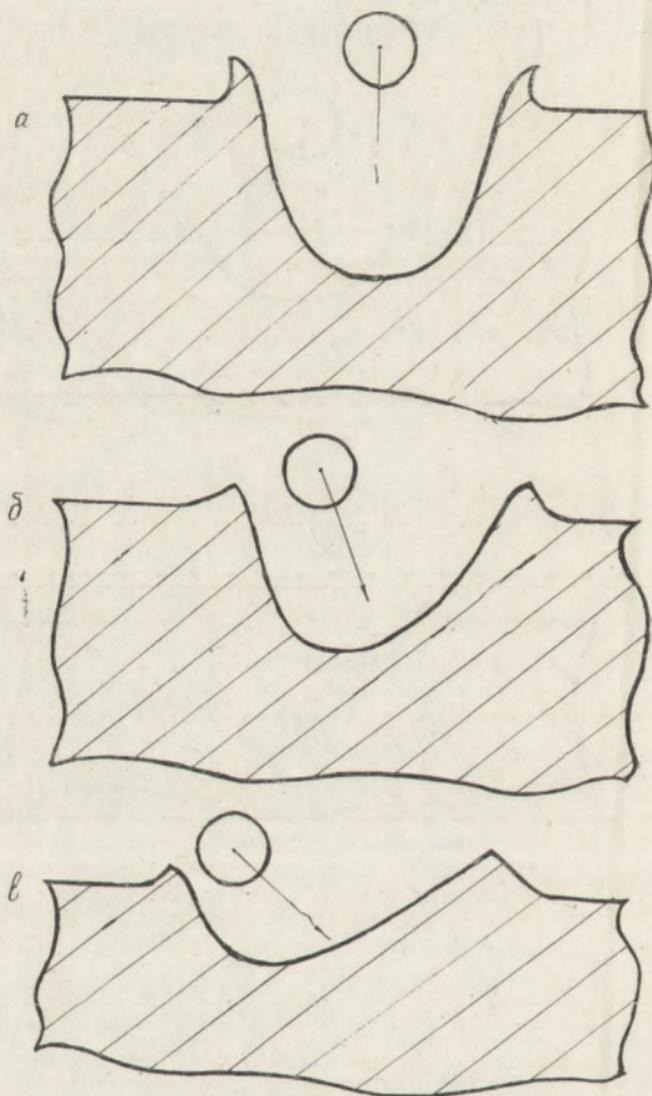


Рис. 3. Форма кратера и размер ударника при $v_0=0,4$ см/мкс и различных углах падения:
 $a - \alpha=90^\circ$; $б - \alpha=70^\circ$; $в - \alpha=45^\circ$

Кратер имеет антисимметричную форму. Объем кратера уменьшился по сравнению с предыдущим вариантом, однако ширина кратера возросла и составляет 2,7 диаметра бойка.

При ударе под углом 45° наблюдается резкое уменьшение объема кратера, глубина его составляет 0,33 диаметра бойка.

Для скорости удара 0,4 см/мкс также получены окончательные размеры кратеров (рис. 3). Легко увидеть, что при варьировании угла встречи кратеры получаются аналогичной формы.

Результаты расчетов по глубине кратеров для этих двух скоростей приведены на графике (рис. 4). Кри-

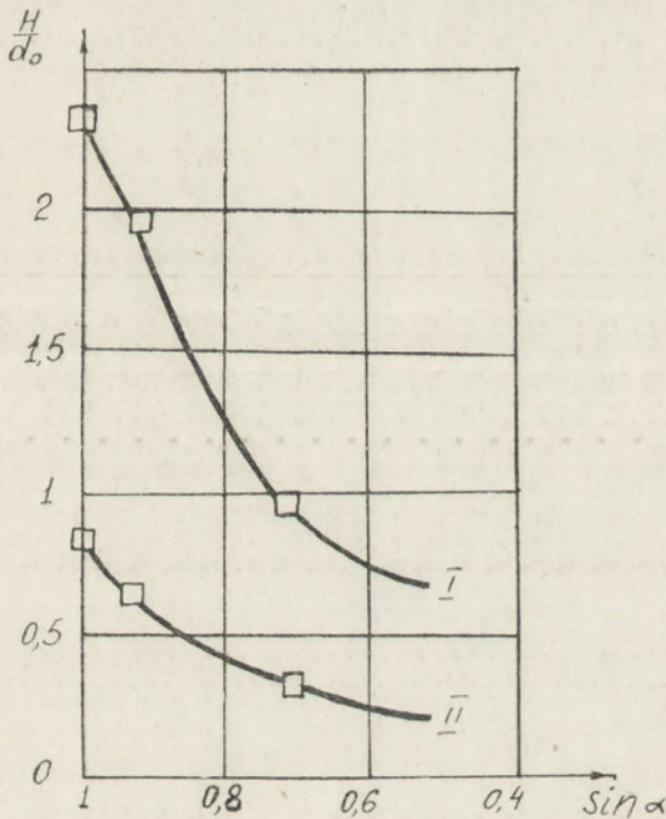


Рис. 4. Сталь \rightarrow сталь:
I — $v_0 = 0,4$ см/мкс; II — $v_0 = 0,2$ см/мкс

вая I — для скорости удара 0,4 см/мкс, II — для скорости удара 0,2 см/мкс. Вверх откладывается безразмерная глубина H/d_0 , где H — расстояние, отмеренное от на-

чального положения свободной поверхности до самой глубокой точки кратера, d_0 — начальный диаметр бойка, по второй оси — $\sin \alpha$. Отметим закономерность, вытекающую из рис. 4. Отношение глубины кратеров для каждого угла встречи при скоростях удара 0,4 и 0,2 см/мкс остается постоянным и равно $3 \pm 0,1$.

К ВОПРОСУ ФОРМИРОВАНИЯ ОГРАНИЧЕНИЙ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Л. С. ЛЯХОВИЧ, А. П. МАЛИНОВСКИЙ

Как известно [1], исследование и решение задачи оптимального проектирования конструкций значительно упрощается, если ограничительные функции, учитываемые при проектировании, выпуклы.

Рассмотрим вопрос формирования ограничений по устойчивости для стержневой системы с известным очертанием осей, условиями опирания и типом поперечных сечений. Материал конструкции упругий и изотропный. Оптимальной считается конструкция минимального веса, наименьшая критическая сила которой равна некоторому наперед заданному значению.

Предположим, что конструкция, для расчета которой принята дискретная модель, состоит из « n » участков. В пределах каждого участка жесткость на изгиб $c_i = EI_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) постоянна. Совокупность этих жесткостей образует « n »-мерный вектор евклидова пространства. Для такой системы задача определения критических сил и соответствующих им форм потери устойчивости сводится к решению задачи нахождения собственных чисел и векторов для матриц. Последние определяются численными методами и не содержат параметров конструкции в явном виде. Поэтому получить уравнение состояния [2], устанавливающее точную зависимость между значением критической силы (параметр состояния) и варьируемыми параметрами, удастся только для систем с небольшим числом степеней свободы не более двух-трех. Отсутствие такого уравнения требует производить проверку выполнения ограничений, наложенных на величину критической силы, на каждом шаге изменения варьируемых параметров путем расчета системы на устойчи-

вость и сравнения критической силы с допускаемой. Такой подход к решению задачи оптимизации представляется нецелесообразным, поскольку число испытаний при поиске оптимального решения, как правило, велико, а расчет на устойчивость является трудоемкой операцией и занимает много времени, даже если расчеты проводятся на ЭВМ.

Для записи ограничений и решения задачи оптимального проектирования используем метод последовательных приближений. Это позволит, опираясь на точное значение критической силы и соответствующей ей формы потери устойчивости, получить приближенную алгебраическую зависимость между значением критической силы системы и варьируемыми параметрами, которая позволила бы на каждом шаге метода последовательных приближений записать ограничение по устойчивости в виде выпуклых функций.

Каждая итерация состоит из двух этапов. На первом этапе производится расчет систем на устойчивость и формирование на основе полученных результатов, ограничений. На втором этапе с использованием математических методов оптимального проектирования конструкций ищется оптимальное на данном этапе решение.

Опуская особенности расчета на устойчивость, выбора метода поиска оптимального решения и его проведение, а также сходимости итерационных процедур, основное внимание уделим вопросу формирования ограничений.

Пусть R — матрица жесткости (реакций) системы, B — матрица, учитывающая влияние продольных сил при определении реакций, тогда наименьшую критическую силу λ и соответствующую ей форму потери устойчивости $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$ можно определить, отыскивая нетривиальное решение системы уравнений

$$(R - \lambda B) Y = 0. \quad (1)$$

Если λ есть критическая сила, а Y — нормированный собственный вектор, определяющий форму потери устойчивости, соответствующую λ , то можно записать

$$\lambda = \frac{Y^T R Y}{Y^T B Y}, \quad (2)$$

т. е. критическая сила может быть определена как стационарное значение квадратичной формы (2).

Представим матрицу жесткости в виде

$$R = \sum_{i=1}^t u_i R_i + \bar{R}, \quad (3)$$

где
 $u_i R_i$ — матрица жесткости i -го участка системы;
 \bar{R} — матрица жесткости той части конструкции, которая не изменяется в процессе проектирования;
 t — количество участков системы, жесткостные характеристики которых варьируются ($t \leq n$).

Зависимость изгибной жесткости сечения u_i от варьируемых параметров x_{ji} ($j = 1, 2; i = 1, 2, 3, \dots, n$) запишем в виде

$$u_i = f(x_{ji}) = \eta x_{1i} \cdot x_{2i}^m. \quad (4)$$

Здесь η — постоянная для данного типа сечений величина;

m — целое положительное число.

Выражение (4) позволяет установить зависимость между изгибной жесткостью и варьируемыми параметрами, определяющими размеры поперечного сечения. Рассмотрим несколько примеров этой зависимости. Для

$m = 3$, $\eta = \frac{E}{12}$ данная функция характеризует стержень прямоугольного поперечного сечения с варьируемой шириной (x_{1i}) и высотой (x_{2i}) сечения; при $m = 3$, $\eta = \frac{E}{12}$, $x_{1i} = b - \text{const}$ стержень постоянной ширины с

переменной высотой (x_{2i}). При $m = 4$ $\eta = \frac{\pi E}{4}$, $x_{1i} = 1 - \text{const}$

зависимость (4) описывает стержень круглого поперечного сечения с варьируемым радиусом сечения.

Таким образом, используя (4), можно задачу оптимального проектирования сформулировать как однопараметрическую, так и двухпараметрическую. Подставляя в (2) значение R по (3) получим

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^t u_i Y^T R_i Y + Y^T \bar{R} Y}{Y^T B Y}. \quad (5)$$

Выражение (5) определяет зависимость критической силы λ (параметр состояния) от жесткости сечения π_1 , связанной с варьируемыми параметрами зависимостью (4). Но использовать (5) для записи ограничений нецелесообразно, так как допустимая область пространства параметров проектирования не будет вогнутой (выпуклой), а сама граничная поверхность, полученная с использованием (5), будет существенно отличаться от точной.

Покажем это на примере шарнирно опертой балки прямоугольного поперечного сечения сжатой силой $P = 700,0$ кН. Балка пролетом $L = 6$ м разбивается по длине на два участка, в пределах которых варьируется высота (h_1, h_2) и ширина сечений (b_1, b_2). Расчет на устойчивость осуществляется с использованием дискретной расчетной схемы в форме метода жестких конечных элементов [3]. Ограничение по устойчивости запишем в виде

$$k_y \bar{P} - \lambda \leq 0, \quad (6)$$

где $k_y = 3$ коэффициент запаса по устойчивости. Запишем ограничение (6) в форме равенства с учетом зависимостей (4), (5) и исходных данных примера

$$2100 - \frac{E}{12} \frac{\sum_{i=1}^2 b_i h_i^3 Y^T R_i Y + Y^T \bar{R} Y}{Y^T B Y} = 0 \quad (7)$$

Уравнение (7) делит пространство параметров проектирования на допустимую и недопустимую области. Показать графически на плоскости получаемую при этом граничную поверхность не представляется возможным, поэтому покажем сечения этой поверхности различными плоскостями.

Допустим, что ширина сечений не варьируется и постоянна по длине стержня $b_1 = b_2 = 0,15$ м, а отношение варьируемых параметров $h_2/h_1 = \alpha$.

Тогда, задаваясь значением α и подставляя в (1) $b_1 = b_2 = 0,15$ м, $h_2 = \alpha h_1$, можно определить значение h_1 , при котором наименьшая критическая сила равна заданной величине $\lambda = 2100$ кН. Зная α, h_1 нетрудно определить h_2 и, решая систему (1), определить форму потери устойчивости, соответствующую этим значениям параметров проектирования и значению $\lambda = 2100$ кН.

Задавая последовательно величине α ряд значений, получим в пространстве параметров проектирования соответствующий ряд точек, соединяя которые получим линию равного уровня I (рис. 1). Для любой точки про-

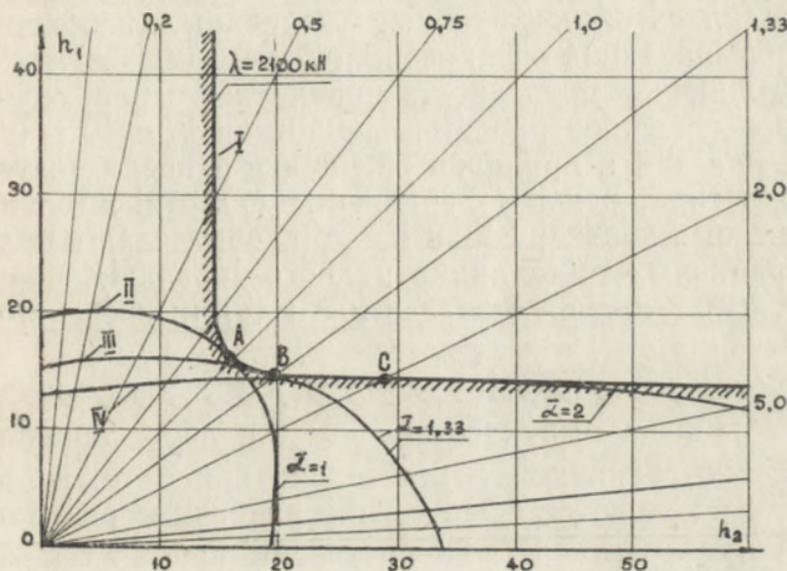


Рис. 7

странства варьируемых параметров, расположенной на кривой I, критическая сила $\lambda = 2100 \text{ кН}$.

Необходимо подчеркнуть, что все точки этой кривой соответствуют точному решению уравнений (1), т. е. границная линия определена точно и всегда обращена выпуклостью к области неустойчивости. На рис. 2, 3, 4 линия равного уровня I построена точно, по аналогичной схеме. Варьировалось отношение параметров, обозначенных на соответствующих осях координат, другая пара параметров считалась постоянной.

Использование уравнений (7) в качестве ограничения подразумевает, что значения Y, R_1, R_2, \bar{R}, B известны на каждом шаге метода последовательных приближений. Например, принимая $\alpha = 1,0, \bar{b}_1 = \bar{b}_2 = 0,15 \text{ м}, \bar{b}_1 = \bar{b}_2 = 0,1557 \text{ м}$ необходимо сформировать матрицы R_1, R_2, B , а также определить наименьшую критическую силу λ и соответствующую ей форму потери устойчивости. Поскольку вышеуказанные значения $\alpha, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{h}_1, \bar{h}_2$ соответствуют точке A (рис. 1), то значение $\lambda = 2100 \text{ кН}$.

Подставляя полученные величины Y , R_1 , R_2 ; \bar{R} , B в (7), получим приближенное уравнение граничной поверхности, которое дает точное решение только в случае, когда значения варьируемых параметров равны, тем значениям, при которых производился расчет на устойчивость и определялись вышеуказанные величины, необходимые для формирования ограничения (7). Во всех других случаях граничная поверхность определяется приближенно. Построим эту поверхность, принимая $b_1 = b_2 = 0.15 - \text{const}$, $h_2 = \alpha h_1$ и придавая величине α последовательно ряд значений, решаем уравнение (7) относительно h_1 . Полученные значения h_1 и $h_2 = \alpha h_1$, определяют положение граничных точек линии равного уровня Π , полученной с использованием зависимости (5) и показанной на рис. 1.

Как видно из рис. 1, кривая Π при любых значениях $\alpha \neq \bar{\alpha}$ обращена выпуклостью вверх и дает правильное положение граничной точки только при $\alpha = \bar{\alpha}$, в других случаях получаются существенно различные результаты. Граничные кривые III, IV построены при $\bar{\alpha} = 1,33$ и $\bar{\alpha} = 2,0$. На рис. 2, 3, 4 показано сечение граничной поверхности плоскостями $b_2, h_1 - \text{const}$, $h_1, h_2 - \text{const}$, $b_2, h_2 - \text{const}$.

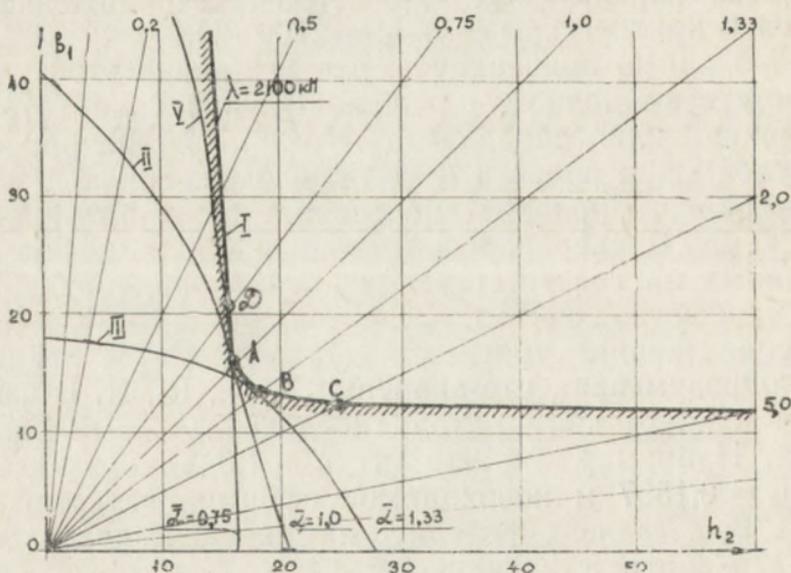


Рис. 2

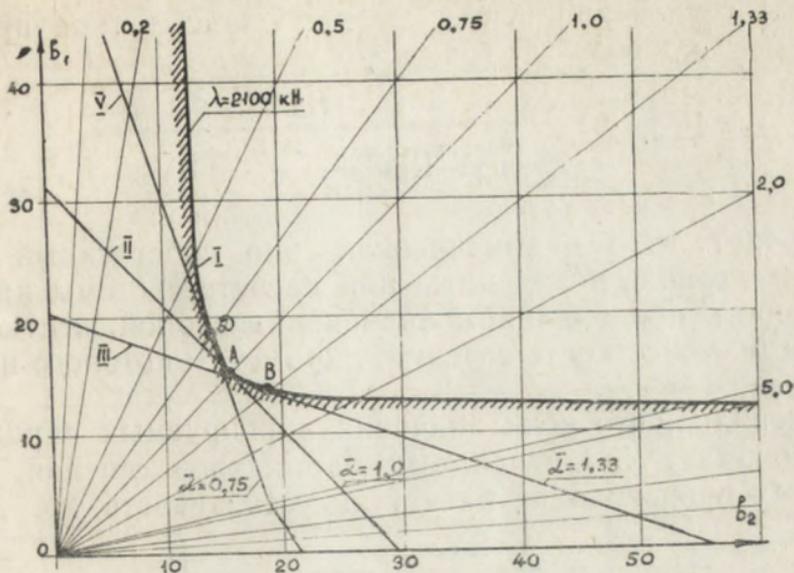


Рис. 3

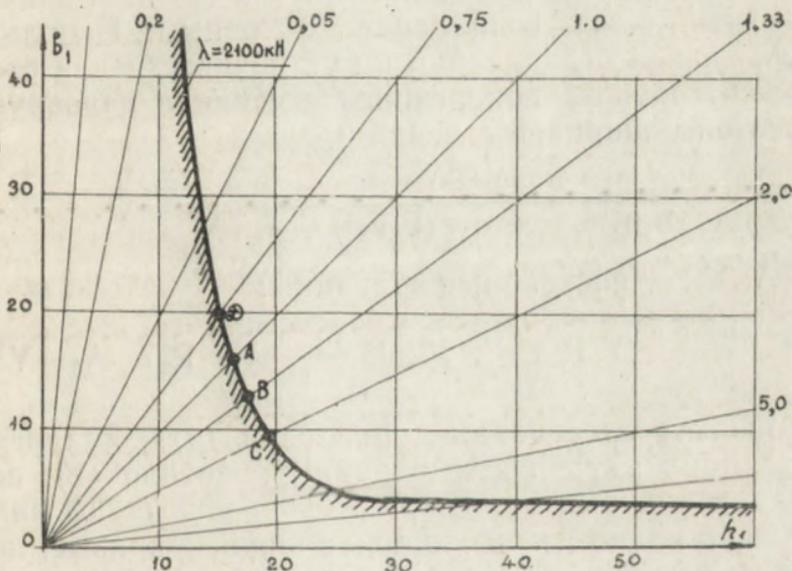


Рис. 4

Анализируя все эти графики, можно сделать вывод, что граничная поверхность, построенная по (7), существенно как качественно, так и по количественным характеристикам отличается от точной.

Для устранения вышеуказанных недостатков преобразуем выражение (5) к виду

$$\bar{\lambda} = F(u_i) = \bar{\lambda}^2 \frac{Y^T B Y}{\sum_{i=1}^t \bar{u}_i Y^T R_i Y \frac{\bar{u}_i}{u_i} + Y^T \bar{R} Y} \quad (8)$$

Здесь λ , Y , R_i , \bar{R} — критическая сила, собственный вектор и матрицы, полученные при расчете системы на устойчивость при заданном значении изгибной жесткости \bar{u}_i , где u_i — жесткость сечения, параметры которого варьируются.

Очевидно, что если значения варьируемых параметров совпадут со значениями параметров сечения, при которых производился расчет на устойчивость, то

$$\frac{Y^T B Y}{\sum_{i=1}^t u_i Y^T R_i Y + Y^T \bar{R} Y} = \frac{1}{\lambda}$$

В этом случае приближенная формула (8) дает значение критической силы, совпадающее с точным. Используем (8) для записи ограничений по устойчивости для стержня прямоугольного поперечного сечения с варьируемыми высотой и шириной сечения:

$$k_y \bar{P} - \frac{\lambda^2 Y^T B Y}{A_1 (b_1 h_1^3)^{-1} + A_2 (b_2 h_2^3)^{-1} + A_3} = 0 \quad (9)$$

Здесь A_1, A_2 — постоянные величины:

$$A_1 = E \frac{\bar{b}_1^2 \bar{h}_1^6}{12} Y^T R_1 Y; \quad A_2 = E \frac{\bar{b}_2^2 \bar{h}_2^6}{12} Y^T R_2 Y; \quad A_3 = Y^T \bar{R} Y$$

Проводя исследования уравнения (9), аналогично проведенному выше исследованию уравнения (7), получим ряд граничных кривых, представленных на рис. 4, 5, 6, 7. Как видно из рисунков, граничные кривые, полученные с использованием приближенной зависимости (8), не только достаточно точно соответствуют граничной кривой I, но и дают правильную качественную картину. Все кривые II, III, IV, V, представленные на рис. 4, 5, 6, 7, обращены, как и кривая I, выпуклостью к области неустойчивости.

В случае, когда $b_2, h_2 = \text{const}$, а варьируется соотношение между параметрами b_1, h_1 (рис. 4), все кривые,

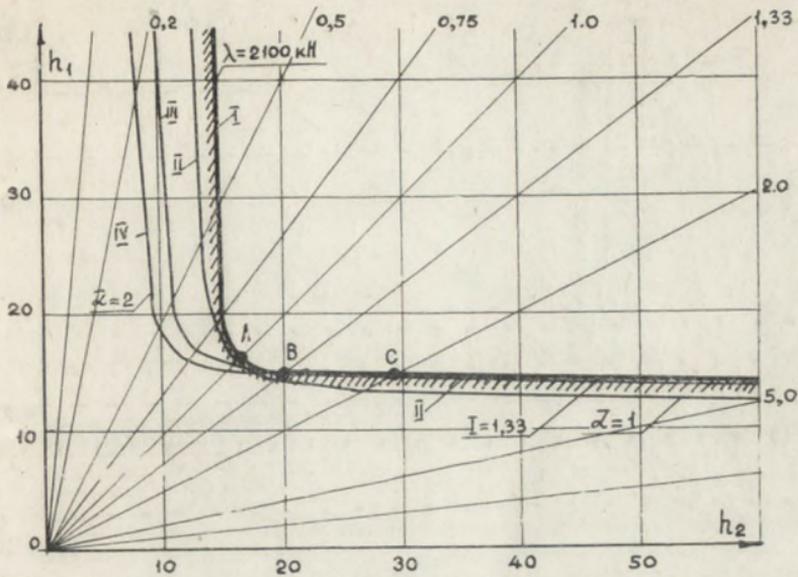


Рис. 5.

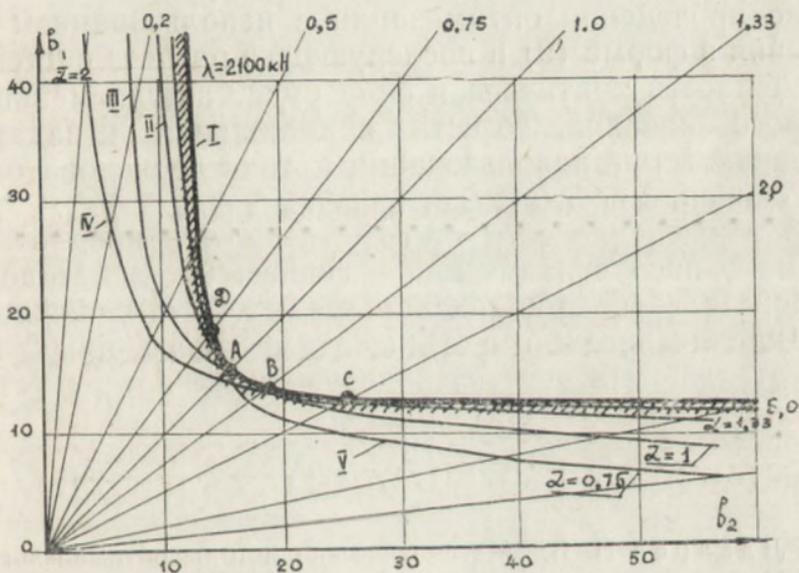


Рис. 6

полученные как с применением формулы (5), так и формулы (8), совпадают с точным решением.

Все граничные кривые, полученные с использованием зависимости (8), выпуклы и лежат ниже линии равного уравнения (1) в области неустойчивости. Следовательно,

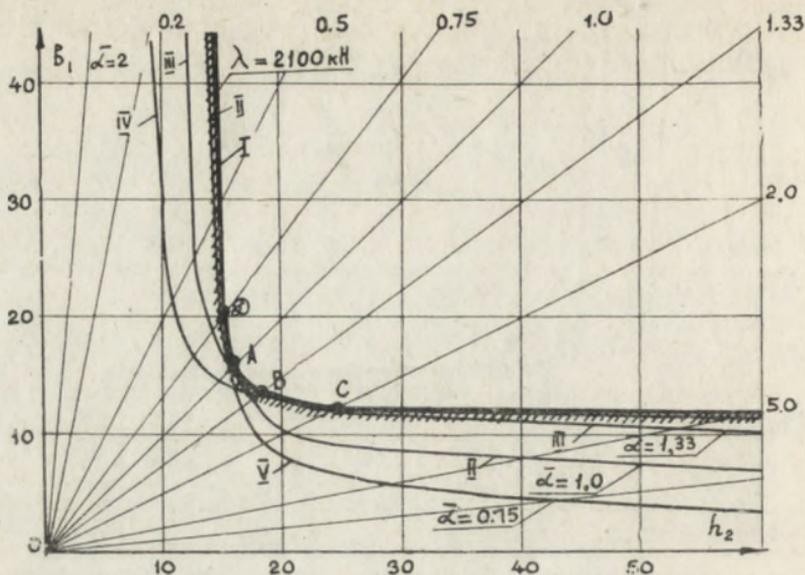


Рис. 1.

после проведения оптимизации с использованием ограничения в форме (9) и последующего расчета системы на устойчивость критическая сила будет всегда меньше заданного значения. То есть приближения к заданному значению λ при использовании метода последовательных приближений всегда будет снизу.

В заключение следует отметить, что предложенная форма записи ограничений в сочетании с методом последовательных приближений может быть успешно применена для решения задачи оптимального проектирования стержневых систем, подверженных потере устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лазарев И. Б. Математические методы оптимального проектирования конструкций. Новосибирск: НИИЖТ, 1974, 192 с.
2. Сергеев Н. Д., Богатырев А. И. Проблемы оптимального проектирования конструкций. Ленинград: Стройиздат, 1971, 136 с.
3. Александров А. В. Дискретная модель для расчета ортотропных пластин и оболочек. — Труды МИИТ, 1971, вып. 364, с. 3—9.

МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ ПО ЛИНИЯМ ПРИ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В. В. РОГАЛЕВИЧ, А. Л. БЕРЕЗОВИЧ

Сведение линейных дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений весьма просто осуществляется методом коллокации по линиям [1]. Обоснование метода для некоторых типов линейных дифференциальных уравнений дано в [2—4]. Однако при решении конкретных прикладных задач метод не нашел широкого применения.

Ниже излагается аппарат решения линейных задач изгиба прямоугольных пластин методом коллокации по линиям с последующим применением метода смешанной коллокации для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль линий.

1. Рассмотрим прямоугольную в плане изотропную пластину с размерами сторон $2a + 2b$. Начало координат совместим с серединой левой стороны, ось y^* направим вдоль этой стороны, а ось x^* перпендикулярно к ней (рис. 1). Полагаем, что толщина пластины изменяется в направлении оси x^* по линейному закону $h^* = h_0(1 - ax^*)$, $0 \leq a < \frac{1}{2a}$. Пусть край пластины $x^* = 0$ защемлен, края $y^* = \pm b$ — защемлены или шарнирно оперты, а край $x^* = 2a$ — свободен, шарнирно оперт, защемлен или подкреплен ребром. Пластина нагружена распределенным давлением q , которое в общем случае может быть и неравномерным.

Уравнение равновесия и краевые условия представим в безразмерных параметрах, причем дифференцирование по x обозначим штрихом ($'$), а по y — точкой (\cdot).

В результате уравнение равновесия примет следующий вид:

$$D[\lambda^2 w'''' + 2w'''' + (1/\lambda^2)w'''] 2D'(\lambda^2 w''' + w'') + (1) \\ + D''(\lambda^2 w'' + \mu w') = (\lambda^{-2}/16) \text{cp}(x,y).$$

Здесь

$$x = x^*/a; \quad y = y^*/b; \quad \lambda = b/a; \quad w = w^*/h_0;$$

$$h = h^*/h_0 = 1 - \alpha x; \quad 0 \leq \alpha < 0,5; \quad D = h^3;$$

$$D' = -3\alpha h^2; \quad D'' = 6\alpha^2 h; \quad c = 12(1 - \mu^2);$$

$$p - q(2b)^4/(Eh_0^4);$$

w^* — прогиб; h_0 — толщина пластины в сечении $x = 0$;
 E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Краевые условия при $x=0$ и $y=\pm 1$ запишем соответственно в таком виде:

$$w = 0, \quad w' = 0,$$

$$w = 0, \quad w' = 0 \text{ или } w'' = 0. \quad (3)$$

Условия при $x=2$ представим в обобщенной форме, включающей как три классических варианта опирания (заделку, шарнирное опирание, свободный край), так и условия сопряжения пластины и ребра $\alpha^* \times \delta^*$ (рис. 1)

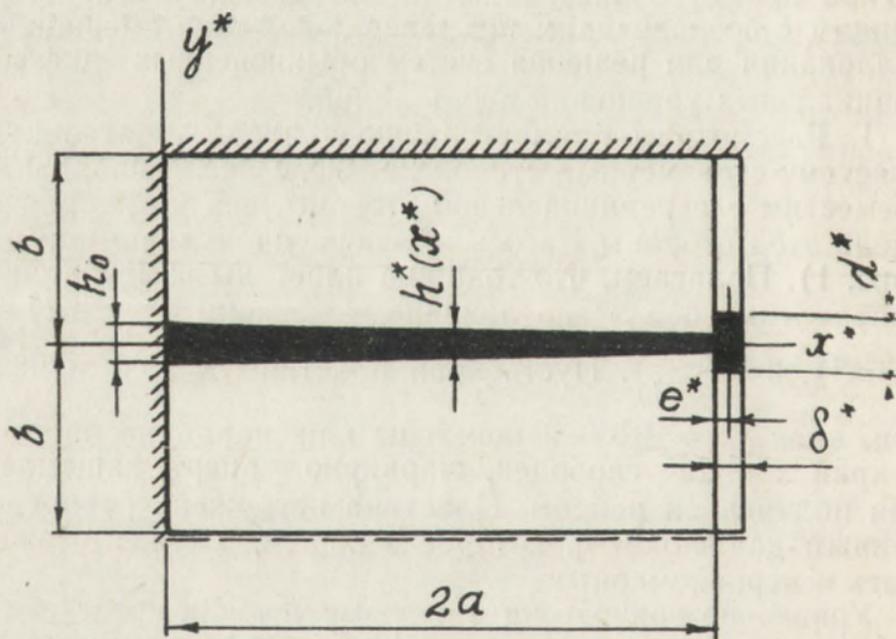


Рис. 1

с учетом изгибной и крутильной жесткости последнего.

Имеем

$$B_1 w'''' - \{(1 - 2\alpha)^3 [\lambda^2 w''' + (2 - \mu) w''] - 3\alpha(1 - 2\alpha)^2 (\lambda^2 w'' + \mu w')\} \gamma_1 w \gamma_1 = 0, \quad (4)$$

$$C w'' - B_2 w'''' - (1 - 2\alpha)^3 (\lambda^2 w'' + \mu w') \gamma_3 + w' \gamma_4 = 0, \quad (5)$$

где

$$B_1 = (1/\lambda)(h_0/b) E_p \delta d^3 (1 - \mu^2); \quad B_2 = B_1 \lambda (h_0/b) e;$$

$$C = \lambda (h_0/b) E_p \gamma_k \delta^4 6(1 - \mu); \quad \delta = \delta^*/h_0; \quad d = d^*/h_0; \\ e = \delta/2; \quad E_p = E_p^*/E;$$

E_p^* — модуль упругости материала ребра; γ_k — параметр крутильной жесткости ($I_k = \nu_k \delta^4$); $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ — коэффициенты, принимающие значения 0 или 1 и позволяющие совместно с размером ребра δ варьировать типом краевых условий при $x=2$. Так, при $\delta = \gamma_1 = \gamma_3 = 0, \gamma_2 = \gamma_4 = 1$ край защемлен; при $\delta = \gamma_1 = \gamma_4 = 0, \gamma_2 = \gamma_3 = 1$ — шарнирно оперт; если $\delta \neq 0, \gamma_1 = \gamma_3 = 1, \gamma_2 = \gamma_4 = 0$, то имеет место сопряжение с ребром; наконец, при $\delta = 0, \gamma_1 = \gamma_3 = 1, \gamma_2 = \gamma_4 = 0$ — край свободен.

2. Приближенное решение задачи строим в виде отрезка ряда

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^s w_i(x) w_i(y), \quad (6)$$

где $w_i(y)$ — система заданных функций, удовлетворяющих условиям (3);

$w_i(x)$ — система искомых функций.

Подставим (6) в (1) и потребуем, чтобы полученное уравнение выполнялось по s линиям коллокации, параллельных оси x . Для j -й линии, положение которой определяется координатой y_j (рис. 2), будем иметь

$$\sum_{i=1}^s \left\{ D [\lambda^2 w_i''''(x) w_i(y_j) + 2w_i''(x) w_i''(y_j) + \right. \\ \left. + (1/\lambda^2) w_i(x) w_i''''(y_j)] + 2D' [\lambda^2 w_i'''(x) w_i(y_j) + \right. \\ \left. + w_i'(x) w_i''(y_j)] + D'' [\lambda^2 w_i''(x) w_i(y_j) + \mu w_i(x) w_i''(y_j)] \right\} = \\ = (\lambda^{-2}/16) c p(x, y_j), \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (7)$$

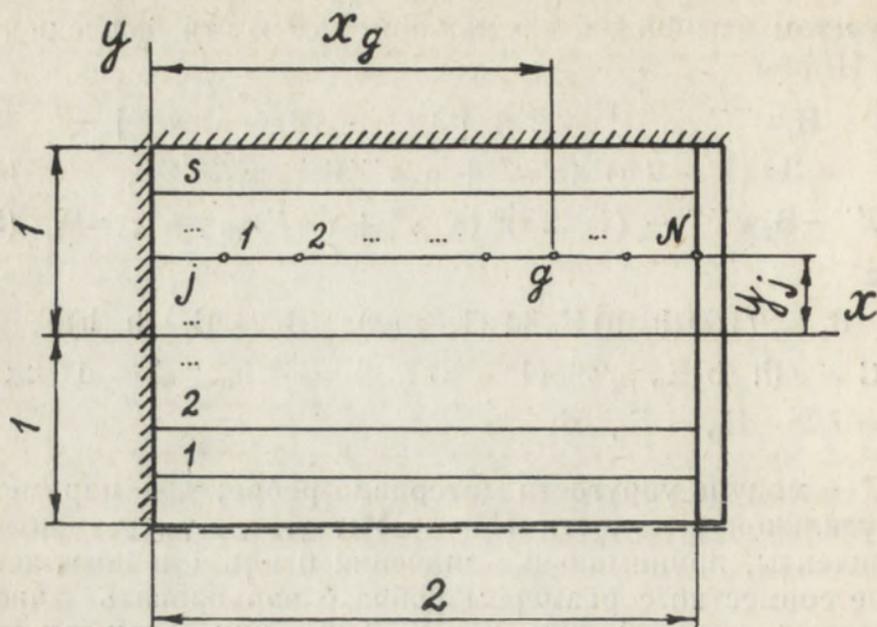


Рис. 2

Краевые условия при $x = 0$ примут при этом для каждой линии коллокации следующий вид:

$$\sum_{i=1}^s w_i(x) w_i(y_j) = 0, \quad \sum_{i=1}^s w_i'(x) w_i(y_j) = 0, \quad (8)$$

$$(j = 1, 2, \dots, s),$$

а обобщенные условия (4), (5) запишутся при $x=2$ так:

$$\sum_{i=1}^s \{B_1 w_i(x) w_i^{\dots}(y_j) - (1 - 2\alpha)^3 [\lambda^2 w_i'''(x) w_i(y_j) + (2 - \mu) w_i'(x) w_i^{\dots}(y_j)] \gamma_1 + 3\alpha(1 - 2\alpha)^2 [\lambda^2 w_i''(x) w_i(y_j) + \mu w_i(x) w_i^{\dots}(y_j)] \gamma_1 + [w_i(x) w_i(y_j)] \gamma_2\} = 0, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^s \{C w_i'(x) w_i^{\dots}(y_j) - B_2 w_i(x) w_i^{\dots}(y_j) - (1 - 2\alpha)^3 [\lambda^2 w_i''(x) w_i(y_j) + \mu w_i(x) w_i^{\dots}(y_j)] \gamma_3 + [w_i'(x) w_i(y_j)] \gamma_4\} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (10)$$

В результате получена система s обыкновенных дифференциальных уравнений (7) четвертого порядка, содержащая s неизвестных функций $w_i(x)$, которые необ-

ходимо определить с использованием $4 \times s$ краевых условий (8), (9), (10).

Для рассматриваемых задач построение точного решения (7) — (10) не представляется возможным, и следует воспользоваться одним из известных приближенных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений [5].

Применим метод коллокации смешанного типа, для чего искомое решение представим в виде

$$w_i(x) = \sum_{k=1}^f A_r x^{k+1}, \quad r=f(i-1)+k, \quad (i=1,2,\dots, s), \quad (11)$$

при котором краевые условия (8) выполняются на каждой линии точно.

Для определения A_r введем вдоль каждой линии N точек коллокации ($N=f-2$) и потребуем, чтобы в этих точках уравнения (7) выполнялись точно. Подставляя (11) в (7), получим для точки g (рис. 2) алгебраическое уравнение, которое запишем в краткой форме:

$$\sum_{i=1}^s \left\{ \sum_{k=1}^f A_r [F_1(\lambda, \mu, D, D', D'', w_i(y_j), w_i''(y_j), w_i''''(y_j); x_g^{k-3}, \dots, x_g^{k+1}, k)] \right\} = \lambda^{-2}/16) \operatorname{cp}(x_g, y_j), \quad (12)$$

где ($j=1, 2, \dots, s; g=1, 2, \dots, N$).

Так как краевые условия (9), (10) остались невыполненными, то необходимо подставить (11) в (9), (10) и записать последние для точки N каждой линии, т. е. при $x=2$.

В краткой записи имеем

$$\sum_{i=1}^s \left\{ \sum_{k=1}^f A_r [F_2(\lambda, \mu, \alpha, w_i(y_j), w_i''(y_j), w_i''''(y_j), 2^{k-2}, \dots, 2^{k+1}, k, B_1, \gamma_1, \gamma_2)] \right\} = 0, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^s \left\{ \sum_{k=1}^f A_r [F_3(\lambda, \mu, \alpha, w_i(y_j), w_i''(y_j), w_i''''(y_j), 2^{k-1}, \dots, 2^{k+1}, k, C, B_2, \gamma_3, \gamma_4)] \right\} = 0. \quad (14)$$

Таким образом, сформирована система $(s \times f)$ линейных алгебраических уравнений, из решения которой находим $(s \times f)$ значений коэффициентов A_r , а затем s значений $w_i(x)$.

Излагая методику решения задачи, мы не конкретизировали вид системы заданных функций $w_i(y)$. Основываясь на [6], [7] и обобщая запись с учетом трех вариантов краевых условий при $y = \pm 1$, представим $w_i(y)$ в следующем виде:

$$w_i(y) = y^{m(i-1)} + a_i y^{mi} + b_i y^{m(i+1)} + c_i y^{i+2} + d_i y^{i+3}, \quad (15)$$

где

$$a_i = -2 \frac{(2mi - 1)(m - 1) + \Gamma}{(2i - 1)m + 3}; \quad c_i = \frac{2 - m}{i + 1};$$

$$b_i = \frac{[m(m - 1) - 1]4i + \Gamma m - 3}{(2i - 1)m + 3}; \quad d_i = \frac{(2 - m)i}{i + 1};$$

$\Gamma = 0, m = 2$ — края $y = \pm 1$ шарнирно оперты;
 $\Gamma = 1, m = 1$ — край $y = -1$ шарнирно оперт, а край $y = +1$ зашцеилен;

3. Рассмотрим некоторые результаты решения. На рис. 3—5 представлены эпюры безразмерных прогибов w

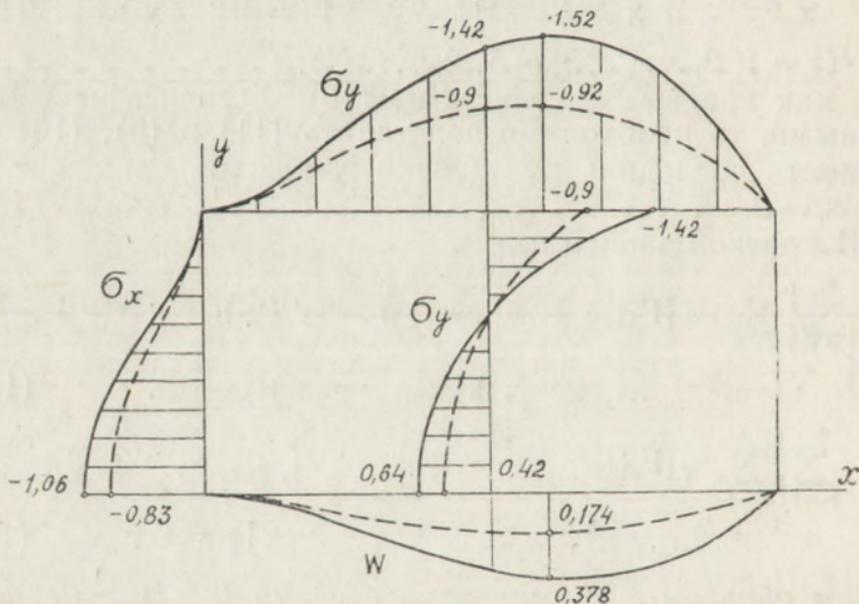


Рис. 3

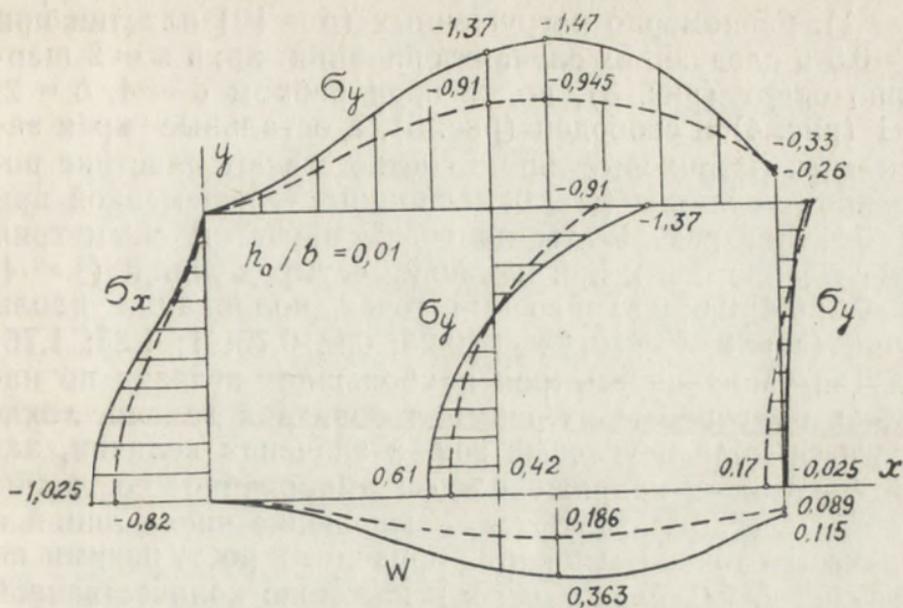


Рис. 4

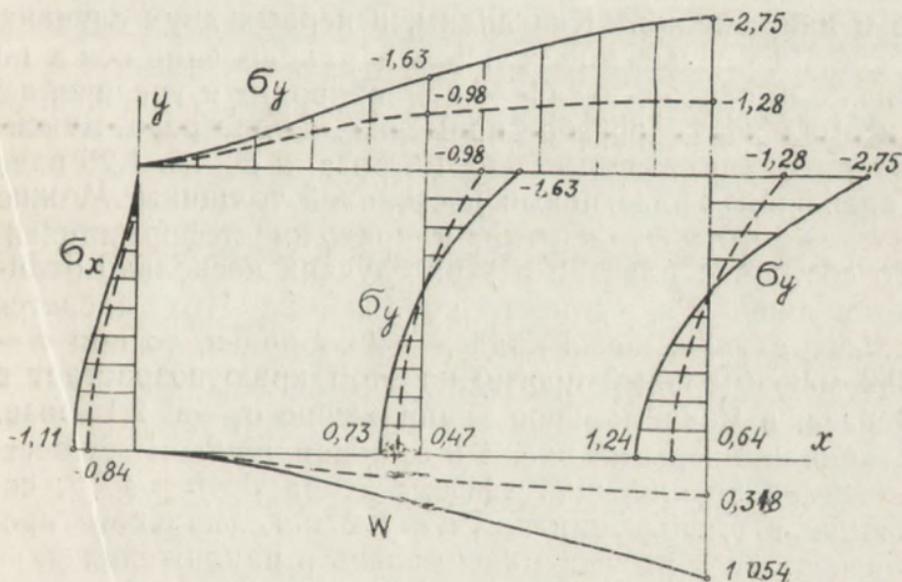


Рис. 5

и напряжений σ_x и σ_y $\left(\sigma = \sigma^* \frac{b^2}{Eh_0^2} \right)$ для квадратных

($\lambda = 1$), равномерно нагруженных ($p = 10$) пластин при $\mu = 0,3$ и следующих случаях опирания: край $x = 2$ шарнирно оперт (рис. 3), подкреплен ребром $d = 4$, $\delta = 2$, $e = 1$ (рис. 4) и свободен (рис. 5), а остальные края заземлены. Штриховые линии соответствуют пластине постоянной толщины ($\alpha = 0$), сплошные — переменной при $\alpha = 0,2$. Все результаты получены с учетом симметрии относительно оси x при наличии четырех линий ($s = 4$, $y_j = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$) и восьми точек коллокации вдоль линий ($N = 8$, $i = 10$, $x_g = 0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,25; 1,75; 2$). Для таких параметров наибольшие невязки по нагрузке, получаемые из решения обратной задачи, локализуются вблизи угловых зон, а значения величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние пластины, стабилизируются. Уменьшение числа линий и количества точек коллокации приводит к росту невязок по нагрузке и, как следствие, к искажению количественной и даже качественной картины распределения прогибов и напряжений.

Кратко остановимся на влиянии переменности толщины и способа опирания края $x = 2$ на параметры прогибов и напряжений. Как видим, в первых двух случаях (рис. 3, 4) уменьшение толщины в направлении оси x по линейному закону $h = (1 - 0,2x)$ приводит к увеличению максимального прогиба примерно в два раза, максимального напряжения σ_y — в 1,6 раза, а σ_x — в 1,25 раза по сравнению с пластинами постоянной толщины. Можно также заметить, что картина напряженно-деформированного состояния пластин в этих случаях несколько отличается лишь в окрестности края $x = 2$. Что касается третьего случая, когда край $x = 2$ свободен, то при $\alpha = 0,2$ максимальный прогиб на этом краю возрастает в 3,3 раза, а максимальное напряжение σ_y — в 2,1 раза. Сравнивая эпюры на рис. 4 и 5, обнаруживаем существенный подкрепляющий эффект ребра $d \times \delta = 4 \times 2$, состоящий в уменьшении при $\alpha = 0,2$ максимального прогиба почти в 3 раза, а максимального напряжения σ_y — в 2 раза. Отметим, что для пластин постоянной толщины результаты, представленные на рис. 3 и 5, совпадают с известными [8].

В заключение подчеркнем, что вопросы о рациональном размещении линий коллокации и о выборе наиболее эффективного метода решения систем обыкновенных

дифференциальных уравнений высокого порядка вдоль линий требуют дальнейшего изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных. — ДАН СССР, 1934, т. 2, № 9.
 2. Ярцев Ю. П. О сходимости метода коллокации по линиям. — ДУ, 1967, т. 3, № 9.
 3. Ярцев Ю. П. О методе коллокации по линиям. — ДУ, 1968, т. 4, № 5.
 4. Ярцев Ю. П. Об одном варианте метода коллокации по линиям. — ДУ, 1970, т. 6, № 9.
 5. Гавурин М. К. Лекции по методам вычислений. М.: Наука, 1971, 248 с.
 6. Рогалевич В. В. Метод коллокации и наименьших квадратов в нелинейных задачах изгиба прямоугольных пластин и оболочек. — В кн.: Строительная механика и расчет сооружений, 1979, № 3, с. 5—8.
 7. Корсаков С. Д., Рогалевич В. В. Методы наименьших квадратов в области и на границе при решении сложных нелинейных краевых задач теории пластин и оболочек. — Труды XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван.: Изд-во Ереван. ун-та, 1980, с. 255—261.
 8. Вайнберг Д. В., Вайнберг Е. Д. Расчет пластин. Киев: Будівельник, 1970, 488 с.
-

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ПОЛОС К РАСЧЕТУ ПЛАСТИН НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Е. И. МУЛИК

В данной работе предлагается использовать метод конечных элементов в смешанной форме метода конечных полос, в котором неизвестные по одной координате представлены отрезками ряда Фурье, а по другой — функциями Эрмита, для решения задач колебаний.

Изложим идею метода на задаче о собственных колебаниях жестко защемленной пластины (рис. 1). Задачу

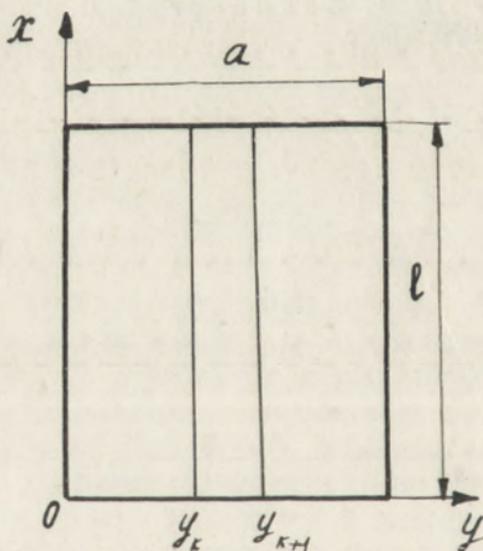


Рис. 1

определения собственных частот пластины сведем к собственным значениям однородной системы линейных ал-

гебраических уравнений относительно неизвестных

$$w(x, y, t) = \cos \omega t \sum_{n=1}^N \varphi_n(x), \psi_n(y), \quad (1)$$

где

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, \psi_n(y) = \sum_{k=1}^K [N]^k \{q_n\}_k.$$

Здесь ω — собственная частота колебания пластины;

$\{q\}^k = \{w_{kn}, w_{k+1n}, M_{kn}, M_{k+1n}, C_{kn}\}$ — вектор столбец неизвестных коэффициентов « k »-полосы;

$w_{kn}, w_{k+1n}, M_{kn}, M_{k+1n}$ — амплитудные значения перемещений и моментов узловых линий;

C_k — варьируемый параметр, учитывающий влияние изгибающего момента по линиям $x=0$ и $x=1$;

$[N]^k = [a_k, a_{k+1}, b_k, b_{k+1}, d_k]$ — вектор-строка, элементами которого являются полиномы первой, третьей и четвертой степени, удовлетворяющие следующим свойствам:

$$a_k(y_k) = 1; a_k(y_{k+1}) = 0; a_{k+1}(y_k) = 0; a_{k+1}(y_{k+1}) = 1;$$

$$b_k(y_k) = 0; b_k(y_{k+1}) = 0; b_k''(y_k) = -1/D; b_k''(y_{k+1}) = 0;$$

$$b_{k+1}(y_k) = 0; b_{k+1}(y_{k+1}) = 0; b_{k+1}''(y_k) = 0;$$

$$b_{k+1}''(y_{k+1}) = -1/D; d_k(y_k) = 0; d_k(y_{k+1}) = 0;$$

$$d_k((y_k + y_{k+1})/2) = 1; d_k''(y_k) = 0; d_k''(y_{k+1}) = 0.$$

К неизвестным отнесены изгибающие моменты M_{xk} , действующие по линиям $x=0$ и $x=1$. Вследствие того, что ширина полосы мала (рис. 1), $\Delta = y_{k+1} - y_k$ можно их принять постоянными.

Действие моментов M_{xk}, M_{kn}, M_{k+1n} отнесены к внешним нагрузкам. Подставим (1) в выражение [3] для наибольшей потенциальной и кинетической энергии пластины, учтем действие внешних моментов. Минимизируя по всем неизвестным параметрам пластины, получим однородную алгебраическую систему уравнений вида

$$\frac{\partial v}{\partial \{q\}} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w \\ M \\ M \\ C \end{pmatrix} =$$

$$-\omega^2 [m, 0, 0, 0] \times \begin{Bmatrix} w \\ M \\ \bar{M} \\ C \end{Bmatrix} = 0; \quad (2)$$

где

$$\{q\} = \sum_{k=1}^K \{q_n\}^k, \{w\} = \{w_{11}, \dots, w_{KN}\}, \{M\} = \{M_{11}, \dots, M_{KN}\}, \\ \{\bar{M}\} = \{M_{X1}, \dots, M_{XK}\}, \{C\} = \{C_{11}, \dots, C_{KN}\};$$

$[K_{ij}]$ — квадратная подматрица, размерность которой равна размерности соответствующего вектора, причем $[K_{ij}] = [K_{ji}]$; $[m]$ — вектор-строка масс, компонентами которой является масса пластины, приведенная к линиям разбиения; $[0]$ — нулевой столбец.

Для того, чтобы снизить количество вычислений по сравнению с соответствующей статической задачей. уменьшим число степеней свободы, т. е. используя вторую, третью и четвертую строку в (2), выразим $\{M\}$, $\{\bar{M}\}$, $\{C\}$ через $\{w\}$ [1]. В результате алгебраических преобразований будем иметь

$$\{M\} = [K_1] \{w\}, \{\bar{M}\} = [K_2] \{w\}, \{C\} = [K_3] \{w\}.$$

Подставим эти выражения в первую строку, получим

$$\frac{\partial V}{\partial \{w\}} = [K^*] \{w\} - \omega^2 [m] \times \{w\} = 0. \quad (3)$$

Из условия $\det|[K^*] - \omega^2[m]| = 0$ найдем корни уравнения.

В случае, если край шарнирно оперт, моменты $\{\bar{M}\}$ будут равны нулю.

Для проверки изложенной методики рассчитывалась прямоугольная пластина при различных условиях закрепления краев. Описанный алгоритм реализован в виде АЛГОЛ — программы для ЭВМ М-222. Исследуемая пластина имела следующую геометрию: $l/a=1$, $h/a=0.1$.

Материал пластины — сталь ($\mu = 0.3$, $E = 100 \text{ П}$). Решение проводилось при пяти и десяти полосах. Анализ полученных результатов позволил сделать следующие выводы: для практических целей для шарнирной пластины достаточно трех гармоник, а для жестко защемлен-

ной — пяти гармоник разложения. Найденная собственная частота колебаний жестко заземленной пластины равна $22,42 \text{ с}^{-1}$ (по методике Эдмана $21,77$), а для шарнирно опертой — $8,18 \text{ с}^{-1}$ (по методике Эдмана $8,15 \text{ с}^{-1}$).

Данный метод дает удовлетворительные результаты и обладает определенными преимуществами перед другими [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975, 541 с.
 2. Ляхович Л. С., Мулик Е. И. Смешанная форма метода конечных полос. Настоящ. сборник.
 3. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966, 635 с.
-

СМЕШАННАЯ ФОРМА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ПОЛОС

Л. С. ЛЯХОВИЧ, Е. И. МУЛИК

Метод конечных элементов в настоящее время широко используется при решении задач механики деформированного тела, так как он обладает всеми достоинствами сеточных и вариационных методов. Однако применение МКЭ к сложным конструкциям связано с трудностями вычислительного характера, необходима густая сетка конечных элементов, приводящая к системе алгебраических уравнений высокого порядка [2]. С целью снижения порядка системы уравнений, не снижая при этом точность решения, предлагается вариант МКЭ, где в качестве основных неизвестных берутся перемещения и моменты (смешанный метод), которые по одной координате представляются отрезками ряда Фурье, а по другой — полиномами.

Не снижая общности рассуждений, рассмотрим основную идею предлагаемого метода на простом примере об изгибе прямоугольной пластины, жестко защемленной по контуру, находящейся под воздействием равномерной поверхностной нагрузки.

В вариационной постановке задача о линейной упругой деформации пластины эквивалентна задаче о минимуме квадратичного функционала [1]

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(w) = \int_0^1 \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - qw \right] dx dy. \end{aligned} \quad (1)$$

Разделим срединную поверхность пластины линиями $y = \text{const}$ на полосы конечные элементы (рис. 1), считаем ширину полос малой $\Delta = y_{k+1} - y_k$. Поэтому изгиба-

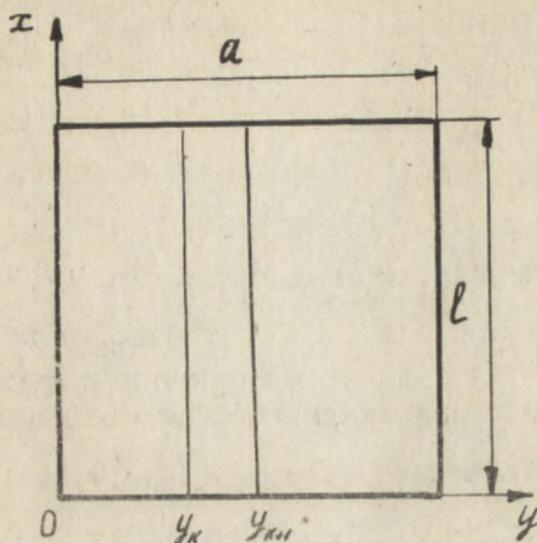


Рис. 1

ющие моменты, действующие по линиям $x = 0$, $x = 1$ для « k » полосы, можно принять постоянными, обозначим их M_{xk} . Нагрузку q , действующую по всей пластине, заменим эквивалентной q^* , приведенной к узловым линиям.

Решение задачи о минимуме квадратичного функционала представим в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) \psi_n(y), \quad (2)$$

где

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{\pi \pi}{l} x, \quad \psi_n(y) = \sum_{k=1}^K [N]^k \{q_n\}^k.$$

Здесь $\{q_n\}^k = \{w_{kn}, w_{k+1n}, M_{kn}, M_{k+1n}, C_{kn}\}$ — вектор-столбец неизвестных коэффициентов « k »-полосы; w_{kn} , w_{k+1n} , M_{kn} , M_{k+1n} — амплитудные значения перемещений и моментов узловых линий; C_{kn} — варьируемый параметр, учитывающий влияние изгибающего момента по линиям $x = 0$ и $x = 1$.

$[N] = [a_k, a_{k+1}, b_k, b_{k+1}, d_k]$ — вектор-строка, элементами которого являются полиномы первой, третьей и четвертой степени соответственно, удовлетворяющие следующим свойствам:

$$\begin{aligned}
 a_k(y_k) &= 1; a_k(y_{k+1}) = 0; a_{k+1}(y_k) = 0; a_{k+1}(y_{k+1}) = 1; \\
 b_k(y_k) &= 0; b_k(y_{k+1}) = 0; b_k''(y_k) = -1/D; b_k''(y_{k+1}) = 0; \\
 b_{k+1}(y_k) &= 0; b_{k+1}(y_{k+1}) = 0; b_{k+1}''(y_k) = 0; \\
 b_{k+1}''(y_{k+1}) &= -1/D; d_k(y_k) = 0; d_k(y_{k+1}) = 0; \\
 d_k((y_k + y_{k+1})/2) &= 1; d_k''(y_k) = 0; d_k''(y_{k+1}) = 0.
 \end{aligned}$$

Действия моментов M_{kn} , M_{k+1n} , M_{xk} отнесены к внешней нагрузке.

Внося в функционал (1) выражение (2) и учитывая действия внешних нагрузок, получим выражение функционала в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \mathcal{E}(w_{1n}, \dots, w_{kn}, \dots, M_{1n}, \dots, M_{kn}, \dots, C_{1n}, \dots, C_{kn}, \dots) \\
 &= \int_0^1 \Theta_1 \sum_{n=1}^N \sin \frac{n\pi}{l} x M_{kn} dx + \int_0^1 \Theta_2 \sum_{n=1}^N \sin \frac{n\pi}{l} x M_{2n} dx - \dots - \\
 &\quad - (-1)^k \int_0^1 \Theta_k \sum_{n=1}^N \sin \frac{n\pi}{l} x M_{kn} dx - \dots - \\
 &\quad - 2 \int_{y_1}^{y_2} M_{x1} \Theta_{x1} dy - \dots - 2 \int_{y_k}^{y_{k+1}} M_{xk} \Theta_{xk} dy - \dots -
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 &- \int_0^1 q_1^* \sum_{n=1}^N \sin \frac{n\pi}{l} x w_{1n} dx - \dots - \\
 &- \int_0^1 q_k^* \sum_{n=1}^k \sin \frac{n\pi}{l} x w_{kn} dx - \dots,
 \end{aligned}$$

где

$$\Theta_k = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \text{ при } y = y_k, \quad \Theta_{xk} = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$$

при $x=0$ для «к»-полосы.

Минимизируя функционал (3) по всем коэффициентам вектора пластины, получим:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_{1n}} = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial M_{xk}} = \dots = 0$$

систему алгебраических уравнений, решая которую, найдем значения прогибов по узловым линиям и моментов по всему контуру каждого элемента.

Описанный алгоритм реализован в виде АЛГОЛ-

программы для ЭВМ М-222. Исследуемая пластина имела следующую геометрию: $l/a = 2$, $h/a = 0.2$. Материал пластины — сталь ($\mu = 0.3$, $E = 100$ па). Решение проводилось при пяти полосах. Расчеты показали, что для практических целей достаточно удерживать в (2) до пяти гармоник. На рис. 2 а, 2 б показано распределение моментов и прогибов в сечении $x = l/2$.

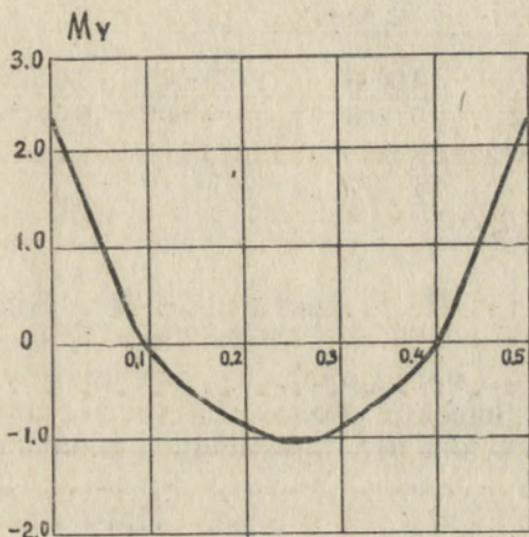


Рис. 2а

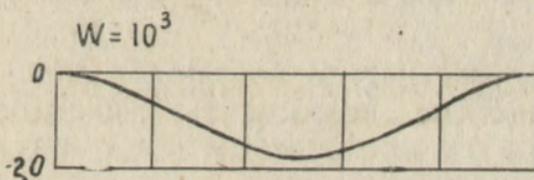


Рис. 2б

Если в качестве основных неизвестных принять перемещения и прогибы вдоль узловых линий (метод перемещений), то порядок разрешающей системы алгебраических уравнений понизится, но вместе с тем и снизится точность найденных изгибающих моментов. Покажем это на примере пластины, шарнирно закрепленной по контуру, находящейся под действием равномерной нагрузки. В этой задаче при одинаковом количестве гармоник и полос в обоих вариантах МКЭ алгебраическая система уравнений имеет один и тот же порядок.

В таблице приведены результаты проведенных расчетов. В числителе указаны значения по МКЭ в форме смешанного метода, а в знаменателе— в форме метода перемещений.

Т а б л и ц а

Y	0.2 a	0.4 a	0.5 a	0.6 a	0.8 a
W	<u>0.00395</u>	<u>0.00636</u>	<u>0.00687</u>	<u>0.00636</u>	<u>0.00395</u>
	0.00392	0.00631	0.00681	0.00631	0.00392
M	<u>1.63</u>	<u>2.43</u>	<u>2.51</u>	<u>2.43</u>	<u>1.63</u>
	1.59	2.34	2.42	2.34	1.59

Укажем точные значения прогиба и момента в центре пластины $w=0.0068$ см, $M=2.52$ кг.

Описанный метод обладает для прямоугольных пластин, цилиндрических оболочек и других систем, имеющих подобные сечения в направлении одной из осей координат, определенными преимуществами перед МКЭ в обычной применяемой форме. Предлагаемый подход приводит к уменьшению порядка матрицы жесткости, что, в свою очередь, позволяет значительно повысить точность расчета. В некоторых работах [3] предлагается метод конечных полос в форме метода перемещения. Смешанная форма метода конечных полос содержит в качестве неизвестных все основные искомые параметры перемещения и усилия. Именно это обстоятельство определяет более высокую точность получаемых результатов. Действительно, в методе перемещений в качестве неизвестных принимаются перемещения, а усилия определяются через производные второго порядка от найденных перемещений. Как известно, при численном решении точность производных оказывается ниже точности самих функций. Поэтому точность определенных моментов по методу перемещений оказывается ниже, чем при использовании смешанной формы метода конечных полос.

Таким образом, предлагаемый подход обладает отмеченными преимуществами перед методом конечных элементов в обычной форме и перед методом конечных полос в форме метода перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М. 1957.
 2. Постнов В. И. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений. Л.: Судостроение, 1979, 287 с.
 3. Савула Я. Г., Шинкоренко Г. М. Расчет криволинейных трубчатых оболочек полуаналитическим методом конечных элементов. — Изв. АН СССР МТТ, 1980, № 2, с. 168—173.
-

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕРИАЛОЕМКОСТИ КВАДРАТНЫХ В ПЛАНЕ РЕГУЛЯРНО ОПЕРТЫХ ПО ВНЕШНЕМУ КОНТУРУ РЕШЕТАТЫХ ПЛИТ

В. Н. ДИДЕНКО

Исследование материалоемкости перекрестных работающих в двух направлениях пространственно-стержневых структурных покрытий проводится в два этапа: первоначально на балочных аналогах, а затем на действительных пространственно-стержневых схемах. Для экономической оценки исследуемых вариантов покрытий с точки зрения материалоемкости использованы следующие показатели материалоемкости. Для определения экономических возможностей стержневой схемы покрытия и рациональности выбранной схемы его опирания используется в общем случае моментный объем или объем эпюры погонных изгибающих моментов ($V_M = \int_x \int_y M_{xy} dx dy$), что для поясной решетки реальной пространственно-стержневой схемы аналогично силовому весу ($\Sigma N_i/l_i$). Связь между этими показателями имеет вид

$$0,5h \Sigma | N_i | l_i = \int_x \int_y M_{xy} dx dy, \quad (1)$$

где h — высота пространственно-стержневого покрытия; N_i — усилия в элементах обеих поясных решеток; l_i — длина элементов поясной решетки; M_{xy} — выражение для погонных изгибающих моментов в перекрестных элементах покрытия (условных фермах или балках); знаки суммирования и интегрирования относятся ко всей площади покрытия.

Показатель (1) вместе с известными из работ [1, 2] переходными формулами не дает представления о реальном расходе стали, так как не учитывает зонный характер распределения фактических сечений стержней и перераспределение фактических усилий (M_{xy}) в статиче-

ски неопределимых системах. Для реальной оценки расхода стали в действительных пространственно-стержневых схемах покрытий при фактически действующих внутренних усилиях и сечениях стержней использован так называемый объем эпюры моментов сопротивления материалов ($\Sigma/M_i/\Delta F_i$), что для поясной решетки аналогично так называемому «фактическому» или конструктивному силовому весу ($\Sigma^F | N_{ip} | \Sigma^P l_{ip}$), который так будем называть в отличие от «теоретического» силового веса, приведенного выше ($\Sigma/N_i/l_i$). Связь между этой парой показателей материалоемкости для поясных решеток имеет вид

$$0,5 h \Sigma^F | N_{ip} | \Sigma^P l_{ip} = \Sigma M_i \Delta F_i, \quad (2)$$

где N_{ip} и M_i — расчетное усилие и расчетный погонный изгибающий момент в зоне сечений стержней «i», которые определяются с учетом фактических сечений; $\Sigma^P l_{ip}$ — сумма длин стержней в зоне сечений «i»; ΔF_i — площадь части покрытия с расчетным погонным изгибающим моментом M_i ; Σ^F и Σ^P — суммирование по площади покрытия (F) или части его площади, характеризуемой зоной i; l_{ip} — длины стержней в расчетной зоне «i». В сочетании с уже упомянутыми формулами перехода [1, 2] показатель (2) дает вполне реальную и поэтому сопоставимую для исследуемых схем картину по расходу стали на поясные решетки, так как учитывает зонный принцип назначения сечений и фактическое распределение усилий в статически неопределимых схемах покрытий.

Все показатели материалоемкости выражаются в обобщенном виде

$$V = k_{np} L^4, \quad (3)$$

где p — удельная нагрузка на покрытие; L — пролет, а в табл. 1 и 2 при сопоставлении исследованных схем приводятся только численные значения коэффициентов k_{np} , являющиеся по существу количественным показателем материалоемкости.

Рассмотрим балочные аналогии (см. табл. 1) пространственно-стержневых перекрестных систем покрытий.

Как видно из табл. 1, значительный интерес для ис-

Таблица 1

№ п/п	Схема ана- лога (приве- дена на рис. 1)	Показатель материало- емкости (1) k_{II}	№ п/п	Схема ана- лога	Показатель материало- емкости (1) k_{II}
1	а)	0,0835	5	д)	0,0522
2	б)	0,0835	6	е)	0,0522
3	в)	0,068	7	ж)	0,0522
4	г)	0,0635	8	з)	0,0522

Таблица 2

Сопоставление пространственно-стержневых схем
по величинам моментных объемов

№ п/п	Простран- ственно- стержне- вая схема покрытия (рис. 2)	Балочный аналог приведен в табл. 1, строка №	Величина показателя материалоемкости			Величина мак- симальных уси- лий в поясах (т)	
			k_{II}'	k_{II}''	k_p		
1	а	1	$\frac{0,0835}{100}$	$\frac{0,1000}{100}$	0,035	55,6	57,0
2	б	2	$\frac{0,0690}{82}$	$\frac{0,0935}{94}$	0,033	34,3	35
3	в	2	$\frac{0,0700}{84}$	$\frac{0,0935}{94}$	0,033	35,6	35
4	г	—	$\frac{0,0680}{81}$	$\frac{0,0940}{94}$	0,039	36,6	34,8
5	д	4	$\frac{0,0610}{73}$	$\frac{0,0765}{77}$	0,034	26,2	27,4
6	е	4	$\frac{0,059}{71}$	$\frac{0,0795}{80}$	0,032	28,7	26,4
7	ж	—	$\frac{0,0655}{78}$	$\frac{0,086}{86}$	0,0285	28,1	52,5
8	з	4	$\frac{0,0545}{65}$	$\frac{0,0715}{72}$	0,0465	25,3	39,0
9	и	—	$\frac{0,0565}{67}$	$\frac{0,0745}{75}$	0,04	23,4	25,0

следования с точки зрения материалоемкости представляют комбинированные схемы балок, обозначенные в табл. 1 цифрами 5, 6, 7 и 8, и, естественно, соответствующие им пространственно-стержневые схемы покрытий. Анализ и сопоставление этих пространственно-стержне-

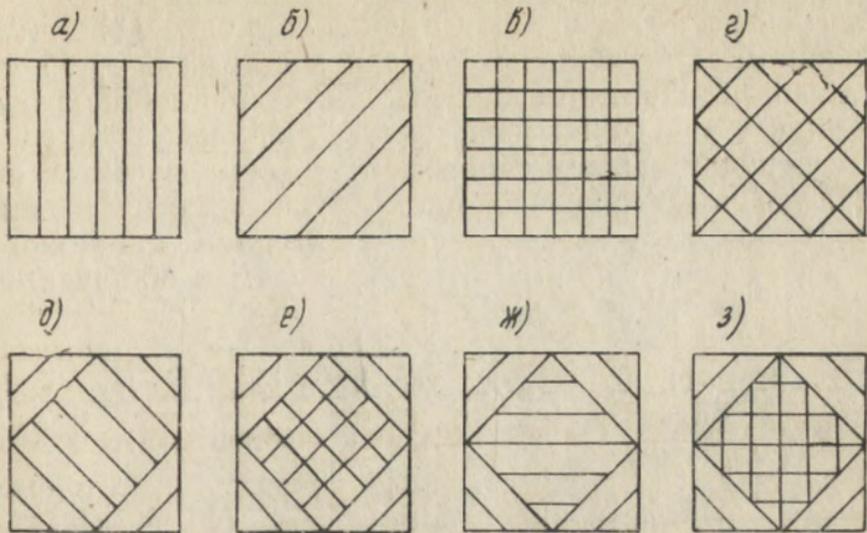


Рис. 1. Системы балок: параллельные, перекрестные и комбинированные — аналоги пространственно-стержневых структурных систем

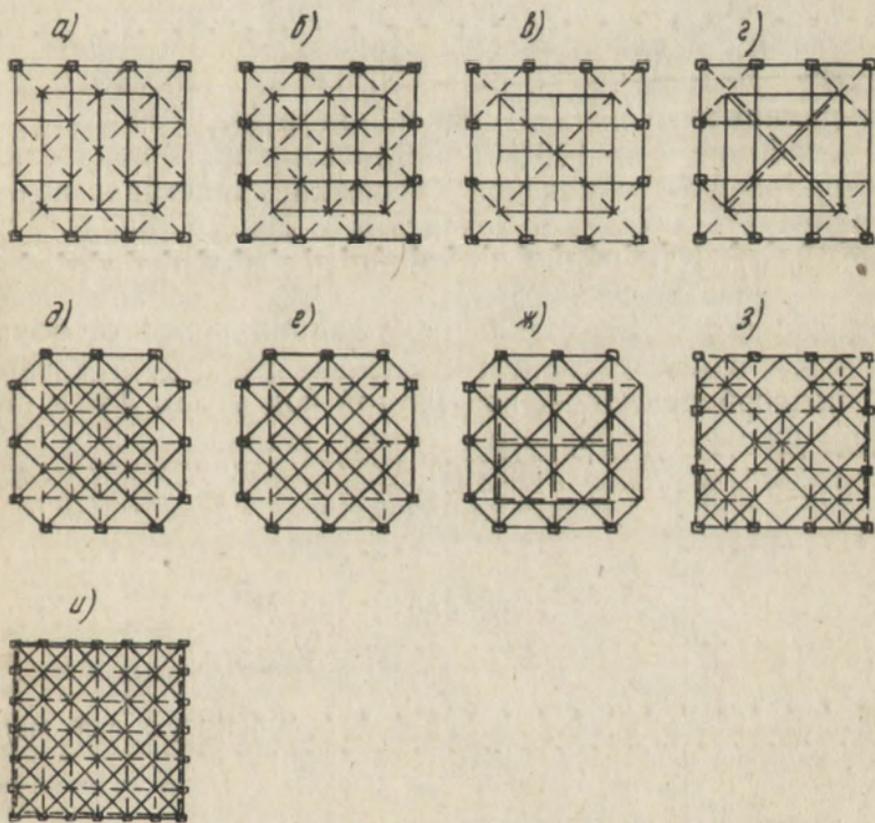


Рис. 2. Пространственно-стержневые схемы исследованных структурных систем

вых схем по показателям материалоемкости (1) и (2) и величинам максимальных усилий в стержнях проводится в табл. 2. При этом показатели материалоемкости для поясных и раскосных решеток ($k_{п'}$, $k_{п''}$ и k_p) определены с использованием данных статических расчетов пространственно-стержневых систем размерами в плане 21×21 , 30×30 и 42×42 м при регулярном опирании по внешнему контуру на ЭВМ с переходом к обобщенному показателю (3) по формулам

$$k_{п'} = \frac{h \sum |N_i| l_i}{2p l^4}; \quad (4) \quad k_{п''} = \frac{h \sum |N_{ip}| \sum^p l_{ip}}{2p L^4}, \quad (5)$$

где $k_{п'}$ и $k_{п''}$ — количественные показатели материалоемкости соответственно теоретический (1) и фактический, или конструктивный (2).

Показатель материалоемкости (1) раскосной решетки (k_p) определяется по формуле (4) при условии, что N_i — усилия в раскосах, а l_i — их длина. Значения максимальных усилий в поясных решетках приведены для системы размерами в плане 30×30 м (10×10 ячеек) при равномерно распределенной нагрузке 360 кг/м^2 .

В таблице 2 за 100% принята величина показателя материалоемкости поясной решетки пространственно-стержневой складки, работающей в одном направлении (рис. 2, а). Как видно из таблицы, материалоемкость поясных решеток перекрестных систем с верхней поясной решеткой, расположенной параллельно сторонам внешнего опорного контура, меньше на 6%, а с верхней поясной решеткой, повернутой под углом 45° к сторонам внешнего опорного контура, меньше на 20—28%, чем у системы типа пространственно-стержневой складки, работающей в одном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Комаров А. А. Основы проектирования силовых конструкций. Куйбышев: Кн. изд-во, 1965, с. 186.
2. Клячин А. З., Фурманов Б. А. Анализ условий опирания, геометрических параметров и конструктивных схем плоских структурных покрытий. — Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1976, № 9, с. 27—34.

РЕФЕРАТЫ НА ОПУБЛИКОВАННЫЕ СТАТЬИ

УДК 517.9

О непрерывной зависимости от параметра решения одной краевой задачи. Белков В. И., Круликовский Н. Н. Вопросы механики и прикладной математики. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Приведены достаточные условия непрерывности решения одной многоточечной краевой задачи от параметра. Полученный результат является распространением на рассмотренный класс краевых задач аналогичных теорем для начальной задачи.

Библ. 4.

УДК 624.21.093.3.014.2.04

Совершенствование расчета бистальных мостов с аппроксимацией кривой « σ — ϵ ». Картопольцев В. М. Вопросы механики и прикладной математики. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Рассматриваются вопросы расчета бистальных балок по деформированной теории прочности с аппроксимацией кривой « σ — ϵ », предложенной П. И. Соколовским. Доказано, что в случае выполнения бистальных балок из низколегированных сталей применение аппроксимированной кривой « σ — ϵ » позволяет выявить дополнительный резерв прочности.

Библ. 3, ил. 4.

УДК 839.31

К вопросу жесткости шпоночных соединений. Максак В. И., Темник И. Н. Вопросы механики и прикладной математики. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Приводятся расчетные зависимости, позволяющие определить величину центрального сближения и угла разворота штампа от действия внецентренной силы. Дается анализ контактных перемещений шпонки в шпоночном пазу соединяемых изделий.

УДК 539.376:534.1

Об устойчивости с последствием сопряженных преднапряженных резиновых стержней. Мусалимов В. М., Эпштейн С. М. Вопросы механики и прикладной математики. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Рассматривается двухэлементная система сопряженных резиновых длинных невесомых стержней, один из которых предварительно закручен и растянут. Изучается устойчивость этой стержневой конструкции при релаксации преднапряженного элемента. Приведены определяющие уравнения вязко-упругого поведения конструкции. Получены формулы для определения мгновенных и длительных критических нагрузок, вызывающих потерю устойчивости отдельного стержня и системы в целом за счет начальных напряжений.

Рассмотрен пример потери устойчивости конструкции, связанный с заданным формообразованием при заданной длине системы l и угле крутки системы ϕ . Приведен график кривых устойчивости активного стержня и системы и область устойчивости параметров.

Результаты работы находят приложение при проектировании спиральных кабелей.

Библ. 6, рис. 2.

УДК 539.376

К выбору режимов испытаний кабелей на динамическом стенде. Мусалимов В. М., Соханев Б. В., Плотников А. С. Вопросы механики и прикладной математики. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1978.

Приводятся результаты испытаний некоторых образцов гибких кабелей на стенде «Локомотив». На основании анализа разрушения выбираются режимы испытаний. Ставится задача проведения эксперимента на стенде «Волна».

Библ. 1, ил. 6, табл. 6.

УДК 539.3

Физические предпосылки модели грунтового основания. Тимофеев С. С. Вопросы механики и прикладной математики. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Рассматривается статика и кинематика деформирования грунтовых оснований фундаментов.

Библ. 9, ил. 5.

УДК 532.529.061

О закономерностях фильтрации полидисперсных масляных суспензий. Удлер Э. И., Зуев В. И. Вопросы механики и прикладной математики. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Рассматриваются результаты теоретического и экспериментального исследования процессов фильтрации суспензий.

Библ. 4, ил. 7, табл. 1.

УДК 539.3.

Статистическая модель твердого деформируемого тела. Эпштейн С. М. Вопросы механики и прикладной математики. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Получен критерий перехода структурно неоднородного тела в макропластическое состояние на основании машинного эксперимента. Библ. 13, ил. 2, табл. 1.

УДК 624.072.233

Расчет гибких стержней методом Бубнова—Галеркина. Черняк А. М., Сафонов В. В. Вопросы механики и прикладной математики. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Приведены результаты исследований по расчету гибких стержней методом Бубнова—Галеркина на основе шагового нагружения. Нелинейная задача линеаризуется. Перемещения аппроксимируются функциями поперечных колебаний растянутых или сжатых стержней. Приведен численный пример.

Библ. 2, ил. 1, табл. 1.

УДК 624.07:534.1

Об одном подходе к интегрированию уравнений движения систем с нелинейными связями. Хлупин А. В. Вопросы механики и прикладной математики. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Исследуются колебания упругих стержневых систем с кусочно-линейными связями под воздействием гармонических сил в виде ряда Фурье. Уравнения движения строятся на основе аппарата операционного исчисления путем стыковки решений на границах линейных областей характеристик связей.

Библ. 5.

УДК 533.6.011

Исследование удара под углом методом «крупных частиц». Гриднева В. А., Шахтмейстер Л. И. Вопросы механики и прикладной математики. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Численно с помощью метода «крупных частиц» решаются задачи о высокоскоростном соударении твердых тел. Рассматриваются закономерности образования кратера, его форма и размеры в зависимости от скорости удара и угла встречи.

УДК 624.045:624.075.3

К вопросу формирования ограничений по устойчивости при оптимальном проектировании стержневых систем, подверженных потере устойчивости. Ляхович Л. С., Малиновский А. П. Вопросы механики и прикладной математики. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Исследуется вопрос формирования ограничений по устойчивости в виде выпуклых алгебраических функций.

Библ. 3, ил. 7.

УДК 539.374:624.074

Метод коллокаций по линиям при решении линейных задач изгиба прямоугольных пластин переменной толщины. Рогалевич В. В., Березович А. Л. Вопросы механики и прикладной математики. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

В статье изложен оригинальный аппарат решения краевых задач теории изгиба пластин. Приведены результаты решения примеров. Библиография, 8, ил. 5.

УДК 539.3:534.1

Применение метода конечных полос к расчету пластин на собственные колебания. Мулик Е. И. Вопросы механики и прикладной математики. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Рассмотрена возможность применения смешанной формы метода конечных полос к исследованию задач на собственные колебания пластин. Результаты расчетов сопоставлены с известными решениями.

Библиография, 3, ил. 1.

УДК 539.3

Смешанная форма метода конечных полос. Ляхович Л. С., Мулик Е. И. Вопросы механики и прикладной математики. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Предложен алгоритм метода конечного элемента в смешанной форме метода конечных полос применительно к решению задачи об изгибе прямоугольной пластины. Приведено сравнение результатов по изложенной методике с аналитическим решением.

Библиография, 3, ил. 2, табл. 1.

УДК 624.074:1—415.044

Исследование материалоемкости квадратных в плане регулярно опертых по внешнему контуру решетчатых плит. Диденко В. Н. Вопросы механики и прикладной математики. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

Выполнен анализ показателей материалоемкости элементов пространственно-стержневых структурных покрытий. Дано обобщенное выражение показателей материалоемкости для квадратных плит при различных типах решетки. Приведены количественные результаты сопоставления пространственно-стержневой модели и балочного аналога по величинам моментных объемов.

Библиография, 2, ил. 2, табл. 2.

СОДЕРЖАНИЕ

В. И. Белков, Н. Н. Круликовский. О непрерывной зависимости от параметра решения одной краевой задачи . . .	3
В. М. Картопольцев. Совершенствование расчета бистальных мостов с аппроксимацией кривой « σ — ϵ »	9
В. И. Максак, И. Н. Темник. К вопросу жесткости шпоночных соединений	17
В. М. Мусалимов, С. М. Эпштейн. Об устойчивости с последствием сопряженных преднапряженных резиновых стержней	20
В. М. Мусалимов, Б. В. Соханев, А. С. Плотников. К выбору режимов испытаний кабелей на динамическом стенде	28
С. С. Тимофеев. Физические предпосылки модели грунтового основания	37
Э. И. Удлер, В. И. Зуев. О закономерностях фильтрации полидисперсных масляных суспензий	60
С. М. Эпштейн. Статистическая модель твердого деформируемого тела	68
А. М. Черняк, В. В. Сафонов. Расчет гибких стержней методом Бубнова—Галеркина	76
А. В. Хлупин. Об одном подходе к интегрированию уравнений движения систем с нелинейными связями	81
В. А. Гриднева, Л. И. Шахтмейстер. Исследование удара под углом методом «крупных частиц»	85
Л. С. Ляхович, А. П. Малиновский. К вопросу формирования ограничений по устойчивости при оптимальном проектировании стержневых систем, подверженных потере устойчивости	91
В. В. Рогалевич, А. Л. Березович. Метод коллокаций по линиям при решении линейных задач изгиба прямоугольных пластин переменной толщины	101
Е. И. Мулик. Применение метода конечных полос к расчету пластин на собственные колебания	110
Л. С. Ляхович, Е. И. Мулик. Смешанная форма метода конечных полос	114
В. Н. Диденко. Исследование материалоемкости квадратных в плане регулярно опертых по внешнему контуру решетчатых плит	120

90 к.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
<http://hdl.handle.net/11021/10128>
1-525946

Томский госуниверситет 1878



Научная библиотека 00932410