

**ПРОБЛЕМЫ
ГИДРОМЕХАНИКИ
И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Томск — 1973

ПРОБЛЕМЫ ГИДРОМЕХАНИКИ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ВЫПУСК 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Томск — 1973

В сборнике освещены исследования неустановившегося движения газа с вводом энергии, струйного обтекания пластин, вихревого течения двухфазной среды.

Рассматриваются также расчеты напряжений и деформаций пространственных и осесимметричных задач теории упругости и термоупругости, теоретические и экспериментальные исследования по устойчивости тонкостенных оболочек вращения.

Сборник рассчитан на научных и инженерно-технических работников научных учреждений и конструкторских бюро, а также аспирантов и студентов старших курсов высших учебных заведений.

Редакторы

проф. Г. И. Назаров, проф. И. С. Соломин, доц. В. Е. Томилов

РЕДАКЦИОННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ СОВЕТ

А. П. Бычков (председатель), проф. М. П. Кортусов (зам. председателя), доц. Э. С. Воробейчиков (зам. председателя), доц. А. И. Зубков (ученый секретарь). Л. Г. Мордовина (директор издательства), проф. Г. А. Медведев, проф. Р. Н. Щербаков, доц. А. Д. Колмаков, проф. В. И. Гаман, проф. А. В. Саложников, проф. М. А. Кривов, проф. В. А. Пегель, проф. А. В. Положий, проф. В. А. Хахлов, проф. М. В. Тронов, проф. В. В. Серебренников, проф. А. И. Ким, проф. И. М. Разгон, доц. А. П. Бородавкин, проф. Ф. З. Канунова, проф. В. С. Флеров, проф. А. К. Сухотин, М. Р. Филимонов (директор научной библиотеки), секретарь парткома университета доц. М. П. Якубеня.

О КОМПЛЕКСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ НАПОРА ФИЛЬТРАЦИИ В НЕОДНОРОДНОМ ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ

В. Д. АЛФЕРОВ

Плоская задача напорной фильтрации жидкости в неоднородном по мощности и проницаемости пористом пласте сводится к интегрированию линейного эллиптического уравнения вида [1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0, \quad \sigma = kh/\mu, \quad \sigma \neq 0, \quad (0.1)$$

где P — функция давления, k — проницаемость пласта, h — мощность пласта, μ — вязкость фильтрующей жидкости. Решению уравнения (0.1) при частных видах зависимости σ посвящены работы О. В. Голубевой и ее учеников [2—4], Г. С. Салехова [5] и др. Ниже приводится комплексное представление решения уравнения (0.1) в предположении произвольного задания коэффициента $\sigma(x, y)$.

§1. Решение уравнения (0.1) будем искать в виде следующего ряда:

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x, y) \Phi_n(x, y) + \beta_n(x, y) \Psi_n(x, y), \quad (1.2)$$

где $\Phi_n(x, y)$ и $\Psi_n(x, y)$ удовлетворяют условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial x} = \frac{\partial \Psi_n}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi_n}{\partial x}, \quad (1.3)$$

и, кроме того, рекуррентным соотношениям

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial x} = \Phi_{n-1}, \quad \frac{\partial \Psi_n}{\partial x} = \Psi_{n-1}, \quad n=1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Подставляя ряд (1.2) в уравнение (0.1) и учитывая условия (1.3), получим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\Delta \alpha_n + \frac{\sigma_x}{\sigma} \alpha_{nx} + \frac{\sigma_y}{\sigma} \alpha_{ny} \right) \Phi_n + \left(2\alpha_{nx} + \frac{\sigma_x}{\sigma} \alpha_n - \frac{\sigma_y}{\sigma} \beta_n - \right. \right. \\ \left. - 2\beta_{ny} \right) \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} - \left(\Delta \beta_n + \frac{\sigma_x}{\sigma} \beta_{nx} + \frac{\sigma_y}{\sigma} \beta_{ny} \right) \Psi_n - \\ \left. - \left(2\beta_{nx} + \frac{\sigma_x}{\sigma} \beta_n + \frac{\sigma_y}{\sigma} \alpha_n + 2\alpha_{ny} \right) \frac{\partial \Psi_n}{\partial x} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Принимая во внимание условия (1.4), для определения функций $\alpha_n(x, y)$ и $\beta_n(x, y)$, получим следующие рекуррентные дифференциальные соотношения:

$$\begin{aligned} 2\alpha_{0x} + \frac{\sigma_x}{\sigma} \alpha_0 &= 2\beta_{0y} + \frac{\sigma_y}{\sigma} \beta_0 \\ 2\alpha_{0y} + \frac{\sigma_y}{\sigma} \alpha_0 &= -2\beta_{0x} - \frac{\sigma_x}{\sigma} \beta_0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} 2\alpha_{nx} + \frac{\sigma_x}{\sigma} \alpha_n &= 2\beta_{ny} + \frac{\sigma_y}{\sigma} \beta_n - \left(\Delta \alpha_{n-1} + \frac{\sigma_x}{\sigma} \alpha_{n-1x} + \frac{\sigma_y}{\sigma} \alpha_{n-1y} \right) \\ 2\alpha_{ny} + \frac{\sigma_y}{\sigma} \alpha_n &= -2\beta_{nx} - \frac{\sigma_x}{\sigma} \beta_n - \left(\Delta \beta_{n-1} + \frac{\sigma_x}{\sigma} \beta_{n-1x} + \frac{\sigma_y}{\sigma} \beta_{n-1y} \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Систему (1.6)–(1.7) можно записать в более простом виде:

$$\bar{\alpha}_{0x} = \bar{\beta}_{0y}, \quad \bar{\alpha}_{0y} = -\bar{\beta}_{0x} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} 2\bar{\alpha}_{nx} &= 2\bar{\beta}_{ny} - (\Delta \bar{\alpha}_{n-1} + g(x, y) \bar{\alpha}_{n-1}) \\ 2\bar{\alpha}_{ny} &= -2\bar{\beta}_{nx} - (\Delta \bar{\beta}_{n-1} + g(x, y) \bar{\beta}_{n-1}), \quad n=1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где введены следующие обозначения:

$$\bar{\alpha}_n = \sqrt{\sigma} \alpha_n, \quad \bar{\beta}_n = \sqrt{\sigma} \beta_n, \quad g(x, y) = -\frac{\Delta \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}. \quad (1.10)$$

Введем в рассмотрение комплексные переменные

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy,$$

и пусть

$$A_n(z, \bar{z}) = \bar{\alpha}_n(x, y) + i\bar{\beta}_n(x, y). \quad (1.11)$$

В комплексных переменных система (1.8)–(1.9) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_0}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial A_n}{\partial z} = - \left(\frac{\partial^2 A_{n-1}}{\partial z \partial \bar{z}} + F(z, \bar{z}) A_{n-1} \right) \\ F(z, \bar{z}) &= -\frac{1}{4} g \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Из (1.12) видно, что $A_0(z)$ является голоморфной функцией комплексного переменного Z , а все последующие $A_n(z, \bar{z})$ определяются при помощи рекуррентного соотношения для всякой заданной функции $F(z, \bar{z})$, т. е. для заданной неоднородной пористой среды коэффициенты $A_n(z, \bar{z})$ могут быть найдены.

Введем теперь последовательность функций, полагая

$$W_n(z) = \Phi_n(x, y) + i\Psi_n(x, y). \quad (1.13)$$

Исходя из условий (1.3) и (1.4), для них получим

$$\frac{dW_n}{dz} = W_{n-1}, \quad n=1, 2, \dots \quad (1.14)$$

или

$$W_n(z) = \int_{z_0}^z \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!} W_0(t) dt, \quad (1.15)$$

где $W_0(z)$ — произвольная аналитическая функция.
Таким образом, ряд (1.2) примет вид

$$P = \sigma^{-1/2} \operatorname{Re} \left[W_0(z) + \int_{z_0}^z \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z, \bar{z}) \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!} W_0(t) dt \right]. \quad (1.16)$$

Обозначая ядро оператора (1.16) через $G(z, \bar{z}, t)$, где

$$G(z, \bar{z}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z, \bar{z}) \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (1.17)$$

получаем искомое решение в виде оператора

$$P = \sigma^{-1/2} \operatorname{Re} \left[W_0(z) + \int_{z_0}^z G(z, \bar{z}, t) W_0(t) dt \right]. \quad (1.18)$$

Полученный интегральный оператор переводит произвольную аналитическую функцию $W_0(z)$ в решение исходного уравнения; $W_0(z)$ находится из соответствующих граничных условий. Осталось показать сходимость ядра (1.17). Для этой цели используем метод мажорант. Пусть для $F(z, \bar{z})$ мажорантой является следующая функция

$$\tilde{F}(z, \bar{z}) = \lambda \left(1 + \frac{a-ib}{2} z + \frac{a+ib}{2} \bar{z} \right)^{-2}, \quad (1.19)$$

где λ , a и b — вещественные постоянные.

Из (1.12) находим

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0 &= 1, \quad \tilde{A}_1 = \lambda \left(\frac{a+ib}{2} \right)^{-1} \left(1 + \frac{a-ib}{2} z + \frac{a+ib}{2} \bar{z} \right)^{-1}, \\ \tilde{A}_2 &= \frac{\lambda}{2!} \left(\lambda + \frac{a^2+b^2}{2} \right) \left(\frac{a+ib}{2} \right)^{-1} \left(1 + \frac{a-ib}{2} z + \frac{a+ib}{2} \bar{z} \right)^{-2} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Общим выражением для $\tilde{A}_n(z, \bar{z})$ будет

$$\tilde{A}_n(z, \bar{z}) = \mu_n n! \left(\frac{a-ib}{2} \right)^n \left(1 + \frac{a-ib}{2} z + \frac{a+ib}{2} \bar{z} \right)^{-n}$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{n+1} &= \mu_n (n+a_1)(n+a_2)(n+1)^{-2}, \\ a_1 &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4\lambda}{a^2+b^2}}, \quad a_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4\lambda}{a^2+b^2}}. \end{aligned}$$

Оценим ядро $G(z, \bar{z}, t)$:

$$G(z, \bar{z}, t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n(z, \bar{z}) \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Замечая, что коэффициенты μ_n изменяются как коэффициенты гипергеометрического ряда, получим

$$G(z, \bar{z}, t) \leq -\frac{d}{dt} H \left(a_1, a_2, 1, \frac{(z-t)(a-ib)}{2(1+ax+by)} \right). \quad (1.20)$$

Следовательно, ряд $\tilde{G}(z, \bar{z}, t)$ будет сходиться абсолютно и равномерно в области, где

$$\frac{1}{2} \left| \frac{(z-t)(a-ib)}{1+ax+by} \right| < 1. \quad (1.21)$$

Если интегрирование в (1.18) ведется от $z=0$ до $t=z$ по прямой, то $\max |z-t| = |z|$ и

$$\frac{1}{2} \left| \frac{z(a-ib)}{1+ax+by} \right| < 1, \quad (1.22)$$

или

$$|z| < \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} |1+ax+by|.$$

Точное решение, отвечающее зависимости (1.19), примет вид

$$P = \sigma^{-1/2} \operatorname{Re} \left[W_0(z) - \int_0^z \frac{d}{dt} H \left(a_1, a_2, 1, \frac{(z-t)(a-ib)}{2(1+ax+by)} \right) W_0(t) dt \right]. \quad (1.23)$$

Если положить $F = \lambda^2 = \text{const}$, из условий (1.12) получим

$$A_0 = 1, A_n = (-1)^{n+1} \lambda^{2n} \bar{z}^n / n!, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.24)$$

Для ядра оператора (1.18) получаем

$$G(z, \bar{z}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \lambda^{2n} \bar{z}^n (z-t)^{n-1}}{n! (n-1)!} = - \frac{d}{dt} I_0(\lambda \sqrt{\bar{z}(z-t)}). \quad (1.25)$$

Общее решение уравнения (0.1) в этом случае запишется в виде

$$P = \operatorname{Re} \left[W_0(z) - \int_0^z \frac{d}{dt} I_0(\lambda \sqrt{\bar{z}(z-t)}) W_0(t) dt \right] \sigma^{-1/2}. \quad (1.26)$$

Другим путем это представление было получено И. Н. Векуа в работе [6].

§ 2. В качестве простейшего приложения рассмотрим задачу нахождения поля давления в круговом пласте единичного радиуса постоянной мощности h , разрабатываемом одной центральной скважиной с дебитом q . Проницаемость возьмем в следующем виде:

$$k = k_0 \exp[-\alpha^2(x^2 + y^2)], \quad \alpha^2 = 2. \quad (2.1)$$

В этом случае

$$F(z, \bar{z}) = (1 - z \bar{z}). \quad (2.2)$$

В первом приближении падение напора $P - P_0$ фильтрации примет вид

$$P^{(1)} - P_0 = K^{-1/2} \operatorname{Re} \left[W_0(z) - \left(\bar{z} - \frac{z \bar{z}^2}{2} \right) \int_0^z W_0(t) dt \right], \quad (2.3)$$

где P_0 — давление на контуре питания ($r=1$).

Решение должно обладать логарифмической особенностью в точке $z=0$ и, кроме того,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} 2\pi \oint_{\gamma} \frac{hK}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right) ds = q.$$

Согласно этому требованию $W_0(z)$ берем в виде

$$W_0(z) = C \left[\ln z + \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m \right], \quad C = \frac{q\mu}{2\pi h \sqrt{K(0)}}. \quad (2.4)$$

Для определения A_m используем условие на контуре $r=1$.

$$\operatorname{Re} \left[\ln z + \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m + \left(\frac{z \bar{z}^2}{2} - \bar{z} \right) \left(z \ln z - z + \sum \frac{A_m z^{m+1}}{m+1} \right) \right]_{|z|=1} = 0. \quad (2.5)$$

Откуда находим

$$A_0 = 1, \quad A_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Таким образом, в первом приближении решение получили в виде

$$P^{(1)} = CK^{-1/2} \left[\left(1 - r^2 + \frac{r^4}{2} \right) \ln r + 2r^2 - r^4 - 1 \right] + P_0. \quad (2.6)$$

На конкретных расчетах можно убедиться, что полученное приближение лежит между первым и вторым приближениями, полученными по методу И. Н. Векуа в работе Г. В. Голубева [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Маскет. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
2. О. В. Голубева. О комплексном потенциале и комплексной скорости течения в искривленных пленках переменной толщины. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та им. Крупской, 1959, т. 75. Тр. каф. теор. физ. вып. 4.
3. К. Н. Быстров. О течениях в искривленных слоях с изотермическим законом изменения толщины. Там же.
4. К. Н. Быстров. О двумерных установившихся течениях жидкости в слое с экспоненциальным изменением толщины. Там же.
5. Г. С. Салехов. К определению давления в неоднородном пласте нефтяного пласта. Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, 1956, вып. 9.
6. И. Н. Векуа. Новые методы решения эллиптических уравнений. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
7. Г. В. Голубев. Изв. АН СССР, механика жидкости и газа, 1966, вып. 4.

Поступила 10, V. 1966.

ВЛИЯНИЕ КРИВИЗНЫ НАГРЕВАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ И ТЕПЛООТДАЧИ В ОКРУЖАЮЩУЮ СРЕДУ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАЖИГАНИЯ

А. М. ГРИШИН

В теоретических работах [1, 2, 3], посвященных зажиганию реагирующих веществ, рассмотрено зажигание нагретой бесконечной пластиной. Однако реальные тела большой теплоемкости, поджигающие реагирующее вещество, имеют конечные размеры и кривизну поверхности, отличную от 0. Кроме этого, в реальных условиях наряду с односторонним нагреванием реагирующего вещества имеет место теплоотвод в окружающую среду.

В данной работе с помощью метода М. Е. Швеца [4] и интегральных соотношений [5, 6] оценивается влияние этих факторов на процесс зажигания реагирующего вещества.

§ 1. Рассмотрим зажигание реагирующего вещества накалившимся цилиндром. Считаем, что имеет место реакция нулевого порядка, а теплотфизические коэффициенты постоянны. Тогда математически задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \delta \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{1}{x} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \delta e^{\theta} \left(\delta = \frac{q k_0 r_0^2 E}{\lambda R T_0^2} \exp - \frac{E}{R T_0} \right) \quad (1.1)$$

с граничными и начальными условиями

$$\theta(1, \tau) = 0, \quad \theta(\infty, \tau) = -\theta_0, \quad \theta(x, 0) = -\theta_0 \quad \left(\tau = \frac{q k_0 E t}{c \rho R T_0^2} \exp - \frac{E}{R T_0} \right). \quad (1.2)$$

Здесь $x = r/r_0$ — безразмерный текущий радиус, r_0 — радиус цилиндра, δ — безразмерный параметр, τ — безразмерное время, q — тепловой эффект реакции, λ — коэффициент теплопроводности, E — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная, t — время, T_0 — температура накалившегося цилиндра, T^0 — начальная температура реагирующего вещества, $\theta = \frac{(T - T_0) E}{R T_0^2}$ — безразмерная температура, $\theta_0 = \frac{(T_0 - T^0) E}{R T_0^2}$, ρ — плотность, c — теплоемкость, k_0 — предэкспонент.

При выводе уравнения (1.1) использовано преобразование Д. А. Франк-Каменецкого [7] для $\exp - \frac{E}{R T}$. При определенном условии [3] краевая задача (1.1) (1.2) описывает зажигание реагирующих веществ и для реакций первого порядка.

В силу экспоненциальной зависимости скорости химической реакции от температуры, интенсивное изменение температуры имеет место в узком пограничном слое у нагретой поверхности. В связи с этим целесообразно ввести толщину пограничного слоя $\Delta = \Delta(\tau)$. Тогда граничные и начальные условия (1.2) примут вид

$$\theta(1, \tau) = 0, \quad \theta(1 + \Delta, \tau) = -\theta_0, \quad \Delta(0) = 0. \quad (1.3)$$

Для решения краевой задачи (1.1) (1.3) применим метод М. Е. Швеца [4], который наряду с простотой обладает хорошей сходимостью [8]. В качестве первого приближения для температуры получаем

$$\theta_1 = -\frac{\theta_0(x-1)}{\Delta}. \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в правую часть (1.1) и интегрируя результат подстановки два раза по x , с учетом условий (1.3), имеем

$$\begin{aligned} \theta_2 = & \frac{\theta_0 x}{\Delta} (\ln x - 1) + \frac{\delta \theta_0 \dot{\Delta}}{6\Delta^2} [2 - 3x^2 + x^3 + (1-x)(\Delta^2 - 3)] + \\ & + \frac{\delta \Delta^2}{\theta_0^2} \left[1 - \exp \frac{\theta_0(1-x)}{\Delta} \right] + \frac{\delta \Delta}{\theta_0^2} (1-x) + \frac{\theta_0(2-x)}{\Delta} + \\ & + \frac{\theta_0}{\Delta^2} \{1 + (1+\Delta) [\ln(1+\Delta) - 1]\} (1-x). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Удовлетворяя (1.5) условию М. Е. Швеца [4] $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$ при $x = \Delta$, получим дифференциальное уравнение первого порядка для определения Δ

$$\delta \Delta \dot{\Delta} = \frac{3 \ln(1+\Delta)}{\Delta} + \frac{3\delta \Delta^3}{\theta_0^3}. \quad (1.6)$$

Удовлетворяя (1.5) условию Я. Б. Зельдовича [9] $\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$, находим

$$\delta \Delta \dot{\Delta} = \frac{6\delta(\theta_0 - 1)\Delta^2}{\theta_0^3} - \frac{6(1+\Delta)\ln(1+\Delta)}{\Delta}. \quad (1.7)$$

Исключая из уравнений (1.6) и (1.7) величину $\delta \Delta \dot{\Delta}$, получим уравнение

$$\delta = \frac{\theta_0^3(3 + 2\Delta_*) \ln(1 + \Delta_*)}{(2\theta_0 - 3)\Delta_*^3}. \quad (1.8)$$

Решив уравнение (1.7), найдем толщину прогретого слоя $\Delta = \Delta_*$. Зная Δ_* , легко получим время прогрева

$$\tau_* = \frac{\delta}{3} \int_0^{\Delta_*} \frac{\Delta^2 d\Delta}{\ln(1+\Delta) + \delta \theta_0^{-3} \Delta^3}. \quad (1.9)$$

В предельном случае $\delta \rightarrow \infty$ из формул (1.5) и (1.9) получим профиль температуры и время прогрева для зажигания нагретой пластины.

Из выражения (1.5) и уравнения (1.6) легко видеть, что при умеренных значениях τ возмущение профиля температуры и толщины пограничного слоя от теплоты химической реакции мало. В частности, в предельном случае $\delta \rightarrow \infty$ возмущение мало при $0 < \tau \leq \tau_*$. Поскольку сходимость метода М. Е. Швеца [4] при решении линейных краевых за-

дач доказана Л. С. Гандиным [8], а возмущение от теплоты реакции мало, то можно считать, что сходимость последовательных приближений, по М. Е. Швецу, имеет место и в нашем случае, по крайней мере при $\delta \gg 1$, $\theta_0 \gg 1$ и $0 < \tau \leq \tau_*$. В частности, для малых значений τ погрешность приближенного решения (1.5) не превосходит 8%.

Из выражения (1.9) видно, что τ_* существенно зависит от δ , где δ — квадрат приведенного характерного размера. Из уравнения (1.6) видно, что для любых $\Delta > 0$ величина $\dot{\Delta} > 0$ и, следовательно, чем больше τ , тем больше толщина погранслоя. Как следует из уравнения (1.8), величина δ при малых Δ_* стремится к ∞ , а с ростом Δ_* убывает, стремясь при $\Delta_* \rightarrow \infty$ к 0. Тогда, наоборот, большим значениям δ отвечают меньшие значения Δ_* . Следовательно, из приведенного анализа следует, что с убыванием величины δ время прогрева возрастает и, наоборот, с ростом δ время прогрева убывает.

Таким образом, чем больше приведенный характерный размер тела, тем меньше время прогрева, и, следовательно, тем легче осуществляется поджигание реагирующего вещества.

При весьма больших значениях δ можно с помощью метода малого параметра [10] найти приближенное решение уравнения (1.6). Полагая

$$u = u_0 + \frac{u_1}{\sqrt{\delta}} + \frac{u_2}{\delta} + \dots \quad (u = \delta \Delta^2) \quad (1.10)$$

и подставляя (1.10) в уравнение (1.6), найдем уравнения для u_0 и u_1

$$\dot{u}_0 - \frac{6u_0}{\theta_0^3} = 6, \quad u_0(0) = 0 \quad (1.11)$$

$$\dot{u}_1 - \frac{6u_1}{\theta_0^3} = -3\sqrt{u_0}, \quad u_1(0) = 0. \quad (1.12)$$

Решая задачи Коши (1.11) и (1.12), получим

$$u_0 = \theta_0^3(p-1), \quad \left(p = \exp \frac{6\tau}{\theta_0^3}\right), \quad (1.13)$$

$$u_1 = \frac{\theta_0^3}{2} \left[\sqrt{p-1} - p \operatorname{arctg} \sqrt{p-1} \right]. \quad (1.14)$$

Таким образом, с помощью (1.10), (1.13) и (1.14) величина u определяется с точностью до членов, содержащих множителем величину δ^{-1} .

Подставляя найденное значение u в (1.8) и решая полученное уравнение методом малого параметра [11] относительно τ , найдем

$$\tau_* = \frac{\theta_0^3}{6} \ln \frac{2\theta_0}{2\theta_0-3} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\theta_0^3}{\delta}} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2\theta_0-3}} - \right. \right. \\ \left. \left. - (1-2\theta_0^{-1}) \sqrt{\frac{3}{2\theta_0-3}} \right] \right\}. \quad (1.15)$$

Из формулы (1.15) видно, что при $\delta \rightarrow \infty$ время прогрева асимптотически убывает, стремясь ко времени прогрева, характерному для зажигания реагента нагретой пластиной [12]. Формула (1.15) тем точнее, чем больше δ . При $\delta \rightarrow \infty$ формула (1.15) практически совпадает с соответствующей формулой для времени прогрева, полученной в [3] с помощью электронно-вычислительной машины. При $\delta \gg 1$ величина τ_* , найденная с помощью (1.15), мало отличается от соответствующих значений τ_* , рассчитанных с помощью (1.19). В частности, при $\theta_0 = 10$, $\sqrt{\delta} = 14,28$, с

помощью (1.15) получаем $\tau_*=38,08$, в то время как из (1.9) путем численного интегрирования методом Симпсона для десяти ординат [11], находим: $\Delta_*=1$ и $\tau_*=38,86$. При $\theta_0=10$, $\delta_0=3,24$, $\Delta_*=10$ и $\delta=4335,6$, $\Delta_*=0,204$ тем же методом найдем: $\tau_*=111,5$ и $\tau_*=29,5$. Соответствующее время прогрева для зажигания пластиной равно 27.

Таким образом, влияние кривизны поверхности и конечных размеров накаливаемого тела тем существенней, чем меньше δ .

§ 2. Рассмотрим зажигание реагирующего вещества нагретым шаром при условии, что теплофизические коэффициенты постоянны и имеет место реакция нулевого порядка. Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \delta \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{2}{x} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \delta e^{\theta} \quad (2.1)$$

при граничных и начальных условиях (1.3).

Как и раньше, в качестве первого приближения для θ получаем выражение (1.4). Опуская промежуточные выкладки, которые аналогичны предыдущим, запишем окончательные результаты

$$\begin{aligned} \theta_2 = & \frac{2\theta_0 x}{\Delta} (\ln x - 1) + \frac{\delta \theta_0 \Delta}{6\Delta^2} [2 - 3x^2 + x^3 + (1-x)(\Delta^2 - 3)] + \frac{\delta \Delta}{\theta_0^2} (1-x) + \\ & + \frac{\delta \Delta^2}{\theta_0^2} \left[1 - \exp \frac{\theta_0 (1-x)}{\Delta} \right] + \frac{\theta_0 (3-x)}{\Delta} + \\ & + \frac{2\theta_0}{\Delta^2} \{1 + (1+\Delta)[\ln(1+\Delta) - 1]\} (1-x). \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\delta \Delta \dot{\Delta} = \frac{3\delta \Delta^2}{\theta_0^3} + 3 \left[\frac{2 \ln(1+\Delta)}{\Delta} - 1 \right], \quad \Delta(0) = 0. \quad (2.3)$$

$$\delta = \frac{\theta_0^3 [2(3+2\Delta_*) \ln(1+\Delta_*) - 3\Delta_*]}{(2\theta_0 - 3) \Delta_*^3}, \quad (\Delta < 1) \quad (2.4)$$

$$\tau_* = \frac{\delta}{3} \int_0^{\Delta_*} \frac{\Delta^2 d\Delta}{2 \ln(1+\Delta) - \Delta + \delta \theta_0^{-3} \Delta^3}. \quad (2.5)$$

Здесь и выше опущены члены, содержащие множителем величину $\epsilon = e^{-\theta_0}$.

Из уравнения (2.5) легко установить, что Δ растет при $\Delta < 1$ с ростом τ , а из уравнения (2.4) находим, что с ростом δ величина Δ_* убывает.

Таким образом, чем меньше δ , тем больше время прогрева и наоборот. Для больших значений δ методом малого параметра удастся найти приближенное решение задачи Коши

$$u = \theta_0^3 \left\{ p - 1 + \sqrt{\frac{\theta_0^3}{\delta}} [V \overline{p-1} - \operatorname{arctg} V \overline{p-1}] \right\}, \quad \left(u = \delta \Delta^2, p = \exp \frac{6\tau}{\theta_0^3} \right). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в уравнение (2.4) и решая полученное уравнение методом малого параметра относительно τ , найдем приближенное аналитическое выражение для времени прогрева

$$\tau_* = \frac{\theta_0^3}{6} \ln \frac{2\theta_0}{2\theta_0 - 3} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\theta_0^3}{\delta}} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2\theta_0 - 3}} - (1 - 2\theta_0^{-1}) \sqrt{\frac{3}{2\theta_0 - 3}} \right] \right\}. \quad (2.7)$$

Сравнивая (1.15) и (2.7), видим, что при одинаковых значениях δ и θ_0 величина (2.7) больше величины (1.15).

Таким образом, если цилиндр определенного радиуса, нагретый до определенной температуры, воспламеняет реагирующий газ, то шаром того же радиуса, нагретым до той же температуры, поджечь реагирующий газ не удастся. Это объясняется тем, что шар обладает поверхностью двоякой кривизны. Расчет τ_* с помощью численного интегрирования (2.5) подтверждает эти соображения. Так, для $\theta_0 = 10$, $\Delta_* = \frac{1}{4}$ и $\delta = 4335,6$ из (2.5) находим $\tau_* = 31,4$, что в 1,06 раза превышает соответствующее время прогрева при зажигании цилиндром.

Время прогрева однозначно связано с температурой нагретого тела. Так как время прогрева убывает с ростом характерного размера, то температура нагретой поверхности, при которой имеет место зажигание реагента (температура зажигания), также убывает с ростом характерного размера, асимптотически стремясь к температуре зажигания накаливаемой пластиной. Этот вывод согласуется с экспериментальными данными работы [13].

В заключение отметим, что решение краевых задач (1.1) (1.3) и (2.1) (1.3) методом М. Е. Швеца [4] тем точнее, чем меньше Δ по сравнению с 1.

§ 3. Для того чтобы оценить влияние теплоотдачи в окружающую среду, рассмотрим зажигание с торца реагирующего полубесконечного цилиндра. Предполагается, что на боковой поверхности цилиндра поддерживается постоянная температура T° , что имеет место, если реагирующее вещество заключено в сосуд, стенки которого имеют большую теплоемкость, или когда реагирующее вещество интенсивно охлаждается жидкостью. Математически задача сводится к решению уравнения

$$\delta x \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = x \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \delta x e^{\theta} \quad (3.1)$$

с граничными и начальными условиями

$$\theta(\tau, x, 0) = -\theta_0 x^2, \quad \theta(\tau, x, \Delta) = -\theta_0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \theta(\tau, 1, z) = -\theta_0, \quad \Delta(0) = 0. \quad (3.2)$$

Здесь $z = \frac{z}{r_0}$ — безразмерная осевая координата.

При выводе уравнения (3.1) использовалось преобразование Д. А. Франк-Каменецкого [7] для $\exp - \frac{E}{RT}$, а при выводе условий (3.2) была введена толщина температурного пограничного слоя.

Применим для решения краевой задачи (3.1) (3.2) комбинацию двух методов: метода М. Е. Швеца [4] и интегральных соотношений [5, 6]. Интегрируем уравнение (3.1) по x от 0 до 1, заменяя

$$\theta \approx w(\tau, z)(1 - x^2) - \theta_0 x^2, \quad e^{\theta} \approx (1 - x^2)e^w + \varepsilon x^2, \quad (w = \theta(\tau, 0, z)). \quad (3.3)$$

В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \delta \frac{\partial w}{\partial \tau} + 8(w + \theta_0) - \delta(e^w + \varepsilon) \quad (3.4)$$

с граничными и начальными условиями

$$w(\tau, z) = 0, \quad w(\Delta, \tau) = -\theta_0, \quad \Delta(0) = 0. \quad (3.5)$$

Краевую задачу (3.1) (3.2) решаем методом М. Е. Швеца [4]. В качестве первого приближения получаем

$$w_1 = -\frac{\theta_0 z}{\Delta}. \quad (3.6)$$

Подставляя w_1 в правую часть (3.4) и интегрируя результат подстановки два раза по z , находим с учетом первого и второго из условий (3.5)

$$w_2 = \frac{\delta \theta_0 \Delta z^3}{6\Delta^2} - \frac{4\theta_0 z^3}{3\Delta} + 4\theta_0 z^2 + \frac{\delta \Delta^2}{\theta_0^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\theta_0 z}{\Delta}\right) \right] - \frac{z}{\Delta} \left[\frac{8\theta_0 \Delta^2}{3} + \theta_0 + \frac{\delta \Delta^2}{\theta_0^2} + \frac{\delta \theta_0 \Delta \dot{\Delta}}{6} \right]. \quad (3.7)$$

Удовлетворяя (3.7) условию М. Е. Швеца [4], получаем уравнение для Δ

$$\delta \Delta \dot{\Delta} = \Delta^2 \left(\frac{3\delta}{\theta_0^3} - 4 \right) + 3. \quad (3.8)$$

Интегрируя (3.8) с учетом последнего из условий (3.5), находим

$$\tau = \frac{\delta}{6b} \ln(1 + b\Delta^2), \quad \Delta^2 = \frac{1}{b} \left(\exp \frac{6b\tau}{\delta} - 1 \right), \quad \left(b = \frac{\delta}{\theta_0^3} - \frac{4}{3} \right). \quad (3.9)$$

Из выражения (3.7) и уравнения (3.8) видно, что возмущение профиля температуры и толщины пограничного слоя малы при умеренных значениях τ . В отсутствие теплоты реакции градиент температуры при $x=0$, найденный с помощью метода М. Е. Швеца [4], отличается от соответствующих точных значений [14] на 8% при малых τ и на 22% при $\tau \rightarrow \infty$. С помощью решения задачи о тепловом взрыве в бесконечном цилиндре установлено, что аппроксимация (3.3) и осреднение всех величин по x вносят погрешность $\approx 11\%$.

Таким образом, ориентировочно можно считать, что наибольшая ошибка, которую можно ожидать при решении краевой задачи (3.1) (3.2) комбинацией методов М. Е. Швеца [4] и интегральных соотношений [5, 6], не превосходит 22%.

Удовлетворяя (3.7) условию Я. Б. Зельдовича [9], получаем с учетом первого из выражений (3.9) время прогрева

$$\tau_* = \frac{\delta \theta_0^3}{2(4\theta_0^3 - 3\delta)} \ln \frac{\delta(2\theta_0 - 3) - 4\theta_0^3}{2\theta_0(\delta - 4\theta_0^2)}, \quad (3.10)$$

а учитывая второе приближение (3.9), найдем толщину прогретого слоя

$$\Delta_* = \theta_0 \sqrt{\frac{3\theta_0}{\delta(2\theta_0 - 3) - 4\theta_0^3}}. \quad (3.11)$$

Из (3.10) легко видеть, что при

$$\delta = \delta_* = 4\theta_0^2 \quad (3.12)$$

величина $\tau_* \rightarrow \infty$, то есть зажигание не имеет места.

Если теплоотдача с боковой поверхности реагирующего цилиндра осуществляется по закону Ньютона, то аналогичным образом найдем

$$\tau_* = \frac{8\theta_0^3(4 + \text{Bi})}{6m(4 + \text{Bi})[1 + (\gamma - \varepsilon - \varepsilon n\theta_0)n^{-2}] - 8\text{Bi}\theta_0^3} \times \times \ln \frac{2\theta_0\{m(4 + \text{Bi})[1 + (\gamma - \varepsilon)n^{-1}] - 4\text{Bi}\theta_0^2\}}{m(4 + \text{Bi})\{2\theta_0 - 3 + [n\theta_0(2\gamma + \varepsilon) + 3(\varepsilon - \gamma)]n^{-2} - 4\text{Bi}\theta_0^3\}}. \quad (3.13)$$

Легко видеть, что время прогрева стремится к ∞ , если

$$\delta = \delta_* = \frac{8Bi\theta_0^2}{(2+Bi)[2+(\gamma-\epsilon)(2+Bi)]}, \left(m = \frac{\delta(2+Bi)}{4+Bi}, \right. \\ \left. \gamma = \exp - \frac{Bi\theta_0}{2+Bi}, n = \frac{2}{2+Bi} \right). \quad (3.14)$$

Здесь $Bi = \frac{\alpha r_0}{\lambda}$ — критерий Био, α — коэффициент теплоотдачи, r_0 — радиус цилиндра.

При $Bi \rightarrow \infty$ из (3.14) получаем условие (3.12).

Таким образом, для того, чтобы имело место зажигание реагирующего цилиндра с торца при теплоотдаче с боковой поверхности по закону Ньютона, необходимо, чтобы $\delta \geq \delta_*$, где δ_* определяется (3.14).

При $Bi \rightarrow 0$ или $m \rightarrow \infty$ из выражения (3.13) получим время прогрева для зажигания реагирующего вещества нагретой пластиной. Этот же результат получим из выражения (3.10) при $\delta \rightarrow \infty$.

Таким образом, в обоих случаях, если приведенный радиус реагирующего цилиндра меньше некоторой величины, то зажигание реагента не имеет места.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович. К теории зажигания. ДАН СССР, 1963, 150, № 3.
2. В. Н. Вилюнов, О. Б. Сидонский. К теории воспламенения конденсированных систем накалиной поверхностью. ДАН СССР, 1963, 152, № 1.
3. А. Э. Аверсон, В. В. Барзыкин, А. Г. Мержанов. Закономерности зажигания конденсированных взрывчатых систем при идеальном теплообмене на поверхности с учетом выгорания, ИФЖ, 1965, 9, № 2.
4. М. Е. Швеца. О приближенном решении некоторых задач теории пограничного слоя. ПММ, 1950, 14, вып. 1.
5. А. А. Дородницын. Об одном методе решений уравнений пограничного слоя. ПМТФ, 1960, № 3.
6. О. М. Белоцерковский, П. И. Чушкин. Численный метод интегральных соотношений. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5.
7. Д. А. Франк-Каменецкий. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Изд. АН СССР, 1947.
8. Л. С. Гандин. О сходимости метода М. Е. Швеца. ПММ, 1950, 14, вып. 4.
9. Я. Б. Зельдович. Теория зажигания накалиной поверхностью. ЖЭТФ, 1939, № 13.
10. В. Каннингхем. Введение в теорию нелинейных систем. Госэнергоиздат, 1962.
11. П. В. Мелентьев. Приближенные вычисления. Физматгиз, 1962.
12. А. М. Гришин. О зажигании, реагирующих веществ. ПМТФ, 1966, № 5.
13. Л. Н. Хитрин. Физика горения и взрыва. Изд. МГУ, 1957.
14. Г. Карслоу, Д. Егер. Теплопроводность твердых тел. Изд. «Наука», М., 1964.

Поступила 1. III. 1967.

ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ПОРШНЯ В ТРУБЕ С ВВОДОМ ЭНЕРГИИ

С. Л. ГУБИНА, Л. В. КОМАРОВСКИЙ

В данной работе рассматривается задача об ускорении поршня в трубе, когда в область газа, непосредственно примыкающего к движущемуся поршню, вводится некоторое количество энергии. Решена задача об оптимальном выборе сечения для единичного ввода энергии. Наконец, дается численное решение о разгоне поршня в трубе, когда имеется несколько вводов энергии.

§ 1. Постановка задачи о дополнительном вводе энергии непосредственно за движущимся поршнем

Анализ как точного, так и численного решения задачи о движении поршня под действием сжатого газа (задача Лагранжа) показывает сильное падение давления на дно поршня с ростом скорости. Действительно, до прихода первой волны разрежения, отраженной от задней стенки камеры высокого давления, в газе за поршнем скорость звука связана линейной зависимостью со скоростью поршня. Давление же газа на поршень пропорционально скорости звука в степени, намного превышающей единицу, так, например, для двухатомного газа она равна семи. Следовательно, даже небольшое понижение скорости звука приводит к значительному понижению давления на движущийся поршень. Это давление можно повысить, если вводить энергию в газ, непосредственно примыкающий к поршню.

Начнем рассмотрение этой задачи с наиболее простого случая, когда происходит ввод некоторого количества энергии в каком-нибудь месте пусковой трубы. При этом будем предполагать, что энергия вводится в газ непрерывно и не превышает некоторого предела, при котором на интересующей нас длине пусковой трубы могли бы возникнуть ударные волны. Другими словами, исходные условия должны быть такими, чтобы данная задача имела решение в классе непрерывных функций.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть количество введенной энергии задано и задана длина пусковой трубы. Тогда сразу же возникает вопрос: где и когда лучше ввести эту порцию энергии, чтобы получить наибольшее приращение скорости поршня?

На часть этого вопроса можно дать ответ, не решая даже соответствующей газодинамической задачи. Действительно, на вопрос, где вводить энергию, можно сразу дать однозначный ответ: энергию следует

вводить в газ непосредственно за движущимся поршнем. Этим самым сразу же увеличивается давление на дно поршня и усиливается естественное перераспределение энергии в рабочем газе. На другую часть вопроса, а именно, когда вводить энергию за поршнем, можно ответить, только решив соответствующую газодинамическую задачу. Ограничимся здесь двумя небольшими замечаниями, касающимися двух предельных положений поршня.

Во-первых, если всю энергию вводить в начальный момент времени, непосредственно, когда скорость поршня равна нулю, то здесь можно обойтись без численного решения. Действительно, решение этой задачи сводится к обычной классической задаче Лагранжа (за счет вводимой энергии увеличится температура газа, следовательно, начальная скорость звука, а σ и γ , т. е. параметры, от которых зависит решение задачи Лагранжа, останутся без изменения). Если же энергия вводится не в начальный момент, а с некоторым запаздыванием, то это приведет, очевидно, к снижению приращения скорости поршня и в пределе, когда запаздывание сравняется с промежутком времени, необходимым, чтобы первая информация о вводе энергии догнала поршень в конце пусковой трубы, приращение дульной скорости поршня будет равно нулю. Таким образом, если вводить энергию непосредственно в камеру, то нужно вводить в начальный момент времени, чтобы получить наибольшее приращение дульной скорости модели. Однако ввод энергии непосредственно в камеру не дает дополнительно желаемого перераспределения энергии по рабочему газу и, следовательно, не является наилучшим.

К тому же введение энергии в камеру увеличивает максимальное (пиковое) давление, т. е. создает неблагоприятные условия для сохранения поршня.

Второе замечание касается другого предельного положения поршня, а именно, того момента, когда он покидает канал ствола. Если вводить энергию в этот момент, то, очевидно, приращение скорости будет ничтожно малым и в пределе будет равным нулю. Хотя здесь и получим наилучшее перераспределение энергии по рабочему газу, то время воздействия рабочего газа на поршень после ввода энергии практически равно нулю. Все эти соображения говорят о том, что для заданной длины пусковой трубы, вероятно, существует единственное сечение, ввод энергии в котором дает максимальное приращение дульной скорости поршня.

Таким образом, необходимо решить следующую газодинамическую задачу: для заданной длины пусковой трубы найти оптимальное расположение ввода энергии.

Легко видеть, что рассматриваемая задача является частным случаем более общей задачи, рассмотренной нами в [1]. Действительно, в нашем случае $M=F=0$, а $N \neq 0$. Основная система уравнений в этом случае будет иметь вид

$$\frac{2}{\gamma-1} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{2}{\gamma-1} u \frac{\partial a}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial x} = (\gamma)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} a^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} A^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot N, \quad (1.1)$$

$$\frac{2a}{\gamma-1} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)} \frac{\partial}{\partial x} \ln A, \quad (1.2)$$

$$\frac{d}{dt} (\ln A) = (\gamma-1) \left(\frac{\gamma}{a^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot A^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot N, \quad (1.3)$$

где функция $N(t, x)$ определяет интенсивность и распределение источников энергии по пусковой трубе и во времени.

Система характеристик в плоскости независимых переменных будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = u \pm a, \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad (1.4)$$

а в плоскости искомых функций

$$\frac{2}{\gamma-1} da \pm du = \frac{a}{\gamma(\gamma-1)} d \ln A + \left(\frac{\gamma A}{a^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \frac{\gamma-1}{a} N dt, \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{dt} (\ln A) = (\gamma-1) \left(\frac{\gamma}{a^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot A^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot N. \quad (1.6)$$

Для удобства дальнейшего изложения и численного расчета перейдем к безразмерным величинам:

$$\bar{x} = \frac{x}{l_0}, \quad \bar{t} = \frac{a_0}{l_0} t, \quad \bar{u} = \frac{u}{a_0}, \quad \bar{a} = \frac{a}{a_0}, \quad \bar{A} = \frac{A}{A_0}, \quad \bar{N} = N / \frac{\rho_0 a_0^2}{\gamma-1} \frac{a_0}{l_0}. \quad (1.7)$$

Тогда система характеристик в плоскости независимых переменных останется без изменения, а в плоскости искомых функций примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\gamma-1} d\bar{a} \pm d\bar{u} &= \frac{\bar{a}}{\gamma(\gamma-1)\bar{A}} d\bar{A} + \bar{a}^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot \bar{A}^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \bar{N} \frac{d\bar{x}}{u \pm a}, \\ \frac{d\bar{A}}{d\bar{t}} &= \gamma \bar{a}^{-\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \cdot \bar{A}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \bar{N}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

При решении практической задачи нам задается не N , как правило, а количество введенной энергии $\mathcal{E}_{s_0}$, где $\mathcal{E}$ — количество введенной энергии на единицу площади поперечного сечения пусковой трубы, s_0 — площадь поперечного сечения. В зависимости от характера ввода энергии она распределена по какой-то площади в плоскости (x, t) . Так как мы рассматривали только те задачи, когда в области течения газа не возникают ударные волны, то, очевидно, скорость поршня вдали от места ввода энергии будет зависеть только от количества введенной энергии и почти совсем не будет зависеть от вида функции распределения источников энергии N . Конечно, при этом подразумевается, что расстояние от места ввода энергии во много раз превышает характерный размер области, в которой распределены источники энергии. Поэтому в дальнейшем функцию N будем задавать в наиболее простой прямоугольной области с центром в точке D (см. фиг. 1):

$$x_0 - h \leq x \leq x_0; \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \tau \quad (1.9)$$

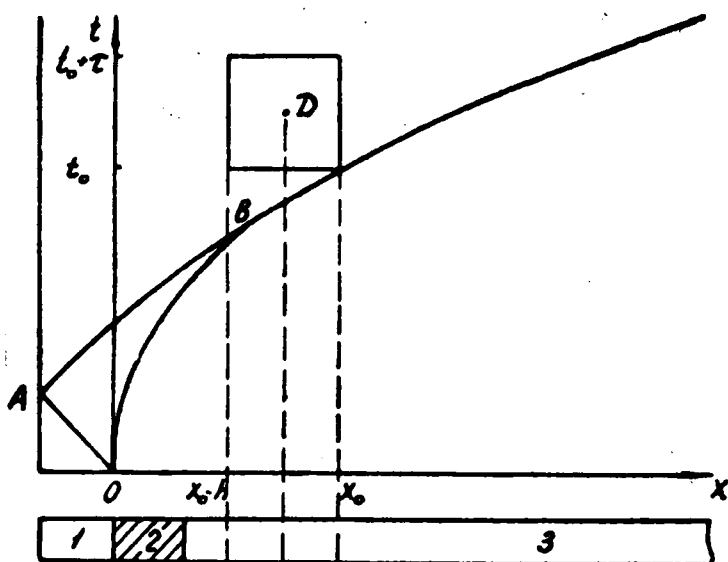
и в виде простой функции, которая на границе прямоугольника обращается в нуль:

$$N = \text{const} \cdot (x_0 - x)[x - (x_0 - h)](t - t_0)[(t_0 + \tau) - t]. \quad (1.10)$$

Вне этого четырехугольника функция $N(t, x)$ тождественно равна нулю. Так как введенная энергия на единицу площади поперечного сечения пусковой трубы равна

$$\mathcal{E} = \int_{x_0-h}^{x_0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} N(t, x) dx dt, \quad (1.11)$$

то в безразмерном виде имеем:



Фиг. 1

$$k = \frac{\partial}{\frac{\rho_0 a_0^2}{\gamma - 1} I_0} = \int_{\bar{x}_0 - h}^{\bar{x}_0} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0 + \tau} \bar{N} d\bar{x} d\bar{t}. \quad (1.12)$$

Итак, если $k=1$, то это означает, что к рабочему газу подводится энергия, равная энтальпии газа в основной камере, когда $\sigma_0=1$. Другими словами, эта энергия равна полной энергии газа в основной камере при $\sigma_0=1$, умноженной на отношение удельных теплоемкостей γ . Такое безразмерное выражение энергии нам потребовалось для того, чтобы было удобно сравнивать эту задачу с задачами, рассмотренными нами ранее [1]. Действительно, если $k=1$, то подводимая энергия равна полной энергии вытекающего газа из резервуара через малое отверстие при условии, что масса вытекающего газа равна массе газа основной камеры, когда $\sigma_0=1$.

Интегрируя выражение (1.12), найдем выражение для $\bar{N}$:

$$\bar{N} = k \frac{36}{h^3 \tau^3} (\bar{x}_0 - \bar{x}) [\bar{x} - (\bar{x}_0 - h)] (\bar{t} - \bar{t}_0) [(\bar{t}_0 + \tau) - \bar{t}]. \quad (1.13)$$

$$\bar{x}_0 - h \leq \bar{x} \leq \bar{x}_0, \quad \bar{t}_0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_0 + \tau.$$

Так как в дальнейшем в работе используются только безразмерные величины, то черта над ними везде опускается.

§ 2. Численное решение задачи Лагранжа с вводом энергии

Рассмотрим численное решение задачи о движении поршня в трубе, когда в рабочий газ непосредственно за поршнем происходит дополнительный ввод энергии. Итак, дана полубесконечная труба, часть объема которой заполнена сжатым покоящимся газом 1 (см. фиг. 1). С левой стороны газ ограничен неподвижной стенкой, а с правой — поршнем 2, имеющим конечный вес. Справа от поршня — вакуум. Под действием

сжатого газа поршень приходит в движение. После прохождения поршнем сечения x_0 в газ за поршнем в промежутке $(x_0 - n, x_0)$ начинает поступать по заданному закону (1.13) энергия до момента $t_0 + \tau$. Требуется найти течение газа в трубе 3 и закон движения модели 2.

Как уже отмечалось, данная задача является частным случаем более общей задачи, рассмотренной нами в работе [1]. Расчет ведется методом характеристик. Каждая расчетная ячейка пересчитывается до тех пор, пока не совпадет заданное количество знаков по всем определяемым функциям.

Начальные и граничные условия получают так же, как частный случай, из начальных и граничных условий задачи с вводом массы, импульса и энергии. Действительно, начальные условия будут, очевидно, такими же:

$$u_0 = 0, a_0 = 1, A_0 = 1, \quad (2.1)$$

где приведенные величины записаны в безразмерном виде. Так же выражается и условие неподвижности стенки основной камеры:

$$u(-1, t) = 0. \quad (2.2)$$

Что касается граничного условия на поршне, то его получим, как частный случай, из соответствующего граничного условия задачи 111, полагая там $A = 1$:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sigma_0}{\gamma} a^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.3)$$

Действительно, в силу выбора функции N (1.13) в слой газа, непосредственно прилегающий к поршню, ввода энергии не происходит (см. фиг. 1; $N = 0$ при $x = x_0$ и $t = t_0$), следовательно, энтропийная функция остается без изменения, т. е. равна единице. Заметим здесь же, что в тех частицах газа, которые пересекают область прямоугольника с центром в точке D , энтропийная функция будет меняться по закону (1.8). Таким образом, видим, что начальные и граничные условия в задаче Лагранжа с подводом тепла совпадают полностью с соответствующими условиями классической задачи.

Остановимся подробнее на одной особенности численной схемы расчета, о которой в работе [1] мы не говорили.

В самом общем случае ввода энергии дифференциальные уравнения характеристик трех семейств можно записать в виде:

$$dx = \alpha dt, \quad \frac{2}{\gamma-1} da + du = CdA + Bdt, \quad (2.4)$$

$$dx = \beta dt, \quad \frac{2}{\gamma-1} da - du = CdA + Bdt, \quad (2.5)$$

$$dx = udt, \quad dA = Gdt, \quad (2.6)$$

где

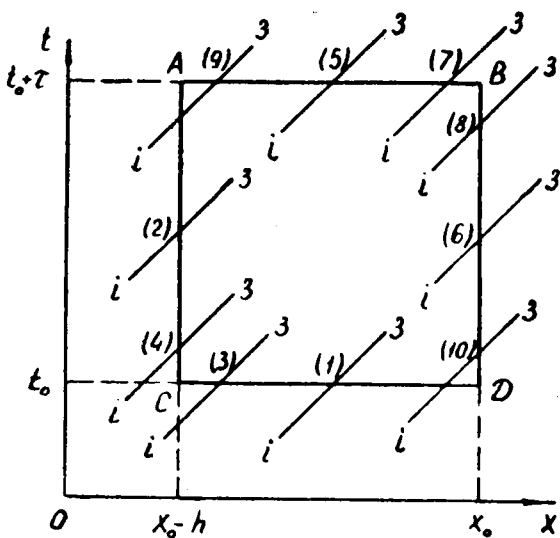
$$C = \frac{a}{\gamma(\gamma-1)A}, \quad B = a^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot A^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot N, \quad G = \gamma a^{-\frac{2\gamma}{\gamma-1}} A^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} N.$$

Если исходные точки 0, 1, 2 и искомая точка 3 лежат вне прямоугольника, то интегрирование и итерации идут по общему правилу [1]. Если же отрезок, вдоль которого происходит интегрирование, частично лежит в области прямоугольника, то применение общей схемы численного расчета может привести к дополнительной погрешности (особенно

при шаге, сравнимом с размерами прямоугольника). Действительно, вдоль одной части отрезка интегрирования, которая лежит вне прямоугольника, коэффициенты B и G тождественно равны нулю, следовательно, когда мы берем полусумму значений коэффициентов в точке i и 3, то нужно умножать не на весь отрезок интегрирования, а только на часть его, которая находится в области прямоугольника. Этот факт был учтен нами при программировании данной задачи.

Для простоты изложения ограничимся случаями, когда течение газа сверхзвуковое (на практике, как правило, ввод энергии нужно производить на тех участках пусковой трубы, где давление на поршень значительно уменьшилось, т. е. при сверхзвуковом движении поршня и газа за ним. Из дальнейших расчетов также будет следовать, что наиболее выгодное расположение ввода энергии находится на участке трубы, где течение газа сверхзвуковое). Кроме того, будем предполагать, что наибольший отрезок интегрирования, по крайней мере, короче, чем меньшая сторона прямоугольника. Будем обозначать отрезок интегрирования символически через $i3$, где i может принимать значение 1, если интегрирование идет в направлении характеристики первого семейства, 2, если отрезок интегрирования совпадает с направлением характеристики второго семейства, наконец, 0, если интегрирование происходит вдоль направления линии частицы (характеристики третьего семейства).

В случае сверхзвукового течения газа направление всех характеристик газа будет составлять острый угол с направлением оси ox . Это обстоятельство уменьшает все возможные случаи пересечения отрезков интегрирования со стороны прямоугольника и позволяет их просто классифицировать следующим образом.



Фиг. 2

Искомая точка лежит внутри прямоугольника $ABDC$.

В этом случае при интегрировании вдоль отрезка $i3$ будем умножать средние значения коэффициентов на разность $(t_3 - t_{i3})$, где t_{i3} — одна из координат точки пересечения отрезка $i3$ с соответствующей стороной. Значения коэффициентов B и G в n -й итерации будут иметь значения:

$$B_1^n = B_2^n = \frac{1}{2} B_3^{n-1}, \quad G_0^n = \frac{1}{2} G_3^{n-1}. \quad (2.7)$$

Найдем теперь значение t_{i3} . В зависимости от расположения точки i здесь могут возникнуть следующие случаи.

1. Если выполняется условие $x_i \geq x_0 - h$, то отрезок может пересекать только сторону CD рассматриваемого прямоугольника $ABDC$ (см. фиг. 2). Следовательно, в этом случае $t_{i3} = t_0$.

2. Если $x_i < x_0 - h$ и $t_i \geq t_0$, то отрезок $i3$ может пересекать только сторону AC . Координату точки пересечения найдем из совместного решения двух уравнений, определяющих прямые AC и $i3$, т. е. имеем:

$$t_{i3} = t_i + \frac{t_3 - t_i}{x_3 - x_i} (x_0 - h - x_i). \quad (2.8)$$

3, 4. Если $x_i < x_0 - h$ и $t_i < t_0$, то отрезок может пересекать как саму сторону CD , так и ее продолжение в зависимости от значения

$$x_{i3} = x_i + \frac{x_3 - x_i}{t_3 - t_i} (t_0 - t_i). \quad (2.9)$$

3. Если $x_{i3} \geq x_0 - h$, то отрезок $i3$ будет пересекать сторону CD , т. е. имеем первый случай, следовательно, $t_{i3} = t_0$.

4. Если $x_{i3} < x_0 - h$, то отрезок интегрирования пересекает сторону AC . Таким образом, t_{i3} определяется по формуле (2.8).

Искомая точка лежит вне прямоугольника $ABDC$.

В этом случае усредненные значения коэффициентов будем умножать на разность $(t_{i3} - t_i)$, так как на промежутке интегрирования $(t_3 - t_{i3})$ значения этих коэффициентов равно нулю в силу того, что N тождественно равно нулю вне прямоугольника $ABDC$. Значения усредненных коэффициентов поэтому в n -й итерации определяются по формулам:

$$B_1^n = \frac{1}{2} B_1, \quad B_2^n = \frac{1}{2} B_2, \quad G_0^n = \frac{1}{2} G_0. \quad (2.10)$$

Определим теперь значение t_{i3} . Здесь так же, как и ранее, возможны два основных случая. При этом предполагается, что точка i находится внутри прямоугольника $ABDC$.

5. Если $x_3 < x_0$, то отрезок $i3$ может пересекать только сторону AB , следовательно, $t_{i3} = t_0 + \tau$.

6. Если $x_3 > x_0$ и $t_3 \leq t_0 + \tau$, то отрезок $i3$ может пересекать только сторону BD . Следовательно, координата точки пересечения определится по формуле:

$$t_{i3} = t_i + \frac{t_3 - t_i}{x_3 - x_i} (x_0 - x_i). \quad (2.11)$$

Если же $t_3 > t_0 + \tau$, то здесь возможны два случая в зависимости от значения x_{i3} :

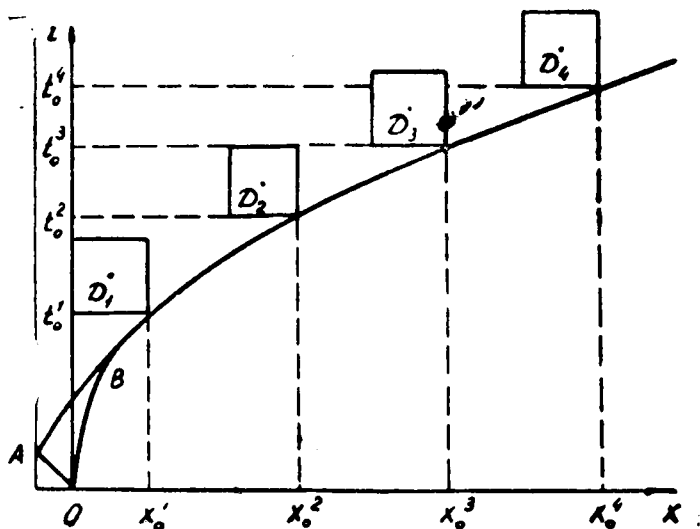
$$x_{i3} = x_i + \frac{x_3 - x_i}{t_3 - t_i} (t + \tau - t_i). \quad (2.12)$$

Оба эти случая сводятся к двум предыдущим.

7. Если $x_{i3} \leq x$, то есть отрезок интегрирования пересекает сторону AB , следовательно, $t_{i3} = t_0 + \tau$.

8. Если $x_{i3} > x_0$, то t_{i3} определяется по формуле (2.11).

В эту классификацию мы сознательно не включили еще два случая, когда отрезок интегрирования проходит по области прямоугольника $ABDC$ (см. фиг. 2, случаи 9, 10). Эти случаи нами будут рассматриваться по общему правилу (исходная точка и искомая находятся вне прямоугольника $ABDC$). Это не может привести к ощутимой погрешности, так как функция N мала в окрестности сторон прямоугольника и шаг, как правило, в несколько раз меньше любой стороны прямоугольника.



Фиг. 3.

Если вместо одного ввода энергии имеется несколько (см. фиг. 3), то расчет проводится по той же схеме с небольшими дополнениями, которые очевидны.

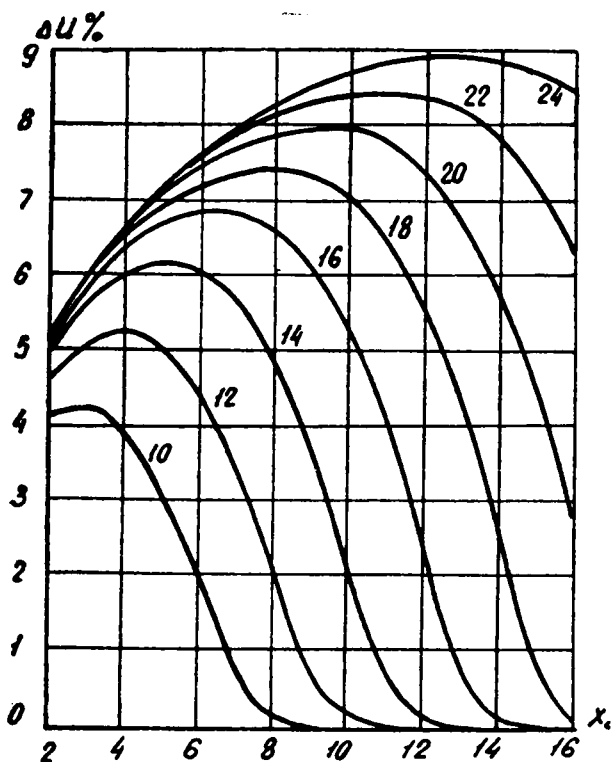
§ 3. Краткий обзор численных результатов, полученных на ЭВЦМ

Рассмотрим численное решение задачи, когда происходит один ввод энергии. Для этого случая была решена серия задач при следующих исходных данных: $\sigma_0 = 1$, $\gamma = 1.4$, $k = 0.1111...$. Расположение же ввода энергии x_0 менялось от 2 до 16. Выбор именно таких исходных данных объясняется тем, чтобы можно было провести сравнения между данными результатами и результатами, полученными нами ранее [1] для случая, когда подгон поршня осуществляется при помощи дополнительного впуска газа.

За основную характеристику выбрана скорость поршня, поэтому почти для всех задач программа составлена так, что на печать выдаются координаты линии поршня и значения скорости на ней. Этого вполне достаточно, чтобы дать ответ на интересующие нас вопросы. Кроме выдачи при целых значениях x , на печать выдавались узлы сетки характеристик и значения искомых функций в них. Так как расчет производился в основном при достаточно малом шаге (характеристика первого семейства AB разбивалась на $n = 2^8$ частей, см. фиг. 1), то на печать выдавалась только часть точек.

Функция N задавалась в виде (1.13). При этом ввод энергии происходил по площади квадрата со стороны, равной 2, т. е. $\tau = h = 2$. Такая

большая площадь ввода энергии потребовалась для того, чтобы получить непрерывное решение на достаточно большом удалении от места ввода энергии. Уменьшение τ и h при том же количестве введенной энергии приводит к пересечению характеристик одного семейства, т. е. к прекращению расчета. Чем меньше будет τ и h , тем больше будет приращение скорости модели, особенно вблизи от места ввода энергии. Действительно, с уменьшением τ и h центр ввода энергии D (см. фиг. 1) приближается к поршню и тем самым усиливается желательное перераспределение энергии по рабочему газу. Это обстоятельство всегда надо иметь в виду при сопоставлении полученного решения и соответствующей физической задачи.

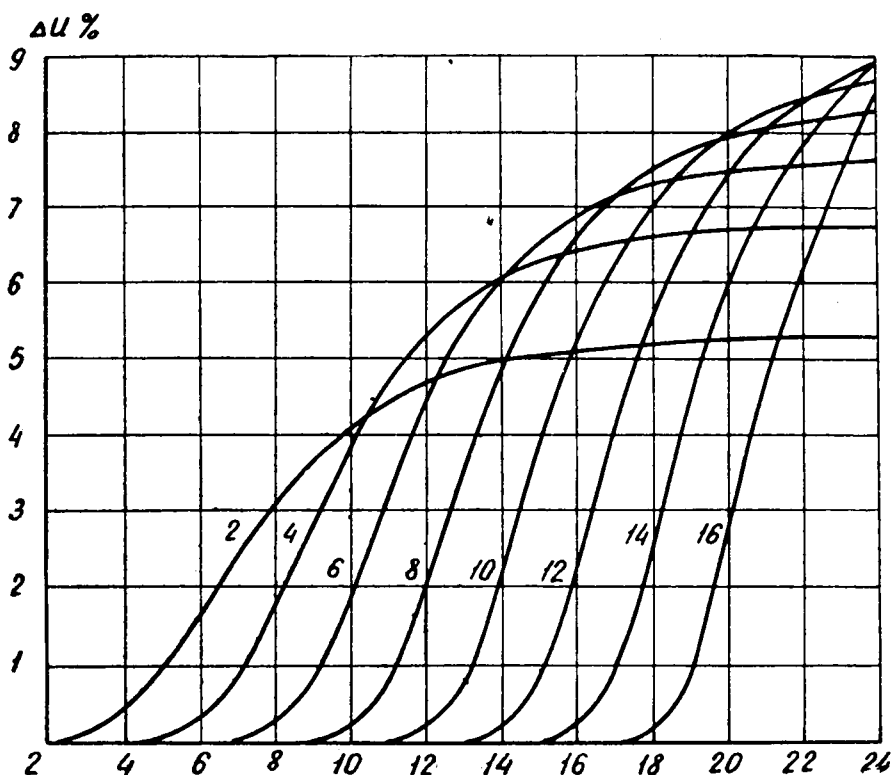


Фиг. 4

Полученные численные решения позволяют дать ответ об оптимальном расположении единичного ввода энергии. Пусть длина пусковой трубы l задана. Тогда для этой длины можно найти приращение дульной скорости $\Delta u\%$ (см. фиг. 4) в зависимости от расположения ввода энергии x_0 . Максимальное приращение дульной скорости будет соответствовать наилучшему расположению ввода энергии в рабочий газ. Полученные приращения дульной скорости для различных длин пусковых труб и при различном положении ввода энергии приведены на фиг. 4.

Могут оказаться полезными и зависимости, выражающие приращение скорости поршня в любом сечении пусковой трубы, если расположение ввода энергии задано (см. фиг. 5).

Интересно отметить, что если бы таким же образом вводить энергию при $x_0=1$, при котором можно сохранить без изменения характер



Фиг. 5.

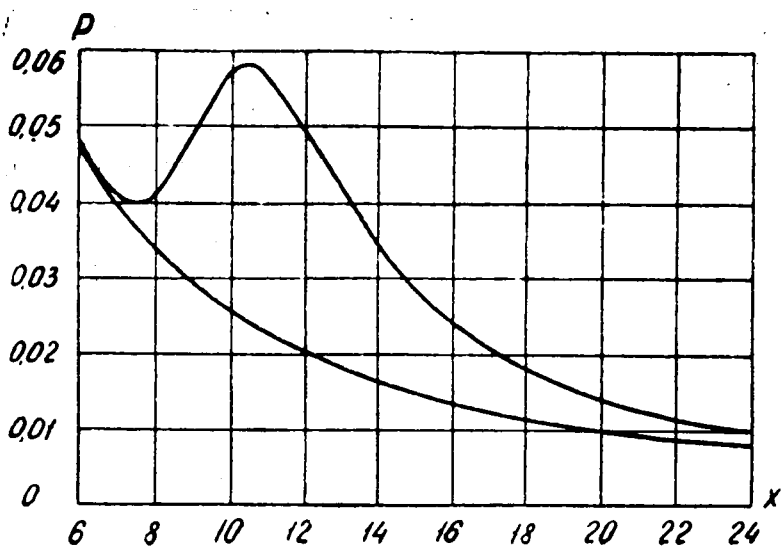
ввода энергии, так как $h=2$, а длина камеры равна единице, то мы бы получили приращение скорости меньше 5% для рассматриваемых длин пусковых труб. Следовательно, значение оптимального ввода энергии позволяет существенно увеличить приращение скорости поршня, так, например, в данной задаче при $l=24$ приращение скорости модели увеличится почти в два раза, если тепло подводить при $x_0=13$ (центр ввода в сечении $x=12$), вместо $x_0=1$ (центр ввода в сечении $x=0$). Приращение кинетической энергии модели при этом увеличится так же почти в два раза. Путем простых преобразований можно получить следующую связь между приращениями кинетической энергии и скорости модели:

$$\Delta K \% = \Delta u \% \left(2 + \frac{\Delta u \%}{100} \right). \quad (3.1)$$

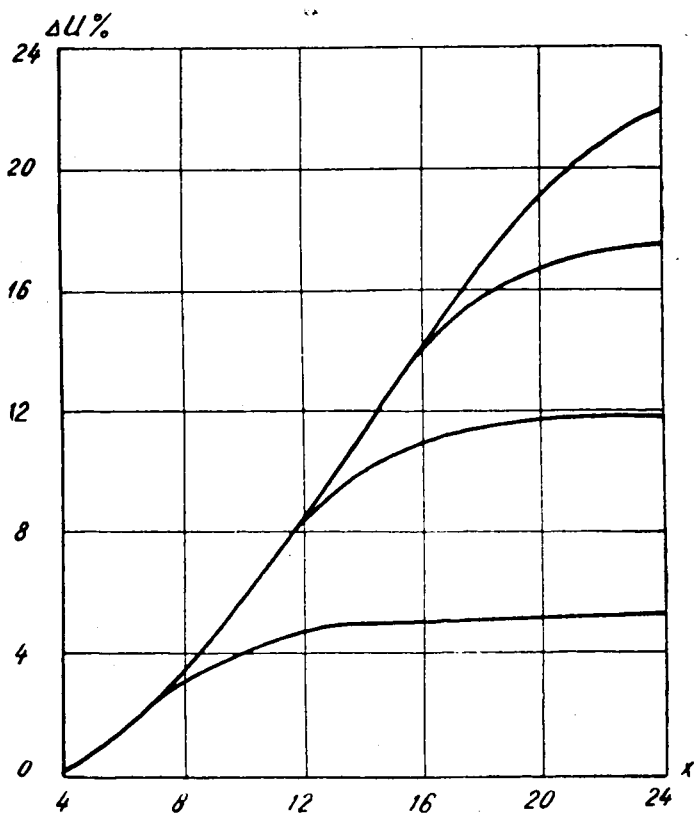
Для малых энергий ввода из (3.1) следует, что относительное приращение кинетической энергии будет в два раза больше соответствующего приращения скорости поршня, т. е. если уменьшить масштаб по вертикали на фиг. 4 и 5 в два раза, то эти же кривые дадут представление о приращении кинетической энергии модели в различных сечениях пусковой трубы в зависимости от места подвода тепла.

Зависимость давления на поршень в различных сечениях представлена на фиг. 6; кривая 1 соответствует случаю, когда отсутствует ввод энергии; кривая 2 — когда ввод энергии происходит при $x_0=6$.

Рассмотрим теперь численное решение задачи, когда происходит несколько вводов энергии вдоль канала ствола (см. фиг. 3). Схема расче

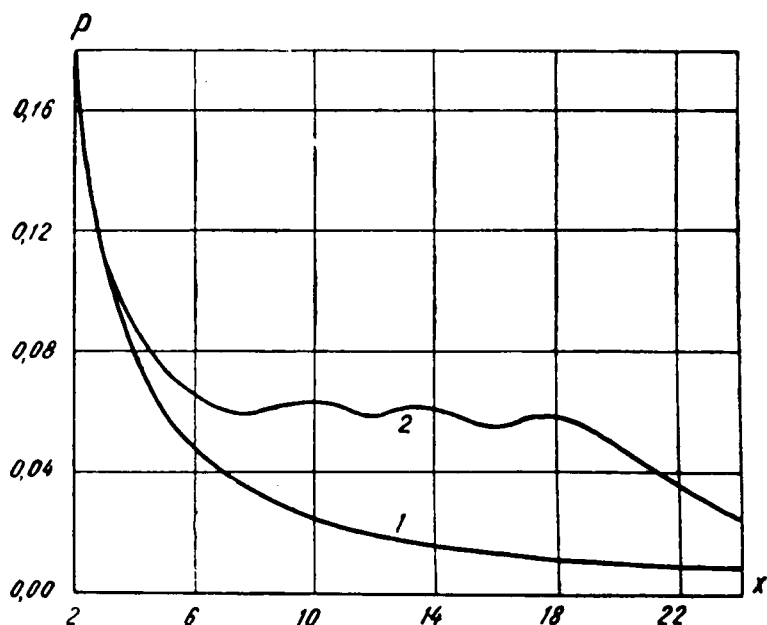


Фиг. 6



Фиг. 7

та сводится к предыдущему, если прямоугольники, в области которых происходит выделение энергии, не пересекаются между собой. Для решения практических задач это не является ограничением. При тех же исходных данных, т. е. $\sigma_0=1$, $\gamma=1,4$, $h^i=\tau^i=2$, $\kappa^i=0,111\dots$, где индекс i указывает, к какому вводу энергии относятся данные параметры, были рассмотрены задачи, когда имеется два, три и четыре ввода энергии.



Фиг. 8

На фиг. 7 приведены относительные приращения в процентах скорости поршня в различных сечениях, когда имеется один, два, три и четыре ввода энергии. Когда имеется несколько подводов тепла, то интересный вид представляет график зависимости давления на дно поршня от сечения. На фиг. 8 приведена эта зависимость в виде кривой 2. Для сравнения здесь же дано изменение давления на дно поршня, когда отсутствует подвод энергии. Интересен здесь следующий факт, что на довольно большом промежутке (от 6 до 18) давление на дно поршня примерно одинаково.

ЛИТЕРАТУРА

1. Комаровский Л. В. Уч. зап. Томск. ун-та, № 68, 1967.

Поступила 1. III. 1966

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛАГРАНЖА С ЧАСТНЫМ ЗАКОНОМ ВВОДА ЭНЕРГИИ

Л. В. КОМАРОВСКИЙ

Рассмотрим следующую задачу. Дана бесконечная труба, в которой находится поршень, имеющий конечную массу. Слева от поршня — покоящийся газ, справа — вакуум. К рабочему газу в области движения может подводиться энергия. Под действием сжатого газа поршень придет в движение. Требуется определить течение газа и закон движения поршня, когда закон ввода энергии задан. Найдем точное решение этой задачи для одного частного закона ввода энергии в рабочий газ.

Одномерное неустановившееся течение газа описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad (2)$$

$$v \frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p \frac{\partial v}{\partial t} = (\gamma - 1) \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (3)$$

где u — скорость газа, p — давление, v — удельный объем, γ — отношение удельных теплоемкостей, q — количество энергии, подведенной к частице газа, ξ — переменная Лагранжа, t — время.

Выберем систему безразмерных величин таким образом, чтобы основная система уравнений и основные формулы газовой динамики оставались инвариантными при переходе от размерных величин к безразмерным. За основные единицы измерения возьмем скорость звука и удельный объем в начальный момент времени, а также длину части трубы, содержащей массу газа в начальный момент, равную массе поршня. В этих безразмерных величинах граничное условие на поршне примет особенно простой вид:

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = p(0, t). \quad (4)$$

Начальные условия будут:

$$u(\xi, 0) = 0, \quad p(\xi, 0) = \frac{1}{\gamma}, \quad v(\xi, 0) = 1. \quad (5)$$

В начальный момент от поршня в сторону газа пойдет фронт возмущения, который будет отделять область покоя от области движения газа. Граничные условия на фронте возмущения будут

$$u(-t, t)=0, \quad p(-t, t)=\frac{1}{\gamma}, \quad v(-t, t)=1, \quad q(-t, t)=0, \quad (6)$$

или

$$u(\xi, -\xi)=0, \quad p(\xi, -\xi)=\frac{1}{\gamma}, \quad v(\xi, -\xi)=1, \quad q(\xi, -\xi)=0. \quad (7)$$

Будем искать одну из искоемых функций в виде

$$u(\xi, t)=\varphi(t)+g(t)\xi, \quad (8)$$

где $\varphi(t)$ и $g(t)$ — произвольные функции. Учитывая (6), получим:

$$g(t)=\frac{1}{t}\varphi(t). \quad (9)$$

Подставляя (8) с учетом (9) в уравнение (1) и интегрируя его, найдем:

$$p(\xi, t)=-\varphi'(t)\cdot\xi+\frac{1}{2t^2}[\varphi(t)-t\varphi'(t)]\xi^2+F(t), \quad (10)$$

где $F(t)$ — произвольная функция. Удовлетворяя граничному условию на поршне (4), получим:

$$F(t)=\varphi'(t). \quad (11)$$

Подставляя (10) с учетом (11) во второе граничное условие (6), приходим к уравнению для определения функции $\varphi(t)$:

$$\varphi'(t)+\frac{1}{2+t}\varphi(t)=\frac{2}{\gamma(2+t)}. \quad (12)$$

Интегрируя это уравнение и учитывая, что $\varphi(0)=0$, получим:

$$\varphi(t)=\frac{2t}{\gamma(2+t)}. \quad (13)$$

После подстановки (9) и (13) в (8) и (10) найдем выражения для скорости газа и давления в следующем виде:

$$u=\frac{2}{\gamma}\frac{\xi+t}{2+t}, \quad p=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{2-\xi}{2+t}\right)^2. \quad (14)$$

Подставляя выражение для скорости газа (14) в уравнение (2), интегрируя его и выбирая произвольную функцию из удовлетворения третьему граничному условию на фронте возмущения (7), получим:

$$v=1+\frac{2}{\gamma}\ln\frac{2+t}{2-\xi}. \quad (15)$$

Подставляя только что полученное выражение и давление (14) в уравнение (3), найдем:

$$\frac{\partial q}{\partial t}=-\frac{4}{\gamma^2(\gamma-1)}\frac{(2-\xi)^2}{(2+t)^3}\ln\frac{2+t}{2-\xi}. \quad (16)$$

Интегрируя уравнение (16) по t и выбирая произвольную функцию $F(\xi)$ из последнего граничного условия на фронте возмущения (7), получим:

$$q(\xi, t) = \frac{1}{\gamma^2(\gamma-1)} \left\{ \left(\frac{2-\xi}{2+t} \right)^2 \left(1 + 2 \ln \frac{2+t}{2-\xi} \right) - 1 \right\}. \quad (17)$$

Аналитическое выражение для линий частиц в плоскости (x, t) найдем из первого соотношения (14), интегрируя его по t и выбирая произвольную функцию из условия, что $x=\xi$ на фронте возмущения:

$$x = \xi + \frac{2}{\gamma} \left[\xi + t + (2-\xi) \ln \frac{2-\xi}{2+t} \right]. \quad (18)$$

Поступила 10. V. 1966.

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ГАЗА В ТРУБЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ С ВВОДОМ ЭНЕРГИИ

Л. В. КОМАРОВСКИЙ

Неустановившееся течение газа по трубе с вводом массы, импульса и энергии описывается системой уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = F, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u E)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = N, \quad (3)$$

где u , p и ρ — соответственно скорость газа, давление и плотность; E — полная энергия; в правых частях уравнений стоят функции, выражающие соответственно массу, силу и энергию, которые подводятся к движущемуся газу в единицу времени и на единицу объема. Анализ многих прикладных вопросов сводится к исследованию системы (1) — (3), например, задача Лагранжа с дополнительным втоком газа [1]. Частный случай системы (1) — (3), когда $M = F = 0$, широко использовался в работах [2—5]. Большая часть задач, сводящихся к системе (1) — (3), решается численными методами, для апробирования которых желательно было бы иметь точное аналитическое решение системы (1) — (3), которое бы удовлетворяло типичным, для рассматриваемого класса задач, граничным и начальным условиям. В предлагаемой работе рассматривается такое точное аналитическое решение.

Рассмотрим частный случай системы (1) — (3), когда течение газа происходит по трубе переменного сечения $s = s(t, x)$ и к движущемуся газу подводится только энергия, т. е.

$$M = -\rho \frac{d}{dt} \ln s, \quad F = 0. \quad (4)$$

Для полученной системы укажем путь получения точного аналитического решения в целом, т. е. решения, которое будет удовлетворять системе (1) — (3) и дополнительным условиям (начальным и граничным). Для простоты изложения продемонстрируем это на конкретном примере.

Найдем, например, решения системы (1)–(3), для которых скорость газа является линейной функцией от x , т. е.

$$u = u_1(t) \cdot x + u_0(t), \quad (5)$$

вид функций u_0 и u_1 выберем из граничных условий. Пусть нам нужно решить задачу о движении газа по трубе переменного сечения из состояния покоя за поршнем, который движется с постоянным ускорением:

$$x = \frac{kt^2}{2}. \quad (6)$$

Для этой задачи нужно удовлетворить начальным условиям, граничным условиям на фронте возмущения (по скорости, давлению и плотности) и одному граничному условию на поршне (скорость газа в слое, непосредственно примыкающем к поршню, должна быть равна скорости поршня). Чтобы решить соответствующую задачу Лагранжа, нужно удовлетворить дополнительно еще одному граничному условию, которое в данном случае, если предполагать, что поршень обладает постоянной массой, а энергия деформации его мала, имеет вид:

$$p\left(t, \frac{kt^2}{2}\right) \cdot s\left(t, \frac{kt^2}{2}\right) = p_0 \cdot s_0, \quad (7)$$

где p_0 и s_0 — давление и площадь поперечного сечения трубы при $x=0$ и $t=0$.

Определим произвольные функции $u_1(t)$ и $u_0(t)$ в выражении (5) из граничных условий, которые состоят в том, что скорость газа на фронте возмущения должна быть равна нулю, а в окрестности поршня равна скорости поршня, т. е. kt . Следовательно, имеем два уравнения для двух искоемых функций

$$-u_1 a_0 t + u_0 = 0, \quad u_1 \frac{kt^2}{2} + u_0 = kt. \quad (8)$$

Решая эти два уравнения, получим

$$u_0 = \frac{2kta_0}{kt + 2a_0}, \quad u_1 = \frac{2k}{kt + 2a_0}. \quad (9)$$

Таким образом, скорость газа между фронтом первой волны разрежения и поршнем выражается функцией:

$$u = \frac{2k}{2a_0 + kt} (x + a_0 t). \quad (10)$$

Подставляя это выражение в (1) и учитывая (4), получим

$$\frac{d}{dt} (\ln p \cdot s) = -\frac{2k}{2a_0 + kt}. \quad (11)$$

Введя новое обозначение $z = \ln ps$ и принимая во внимание (10), имеем уравнение:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{2k}{2a_0 + kt} (x + a_0 t) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2k}{2a_0 + kt}. \quad (12)$$

Решение этого уравнения сводится к системе двух обыкновенных уравнений:

$$dx = \frac{2k(x+a_0t)}{2a_0+kt} dt, \quad (13)$$

$$dz = -\frac{2k}{2a_0+kt} dt. \quad (14)$$

Для уравнения (13) легко найти интегрирующий множитель:

$$\mu = \frac{\text{const}}{(2a_0+kt)^2}. \quad (15)$$

Умножая (13) на μ , получим уравнение в полных дифференциалах. Интегрируя его, найдем первый интеграл:

$$\frac{kx+2a_0kt+2a_0^2}{(2a_0+kt)^2} = c_1. \quad (16)$$

Второе уравнение (14) интегрируется легко:

$$z = -2\ln(2a_0+kt) + c_2. \quad (17)$$

Общее решение (12) представим в виде:

$$c_2 = \ln f(c_1), \quad (18)$$

где $f(c_1)$ — произвольная функция.

Таким образом, окончательно имеем

$$\rho \cdot s = \frac{f(c_1)}{(2a_0+kt)^2}. \quad (19)$$

Рассмотрим очень важный в приложениях частный случай, когда площадь поперечного сечения трубы является функцией только от x и, следовательно, не зависит от времени.

В дальнейшем через c_1 будем обозначать функцию (16). Эта функция на фронте возмущения и на поршне равна соответственно:

$$c_1 \Big|_{x=-a_0t} = c_1^0 = \frac{a_0}{2a_0+kt}, \quad c_1 \Big|_{x=\frac{kt^2}{2}} = c_1^1 = \frac{1}{2}. \quad (20)$$

Учитывая, что на фронте возмущения плотность газа равна ρ_0 , а площадь поперечного сечения $s = s(-a_0t)$, из (19) получим:

$$\rho_0 \cdot s(-a_0t) = \frac{f(c_1^0)}{(2a_0+kt)^2}. \quad (21)$$

Из (20) следует, что на фронте возмущения будет справедливо соотношение:

$$t = \frac{a_0}{kc_1^0} - \frac{2a_0}{k}. \quad (22)$$

Отсюда и из (21) найдем произвольную функцию f :

$$f(c_1) = \rho_0 \frac{a_0^2}{(c_1)^2} \cdot s \left(-\frac{a_0^2}{kc_1} + \frac{2a_0^2}{k} \right). \quad (23)$$

Для удобства дальнейшего изложения вводим обозначение:

$$y = -\frac{a_0^2}{kc_1} + \frac{2a_0^2}{k} = 2a_0^2 \frac{x - \frac{kt^2}{2}}{kx + 2a_0kt + 2a_0^2} \quad (24)$$

Таким образом, окончательное решение уравнения (1) можно представить в виде:

$$\rho = \rho_0 \frac{a_0^2(2a_0 + kt)^2}{(kx + 2a_0kt + 2a_0^2)^2} \cdot \frac{s(y)}{s(x)}, \quad (25)$$

где s — функция, выражающая площадь поперечного сечения.

Учитывая (10), найдем полную производную от u по времени:

$$\frac{du}{dt} = \frac{2k^2x + 4k^2a_0t + 4ka_0^2}{(2a_0 + kt)^2} \quad (26)$$

Используя полученные выражения (25) и (26), преобразуем уравнение (2) к виду:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\gamma kp_0}{kx + 2a_0kt + 2a_0^2} \frac{s(y)}{s(x)}. \quad (27)$$

Интегрируя, найдем:

$$p = -2k\gamma p_0 \int_0^x \frac{1}{kz + 2a_0kt + 2a_0^2} \frac{s(y)}{s(z)} dz + \varphi(t), \quad (28)$$

где z — переменная интегрирования.

Удовлетворяя граничным условиям на фронте возмущения, получим:

$$p = p_0 - 2k\gamma p_0 \int_{-a_0t}^x \frac{1}{kz + 2a_0kt + 2a_0^2} \frac{s(y)}{s(z)} dz. \quad (29)$$

Беря любые значения $s = s(x)$, найдем точное аналитическое решение задачи о течении газа по трубе переменного сечения за поршнем с подводом энергии. При этом выражение для функции $N(t, x)$ получим из (3), куда следует подставить найденные значения u , p и ρ .

Чтобы решить соответствующую задачу Лагранжа, нужно удовлетворить еще условию (7), учитывая, конечно, в рассматриваемом частном случае, что $s = s(x)$. Из (7) и (29) после простых преобразований найдем:

$$2k\gamma \int_{-a_0t}^{\frac{kt^2}{2}} \frac{1}{kz + 2a_0kt + 2a_0^2} \frac{s(y)}{s(z)} dz + \frac{s_0^2}{s\left(\frac{kt^2}{2}\right)} = 1. \quad (30)$$

Решая это уравнение, получим точное аналитическое решение задачи Лагранжа с вводом энергии по трубе переменного сечения $s = s(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Комаровский Л. В. Уч. зап. Томск. ун-та, 68, 1967.
2. Бетехтин С. А., Виницкий А. М., Горохов М. С., Станюкович К. П., Федотов И. Д. Газодинамические основы внутренней баллистики. Оборонгиз, 1957.
3. Попов Н. Н. Вестник МГУ. Серия математики, механики, № 3, 1959, 19—27.
4. Попов Н. Н. Вестник МГУ. Серия 1, математика, механика, № 2, 1961, 71—79.
5. Губина С. Л., Комаровский Л. В. Наст. сб.

Поступила 10. V. 1966.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПОРШНЯ В ТРУБЕ С ПРОТИВОДАВЛЕНИЕМ

Л. В. КОМАРОВСКИЙ

Рассмотрим следующую задачу. Дана полубесконечная труба, в которой помещен поршень. Между неподвижной стенкой трубы и поршнем находится сжатый газ. Правее поршня — газ, но давление в начальный момент в нем ниже, чем в газе слева от поршня. Под действием сжатого газа поршень придет в движение. В область движения газа, расположенную слева от движущегося поршня, может вводиться по некоторому закону энергия. Если закон ввода энергии задан, а в результате решения требуется определить течение газа с обеих сторон от поршня и движение поршня, то такую задачу назовем прямой. Наоборот, если задан закон движения поршня, а требуется определить течение газа и закон ввода энергии, то такую задачу назовем обратной. При этом предполагается как в прямой задаче, так и в обратной, что начальное состояние газа по обеим сторонам от поршня задано. Прямая задача, вероятно, может быть решена только численно. Что касается обратной, то в данной работе получено точное аналитическое решение этой задачи, справедливое до момента, когда впервые к поршню придут возмущения, либо отраженные от неподвижной стенки, либо из области образования ударной волны.

В частном случае, когда отсутствует ввод энергии в рабочий газ, возможна лишь прямая задача. Действительно, закон подвода энергии к газу выражается функцией, равной тождественно нулю. Численное решение такой задачи было дано в работе [1]. В статье [2] была предложена схема численного расчета для случая, когда по обеим сторонам от поршня течение типа простой волны. В заметке [3] нами уже указывалось на возможность получения аналитического решения этой задачи. В частности, если подынтегральное выражение взять с точностью до первого порядка, то после интегрирования получается формула для скорости поршня на начальном участке разгона [3, 4]. Если же это разложение взять на порядок выше, то и формула для скорости поршня будет на порядок выше, чем в [4]. Например, для частного случая, когда газ с обеих сторон от поршня одинаков и имеет одинаковую начальную температуру, то эта формула будет иметь вид:

$$u = \frac{2}{\gamma + 1} \left\{ \frac{1 + p_{21}}{1 - p_{21}} + k \operatorname{tg} \left[\frac{\sigma (1 - p_{21})}{2} kt - \operatorname{arctg} \frac{1}{k} \left(\frac{1 + p_{21}}{1 - p_{21}} \right) \right] \right\}, \quad (1)$$

$$k = \left[1 + \frac{1}{\gamma} - \left(\frac{1 + p_{21}}{1 - p_{21}} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad p_{21} < \frac{1}{1 + 2\gamma + 2\sqrt{\gamma(\gamma + 1)}},$$

где u — скорость поршня, t — время, γ — отношение удельных теплоемкостей, σ — отношение массы поршня к массе газа в камере высокого давления, p_{21} — перепад давления. Для случая, когда p_{21} превышает указанный выше верхний предел, но, разумеется, меньше единицы, легко получается соответствующая формула, которая здесь не приведена, так как в практически интересных случаях p_{21} значительно меньше единицы.

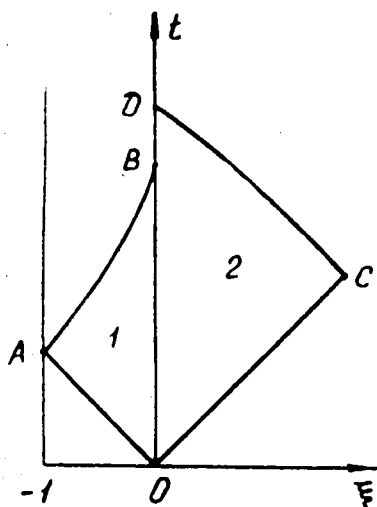
Итак, одномерное неустановившееся течение газа с вводом энергии описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad (2)$$

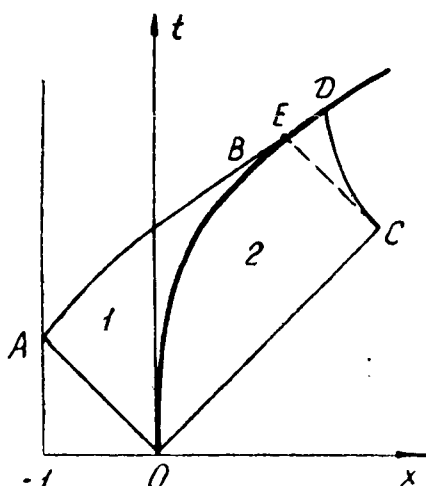
$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad (3)$$

$$v \frac{\partial p}{\partial t} - \gamma p \frac{\partial v}{\partial t} = (\gamma - 1) \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (4)$$

u — скорость газа, p — давление, v — удельный объем, q — количество энергии, подведенное к частице газа, ξ — переменная Лагранжа.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 и 2 показаны области течения 1 и 2, которые от областей покоя отделяются линиями слабого разрыва OA и OC . На фиг. 1 схема дана в переменных Лагранжа, на фиг. 2 — в переменных Эйлера. Линия OBD является линией поршня. В точке A происходит отражение фронта возмущения, в точке C — образование ударной волны. Линии AB и CD являются линиями слабого разрыва (AB — характеристика первого семейства, CD — характеристика второго семейства).

Все выражения в работе даны в безразмерных величинах. За основные единицы измерения приняты скорость звука, удельный объем в начальный момент времени и длина камеры высокого давления.

Как мы уже говорили, в обратной задаче предполагается, что закон движения поршня задан:

$$x = \varphi(t). \quad (5)$$

Тогда течение газа в области (2) определяется [3]:

$$u_2 = \varphi'(\tau),$$

$$x = \varphi(\tau) + \left[\frac{\gamma_2 + 1}{2} \varphi'(\tau) + a_{21} \right] (t - \tau), \quad (6)$$

где τ — параметр, нижний индекс указывает область, к которой относится величина, a_{21} — отношение скоростей звука в начальный момент ($a_{21} = \gamma_{21} \cdot T_{21} \cdot \mu_{12}$, T — температура, μ — молекулярный вес).

Скорость звука на правой стороне поршня будет иметь вид:

$$a_2 = a_{21} + \frac{\gamma_1 - 1}{2} \varphi'(t). \quad (7)$$

Следовательно, из соответствующего выражения работы [3] и (7) определяется граничное условие на поршне OBD :

$$u_2(0, t) = \varphi'(t), \quad (8)$$

$$p_1(0, t) = \frac{1}{\sigma} \varphi''(t) + \frac{1}{\gamma_1} \cdot p_{21} \left[1 + \frac{\gamma_2 - 1}{2} a_{12} \varphi'(t) \right]^{\frac{2\gamma_2}{\gamma_2 - 1}}. \quad (9)$$

Граничные условия на фронте возмущения OA будут:

$$u(-t, t) = 0, \quad p(-t, t) = \frac{1}{\gamma_1}, \quad v(\xi, -\xi) = 1, \quad q(\xi, -\xi) = 0. \quad (10)$$

Будем искать скорость газа в виде:

$$u(\xi, t) = \varphi'(t) + g'(t)\xi + f'(t)\xi^2, \quad (11)$$

где $\varphi'(t)$, $g'(t)$, $f'(t)$ — произвольные функции.

Свободный член взят таким образом, чтобы удовлетворить условию (8).

Из первого граничного условия (10) определяем $g'(t)$:

$$g'(t) = \frac{1}{t} \varphi'(t) + f'(t) \cdot t. \quad (12)$$

Подставляя (11) в (2), интегрируя и выбирая произвольную функцию так, чтобы удовлетворялось граничное условие (9), получим:

$$p_1(\xi, t) = \frac{1}{\sigma} \varphi''(t) + \frac{1}{\gamma_1} p_{21} \left[1 + \frac{\gamma_2 - 1}{2} a_{12} \varphi'(t) \right]^{\frac{2\gamma_2}{\gamma_2 - 1}} -$$

$$-\varphi''(t)\xi - \frac{1}{2} g''(t)\xi^2 - \frac{1}{3} f'''(t)\xi^3. \quad (13)$$

Выбираем функцию $f(t)$ так, чтобы удовлетворялось второе граничное условие (10). Тогда для $f(t)$, учитывая (12), имеем следующее уравнение:

$$f''(t) + \frac{3}{t} f'(t) = \frac{3}{t^3} \left\{ -\frac{2}{\gamma_1} + \varphi'(t) + \frac{2}{\sigma} \varphi''(t) + \varphi''(t) t + \right. \\ \left. + \frac{2}{\gamma_1} p_{21} \left[1 + \frac{\gamma_2 - 1}{2} a_{12} \varphi(t) \right]^{\frac{2\gamma_2}{\gamma_2 - 1}} \right\}. \quad (14)$$

Решая уравнение (14), получим:

$$f'(t) = \frac{3}{t^3} \left\{ c - \frac{2}{\gamma_1} t + \frac{2}{\sigma} \varphi'(t) + t \varphi'(t) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\gamma_1} p_{21} \int \left[1 + \frac{\gamma_2 - 1}{2} a_{12} \varphi'(t) \right]^{\frac{2\gamma_2}{\gamma_2 - 1}} dt \right\}, \quad (15)$$

где c — постоянная интегрирования.

Из уравнения (3), интегрируя его и выбирая произвольную функцию $F(\xi)$ так, чтобы удовлетворялось третье граничное условие (10), найдем:

$$v(\xi, t) = 1 + g(t) - g(-\xi) + 2\xi [f(t) - f(-\xi)]. \quad (16)$$

Наконец, функцию $q(\xi, t)$ определим из уравнения энергии (4), подставляя туда (13) и (16). Произвольную функцию, которая получается при интегрировании этого уравнения, выбираем из удовлетворения последнему граничному условию (10).

Рассмотрим в качестве примера случай, когда $\varphi(t) = \frac{kt^2}{2}$, который представляет практический интерес.

Тогда из (15), беря интеграл и выбирая постоянную интегрирования c из условия, чтобы в начале отсчета не было особенности для скорости газа, получим:

$$f'(t) = \frac{3}{t^3} \{ kt^2 + b [(1 + \beta t)^\delta - 1] \}, \\ b = \frac{4p_{21}}{(\gamma_2 - 1)ka_{12}}, \quad \beta = \frac{\gamma_2 - 1}{2} a_{12}k, \quad \delta = \frac{3\gamma_2 - 1}{\gamma_2 - 1}. \quad (17)$$

Из (12) найдем $g'(t)$:

$$g'(t) = k + f'(t) \cdot t. \quad (18)$$

Следовательно, скорость газа в области (1) имеет вид:

$$u_1(\xi, t) = k(t + \xi) + f'(t)(t + \xi)\xi, \quad (19)$$

где $f'(t)$ определяется выражением (17).

Учитывая (17) и (18), из (13) найдем давление в области (1):

$$p_1(\xi, t) = \frac{1}{\gamma_1} \{ 1 + p_{21} (1 + \beta t)^{\delta-1} \} - k\xi - \\ - \frac{3}{2} b \left\{ \frac{2}{t} [1 - (1 + \beta t)^\delta] + \beta \delta (1 + \beta t)^{\delta-1} \right\} \left(\frac{\xi}{t} \right)^2 + \\ + \{ kt - \beta b \delta (1 + \beta t)^{\delta-1} - 3 \frac{b}{t} [1 - (1 + \beta t)^\delta] \} \left(\frac{\xi}{t} \right)^3. \quad (20)$$

Найдем теперь удельный объем газа в области (1). Интегрируя (17), получим:

$$f(t) = 3k \ln t + \frac{3b}{2t^2} + F'(t), \quad F'(t) = 3b \int t^{-3} (1 + \beta t)^\delta dt. \quad (21)$$

Интеграл в (21) берется элементарно, если газ в области (2) задан. Действительно, если газ в области (2) двухатомный, то $\delta=8$, если одноатомный, то $\delta=6$, что следует из выражения для δ (17).

Интегрируя (18) с учетом (21), найдем:

$$g(t) = 4kt + F(t) + F'(t). \quad (22)$$

Наконец, из (16) определяем удельный объем в области (1):

$$v_1(\xi, t) = 1 + 4k(\xi + t) + 6k\xi [\ln t + \ln(-\xi)] + + 3b\xi \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\xi^2} \right) + F(t) - F(-\xi) + (1 + 2\xi)[F'(t) - F'(-\xi)]. \quad (23)$$

Подставляя найденные значения искомых функций в (4), получим закон для ввода энергии. Легко видеть, что для конкретного случая интегрирование только по t уравнения (4) и выбор произвольной функции интегрирования из последнего граничного условия (10) производится элементарно.

Полученное точное аналитическое решение будет справедливо для области 1, ограниченной характеристикой AB , дифференциальное уравнение которой:

$$\frac{d\xi}{dt} = \left[\gamma_1 \frac{p_1(\xi, t)}{v_1(\xi, t)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

Решение уравнения (24) каким-нибудь приближенным методом, например, методом последовательных приближений, даст уравнение характеристики AB и, следовательно, координату точки B .

Для заданного закона движения поршня точное аналитическое решение в области (2) определяется соотношениями (6). Для рассматриваемого случая из (6) имеем:

$$u_2(x, t) = \frac{1}{\gamma_2} \left\{ \frac{\gamma_2 + 1}{2} kt - a_{21} - \left[\left(\frac{\gamma_2 + 1}{2} kt - a_{21} \right)^2 - 2k\gamma_2(x - a_{21}t) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (25)$$

Учитывая (2), найдем скорость звука в области (2):

$$a_2(x, t) = a_{21} + \frac{\gamma_2 - 1}{2} u_2(x, t). \quad (26)$$

Дифференциальное уравнение характеристики CD имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3 - \gamma_2}{2} u_2(x, t) - a_{21}. \quad (27)$$

Интегрируя (27), найдем уравнение характеристики CD . Определяя точку пересечения данной характеристики с линией поршня, получим t_D . Выбирая $t_M = \min(t_B, t_D)$, найдем время, до которого будет справедливо полученное решение. На фиг. 1 и 2 это совпадает с t_B .

Сделаем небольшое замечание относительно нахождения t_M .

Иногда для анализа подобных течений в трубе бывает достаточно определить оценочное значение t_M , то есть то значение времени, до которого полученное решение обязательно будет справедливо. Это можно сделать, проведя соответствующие оценки. Покажем это на последнем примере. Так как скорость газа в области 2 всюду положительная, то, полагая ее равной нулю и интегрируя (27), получим:

$$x = x_C - a_{21}(t - t_C), \quad (28)$$

где C — точка образования ударной волны. В нашем случае:

$$x_C = a_{21} t_C, \quad t_C = \frac{2a_{21}}{(\gamma_2 + 1)k}, \quad k = \frac{\sigma}{\gamma_1} \left[1 - p_{21}(a_{12})^{\frac{2\gamma_2}{\gamma_2 - 1}} \right]. \quad (29)$$

На фиг. 2 уравнение (28) соответствует прямой CE . Определяя точку пересечения данной прямой с линией поршня, получим:

$$t_E = \frac{a_{21}}{k} \left\{ \left(\frac{\gamma_2 + 9}{\gamma_2 + 1} \right)^{1/2} - 1 \right\}. \quad (30)$$

Итак, получено точное аналитическое решение задачи о движении поршня с противодавлением в пусковой трубе под действием сжатого газа с вводом энергии до момента t_M .

ЛИТЕРАТУРА

1. Волконская Т. Г., Павлов Б. М., Полов Н. Н. Численные методы в газовой динамике. МГУ, вып. 4, 1965.
2. Кузнецов Н. Н. Численные методы в газовой динамике. МГУ, вып. 4, 1965.
3. Комаровский Л. В. Сб. теоретических работ по гидродинамике и теории упругости. Уч. зап. ТГУ, № 68, 1967.
4. Сакурей Т. Ракетная техн. и косм. Т. 1, № 5, 1963.

Поступила 1. III. 1967.

О ДВУХ КЛАССАХ ТОЧНЫХ ОБЩИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЧАПЛЫГИНА В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Г. И. НАЗАРОВ

Метод С. Бергмана и его модификация [1] (см. также [2]) позволяют находить точные решения для линейных уравнений в частных производных сжимаемой жидкости, зависящие от произвольной аналитической функции комплексного переменного. Однако эти решения имеют в то же время и некоторые недостатки. Во-первых, по методу Бергмана решения строятся для одного уравнения второго порядка, например, для функции тока ψ , а затем при помощи квадратуры находится потенциал скорости ϕ из соответствующей системы уравнений первого порядка. Эта квадратура обычно не может быть выражена явно аналитически и вычисляется численно, что снижает достоинство аналитического построения решения для ψ . Во-вторых, решение в форме Бергмана непригодно для изучения течений в окрестности звуковой линии, так как функция ψ выражается в виде произведения некоторой функции, умноженной на $K^{-1/4}$, где K — функция Чаплыгина, и при $K \rightarrow 0$ (звуковая линия) функция ψ неограниченно возрастает. Поэтому решения Бергмана используются только при рассмотрении чисто дозвуковых или чисто сверхзвуковых течений газа [1].

В данной работе путем своеобразного соединения двух идей — идеи Бергмана и идеи Эйлера-Лагранжа, усовершенствованной Домбровским [3], сконструированы два общих точных решения для пары функции ϕ и ψ соответствующей системы уравнений газодинамики, зависящие от произвольного комплексного потенциала. Одно из этих решений ведет себя хорошо в окрестности точки торможения, а второе — в окрестности звуковой линии. Дан конкретный пример сопряжения методом аналитического продолжения этих решений на некоторой промежуточной линии. Это дает возможность изучения течения во всей области, начиная от точки торможения и кончая звуковой линией.

Полученные решения пригодны также для изучения транзвуковых и гиперзвуковых течений газа.

§ 1. Общее решение, выражаемое через производные от аналитической функции комплексного переменного

Рассмотрим плоское установившееся движение идеальной сжимаемой жидкости, характеризуемое в переменных Лейбензона годографа скорости следующей системой уравнений типа Чаплыгина

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = -\sqrt{K} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \sqrt{K} \frac{\partial \Psi}{\partial s}. \quad (1.1)$$

Здесь

$$K = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{\rho^{\gamma+1}}, \quad s = \frac{1}{2} \left(h \ln \frac{h+r}{h-r} - \ln \frac{1+r}{1-r} \right), \quad (1.2)$$

$$h^2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad r^2 = h^2 - \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{\rho^{\gamma-1}}, \quad (1.3)$$

Φ — потенциал скорости, Ψ — функция тока, K — функция Чаплыгина, зависящая неявно через плотность ρ от одной переменной s , $\gamma = c_p/c_v$ — коэффициент Пуассона ($\gamma = 1,4$ для газа), s, θ — псевдологарифмические переменные плоскости годографа скорости.

В точке торможения ($v=0$), $\rho=1$, $K=1$, $s=-\infty$, в критической точке ($v=a_*$), $\rho=\rho_* = (2/(\gamma+1))^{1/(\gamma-1)}$, $K=0$, $s=0$ (v — скорость газа, a — скорость звука).

Величины плотности ρ и скорости v отнесены к плотности и скорости звука в точке торможения.

При $K > 0$ уравнения (1.1) эллиптического типа. В этом случае будем искать интегралы системы (1.1) в виде

$$\Phi = \Omega(s) + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(s) \frac{\partial^k \Phi}{\partial s^k}, \quad \Psi = A + B\theta + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(s) \frac{\partial^k \Psi}{\partial s^k}, \quad (1.4)$$

где Φ, Ψ — произвольные гармонические функции, для которых выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi}{\partial s}. \quad (1.5)$$

Искомые функции $\Omega(s), d_k(s), \beta_k(s)$ ($k=0, 1, 2, \dots$) зависят от одного аргумента s ; A, B — произвольные постоянные (определяются краевыми условиями конкретной задачи).

Решение (1.4) можно заменить в виде

$$\Phi = \Omega(s) + \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(s) \frac{d^k w}{d\zeta^k}, \quad \Psi = A + B\theta + \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(s) \frac{d^k w}{d\zeta^k}. \quad (1.6)$$

Здесь $w(\zeta) = \Phi + i\Psi$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного $\zeta = s + i\theta$.

Составляем частные производные от (1.4) и вносим их в систему (1.1), а затем используем уравнения (1.5) и вытекающие из них следующие равенства

$$\frac{\partial^{k+1} \Psi}{\partial \theta \partial s^k} = -\frac{\partial^{k+1} \Phi}{\partial s^{k+1}}, \quad \frac{\partial^{k+1} \Phi}{\partial \theta \partial s^k} = \frac{\partial^{k+1} \Psi}{\partial s^{k+1}}. \quad (k=1, 2, \dots)$$

Тогда окончательно получим два уравнения

$$\begin{aligned} & \Omega' + \alpha_0' \Phi + (\alpha_0 + \alpha_1') \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \dots + (\alpha_n + \alpha_{n+1}') \frac{\partial^{n+1} \Phi}{\partial s^{n+1}} + \dots = \\ & = K^{1/2} \left(-B - \beta_0 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \beta_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} - \dots + \beta_n \frac{\partial^{n+1} \Phi}{\partial s^{n+1}} - \dots \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\alpha_0 \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \alpha_1 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} + \dots + \alpha_n \frac{\partial^{n+1} \Psi}{\partial s^{n+1}} + \dots =$$

$$= K^{1/2} \left[\beta_0' \Psi + (\beta_0 + \beta_1') \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \dots + (\beta_n + \beta_{n+1}') \frac{\partial^{n+1} \Psi}{\partial s^{n+1}} + \dots \right].$$

Уравнения (1.7) удовлетворяются, если потребуем, чтобы выполнялись следующие равенства

$$\alpha_0' = 0, \quad \beta_0' = 0, \quad \Omega' = -BK^{1/2}, \quad \alpha'_{n+1} + \alpha_n = K^{1/2}\beta_n,$$

$$\alpha_n = (\beta_n + \beta'_{n+1})K^{1/2}, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (1.8)$$

Таким образом, α_0 и β_0 могут быть только произвольными постоянными $\alpha_0 = \alpha = \text{const}$, $\beta_0 = \beta = \text{const}$. Функции α_n , β_n , Ω ($n=1, 2, \dots$) не зависят от краевых условий и могут быть найдены раз и навсегда для всех задач и заатабулированы для произвольного индекса n .

Для унификации этих функций и не нарушая общности рассуждений, потребуем, чтобы в какой-нибудь одной точке $s=s_0$ выполнялись равенства

$$\alpha_n(s_0) = 0, \quad \beta_n(s_0) = 0, \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1.8)$$

В дальнейшем в качестве такой точки возьмем $s_0=0$ (критическая точка, в которой скорость потока совпадает с местной скоростью звука). Тем самым на звуковой линии ($s=0$) ряды в решении (1.6) выражаются и принимают вид:

$$\varphi = \Omega(0) + \alpha\Phi(0, \theta), \quad \psi = A + B\theta + \beta\Psi(0, \theta).$$

Естественно, при таком выборе функций α_k , β_k снимается вопрос о сходимости рядов (1.6) в окрестности звуковой линии.

Для первых номеров функции α_k и β_k можно найти явные аналитические зависимости. Запишем формулы (1.8) в виде

$$\alpha_n = \int_0^s (\beta_{n-1}K^{1/2} - \alpha_{n-1}) ds, \quad \beta_n = \int_0^s \left(\frac{\alpha_{n-1}}{K^{1/2}} - \beta_{n-1} \right) ds \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1.9)$$

Полагая в (1.9) $n=1, 2, 3$, легко найти

$$\alpha_1 = \beta I_2 - \alpha s, \quad \beta_1 = \alpha I_1 - \beta s \quad (1.10)$$

$$\alpha_2 = s(-\beta I_2 + \alpha K^{1/2} I_1) - \frac{\alpha}{2} \int_0^s s I_1 K^{-1/2} K_s' ds$$

$$\beta_2 = s(-\alpha I_1 + \beta K^{-1/2} I_2) + \frac{\beta}{2} \int_0^s s I_2 K^{-3/2} K_s' ds$$

$$\alpha_3 = \int_0^s \left[-2(\alpha s \cdot I_1 K^{1/2} - \beta s I_2) + \frac{1}{2} (\beta K^{1/2} I_4 + \alpha I_3) \right] ds$$

$$\beta_3 = \int_0^s \left[2(\alpha s \cdot I_1 - \beta s I_2 K^{-1/2}) - \frac{1}{2} (\alpha K^{-1/2} I_3 + \beta I_4) \right] ds. \quad (1.11)$$

Здесь

$$I_1 = \int_{p_*}^p K^{-1/2} \frac{ds}{dp} dp = \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x-1} - \text{Idem}(x_*)$$

$$I_2 = \int_{p_*}^p K^{1/2} \frac{ds}{dp} dp = -x^5 - \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x-1} - \text{Idem}(x_*) \quad (1.12)$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi s} s \cdot I_1'' K^{-1/2} K_s' ds, \quad I_4 = \int_0^s s \cdot I_2 K^{-3/2} K_s' ds,$$

где

$$x^2 = 1/\rho_*^{\gamma-1}, \quad x_* = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} = 1,0954, \quad \rho_* = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Переменная x в дозвуковой части течения изменяется в интервале $1 \leq x \leq \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$. Решение (1.6) непригодно для изучения течения в окрестности точки торможения, так как $I_1, I_2, \dots$ в (1.12) при $x=1$ ($\rho=1$) обращаются в бесконечность.

При выводе формул (1.11) использовано равенство

$$\frac{d}{ds}(sI_\nu) = I_\nu + s \frac{d}{ds} I_\nu \quad (\nu=1, 2). \quad (1.13)$$

Не нарушая общности, можно положить $\alpha=\beta=1$.

Отметим, что те же самые формулы (1.8) имеют место и для гиперболической системы уравнений (1.1) ($K<0$), если ввести в (1.1) функцию $\lambda=-K>0$ и произвести замену $s=it$. В этом случае в формулах (1.9) нужно K и s заменить на λ и t и вместо гармонических функций (1.5) ввести волновые функции, то есть функции Φ и Ψ определять из равенств

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (1.14)$$

Решение для гиперболической системы (1.1) можно записать в виде

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(t) (f_2^{(k)}(\eta) - f_1^{(k)}(\xi)), \quad \Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) (f_1^{(k)}(\xi) + f_2^{(k)}(\eta)). \quad (1.15)$$

Здесь $f_1(\xi), f_2(\eta)$ — произвольные функции от характеристических переменных $\xi=t-\Theta, \eta=t+\Theta$; верхние индексы обозначают производные от функций по их аргументам.

§ 2. Общее решение, выражаемое через интегралы от аналитической функции комплексного переменного

Сконструируем для системы (1.1) решение в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= \omega(s) + a_0(s)\Phi + a_1(s) \int \Phi ds + a_2(s) \iint \Phi ds ds + \dots + \\ &\quad + a_k(s) \iint \dots \int \underbrace{\Phi ds ds \dots ds}_k + \dots \\ \Psi &= A + B\theta + b_0(s)\Psi + b_1(s) \int \Psi ds + b_2(s) \iint \Psi ds ds + \\ &\quad + \dots + b_k(s) \iint \dots \int \underbrace{\Psi ds ds \dots ds}_k + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь функции $\omega(s), a_k(s), b_k(s)$ ($k=0, 1, 2, \dots$) — искомые, а Φ и Ψ удовлетворяют для эллиптической системы (1.1) уравнениям (1.5), а для гиперболической — уравнениям (1.14).

Остановимся подробнее на случае $K>0$ (дозвуковое течение).

Формулы (2.1) можно записать в виде

$$\varphi = \omega(s) + \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \int \omega(\zeta) d\zeta^k, \quad \psi = A + B\theta + \sum_{k=0}^{\infty} \int \omega(\zeta) d\zeta^k. \quad (2.1)$$

Здесь $\omega(\zeta)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного $\zeta = s + i\theta$. Под суммой в (2.1) — условная запись кратных интегралов.

Вносим (2.1) в (1.1) и используем (1.5). В результате получим два равенства

$$\begin{aligned} & \omega' + (a_0' + a_1)\Phi + a_0 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (a_1' + a_2) \int \Phi ds + \dots + (a_{k-1}' + \\ & + a_k) \int \dots \int \underbrace{\Phi ds ds \dots ds}_{k-1} + \dots = \sqrt{K} (-B + b_0 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + b_1 \Phi + \\ & + b_2 \int \Phi ds + \dots + b_k \int \dots \int \underbrace{\Phi ds ds \dots ds}_{k-1} + \dots \\ & a_0 \frac{\partial \Psi}{\partial s} + a_1 \Psi + a_2 \int \Psi ds + \dots + a_k \int \dots \int \underbrace{\Psi ds ds \dots ds}_{k-1} + \dots = \\ & = \sqrt{K} \left[b_0 \frac{\partial \Psi}{\partial s} + (b_0' + b_1) \Psi + (b_1' + b_2) \int \Psi ds + \dots + \right. \\ & \left. + (b_{k-1}' + b_k) \int \dots \int \underbrace{\Psi ds ds \dots ds}_{k-1} + \dots \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

которые удовлетворяются, если на функции ω , a_k , b_k ($k=0, 1, \dots$) наложить следующие условия

$$a_0 = b_0 \sqrt{K}, \quad \omega' = -B \sqrt{K} \quad (2.3)$$

$$a_{k-1}' + a_k = b_k \sqrt{K}, \quad a_k = \sqrt{K} (b_{k-1}' + b_k) \quad (k=1, 2, \dots). \quad (2.4)$$

Из двух уравнений (2.4) следует равенство

$$a_{k-1}' = -\sqrt{K} b_{k-1}' \quad (k=1, 2, \dots). \quad (2.5)$$

Из (2.5) при $k=1$ имеем

$$a_0' = -\sqrt{K} b_0'. \quad (2.6)$$

Тогда из (2.3) и (2.6) легко придем к равенству

$$a_0' = b_0' \sqrt{K} + \frac{1}{2} K^{-1/2} K_s' b_0 = -\sqrt{K} b_0'.$$

Откуда

$$b_0' = -\frac{1}{4} K^{-1/2} K_s' b_0.$$

Следовательно,

$$b_0 = DK^{-1/4}. \quad (2.7)$$

D — постоянная интегрирования. Не нарушая общности, положим $D=1$.

Из (2.3) и (2.7) будет

$$a_0 = K^{1/4}. \quad (2.8)$$

Аналогичные действия, проведенные с формулами (2.4) и (2.5), дадут общие зависимости

$$b_k' + \frac{1}{4} K^{-1} K_s' b_k = \frac{1}{2} K^{-1/2} a_{k-1}^* \quad (2.9)$$

$$a_k = \sqrt{K} b_k - a_{k-1}' \quad (k=1, 2, \dots),$$

где a_0, b_0 определены формулами (2.7), (2.8).

Полагая в (2.9) $k=1$ и налагая в точке торможения $s=-\infty$ условия $b_1(-\infty)=0, a_1(-\infty)=0$, получим

$$b_1 = K^{-1/2} I \quad a_1 = K^{1/2} \left(1 - \frac{1}{4} K^{-1} K_s' \right),$$

где

$$I = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^s \left(\frac{K''}{K} - \frac{3}{4} \frac{K'^2}{K^2} \right) ds. \quad (2.10)$$

Если использовать формулы (1.2), то можно записать

$$\frac{K''}{K} - \frac{3}{4} \frac{K'^2}{K^2} = \frac{(\gamma+1)M^4}{4(1-M^2)} [(3\gamma-1)M^4 + 4(3-2\gamma)M^2 - 16]. \quad (2.11)$$

При помощи (2.11) формулу (2.10) приводим к виду

$$I = \int_1^y \left(\alpha y^2 + \beta + \frac{\delta}{y^2} + \frac{\varepsilon}{y^4} \right) \frac{dy}{h^2 - y^2} \quad (y^2 = 1 - M^2). \quad (2.12)$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha = \frac{(3\gamma-1)h^2}{16}, \quad \beta = -\frac{(\gamma+1)h^2}{16}, \quad \delta = -\frac{(7\gamma-5)h^2}{16}, \quad \varepsilon = \frac{5(\gamma+1)h^2}{16} \quad (2.13)$$

Вычисление интеграла (2.12) дает

$$I = -\alpha y - \frac{1}{h^2} \left(\delta + \frac{\varepsilon}{h^2} \right) \frac{1}{y} - \frac{\varepsilon}{3h^2 y^3} + \frac{1}{2h} \left(h^2 \alpha + \beta + \frac{\delta}{h^2} + \frac{\varepsilon}{h^4} \right) \ln \frac{h+y}{h-y} - \text{Idem} (1). \quad (2.14)$$

Функции a_k, b_k ($k=0, 1, 2, \dots$) не зависят от краевых условий и тем или иным путем (аналитически или численным табулированием) могут быть вычислены раз и навсегда.

Решения (2.1) при условиях (2.7), (2.8), (2.9) непригодны для изучения течения в окрестности звуковой линии, так как при $K \rightarrow 0$ (критическая точка) функции $b_0, b_1, \dots$ неограниченно возрастают.

Сходимость рядов (1.6) и (2.1) может быть доказана, если в качестве можарантной функции взять функцию Зауэра—Христиановича, которая имеет вид

$$\tilde{K}^{1/2} = A s^2 \quad (A = \text{const}).$$

Вопросу о сходимости этих рядов будет посвящена отдельная статья.

Решения (1.6) и (2.1) могут быть использованы для определения функций φ и ψ , которые будут ограниченными функциями во всей об-

ласти течения, начиная от точки торможения и кончая критической точкой. Это достигается путем конструирования решения по двум или нескольким областям: в области, примыкающей к точке торможения, берется решение в виде (2.1), а в области, содержащей критическую точку, используется решение в виде (1.6), а затем эти решения склеиваются путем аналитического продолжения через общую границу областей [4].

§ 3. Симметричное обтекание клина со звуковой скоростью

Допустим, что плоская газовая струя, имеющая в бесконечности скорость, равную скорости звука, $v = a_*$, и ширину $2z$, симметрично обтекает клин со стороной l и углом λ , образованным с осью симметрии (см. фиг. 2 в [2]). С концов клина срываются свободные струи. На этих струйных линиях и на линиях, ограничивающих газовую струю, скорость постоянная и равна скорости звука. Носик клина является точкой торможения. Пусть в качестве нулевой линии тока будет прямая линия (в силу симметрии течения), подходящая из бесконечности к носику профиля. Тогда на линиях, ограничивающих газовую струю сверху $\psi = Q$ и снизу $\psi = -Q$, где Q — полурасход газа в потоке. Обозначим через μ угол между направлением сбегающей с верхней кромки клина струи и осью ox на бесконечности. Ось ox совпадает с нулевой линией, подходящей из бесконечности к угловой точке клина; начало координат поместим в этой точке.

В силу симметрии задачи выпишем граничные условия для функции тока ψ только для верхней половины течения

$$\begin{aligned} \psi &= 0, & \theta &= 0, & -\infty < s < 0 \\ \psi &= 0, & \theta &= \lambda, & -\infty < s < 0 \\ \psi &= 0, & \mu < \theta < \lambda, & s &= 0 \\ \psi &= Q, & 0 < \theta < \mu, & s &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Эти граничные условия в плоскости годографа s, θ приводят к внутренней задаче Дирихле. Разобьем внутреннюю область этой плоскости на две части с помощью линии, проходящей из некоторой фиксированной точки $s_1 > -\infty$ (в качестве параметра s_1 берется то значение, которое является предельным при доказательстве сходимости тех и других рядов. Области сходимости этих рядов различные: для (1.6) ряд тем быстрее сходится, чем ближе приближаемая к звуковой линии, а (2.1), наоборот, при приближении к точке торможения.

Пусть первая область содержит точку торможения ($s = -\infty$), а вторая — звуковую точку ($s = 0$) (см. аналогию на фиг. 4 в [2]).

В качестве функции $w(\xi)$ в (1.6) и (2.1), которая позволит удовлетворить все граничные условия (3.1), возьмем функцию вида

$$w(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{n\omega\zeta} + B_n e^{-n\omega\zeta}), \quad \left(\omega = \frac{\pi}{\lambda} \right). \quad (3.2)$$

Здесь A_n, B_n — произвольные постоянные.

В первой области используем решение (2.1), а во второй — (1.6). Тогда, внося (3.2) в эти решения и выделяя мнимые части, запишем по областям только для функции тока следующие выражения (знаки суммирования в силу абсолютной и равномерной сходимости рядов (1.6) и (2.1) меняем местами).

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Delta_n(s) \sin \frac{n\pi\theta}{\lambda}; \quad (-\infty < s < s_1). \\ \psi_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \delta_n(s) + C_n \gamma_n(s)) \sin \frac{n\pi\theta}{\lambda}, \quad (0 < s < s_1).\end{aligned}\quad (3.3)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}\Delta_n(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k(s)}{(n\omega)^k} e^{n\omega s}, \\ \delta_n(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} (n\omega)^k \beta_k(s) e^{n\omega s}, \quad \gamma_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (n\omega)^k \beta_k(s) e^{-n\omega s}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Функции (3.3) удовлетворяют первым условиям (3.1). Мы удовлетворим и другие условия, если потребуем

$$\psi_2(0, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \delta_n(0) + C_n \gamma_n(0)] \sin \frac{n\pi\theta}{\lambda} = \begin{cases} Q, & (0 < \theta < \mu) \\ 0, & (\mu < \theta < \lambda). \end{cases}\quad (3.5)$$

Условия аналитического продолжения [4]:

$$\psi_1(s_1, \theta) = \psi_2(s_1, \theta), \quad \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial s} \right|_{s=s_1} = \left. \frac{\partial \psi_2}{\partial s} \right|_{s=s_1}$$

приводят к формулам

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} [A_n \Delta_n(s_1) - B_n \delta_n(s_1) - C_n \gamma_n(s_1)] \sin \frac{n\pi\theta}{\lambda} &= 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \Delta_n'(s_1) - B_n \delta_n'(s_1) - C_n \gamma_n'(s_1)] \sin \frac{n\pi\theta}{\lambda} &= 0.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Применяя к (3.5) теорию рядов Фурье, получим

$$B_n \delta_n(0) + C_n \gamma_n(0) = \frac{2Q}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi\mu}{\lambda} \right).\quad (3.7)$$

Из (3.6) имеем

$$\begin{aligned}A_n \Delta_n(s_1) - B_n \delta_n(s_1) - C_n \gamma_n(s_1) &= 0 \\ A_n \Delta_n'(s_1) - B_n \delta_n'(s_1) - C_n \gamma_n'(s_1) &= 0.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Для определения 3 n -постоянных A_n , B_n , C_n мы имеем 3 n -уравнений (3.7), (3.8). Разрешая эти уравнения, найдем

$$\begin{aligned}A_n &= D(\gamma_1 \delta_1' - \delta_1 \gamma_1') \\ B_n &= D(\gamma_1 \Delta_1' - \Delta_1 \gamma_1') \\ C_n &= D(\Delta_1 \delta_1' - \delta_1 \Delta_1'),\end{aligned}$$

где

$$D = \frac{2Q}{n\pi} [(\gamma_1 - \delta_1) \Delta_1' - (\delta_1' - \gamma_1') \Delta_1]^{-1} \cdot \left(1 - \cos \frac{n\pi\mu}{\lambda} \right).$$

Здесь учтено, что в силу (3.4) и (1.8) имеем

$$\delta_0 = \delta_n(0) = \beta, \quad \gamma_0 = \gamma_n(0) = \beta, \quad (\beta = 1)$$

и введены обозначения

$$\Delta_1 = \Delta_n(s_1), \dots, \gamma_1' = \left. \frac{d\gamma_n}{ds} \right|_{s=s_1}.$$

Итак, функции ψ_1 и ψ_2 (3.3) известны.

При желании теперь нетрудно найти давление на клин и форму свободных струй (по этому поводу отсылаем к работе [2]).

Если вместо рядов в (1.6) и (2.1) рассмотреть конечные суммы, то каждый раз мы будем приходить к тому или иному гипотетическому газу, так как, например, для точного удовлетворения (1.7) к системе (1.8) нужно прибавить еще одно уравнение вида

$$\alpha_{n+1} = K^{1/2} \beta_{n+1}$$

и эта система становится переопределенной на одно уравнение. Она будет замкнутой, если наряду с α_k и β_k рассматривать и функцию K в качестве искомой.

Однако конечные суммы в (1.6) и (2.1) с точным значением функции Чаплыгина K можно рассматривать в качестве приближенных решений для системы (1.1). Оценку отброшенных членов всегда можно сделать.

§ 4. О возможности построения нового решения для системы (1.1)

Система уравнений (1.1) допускает конструирование общего решения, основанного на сумме двух решений (1.6) и (2.1), то есть в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= \Omega(s) + \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\alpha_k(s) \frac{d^k w}{d\zeta^k} + a_k(s) \int w d\zeta^k \right] \\ \psi &= A + B\theta + \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\beta_k(s) \frac{d^k w}{d\zeta^k} + b_k(s) \int w d\zeta^k \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $w(\zeta)$ — произвольный комплексный потенциал ($\zeta = s + i\theta$), A, B — постоянные, $\Lambda, \alpha_k, \beta_k, a_k, b_k$ — искомые функции одного аргумента.

Внося (4.1) в систему (1.1) и повторяя рассуждения, аналогичные предыдущим, придем к следующим уравнениям для определения искомых функций

$$\begin{aligned} \alpha_k' + \alpha_{k-1} &= \sqrt{K} \beta_{k-1}, \quad \alpha_{k-1} = (\beta_{k-1}' + \beta_{k-1}) \sqrt{K} \\ a_{k-1}' + a_k &= \sqrt{K} b_k, \quad a_k = (b_{k-1}' + b_k) \sqrt{K} \\ \alpha_0 &= a_0, \quad \beta_0 = b_0, \quad \Omega' = -B \sqrt{K} \quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Условия (4.2) открывают новые возможности для определения функции $\alpha_k, \beta_k, a_k, b_k$. В частности, α_0 и β_0 не могут быть постоянными.

Решения (4.1) могут оказаться полезными при изучении новых течений.

В заключение отметим, что в решениях (1.6), (2.1) и (4.1) можно просто произвольно задать функцию $w(\zeta)$ и тем самым получить какое-то наперед неизвестное частное течение (обратная задача). Однако эти течения не всегда будут интересными и физически допустимыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров Г. И. Применение метода Бергмана в газовой динамике и магнитной гидродинамике. Докторская диссертация, Томск, 1963.

2. Назаров Г. И. Давление газовой струи на равнобокий клин, ПМТФ, 1962, № 1.

3. Домбровский Г. А. Метод аппроксимации адиабаты в теории плоских течений газа, М., 1964.

4. Фалькович С. В. К теории газовых струй, ПММ, 1957, XXI, вып. 4.

Поступила 1. III. 1967.

О СХОДИМОСТИ РЯДА БЕРГМАНА ДЛЯ ФУНКЦИИ ТОКА ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ДВИЖЕНИИ ГАЗА

Г. И. НАЗАРОВ

Сходимость в определенной области ряда Бергмана [1], представляющего собой решение гиперболического уравнения для функции тока при сверхзвуковом течении газа, доказана в работе [2]. Ниже устанавливается область абсолютной и равномерной сходимости и дается иное доказательство сходимости ряда Бергмана для указанного выше течения по аналогии с работой [3], в которой проведено соответствующее доказательство для уравнения эллиптического типа (дозвуковое течение газа). В отличие от [1] и [3] в качестве жоржантной функции нами выбрана гипотетическая функция Чаплыгина типа С. А. Христиановича [4].

Известно [5, 6], что чисто сверхзвуковое течение газа при адиабатическом и установившемся процессе удовлетворяет системе уравнений для потенциала скорости φ и функции тока ψ в характеристических переменных годографа скорости ($\zeta = t - \Theta$, $\eta = t + \Theta$) следующего вида

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = -\sqrt{\chi} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \sqrt{\chi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}. \quad (1)$$

Здесь

$$\chi = (M^2 - 1) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{2/(\gamma - 1)}, \quad h^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (2)$$

$$t = h \arctg \frac{1}{h} (M^2 - 1)^{1/2} - \arctg (M^2 - 1)^{1/2}. \quad (3)$$

При $M=1$, $t=0$ $\chi=0$; при $M=\infty$, $t_* = \frac{\pi}{2} (h-1)$, $\chi=\infty$.

χ — функция Чаплыгина, M — переменная Маха.
Исключая из (1) функцию φ , получим:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{T(t)}{4} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \left(t = \frac{\zeta + \eta}{2} \right), \quad (4)$$

где

$$T(t) = \frac{1}{2} \frac{d \ln \chi}{dt}. \quad (5)$$

Точное общее решение уравнения (4) представляется рядом Бергмана, имеющим вид (см., например, [6])

$$\Psi(\zeta, \eta) = A + B \left(\frac{\zeta + \eta}{2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} R_n(\zeta, \eta) \cdot \varphi_n(t). \quad (6)$$

Здесь A, B — произвольные постоянные, а функции

$$R_n(\zeta, \eta) = \Phi_n(\zeta) + F_n(\eta) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

удовлетворяют волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial \zeta \partial \eta} = 0, \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (8)$$

При этом функции $\varphi_n(t)$, мы их в дальнейшем называем функциями Бергмана, определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} 2\varphi_0' + T\varphi_0 &= 0 \\ 2\varphi_n' + T\varphi_n &= -(\varphi_{n-1}' + T \cdot \varphi_{n-1}'), \quad (9) \\ \Phi_n &= \int \Phi_{n-1}(\zeta) d\zeta, \quad F_n = \int F_{n-1}(\eta) d\eta, \quad (n=1, 2, \dots) \quad (10) \end{aligned}$$

В силу формул (2), (5), (9) все функции $\varphi_n(t)$ ($n=0, 1, \dots$) одинаковы для всех задач, так как они не зависят от краевых условий. Эти функции легко выражаются через известные функции Бергмана для дозвукового течения газа (см. [7]). В [6] показано, что все произвольные постоянные интегрирования C_n ($n=1, 2, \dots$) в этих функциях несущественны и могут быть положены равными нулю, кроме $a_0 \neq 0$, что мы и будем делать в дальнейшем. Это соответствует тому, что постоянные интегрирования в (9) выбираются, например, из следующих условий: $\varphi_n(t_*) = 0$ ($n=1, 2, \dots$); постоянная же a_0 войдет сомножителем во все функции Бергмана и, следовательно, ее можно включить в $\Psi(\xi, \eta)$, то есть считать $a_0 = 1$.

При указанных выше условиях (7) — (10) решение (6) содержит две произвольные независимые функции $\Phi_0(\xi)$ и $F_0(\eta)$:

$$R_0(\zeta, \eta) = \Phi_0(\zeta) + F_0(\eta) = \Phi_0(t-\theta) + F_0(t+\theta). \quad (11)$$

Функция $R_0(\xi, \eta)$ определяется краевыми условиями.

Пусть функции, входящие в $R_0(\xi, \eta)$, ограничены и представимы сходящимися рядами. Установим область равномерной и абсолютной сходимости ряда (6).

Докажем прежде всего, что существует такое постоянное $a > 0$, что для фиксированного t ($t_0 < t < t_*$) имеют место неравенства ($t_0 > 0, t_* > 0$):

$$|T| \cdot \tilde{T} = \frac{2a}{t-t_0}. \quad (12)$$

$$\left| \frac{d^n T}{dt^n} \right| < \left| \frac{d^n \tilde{T}}{dt^n} \right| \quad (13)$$

$$(n=1, 2, \dots)$$

Функция сравнения $\tilde{T} = 2a(t-t_0)^{-1}$ приводит к аппроксимации типа Христиановича:

$$\tilde{\chi} = b(t-t_0)^{4a}. \quad (14)$$

Здесь t_0 и b — постоянные.

При $a=1$ функция (14) совпадает с аппроксимацией С. А. Христиановича [4]. В случае (14) решение (6) представляется одночленом с произвольной функцией $R_0(\xi, \eta)$, так как для всех функций Бергмана будем иметь равенства $\varphi_n = (t-t_0)^{-a}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) (постоянные интегрирования здесь положены равными нулю), в чем легко убедиться непосредственно из формул (9).

Неравенства (12) и (13) означают, что функция $\tilde{T} = 2a(t-t_0)^{-1}$ является мажорантной функцией для T . Постоянные t_0 , a и b в (14) можно подобрать так, чтобы функция $\tilde{\chi}$ удовлетворительно аппроксимировала функцию Чаплыгина χ на достаточно широком диапазоне скоростей (см., например, [4, 8]).

На основании формул (2) и (5) имеем

$$T = \frac{(\gamma+1)M^4}{2(M^2-1)^{3/2}}. \quad (15)$$

Введем новую переменную

$$x^2 = M^2 - 1 \quad (16)$$

и придадим формуле (15) вид

$$T = \frac{\gamma+1}{2} \left(x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \right). \quad (17)$$

Если в (17) рассматривать переменную x в качестве комплексной, то функция $T(x)$ будет однозначной и аналитической функцией во всей плоскости переменной x , за исключением точек $x=0$ ($M=1$) и $x=\infty$ ($M=\infty$).

С другой стороны, с учетом (3) и (16), функция

$$t = h \operatorname{arctg} \frac{x}{h} - \operatorname{arctg} x \quad (18)$$

является многозначной функцией. Любая ее ветвь является аналитической функцией во всякой точке плоскости x , за исключением точек $\pm i, \pm i/h$, которые являются логарифмическими точками разветвления.

Для фиксированного $t > 0$ значения x ограничены и отличны от нуля. Функция $T(x)$ также ограничена на круге $|\tau-t| = |t-t_0|$ во всей полуплоскости $\operatorname{Re}(t-t_0) > 0$.

Воспользуемся формулой Коши для n -производной

$$\frac{d^n T}{dt^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} T(\tau)(\tau-t)^{-(n+1)} d\tau,$$

где γ — указанный выше контур круга.

Отсюда ($T(t) < A = \text{const}$).

$$\left| \frac{d^n T}{dt^n} \right| \leq n! A |t-t_0|^{-n}.$$

С другой стороны, из (12), (13) имеем

$$\left| \frac{d^n \tilde{T}}{dt^n} \right| = 2an! |t-t_0|^{-(n+1)} \quad (n=1, 2, \dots).$$

В силу этих формул для вещественного t имеем неравенство

$$\left| \frac{d^n T}{dt^n} \right| \leq \left| \frac{d^n \tilde{T}}{dt^n} \right| \frac{A(t-t_0)}{2a}.$$

Откуда следует, что если

$$\frac{A}{2a} (t-t_0) < 1, \quad (19)$$

то будем иметь неравенство (13)

$$\left| \frac{d^n T}{dt^n} \right| \leq \left| \frac{d^n \tilde{T}}{dt^n} \right|.$$

Неравенство (19) выполняется при всех n , если

$$2a \geq A(t-t_0). \quad (20)$$

Это неравенство всегда может быть выполнено для любого конечного $t(t_0 \leq t < t_*)$.

Выделим теперь функции $\tilde{\varphi}_n$ такие, чтобы удовлетворялись уравнения

$$\begin{aligned} 2\tilde{\varphi}_0 + \tilde{T}\tilde{\varphi}_0 &= 0 \\ 2\tilde{\varphi}_n' + \tilde{T}\tilde{\varphi}_n &= -(\tilde{\varphi}_{n-1}'' + \tilde{T}\tilde{\varphi}_{n-1}'). \end{aligned} \quad (21)$$

$$\tilde{\varphi}_n(t_*) = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

Тогда в силу неравенств (12), (13) будут иметь место неравенства

$$\begin{aligned} |\varphi_n| &\leq |\tilde{\varphi}_n|, \quad \left| \frac{d^k \varphi_n}{dt^k} \right| \leq \left| \frac{d^k \tilde{\varphi}_n}{dt^k} \right| \\ (n=0, 1, 2, \dots, \quad k=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (22)$$

Так как функции $\tilde{\varphi}_n$ зависят от мажоранты $\tilde{T}$ и производных от нее (последние входят в каждую последующую функцию, вычисляемую через предыдущую) по тому же самому закону (9), как и для φ_n , в котором T мажорируется функцией $\tilde{T}$, то функции $\tilde{\varphi}_n$ из (21) с учетом (12) представляются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_0 &= (t-t_0)^{-a} \\ \tilde{\varphi}_n &= b_n (t-t_0)^{-(n+a)}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} b_n &= 2^{-n} \left(0 + \frac{\nu}{1} \right) \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) \left(2 + \frac{\nu}{3} \right) \cdots \left(n-1 + \frac{\nu}{n} \right) \\ \nu &= a(1-a) \quad (n=0, 1, \dots) \end{aligned}$$

С другой стороны, пользуясь формулами (10), можно записать

$$\Phi_n = \frac{1}{n!} \int_0^\xi (\zeta - \lambda)^n \Phi_0'(\lambda) d\lambda$$

$$F_n = \frac{1}{n!} \int_0^\eta (\eta - \mu)^n F_0'(\mu) d\mu. \quad (24)$$

Вносим (24) в (6) и предполагаем равномерную сходимость ряда (6), тогда, меняя местами знаки суммирования и интегрирования, получим

$$\Psi = \int_0^\xi \Phi_0'(\lambda) U(\lambda, t) d\lambda + \int_0^\eta F_0'(\mu) V(\mu, t) d\mu. \quad (25)$$

Здесь

$$U(\lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - \lambda)^n \varphi_n(t)}{n!}, \quad V(\mu, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta - \mu)^n \varphi_n(t)}{n!}. \quad (26)$$

Учитывая (22) и (23), например, для $U(\lambda, t)$ можно записать

$$U(\lambda, t) = (t - t_0)^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left| \frac{\zeta - \lambda}{2(t - t_0)} \right|^n,$$

где

$$C_n = \frac{(0+\nu)(1+\nu)(2+\nu)\dots[n(n-1)+\nu]}{n! n!}.$$

Замечаем, что коэффициент

$$C_{n+1} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+1)} \cdot C_n$$

изменяется так же, как и соответствующий коэффициент в гипергеометрическом ряде, если в последнем положить

$$\alpha = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1-4\nu}), \quad \beta = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4\nu}), \quad \gamma = 1.$$

Следовательно,

$$|U(\lambda, t)| \leq (t - t_0)^{-a} F\left(\alpha, \beta, 1, \frac{|\zeta - \lambda|}{2(t - t_0)}\right).$$

Аналогично

$$|V(\mu, t)| \leq (t - t_0)^{-a} \cdot F\left(\alpha, \beta, 1, \frac{|\eta - \mu|}{2(t - t_0)}\right).$$

Теперь видно, что область сходимости рядов, входящих в (25) и, следовательно, разложение функции Ψ (6) определяются неравенствами

$$\left| \frac{\zeta - \lambda}{2(t - t_0)} \right| \leq c < 1, \quad \left| \frac{\eta - \mu}{2(t - t_0)} \right| \leq c < 1.$$

При интегрировании по частям в формуле (25) мы должны подставить пределы интегрирования и, следовательно, если учесть это, то необходимо потребовать выполнение неравенств (учитывая нижний предел).

$$\frac{|\xi|}{2(t-t_0)} < 1, \quad \frac{|\eta|}{2(t-t_0)} < 1.$$

Или, возвращаясь от характеристических переменных ξ, η к переменным t, θ , получим

$$-1 < \frac{t+\theta}{2(t-t_0)} < 1, \quad -1 < \frac{t-\theta}{2(t-t_0)} < 1. \quad (27)$$

Из первого неравенства (27) следует, что область сходимости первого интеграла в (25) ограничена двумя прямыми

$$3t+\theta-2t_0=0, \quad t-\theta-2t_0=0.$$

Из второго неравенства (27) следует, что область сходимости второго интеграла (25) ограничена прямыми

$$3t-\theta-2t_0=0, \quad t+\theta-2t_0=0.$$

Пересечение этих областей дает ту область, в которой сходятся оба ряда в (25). В частном случае, область сходимости рядов, входящих в (25), будет определяться треугольником, ограниченным линиями

$$t \pm \theta = 2t_0, \quad t = t_0.$$

Иное доказательство сходимости ряда (6), приводящее к тому же результату, дано Бергманом (см., например, [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Бергман. Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными, М., 1964.
2. M. Z. Krzywoblocki. Bergman's Linear Integral operator method in the theory of compressible fluid flow. Wien. 1960.
3. Р. Мизес, М. Шиффер. О методе Бергмана интегрирования уравнений плоского движения сжимаемой жидкости. Сб. «Проблемы механики», ИЛ., 1955.
4. С. А. Христианович. Приближенное интегрирование сверхзвукового течения газа. ПММ, XI, в. 2, 1947.
5. Л. И. Седов. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, ГИТТЛ, 1960.
6. Г. И. Назаров. Метод линейных операторов в магнитной гидродинамике. Третья Сибирская конференция по математике и механике. Томск, 1964.
7. Г. И. Назаров. Приближенное решение задач о сверхзвуковом течении идеального газа. Труды Томского ун-та, т. 163, 1963.

Поступила 1. III. 1967.

К ТЕОРИИ ВИНТОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

В. П. ХАРИТОНОВ

1. В природе и технике очень часто встречаются движения многокомпонентных, в частности, двухкомпонентных сред.

Процессы смешения различных сред: пылеприготовление, отделение твердой фазы из воздуха, насыщенного пылью, транспортировка пульпы, движение газированной нефти, течение газа и твердых частиц в соплах и т. д. — все эти виды движения смесей требуют теоретического и экспериментального исследования. Однако исследование движения двухкомпонентных сред в общем виде представляет из себя чрезвычайно сложную задачу.

Но при выполнении ряда условий движение сплошной среды с твердыми или жидкими частицами можно достаточно точно описать уравнениями [1]

$$\nabla(\rho_g \bar{u}_g) + \frac{\partial \rho_g}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla(\rho_p \bar{u}_p) + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

$$(\bar{u}_g \nabla) \bar{u}_g + \frac{\partial \bar{u}_g}{\partial t} = \bar{F}_g - \frac{1}{\rho_g^0} \nabla P_g - \frac{\rho_p}{\rho_g} \bar{f} \quad (1.3)$$

$$(\bar{u}_p \nabla) \bar{u}_p + \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial t} = \bar{F}_p - \frac{1}{\rho_p^0} \nabla P_g + \bar{f} \quad (1.4)$$

$$\bar{u}_g \nabla h_g + \frac{\partial h_g}{\partial t} = \frac{1}{\rho_g^0} \left(\bar{u}_g \nabla P_g + \frac{\partial P_g}{\partial t} \right) - [(\bar{u}_p - \bar{u}_g) \cdot \bar{f} + q] \frac{\rho_p}{\rho_g} + Q_g \quad (1.5)$$

$$\bar{u}_p \nabla e_p + \frac{\partial e_p}{\partial t} = q + Q_p. \quad (1.6)$$

Система уравнений (1.1) — (1.6) замыкается выражениями ρ_g^0 и e_g через P_g и T_g , а e_p через T_p

$$\rho_g^0 = \rho_g^0(P_g, T_g), \quad e_g = e_g(P_g, T_g), \quad h_g = e_g + \frac{P_g}{\rho_g^0}, \quad e_p = e_p(T_p) \quad (1.7)$$

и уравнением

$$\rho_g = \rho_g^0 \left(1 - \frac{\rho_p}{\rho_p^0} \right), \quad (1.8)$$

где P_g — давление; $\bar{u}_g, \bar{u}_p$ — векторы скорости компонент; $\rho_g^0, \rho_p^0, \rho_g, \rho_p$ — истинные и приведенные плотности компонент; T_g, T_p — температуры компонент; $\bar{F}_g, \bar{F}_p$ — векторы внешних сил; $\bar{f} = f(P_g, T_g, T_p, |\bar{u}_g - \bar{u}_p|)$ ($\bar{u}_g - \bar{u}_p$) — вектор сил взаимодействия компонент, обусловленный их вязкостью; $q = f(P_g, T_g, T_p, |\bar{u}_g - \bar{u}_p|)(T_g - T_p)^k$ ($n, k > 0$) — тепловой поток от одной компоненты к другой; h_g — энтальпия; e_g, e_p — внутренние энергии компонент; Q_g, Q_p — тепло, получаемое компонентами от внешних источников.

Здесь все величины, относящиеся к сплошной жидкой фазе, снабжены индексом g , а к частицам — индексом p .

В данной работе рассмотрены установившиеся винтовые движения несжимаемых (то есть $\rho_g^0 = \text{const}, \rho_p^0 = \text{const}$) двухкомпонентных сред, при условиях справедливости уравнений [1, 2] (1.1) — (1.8) и предположении, что внешние силы $\bar{F}_g$ и $\bar{F}_p$ имеют потенциал.

В настоящее время исследование этого вопроса представляет большой практический интерес, так как до сих пор решение всякого рода аэрогидродинамических задач продолжает еще основываться на линейном представлении о движении смесей. В самом же деле, винтовое движение, вероятно, является более общим случаем движения смесей в трубопроводах, каналах, соплах, руслах и т. д., частным случаем которого, при бесконечно большом шаге витка, является движение линейное. Это предположение хорошо подтверждается опытами М. П. Калинушкина [3].

Такой подход к рассмотрению данного вопроса, очевидно, позволит более ясно охарактеризовать многие особенности движений двухкомпонентных сред.

Но если винтовые течения идеальной жидкости достаточно подробно исследованы в фундаментальных работах И. С. Громеки [4], Е. Бельтрами [5], Лекорню [6], А. Я. Миловича [7], М. В. Потапова [8], О. Ф. Васильева [9] и работах других авторов, то рассмотрению течений двухкомпонентных сред посвящено всего несколько работ [8—12].

Однако и в этих работах все авторы ограничиваются рассмотрением только транспортирующей способности винтового потока применительно к гидротехнике. При этом они по заданному или найденному напору винтового потока жидкости, используя известные уравнения Н. Е. Жуковского [11], отыскивают критерии максимального расхода взвешенных наносов или управления движением наносов в руслах рек, каналов, галерей.

Рассмотрение этого вопроса в более широком плане не проводилось ни теоретически, ни экспериментально. Поэтому в дальнейшем и остановимся на исследовании реального винтового движения смеси с учетом индивидуального движения компонент, передачи импульса от частицы к частице, теплообмена, потерь энергии и т. д. в каждой из компонент.

2. Под винтовым движением двухкомпонентной среды, как и для идеальной жидкости, будем понимать такое движение, при котором линии вихрей компонент смеси в каждой из своих точек совпадают с точками компонент смеси, что аналитически выражается равенствами

$$\frac{\omega_{g_1}}{u_{g_1}} = \frac{\omega_{g_2}}{u_{g_2}} = \frac{\omega_{g_3}}{u_{g_3}} = \frac{\omega_g}{2}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\omega_{p_1}}{u_{p_1}} = \frac{\omega_{p_2}}{u_{p_2}} = \frac{\omega_{p_3}}{u_{p_3}} = \frac{\lambda_p}{2}, \quad (2.2)$$

где λ_g, λ_p — непрерывные функции координат $q_i, \omega_{g_i}; \omega_{p_i}$ ($i=1, 2, 3$) — составляющие вихря скорости. При этом, если $\lambda_g = \lambda_g(q_i), \lambda_p = \lambda_p(q_i)$, то винтовое течение будем называть неоднородным.

Используя метод наложения, обобщенный для винтовых потоков О. Ф. Васильевым [9], нетрудно показать, что

$$\lambda_g = \lambda_p = \lambda, \quad (2.2')$$

то есть существование винтового потока смеси возможно лишь при тождественном соответствии скалярных полей λ .

Геометрически это можно доказать, исходя из параллелограмма сложения векторных полей (см. рис. 1).

Если $\lambda_g \neq \lambda_p$, то при условиях (2.1), (2.2), вообще говоря, получим некоторое невинтовое вихревое движение смеси, которое здесь пока не рассматривается.

Далее напишем уравнения установившегося движения смеси (1.3) (1.4) в форме Ламба-Громеки, преобразованные к ортогональной системе криволинейных координат:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1} \frac{\partial E_g}{\partial q_1} + \frac{\rho_p}{\rho_g} f_1 &= 2(u_{g_2} \omega_{g_3} - u_{g_3} \omega_{g_2}), \\ \frac{1}{H_2} \frac{\partial E_g}{\partial q_2} + \frac{\rho_p}{\rho_g} f_2 &= 2(u_{g_3} \omega_{g_1} - u_{g_1} \omega_{g_3}), \\ \frac{1}{H_3} \frac{\partial E_g}{\partial q_3} + \frac{\rho_p}{\rho_g} f_3 &= 2(u_{g_1} \omega_{g_2} - u_{g_2} \omega_{g_1}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1} \frac{\partial E_p}{\partial q_1} - f_1 &= 2(u_{p_2} \omega_{p_3} - u_{p_3} \omega_{p_2}), \\ \frac{1}{H_2} \frac{\partial E_p}{\partial q_2} - f_2 &= 2(u_{p_3} \omega_{p_1} - u_{p_1} \omega_{p_3}), \\ \frac{1}{H_3} \frac{\partial E_p}{\partial q_3} - f_3 &= 2(u_{p_1} \omega_{p_2} - u_{p_2} \omega_{p_1}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где механическая энергия единицы массы компонент смеси

$$E_g = \frac{u_g^2}{2} + \frac{P_g}{\rho_g^0} + U_g \quad (2.5)$$

$$E_p = \frac{u_p^2}{2} + \frac{P_p}{\rho_p^0} + U_p, \quad (2.6)$$

причем U_g, U_p — потенциалы внешних объемных сил компонент смеси.

Полагая теперь выполнение условий (2.1), (2.2) и (2.2') в каждой точке потока, получим, что движение смеси должно удовлетворять системе уравнений в криволинейных ортогональных координатах:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 u_{g_3}) - \frac{\partial}{\partial q_3} (H_2 u_{g_2}) \right] &= \lambda u_{g_1}, \\ \frac{1}{H_1 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (H_3 u_{g_1}) - \frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 u_{g_3}) \right] &= \lambda u_{g_2}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 u_{g_1}) - \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 u_{g_1}) \right] = \lambda u_{g_3}, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 u_{p_1}) - \frac{\partial}{\partial q_3} (H_2 u_{p_1}) \right] &= \lambda u_{p_1}, \\ \frac{1}{H_1 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 u_{p_1}) - \frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 u_{p_1}) \right] &= \lambda u_{p_2}, \\ \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 u_{p_2}) - \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 u_{p_1}) \right] &= \lambda u_{p_3}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

уравнениям непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 \rho_g u_{g_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 \rho_g u_{g_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 \rho_g u_{g_3}) = 0. \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 \rho_p u_{p_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 \rho_p u_{p_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 \rho_p u_{p_3}) = 0 \quad (2.10)$$

уравнениям

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial E_g}{\partial q_1} = -\frac{\rho_p}{\rho_g} f_1, \quad \frac{1}{H_2} \frac{\partial E_g}{\partial q_2} = -\frac{\rho_p}{\rho_g} f_2, \quad \frac{1}{H_3} \frac{\partial E_g}{\partial q_3} = -\frac{\rho_p}{\rho_g} f_3 \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial E_p}{\partial q_1} = f_1, \quad \frac{1}{H_2} \frac{\partial E_p}{\partial q_2} = f_2, \quad \frac{1}{H_3} \frac{\partial E_p}{\partial q_3} = f_3, \quad (2.12)$$

и уравнениям (1.5)–(1.8) при $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.

При заданных значениях U_g , U_p и f_i для определения неизвестных функций u_{gi} , u_{pi} , λ , ρ_g , ρ , T_g , T_p , P_g ($i=1, 2, 3$) имеем систему уравнений в частных производных (2.7)–(2.12), (1.5)–(1.6) и уравнения (1.7) (1.8).

Исходя из уравнений (2.7)–(2.12), подобно как и для идеальной жидкости [4, 7, 9], нетрудно показать, что винтовые движения двухкомпонентных сред обладают общими свойствами:

а) каждая траектория и совпадающая с ней вихревая линия данных компонент смеси соответственно лежат на поверхностях

$$\frac{\lambda}{\rho_g} = \text{const}, \quad \frac{\lambda}{\rho_p} = \text{const};$$

б) отношение скорости движения к угловой скорости вихревого вращения для каждой частицы компонент смеси во все время движения в данной точке постоянно;

с) при предельном значении $\lambda=0$ получим, как частный случай, невихревое движение смеси с потенциалами скоростей φ_g и φ_p ;

д) при предельном значении $\rho_p=0$ получим, как частный случай, винтовое движение идеальной жидкости;

$$е) \lambda = I_g \text{rot } I_g = I_p \text{rot } I_p,$$

где $\bar{I}_g = \frac{\bar{u}_g}{u_p}$, $\bar{I}_p = \frac{\bar{u}_p}{u_p}$ — единичные векторы, параллельные векторам скорости;

ф) в отличие от идеальной жидкости, энергия компонент смеси не остается постоянной, а зависит от сил взаимодействия компонент смеси.

Интегрирование системы уравнений (2.7) — (2.12) в таком общем виде представляет те же трудности, что и для идеальной жидкости, которые еще не удалось преодолеть.

Поэтому в дальнейшем остановимся на более простых случаях винтовых движений смеси, зависящих только от одной или двух координат, но позволяющих решить широкий круг практически важных задач.

В число таких задач, например, входят все осесимметричные задачи и задачи с иной различной симметрией (плоской, сферической и т. д.).

3. Рассмотрим винтовое движение двухкомпонентной смеси, зависящее от двух координат. Геометрически это означает, что на всех координатных поверхностях $q_3 = \text{const}$ поля скоростей, давления и т. д. строятся одинаковым образом по отношению к триэдру единичных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ координатной системы. В дальнейшем такие движения будем называть двупараметрическими, то есть будем считать, что параметры течения и координатная система подчинены условиям:

$$\frac{\partial u_{gi}}{\partial q_3} = \frac{\partial u_{pi}}{\partial q_3} = \frac{\partial \rho_g}{\partial q_3} = \dots = \frac{\partial H_i}{\partial q_3} = 0 \quad (i=1, 2, 3). \quad (3.1)$$

При этом уравнения (2.7) — (2.12) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 u_{g1}) &= \lambda u_{g1}, & - \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 u_{g1}) &= \lambda u_{g1}, \\ \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 u_{g1}) - \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 u_{g1}) \right] &= \lambda u_{g1}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 u_{p1}) &= \lambda u_{p1}, & - \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 u_{p1}) &= \lambda u_{p1}, \\ \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 u_{p1}) - \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 u_{p1}) \right] &= \lambda u_{p1}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 \rho_g u_{g1}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 H_3 \rho_g u_{g1}) = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 \rho_p u_{p1}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 H_3 \rho_p u_{p1}) = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial E_g}{\partial q_1} = - \frac{\rho_p}{\rho_g} f_1 \quad (3.6) \quad \frac{1}{H_1} \frac{\partial E_p}{\partial q_1} = f_1 \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{H_2} \frac{\partial E_g}{\partial q_2} = - \frac{\rho_p}{\rho_g} f_2 \quad (3.8) \quad \frac{1}{H_2} \frac{\partial E_p}{\partial q_2} = f_2$$

$$f_3 = 0 \quad f_3 = 0.$$

Уравнения (3.4) и (3.5), известным образом, позволяют ввести функции тока ψ_g и ψ_p в виде

$$H_2 H_3 \rho_g u_{g1} = \frac{\partial \psi_g}{\partial q_2} \quad H_1 H_3 \rho_g u_{g2} = - \frac{\partial \psi_g}{\partial q_1} \quad (3.9)$$

$$H_2 H_3 \rho_p u_{p1} = \frac{\partial \psi_p}{\partial q_2} \quad H_1 H_3 \rho_p u_{p2} = - \frac{\partial \psi_p}{\partial q_1}. \quad (3.10)$$

Тогда уравнения (3.2), (3.3) с учетом (3.9) и (3.10) запишутся:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 u_{g_3}) &= \frac{\lambda}{\rho_g} \frac{\partial \psi_g}{\partial q_1}, \\ \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 u_{g_3}) &= \frac{\lambda}{\rho_g} \frac{\partial \psi_g}{\partial q_2}, \\ -\frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2}{H_1 H_3 \rho_g} \frac{\partial \psi_g}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1}{H_2 H_3 \rho_g} \frac{\partial \psi_g}{\partial q_2} \right) \right] &= \lambda u_{g_3},\end{aligned}\quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 u_{p_3}) &= \frac{\lambda}{\rho_p} \frac{\partial \psi_p}{\partial q_1}, \\ \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 u_{p_3}) &= \frac{\lambda}{\rho_p} \frac{\partial \psi_p}{\partial q_2}, \\ -\frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2}{H_1 H_3 \rho_p} \frac{\partial \psi_p}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1}{H_2 H_3 \rho_p} \frac{\partial \psi_p}{\partial q_2} \right) \right] &= \lambda u_{p_3}.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Исключая из первых двух уравнений (3.11) $\frac{\lambda}{\rho_g}$, получим

$$\frac{\frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 u_{g_3})}{\frac{\partial \psi_g}{\partial q_1}} = \frac{\frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 u_{g_3})}{\frac{\partial \psi_g}{\partial q_2}},$$

то есть тождественно равный нулю функциональный определитель

$$\frac{\partial(H_3 u_{g_3}, \psi_g)}{\partial(q_1, q_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 u_{g_3}) & \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 u_{g_3}) \\ \frac{\partial \psi_g}{\partial q_1} & \frac{\partial \psi_g}{\partial q_2} \end{vmatrix} = 0,$$

который показывает, что между $H_3 u_{g_3}$ и функцией ψ_g существует соотношение, не зависящее от переменных q_1 и q_2 .

$$H_3 u_{g_3} = \Phi_g(\psi_g). \quad (3.13)$$

Из первого уравнения системы (3.11) найдем

$$\frac{\lambda}{\rho_g} = \frac{\frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 u_{g_3})}{\frac{\partial \psi_g}{\partial q_2}} = \frac{d\Phi_g(\psi_g)}{d\psi_g} = \Phi_g'(\psi_g). \quad (3.14)$$

Исходя из системы уравнений (3.12), аналогичным образом можно показать, что

$$H_3 u_{p_3} = \Phi_p(\psi_p), \quad (3.15)$$

$$\frac{\lambda}{\rho_p} = \Phi_p'(\psi_p). \quad (3.16)$$

Умножая третье уравнение системы (3.11) на H_3 и используя первые два уравнения с учетом соотношений (3.13), (3.14), получим

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{H_2}{\lambda H_1 H_3} \frac{\partial \Phi_g(\psi_g)}{\partial q_1} \right] + \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_1}{\lambda H_2 H_3} \frac{\partial \Phi_g(\psi_g)}{\partial q_2} \right] = -\lambda \frac{H_1 H_2}{H_3} \Phi_g(\psi_g) \quad (3.17)$$

Аналогично из системы (3.12) с учетом (3.15), (3.16) получим

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{H_2}{\lambda H_1 H_3} \frac{\partial \Phi_p(\psi_p)}{\partial q_1} \right] + \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_1}{\lambda H_2 H_3} \frac{\partial \Phi_p(\psi_p)}{\partial q_2} \right] = -\lambda \frac{H_1 H_2}{H_3} \Phi_p(\psi_p). \quad (3.18)$$

В случае однородного винтового течения смеси уравнения (3.17), (3.18) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{H_2}{H_1 H_3} \frac{\partial \Phi_g(\psi_g)}{\partial q_1} \right] + \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial \Phi_g(\psi_g)}{\partial q_2} \right] = -k^2 \frac{H_1 H_2}{H_3} \Phi_g(\psi_g). \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{H_2}{H_1 H_3} \frac{\partial \Phi_p(\psi_p)}{\partial q_1} \right] + \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial \Phi_p(\psi_p)}{\partial q_2} \right] = -k^2 \frac{H_1 H_2}{H_3} \Phi_p(\psi_p), \quad (3.20)$$

где $k = \text{const}$.

Система уравнений (3.2)–(3.5) эквивалентна полученной системе уравнений (3.9)–(3.18).

Как в общем виде, так и все частные случаи двухпараметрических винтовых течений двухкомпонентных сред можно описать, исходя из уравнений (3.6)–(3.18), (1.5)–(1.8) при условии (3.1) и $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.

4. Рассмотрим теперь винтовое движение смеси, зависящее от одной координаты. Это предположение равнозначно условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{gi}}{\partial q_2} = \frac{\partial u_{pi}}{\partial q_2} = \frac{\partial \rho_g}{\partial q_2} = \dots = 0 \\ \frac{\partial u_{gi}}{\partial q_3} = \frac{\partial u_{pi}}{\partial q_3} = \frac{\partial \rho_g}{\partial q_3} = \dots = 0. \quad (i=1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Если на координатную систему наложить условия

$$\frac{\partial H_i}{\partial q_2} = 0 \quad \frac{\partial H_i}{\partial q_3} = 0. \quad (i=1, 2, 3), \quad (4.2)$$

то значит координатные поверхности $q_2 = \text{const}$ и $q_3 = \text{const}$ должны быть плоскостями, то есть для рассмотрения задачи можем использовать только две системы координат: декартову и цилиндрическую, причем в цилиндрической системе — осесимметричный поток.

При условиях (4.1) и (4.2) из системы уравнений (2.7)–(2.12) получим

$$-\frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 u_{g3}) = \lambda u_{g3}, \quad (4.3) \quad -\frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 u_{p3}) = \lambda u_{p3}, \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 u_{g3}) = \lambda u_{g3}, \quad (4.4) \quad \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 u_{p3}) = \lambda u_{p3}, \quad (4.6)$$

$$u_{g1} = 0$$

$$u_{p1} = 0.$$

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial E_g}{\partial q_1} = -\frac{\rho_p}{\rho_g} f_1, \quad (4.7) \quad \frac{1}{H_1} \frac{\partial E_p}{\partial q_1} = f_1, \quad (4.8)$$

$$f_2 = f_3 = 0$$

$$f_2 = f_3 = 0$$

Уравнения непрерывности при этом удовлетворяются тождественно.

Из (4.3) и (4.4) имеем

$$\frac{u_{g_2}}{H_2} \frac{d}{dq_1} (H_2 u_{g_2}) + \frac{u_{g_3}}{H_3} \frac{d}{dq_1} (H_3 u_{g_3}) = 0. \quad (4.9)$$

Аналогично, исключая λ из (4.5) и (4.6), получим

$$\frac{u_{p_2}}{H_2} \frac{d}{dq_1} (H_2 u_{p_2}) + \frac{u_{p_3}}{H_3} \frac{d}{dq_1} (H_3 u_{p_3}) = 0. \quad (4.10)$$

При этом для λ можно взять одно из соотношений (4.3) — (4.6).

Уравнения (4.7) — (4.10) и одно из уравнений (4.3) — (4.6) являются исходными для рассмотрения однопараметрических винтовых потоков смеси.

Уравнения, полученные в разделах 3 и 4, могут быть положены в основу исследования вопроса о винтовых движениях смеси в трубах, каналах, соплах и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории двускоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, т. 29, вып. 3, 1965.
2. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, т. 20, вып. 2, 1956.
3. Калинушкин М. П. О винтовом движении в трубопроводах. Изв. АН СССР, отдел. техн. н., № 3, 1952.
4. Громека И. С. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. Собр. соч., изд. АН СССР, М., 1952.
5. Beltrami E., Il Nuovo Cimento, v. XXV, Pisa, 1889.
6. Gecornu L., Sur les tourbillons d'une veine fluide, Comptes rendus, Académie des Sciences, t. 168, №19, Paris, 1919.
7. Миловнич А. Я. Основы динамики жидкости (гидродинамика). Госэнергоиздат, М., 1933.
8. Потапов М. В. Сочинения, т. 1, М., 1950. Сочинения, т. 2, М., 1951.
9. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. Госэнергоиздат. М.—Л., 1958.
10. Розовский И. Л. Исследование течения на изгибе русла. Изв. ин-та гидрологии и гидротехники АН УССР, т. 12 (XIX), 1955.
11. Жуковский Н. Е. О снежных наносах и заносах рек. Полн. собр. соч., т. III, ОНТИ НКТП, М.—Л., 1936.
12. Пышкин Б. А. Винтовое движение жидкости со взвешенными наносами в прямой трубе квадратного сечения. Изв. ин-та гидрол. и гидротехн. АН УССР, № 12, 1955.

Поступила 1. III. 1967.

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА КВАЗИОДНОМЕРНОГО ИСТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЫ

В. А. ШВАБ и А. П. АТРАШЕНКО

В отличие от существующих методов численного решения непосредственно уравнений движения гетерогенной среды [1], вызывающих существенные затруднения при сближении интегральных кривых, разработан прямой метод численного решения задачи квазиодномерного течения сжимаемой гетерогенной среды, содержащий в основе приближенное решение задачи для элементарного участка канала переменного сечения. Опробование метода в порядке контрольных расчетов показало его вполне удовлетворительную точность, большую по сравнению с другими методами компактность расчета и меньшие затраты машинного времени. Перспективность метода заключается в том, что без большого труда могут быть введены различные дополнительные факторы физического характера, уточняющие теоретическую схему течения.

Обычные предпосылки, определяющие теоретическую схему квазиодномерного течения сжимаемой гетерогенной среды, предполагают идеальные свойства несущей среды (газа) и, следовательно, отсутствие вязкости, однако силы взаимодействия между несущей средой и частицами примесей учитываются в соответствии с опытными закономерностями и считаются пропорциональными квадрату разности скоростей несущей среды и частиц. Аналогично, в соответствии с опытными зависимостями, учитывается конвективный теплообмен между компонентами смеси, но исключается возможность массообмена между ними. Жидкие или твердые частицы примесей предполагаются одного среднего размера или представленными в виде нескольких групп с одинаковыми размерами для каждой группы. Предполагается отсутствие взаимодействия частиц между собой. Влияние турбулентности потока и броуновского движения частиц во внимание не принимается. Средняя температура частиц считается пропорциональной температуре их поверхности.

На основании этих предпосылок система дифференциальных уравнений для квазиодномерного потока сжимаемой двухфазной смеси может быть представлена в такой форме:

уравнение движения несущей среды (газа)

$$\frac{d}{dz} [(1 + \mu k)u] = - \frac{S}{N} \frac{dp}{dz}, \quad (1)$$

уравнение движения частиц примесей

$$\frac{dw}{d\zeta} = Al[1 + \varphi(\text{Re})] \frac{1-k}{k} \quad (2)$$

в предположении квадратичного закона сопротивления для сил взаимодействия между несущей средой и частицами примесей,
уравнение энергии

$$(1 + \mu k^2) \frac{u^2}{2} + (1 + \mu \gamma) h = \psi = \text{const} \quad (3)$$

без учета влияния давления на перенос частиц примесей,
уравнение переноса тепла между компонентами смеси

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = - \frac{\alpha \zeta l}{w c_m m} (\theta \theta - T), \quad (4)$$

уравнения расхода

$$c_p u S = N, \quad c_1 \rho_1 w S = N_1 = \mu N. \quad (5)$$

Эта система уравнений замыкается соотношениями для давления газа p и его энтальпии в предположении идеальных свойств газа

$$p = \rho RT, \quad h = c_p T \quad (6)$$

и зависимостью для концентраций

$$c + c_1 = 1. \quad (7)$$

Здесь $\kappa = w/u$ — отношение скоростей частиц примесей к скорости газа, $\zeta = x/l$, где x — координатная ось, совпадающая с осью канала переменного сечения, l — характерный размер, $\gamma = \frac{c_m \theta}{c_p T}$ — относительное удельное теплосодержание примесей¹. Значение коэффициента A и зависимости $\varphi(\text{Re})$ определяются видом функции, аппроксимирующей значение коэффициента сопротивления в формуле для силы взаимодействия между несущей средой и частицами примесей

$$Z = \frac{\xi f \rho}{2m} (u - w)^2. \quad (8)$$

Используя аппроксимацию опытных исследований для коэффициента сопротивления сферической частицы в соответствии с зависимостью [1]

$$\xi = \frac{24}{\text{Re}} [1 + 0,197 \text{Re}^{0,63} + 2,6 \cdot 10^{-4} \text{Re}^{1,38}] \quad (9)$$

будем иметь

$$A = \frac{18 \eta}{\partial^2 \rho}, \quad \varphi(\text{Re}) = 0,197 \text{Re}^{0,63} + 2,6 \cdot 10^{-4} \text{Re}^{1,38},$$

причем

$$\text{Re} = \frac{\rho \partial (u - w)}{\eta} = P (1 - k) \frac{S_0}{Sc}, \quad (10)$$

где

$$P = \frac{N \partial}{S_0 \eta}.$$

¹ Остальные обозначения приводятся в конце статьи.

Для определения коэффициента теплоотдачи $\alpha = \lambda \text{Nu} / \delta$ может быть использована опытная зависимость для конвективного теплообмена сферы [2].

$$\text{Nu} = 2 + 0,495 \text{Re}^{0,55} \text{Pr}. \quad (11)$$

Критические параметры при истечении гетерогенной среды для случая постоянного отставания частиц примесей по скорости и температуре рассматривались в работе [3] и с учетом влияния концентрации в работе [4]. В общем случае этот вопрос рассмотрен в работе [5]. В согласии с [5] значение критической скорости газа для первого критического сечения определяется как особая точка уравнения движения газа (1)

$$u_*^2 = \frac{2\psi}{2 \left[\frac{x}{x-1} c_* (1 + \mu k_*) - (1 + \mu k_*^2) \right] (1 + \mu \gamma_*) + (1 + \mu k_*^2)}, \quad (12)$$

а место положения критического сечения канала находится из зависимости

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \frac{dS}{d\zeta} = & - \frac{\mu c \alpha l}{c_p w m} \left(\frac{c_p}{c_m} \gamma \vartheta - 1 \right) + \\ & + \left[\mu k c \left(\frac{x}{x-1} c - k \right) (1 + \mu \gamma) \frac{2u^2}{2\psi - (1 + \mu k^2) u^2} - (1 - c) \right] \frac{1}{k} \frac{dk}{d\zeta}. \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая, что при отставании частиц в докритической области

$\frac{dk}{d\zeta} < 0$, правая часть равенства (13) меньше нуля, будем иметь

$\frac{d}{d\zeta} < 0$, таким образом, место положения первого критического сечения, где достигается скорость в соответствии с зависимостью (12), находится в конфузورной части канала переменного сечения.

Вторая особая точка уравнения движения (1) соответствует значению скорости

$$u_*^2 = \frac{2\psi}{2 \left(\frac{x}{x-1} c_* - 1 \right) (1 + \mu \gamma_*) + (1 + \mu k_*^2)}, \quad (14)$$

находится в области диффузорной части канала, и место положения устанавливается соотношением

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \frac{dS}{d\zeta} = & - \frac{\mu c \alpha l}{c_p w m} \left(\gamma \vartheta \frac{c_p}{c_m} - 1 \right) + \\ & + \left[\mu k c \left(\frac{x}{x-1} c - k \right) (1 + \mu \gamma) \frac{2u^2}{2\psi - (1 + \mu k^2) u^2} - (1 - c) \right] \frac{1}{w} \frac{dw}{d\zeta}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для предельного случая $\mu = 0$, который соответствует случаю движения гомогенной сжимаемой среды, зависимости (12) и (14) переходят в хорошо известное соотношение

$$u_* = \sqrt{2\psi \frac{x}{x+1}}, \quad (16)$$

соответствующее скорости звука, а положение критического перехода,

как это следует из (13) и (15), точно совмещается с минимальным сечением канала, которое удовлетворяет условию $\frac{dS}{d\zeta} = 0$.

Численный метод расчета критических параметров потока основывается на аппроксимации функций в конфузورной части канала, определяющих скорость частиц w и их среднюю температуру θ , в зависимости от координаты

$$w(\zeta) = \alpha + \beta\zeta + \gamma\zeta^2 + \omega\zeta^3 \quad (17)$$

$$\theta(\zeta) = \alpha_1 + \beta_1\zeta + \gamma_1\zeta^2, \quad (18)$$

где $\zeta = \frac{x}{l}$, а $l = x_*$ — значение координаты положения критического сечения. Значения коэффициентов зависимостей (17) и (18) находятся из известных условий для критического и входного сечений.

$$1. w = w_0 \quad \text{при } \zeta = 0$$

$$2. \frac{dw}{d\zeta} = \left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_0 \quad \text{при } \zeta = 0$$

$$3. \frac{dw}{d\zeta} = \left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_* \quad \text{при } \zeta = 1$$

$$4. \frac{d^2w}{d\zeta^2} = 0 \quad \text{при } \zeta = 1$$

и аналогично

$$1. \theta = \theta_0 \quad \text{при } \zeta = 0$$

$$2. \frac{d\theta}{d\zeta} = \left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_0 \quad \text{при } \zeta = 0$$

$$3. \frac{d\theta}{d\zeta} = \left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_* \quad \text{при } \zeta = 1,$$

где значения производных определяются уравнениями (2) и (4)

$$\left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_0 = Al \left\{ 1 + \varphi \left[P(1 - k_*) \frac{S_0}{S_* c_*} \right] \right\} \quad (19)$$

$$\left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_* = Al \left\{ 1 + \varphi \left[P(1 - k_*) \frac{S_0}{S_* c_*} \right] \right\} \quad (20)$$

$$\left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_0 = \frac{\alpha_0 \gamma l}{w_0 c_m m} (\theta_0 \vartheta - T_0), \quad (21)$$

$$\left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_* = \frac{\alpha_* \gamma l}{w_* c_m m} (\theta_* \vartheta - T_*). \quad (22)$$

На основании поставленных условий находятся коэффициенты в равенствах (17) и (18); получим

$$w = w_0 + \left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_0 \zeta + \left(\left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_* - \left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_0 \right) \zeta^2 - \frac{1}{3} \left(\left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_* - \left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_0 \right) \zeta^3, \quad (23)$$

$$\theta = \theta_0 + \left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_0 \zeta + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_* - \left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_0 \right) \zeta^2. \quad (24)$$

Очевидно, что критическое значение скорости $u_* = w_*/k_*$ и на этом основании, полагая в зависимости (23) $\zeta=1$, будем иметь

$$u_* = \frac{1}{k_*} \left[w_0 + \frac{1}{3} \left| \frac{dw}{d\zeta} \right|_0 + \frac{2}{3} \left| \frac{dw}{d\zeta} \right|_* \right]. \quad (25)$$

Для температуры частиц в критическом сечении из (24) получим

$$\theta_* = \theta_0 + \frac{1}{2} \left| \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_0 + \frac{1}{2} \left| \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_*. \quad (26)$$

Используя зависимости (26), (22), (3) и определение $\gamma = c_m \theta / c_p T$, найдем

$$\gamma_* = \frac{\left[\theta_0 + \frac{1}{2} \Omega_0 (\theta_0 \vartheta - T_0) \right] c_m - \frac{1}{2} \Omega_* \left[\psi - (1 + \mu k_*^2) \frac{u_*^2}{2} \right] \frac{c_m}{c_p}}{\left(1 - \frac{1}{2} \Omega_* \vartheta \right) \left[\psi - (1 + \mu k_*^2) \frac{u_*^2}{2} \right] - \mu c_m \left[\theta_0 + \frac{1}{2} \Omega_0 (\theta_0 \vartheta - T_0) \right]}, \quad (27)$$

где

$$\Omega = \frac{\alpha_0 \vartheta l}{k_0 u_0 c_m m} \quad \text{и} \quad \Omega_* = \frac{\alpha_* \vartheta l}{k_* u_* c_m m}.$$

Из уравнений расхода (5) следует

$$c_*^2 = \left[1 + \frac{\mu \rho_*}{\rho_1 k_*} \right]^{-1}, \quad (28)$$

где

$$\rho_* = \frac{N}{u_* S_* - \frac{\mu}{\rho_1 k_*} N}. \quad (29)$$

Таким образом, для определения критической плотности ρ_* , входящей в формулу для концентрации, требуется предварительная оценка расхода газа N , точность которой в связи с тем, что $\frac{\mu \rho_*}{\rho_1 k_*} \ll 1$, не оказывает существенного влияния на расчет в целом. Система алгебраических уравнений для определения критических параметров, например, для второго критического сечения сводится к уравнениям (14), (15), (25) и (27), содержащим в качестве неизвестных u_* , k_* , γ_* и $l = x_*$, причем предполагается известным изменение сечения канала $S = S(\zeta)$. Аналогичным приемом можно воспользоваться при определении критических параметров для первого критического сечения. Расход газа определяется из (5)

$$N = c_* \rho_* u_* S_*.$$

Расчет параметров потока по длине расширяющейся части канала основывается на приеме последовательного вычисления этих параметров для конца некоторого j -го малого, но конечного участка канала [4], [6]. С этой целью предварительно ось канала разбивается на n -участков. После определения критических параметров соответствующее сечение является исходным для расчета. В пределах j -го участка допускается изменение скорости частиц, подчиняющееся зависимости

$$w = \alpha + \beta \zeta + \gamma \zeta^2,$$

где ζ в пределах выбранного участка меняется от 0 до 1. И аналогично их средняя температура

$$\theta = \alpha_1 + \beta_1 \zeta + \gamma_1 \zeta^2.$$

Используя для определения коэффициентов начальные значения w_j и θ_j и значения производных для начала и конца j -го участка в соответствии с уравнениями (2) и (4) будем иметь

$$w = w_j + \left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_j \zeta + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_{j+1} - \left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_j \right) \zeta^2, \quad (30)$$

$$\theta = \theta_j + \left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_j \zeta + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_{j+1} - \left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_j \right) \zeta^2. \quad (31)$$

Отсюда значения параметров w_{j+1} и θ_{j+1} в конце участка будут

$$w_{j+1} = w_j + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_{j+1} + \left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_j \right) \quad (32)$$

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_{j+1} + \left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_j \right) \quad (33)$$

и значение γ_{j+1} определяется согласно (27), где соответствующим образом изменяются индексы.

Уравнение движения (1) в пределах малого участка канала можно проинтегрировать, допуская постоянное значение градиента давления в пределах этого участка,

$$(1 + \mu k_{j+1}) u_{j+1} - (1 + \mu k_j) u_j = \frac{p_j - p_{j+1}}{N} \int_0^1 S(\zeta) d\zeta, \quad (34)$$

где $S(\zeta)$ — заданная зависимость изменения площади сечения канала в пределах рассматриваемого участка. Производя замену давления согласно (6), (3) и зависимости, аналогичной (29), найдем

$$\begin{aligned} & (1 + \mu k_{j+1}) u_{j+1} - (1 + \mu k_j) u_j = \\ & = \frac{p_j}{N} \left\{ 1 - \frac{N(1 + \mu \gamma_j)}{\left(\rho_j u_{j+1} S_{j+1} - \frac{\mu \rho_j}{\rho_1 k_{j+1}} N \right) (1 + \mu \gamma_{j+1})} \left[1 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(1 + \mu k_{j+1}^2)}{1 + \mu \gamma_j} \frac{u_{j+1}^2}{2h_j} + \frac{(1 + \mu k_j^2)}{(1 + \mu \gamma_j)} \frac{u_j^2}{2k_j} \right] \right\} \int_0^1 S(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (35)$$

В этом уравнении все величины с индексом j известны из расчета предыдущего участка. На основании (32) будем иметь

$$u_{j+1} = \frac{1}{k_{j+1}} \left[w_j + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_{j+1} + \left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_j \right) \right] \quad (36)$$

и, в соответствии с (33),

$$\gamma_{j+1} = \frac{\left[\theta_j + \frac{1}{2} \Omega_j (\theta_j \vartheta - T_j) \right] c_m - \frac{1}{2} \Omega_{j+1} \frac{c_m}{c_p} \left[\psi - (1 + \mu k_{j+1}^2) \frac{u_{j+1}^2}{2} \right]}{\left[1 - \frac{1}{2} \Omega_{j+1} \vartheta \right] \left[\psi - (1 + \mu k_{j+1}^2) \frac{u_{j+1}^2}{2} \right] - \mu c_m \left[\theta_j + \frac{1}{2} \Omega_j (\theta_j \vartheta - T_j) \right]} \quad (37)$$

где $\Omega_j = \frac{\alpha_j \sigma l}{k_j u_j c_m m}$ и $\Omega_{j+1} = \frac{\alpha_{j+1} \sigma l}{k_{j+1} u_{j+1} c_m m}$, значение $\left| \frac{dw}{d\zeta} \right|_{j+1}$ определяется уравнением (2) как функция значений k_{j+1} и коэффициент теплоотдачи α зависимостью (11). Таким образом, система трех алгебраических уравнений (35), (36) и (37) содержит три неизвестные величины k_{j+1} , u_{j+1} и γ_{j+1} . Численное решение этих уравнений позволяет по начальным величинам для данного j -го участка установить конечные значения всех

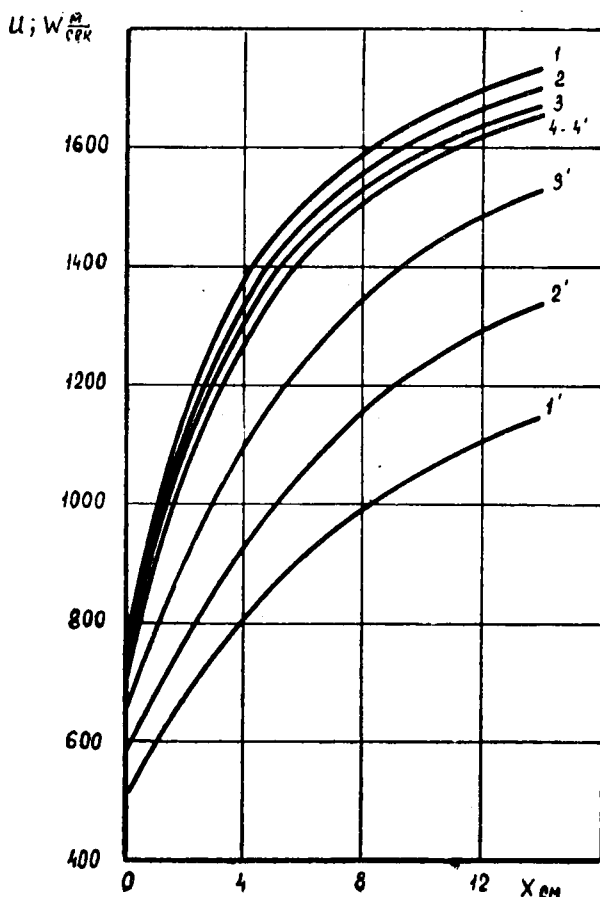


Рис. 1. 1, 2, 3, 4 — скорости воздуха и 1', 2', 3', 4' — скорости частиц, соответствующие размерам $\delta=10, 6, 3, 0,1$ мк; $\gamma=0,6$; $\mu=0,3$; $T_H=2000^\circ\text{K}$, $p_H=20$ атм.

параметров потока для этого участка, которые в свою очередь являются начальными параметрами $j+1$ -го участка, что в конечном счете приводит к определению параметров потока по всей длине диффузорной части канала. Следует отметить предельные случаи процесса теплообмена между несущей средой и частицами примесей. При очень интенсивном теплообмене и когда частицы обладают большой теплопроводностью, что соответствует условию $\vartheta = \frac{\theta_s}{\theta} \rightarrow 1$, из (27) в пределе при $\alpha \rightarrow \infty$, пренебрегая влиянием теплообмена в начале движения частиц, полу-

чим $\gamma_* \rightarrow \frac{c_m}{c_p}$. Аналогичный результат может быть получен из (37) для среднего значения $\bar{\gamma}_j$ на некотором j -ом участке сопла. Этот случай соответствует равновесному по температурам течению двухфазной среды, когда $\Theta = T$. Второй предельный случай соответствует движению смеси без теплообмена между ее компонентами, что возможно, например, при теплоемкости частиц примесей $c_m \rightarrow 0$ или теплопроводности частиц $\Upsilon \rightarrow 0$. Полагая в (27) и (37) $c_m \rightarrow 0$, получим $\gamma = 0$.

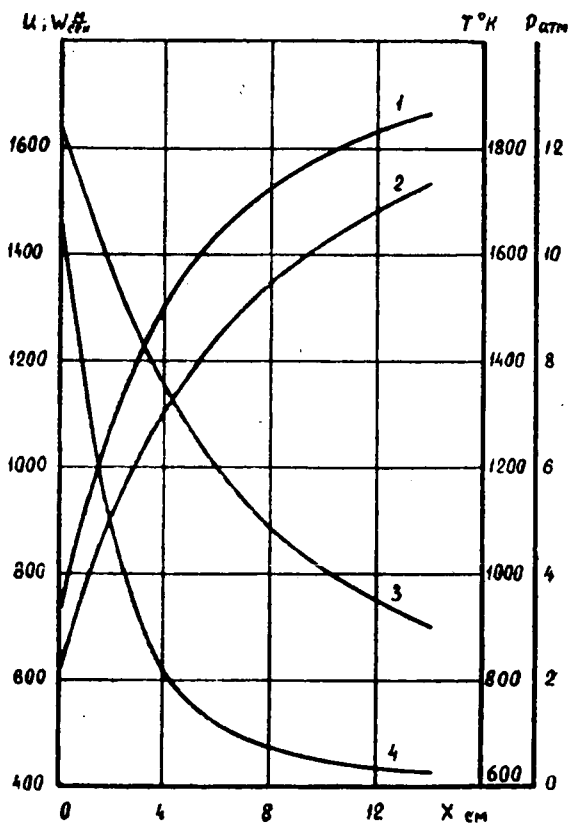


Рис. 2. 1 — скорость воздуха, 2 — скорость частиц, 3 — температура воздуха, 4 — давление при $\delta = 3$ мк, $\mu = 0,3$ и $\gamma = 0,6$

Контрольное опробование метода расчета было осуществлено для предельных значений $\gamma = c_m/c_p = 0,6$ и $\gamma = 0$ для сопла с углом раствора конфузорной части, равным $\alpha = 40^\circ$, и диффузорной части $\beta = 54^\circ$. Радиус сопряжения переходной части принят равным 0,06 м и радиус минимального сечения 0,03 м. Расчет проводился для случая истечения воздуха с начальной температурой $T_n = 2000^\circ \text{K}$ и давлением $p_n = 20$ ата с примесью частиц при расходной концентрации $\mu = 0,3$ и размерами частиц от $\delta = 0,1$ мк до $\delta = 10$ мк. В процессе расчета вычислялись критические параметры, параметры на входе в сопло и изменения параметров в его диффузорной части.

На рис. 1 приведены результаты расчета, дающие изменение скоростей газа и частиц различных размеров по длине диффузора. Из этого рисунка хорошо видна тенденция увеличения отставания частиц с увели-

чением их размеров, причем одновременно имеет место некоторое увеличение скорости воздуха. Для частиц $\delta=0,1$ мк практически имеет место совпадение скорости воздуха и частиц, то есть движение осуществляется без отставания последних.

На рис. 2 приведено распределение скоростей, давления и температуры в диффузоре для частиц размером 3 мк.

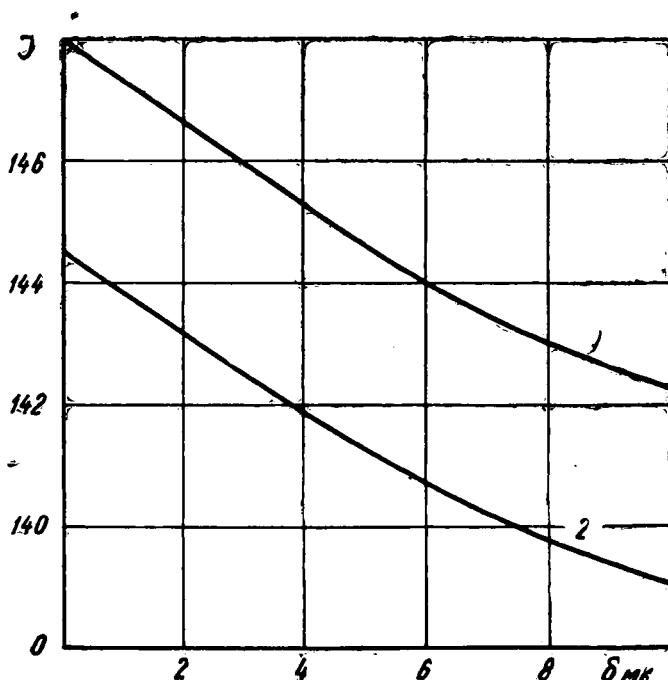


Рис. 3. Зависимость величины импульса от величины размеров частиц. 1 — $\gamma=0,6$ и 2 — $\gamma=0$

На рис. 3 приводится значение единичного импульса в зависимости от размера частиц при расходной концентрации $\mu=0,3$ для вышеуказанных начальных параметров при длине диффузора 0,06 м, удовлетворяющей приблизительно противодавлению одной атмосферы для двух предельных случаев по теплообмену $\gamma=0,6$ и $\gamma=0$.

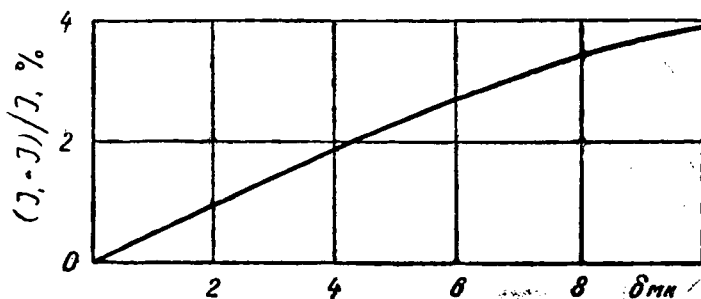


Рис. 4. Относительная потеря импульса в зависимости от размеров частиц при противодавлении, равном одной атмосфере.

$\frac{I_1 - I}{I_1} = f(\delta)$, I_1 — значение импульса при совпадении скорости частиц со скоростью газа

На рис. 4 дано относительное значение потери импульса в зависимости от величины размеров частиц примесей. Наблюдается увеличение потери импульса с увеличением размеров частиц. Необходимо отметить, что влияние теплообмена на величину импульса при сопоставлении предельно интенсивного случая теплообмена и случая, когда полностью отсутствует теплообмен, в рассматриваемом случае течения характеризуется относительной разностью импульсов, равной в среднем 2,3%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Glauz R. D. ARS. j. 32, 773, 1962.
2. Mc Adams W. H. Heat Trasmission, 1954.
3. Kligel J. R. Вопросы ракетной техники, № 10, 1965.
4. Шваб В. А. К вопросу об определении критических параметров истечения гетерогенной среды. Ученые записки, № 68. Изд. Томского университета, Томск, 1967.
5. Шваб В. А. Некоторые итоги цикла исследований потоков гетерогенных сред. Итоги исслед. по мат. и мех., Изд. Томского университета, Томск, 1967.
6. Атращенко. А. П. Ступенчатый метод расчета течения газа с твердыми примесями в канале переменного сечения. Ученые записки, № 68, Изд. Томского университета, Томск, 1967.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

u — скорость несущей среды (газа);

w — скорость частиц примесей;

S — площадь сечения канала;

N и N_1 — массовые расходы газа и примесей;

x — координата, ориентированная в направлении оси канала;

l — характерный размер длины;

$\zeta = \frac{x}{l}$, $k(\zeta) = \frac{w}{u}$ — функция, определяющая отношения скоростей;

$\mu = \frac{N}{N_1}$ — расходная концентрация, постоянная для любого сечения канала;

c и c_1 — объемные концентрации газа и примесей;

T и Θ — температуры газа и частиц (средняя по объему частиц);

h — энтальпия газа;

$\gamma = \frac{c_m \theta}{c_p T}$ — коэффициент относительного теплосодержания;

c_p и c_m — теплоемкости газа и примесей;

P — статическое давление;

$\vartheta = \frac{\theta_s}{\theta}$ — отношение температуры поверхности частиц к их средней температуре;

α — коэффициент теплоотдачи;

ρ и ρ_1 — плотности газа и частиц;

ζ — коэффициент сопротивления сферической частицы;

$\bar{l}$ — миделево сечение;

m — масса частицы;

η — коэффициент вязкости;

σ — диаметр частицы,

Re — число Рейнольдса для частицы,

λ — коэффициент теплопроводности газа;

Nu — критерий Нуссельта,

Ψ — константа уравнения энергии;

$x = \frac{c_p}{c_v}$,

Pg — критерий Прандтля.

Индексы: входное сечение — 0,

критическое сечение — *;

начало интервала — j ,

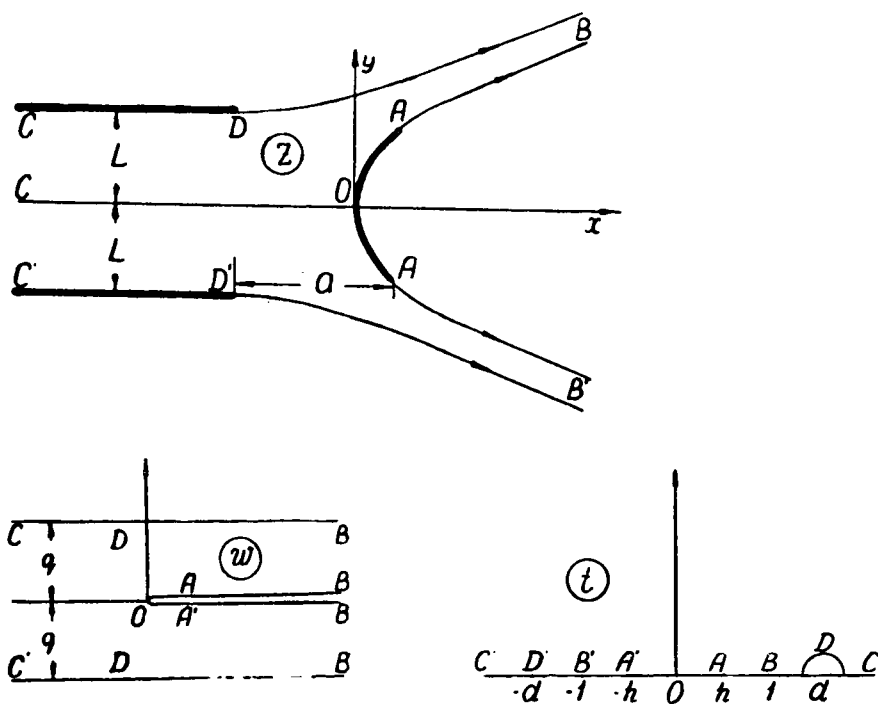
конец интервала и начало следующего интервала — $j+1$.

Поступила 1 III 1967

ОБТЕКАНИЕ ДУГИ ОКРУЖНОСТИ СТРУЕЙ, ВЫТЕКАЮЩЕЙ ИЗ КАНАЛА

В. А. ШТАНЬКО

В работе [1] П. П. Куфарев для решения задачи о струйном обтекании дуги окружности разработал метод, который может быть использован при решении других краевых задач на обтекание препятствий в форме дуги окружности. Этот метод и применен для решения поставленной ниже задачи.



Фиг. 1

1. Рассмотрим задачу о симметричном обтекании дуги окружности кривизны κ , длины l струей идеальной несжимаемой невесомой жидкости, вытекающей из канала шириной $2L$. Дуга окружности AOA' (фиг. 1)

может быть расположена как внутри канала, так и вне его, так что задача допускает два предельных случая: 1) обтекание дуги окружности свободной струей конечной ширины (точки C и D , и C' и D' совпадают, $a = -\infty$, (см. фиг. 1); 2) обтекание дуги окружности, расположенной между двумя параллельными стенками (совпадают точки D и B , D' и B' и $a = \infty$). Пусть на свободных поверхностях AB , $A'B'$ и DB , $D'B'$ модуль вектора скорости $v_0 = 1$, тогда модуль вектора скорости набегающего потока равен некоторому значению $v_\infty < 1$.

Функция

$$w = -\frac{q}{\pi} \ln(1-t^2) \quad (1.1)$$

отображает область изменения комплексного потенциала w , симметричную относительно линии $Imw = 0$ полюсу некоторой ширины $2q$ с разрезом по лучу $Imw = 0$, $Rew \geq 0$, на полуплоскость $Imt \geq 0$ с соответствием точек, указанных на фиг. 1, где образы точек и их оригиналы обозначены одними и теми же буквами, причем точки A и A' , D и D' плоскости w переходят соответственно в некоторые точки $t = \pm h$, $t = \pm d$.

Введем в рассмотрение функцию

$$u(t) = \frac{d}{dw} \ln \frac{dz}{dw} = \frac{d}{dw} \ln \frac{1}{q(t)}, \quad (1.2)$$

у которой на свободных поверхностях AB , $A'B'$ и DB , $D'B'$ $Reu(t) = 0$, а на стенках канала CD , $C'D'$ $Imu(t) = 0$, и исследуем поведение ее в окрестности точек $t = \infty$, $t = 0$, $t = \pm h$, $t = \pm 1$, $t = \pm d$.

Для функции $q(t)$, продолженной по принципу симметрии из $Imt \geq 0$ в $Imt \leq 0$ через DC , $D'C'$, точка $t = \infty$ является устранимой особенностью, так как при $t \rightarrow \infty$ $q(t) \rightarrow v_\infty$. Учитывая, кроме того, что при переходе в плоскости t с CD на $C'D'$ вокруг точки $C(C')$ аргумент вектора t изменяется на π , а при таком же переходе в плоскости $q(t)$ изменение аргумента вектора $q - v_\infty$ равно 2π , функцию $q(t)$ при $|t| > d$ можно представить рядом:

$$q(t) = v_\infty + \frac{c_2}{t^2} + \frac{c_3}{t^3} + \dots, \quad c_2 \neq 0, \quad |t| > d. \quad (1.3)$$

Отсюда, используя (1.1) и (1.2), найдем ряд для функции $u(t)$ при $|t| > d$:

$$u(t) = -\frac{dt}{dw} \cdot \frac{q'(t)}{q(t)} = \frac{b_2}{t^2} + \frac{b_3}{t^3} + \dots, \quad b_2 = -\frac{\pi c_2}{qv_\infty} \neq 0. \quad (1.3)$$

В окрестности точки $t = 0$ для $u_+(t)$ — аналитического продолжения $u(t)$ из $Imt \geq 0$ в $Imt \leq 0$ через AOA' — получается ряд:

$$u_+(t) = \frac{c_{-2}}{t^2} + \frac{ic_{-1}}{t} + c_0 + ic_1 t + \dots, \quad c_{-2} = -\frac{\pi}{2q}, \quad |t| > h. \quad (1.4)$$

Продолжив по принципу симметрии $u(t)$ из $Imt \geq 0$ в $Imt \leq 0$ через отрезки ABD , $A'B'D'$, найдем, что $u(t) = \overline{u(\bar{t})}$, где через $u_1(t)$ обозначено указанное продолжение. Учитывая это, из (1.4) получим ряд для $u_-(t)$ — аналитического продолжения $u_1(t)$ из $Imt \leq 0$ в $Imt \geq 0$ через AOA' :

$$u_-(t) = -\frac{c_{-2}}{t^2} + \frac{ic_{-1}}{t} - c_0 + ic_1 t - \dots, \quad |t| < h. \quad (1.5)$$

Далее, таким же путем, как и в работе [1], убеждаемся, что при $t \rightarrow \pm h$

$$\lim_{t \rightarrow \pm h} Im u(t) = \pm \kappa. \quad (1.6)$$

Учитывая еще, что в окрестности точки $t=h$ функция $q(t)$ разлагается в ряд ([2], стр. 161)

$$q(t) = q(h) + (t-h)^\alpha [c_0 + c_1(t-h) + c_2(t-h)^2 + \dots], \quad c_0 \neq 0, \quad 0 < |t| < 1,$$

а, значит,

$$u(t) = a_0(t-h)^{\alpha-1} + a_1(t-h)^\alpha + a_2(t-h)^{\alpha+1} + \dots, \quad 0 < |t| < 1,$$

где $a_0 = -\frac{\pi(1-h^2)^\alpha c_0}{2qh q(h)} \neq 0$, $0 < \alpha < 1$ и что, в силу симметрии течения, в точке $t=-h$ функция $u(t)$ имеет такую же особенность, как и в точке $t=h$, устанавливаем соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow \pm h} u(t)(h^2 - t^2) = 0. \quad (1.7)$$

Выпишем, наконец, ряды для функции $u(t)$ в окрестности точек $t=1$ и $t=d$. Имеем:

$$u(t) = \alpha_1(t-1) + \alpha_2(t-1)^2 + \dots, \quad \alpha_1 \neq 0, \quad h < |t| < d,$$

$$u(t) = \beta_1(t-d)^{-1/2} + \beta_2 + \beta_3(t-d)^{1/2} + \dots, \quad \beta_1 \neq 0, \quad 1 < |t| < \infty.$$

Поведение функции $u(t)$ в точках $t=-1$, $t=-d$, как следует из симметрии течения, аналогично поведению ее соответственно в точках $t=1$ и $t=d$.

В работе [1] показано, что на дуге окружности функция $u(t)$ удовлетворяет условию:

$$Im \left(\frac{du}{dw} - \frac{1}{2} u^2 \right) = 0,$$

которое в данном случае, переходя к переменной t , можно записать в виде:

$$u'(t) - \overline{u'(t)} = \frac{q}{\pi} \cdot \frac{t}{1-t^2} [n(t) - \overline{u(t)}][u(t) + \overline{u(t)}],$$

или, учитывая, что на дуге AOA' $u(t) = u_+(t)$ и $\overline{u(t)} = -u_-(t)$,

$$u'_+(t) + u'_-(t) = \frac{q}{\pi} \cdot \frac{t}{1-t^2} [u_+(t) + u_-(t)][u_+(t) - u_-(t)]. \quad (2.1)$$

Принимая во внимание поведение $u(t)$, построим теперь вещественную на $ABDC$, $A'B'D'C'$ функцию

$$g(t) = \frac{V(h^2 - t^2)(d^2 - t^2)}{d(1 - t^2)} t^2 \cdot u(t) = v(t) \cdot u(t), \quad (2.2)$$

которая оказывается голоморфной и однозначной вне разреза по отрезку $[-h, h]$.

На дуге окружности AOA' , как следует из (2.1) и (2.2), функция $g(t)$ удовлетворяет соотношению:

$$g'_+(t) - g'_-(t) = \frac{qt}{\pi v(t)(1-t^2)} [g_+(t) - g_-(t)] [g_+(t) + g_-(t)] + \frac{v'(t)}{v(t)} [g_+(t) - g_-(t)]. \quad (2.3)$$

Далее, при $t \rightarrow \pm h$ из (1.7) и (2.2) находим

$$\lim_{t \rightarrow \pm h} g(t) \sqrt{h^2 - t^2} = \lim_{t \rightarrow \pm h} u(t)(h^2 - t^2) \frac{t^2 \sqrt{d^2 - t^2}}{d(1-t^2)} = 0.$$

Для того, чтобы представить функцию $g(t)$ интегралом типа Коши, определим на отрезке $[-h, h]$ функцию

$$i\varphi(t) = g_+(t) - g_-(t). \quad (2.4)$$

Находя затем из (1.4), (1.5) и (2.2) разложения в ряд в окрестности точки $t=0$ функций

$$g_+(t) = -\frac{h\pi}{2q} + ic_{-1}ht + \beta_2 t^2 + i\beta_3 t^3 + \dots, \quad |t| < h$$

и

$$g_-(t) = -\frac{h\pi}{2q} - ic_{-1}ht + \beta_2 t^2 - i\beta_3 t^3 + \dots, \quad |t| < h$$

и подставляя в (2.4), получим

$$i\varphi(t) = i2c_{-1}ht + i2\beta_3 t^3 + \dots, \quad |t| < h.$$

Таким образом, $\varphi(t)$ вещественная, нечетная функция, $\varphi(0) = 0$ и, кроме того, из (1.6), (2.2) и (2.4) имеем:

$$\lim_{t \rightarrow \pm h} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{h^2 - t^2}} = \pm \frac{2\pi h^2 \sqrt{d^2 - h^2}}{d(1-h^2)}. \quad (2.5)$$

При таких условиях, как известно [3], функцию $g(t)$ можно представить интегралом типа Коши через значения функции $\varphi(t)$, а именно:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^h \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + g(\infty) = \frac{t}{2\pi} \int_{-h}^h \frac{\varphi(\tau)}{\tau(\tau - t)} d\tau - \frac{h\pi}{2q}. \quad (2.6)$$

Для вещественных значений t в интервале $(-h, h)$

$$\frac{g_+(t) + g_-(t)}{2} = \frac{t}{2\pi} \int_{-h}^h \frac{\varphi(\tau)}{\tau(\tau - t)} d\tau - \frac{h\pi}{2q}, \quad (2.7)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Функция $\varphi(t)$ может быть определена из уравнения, которое получается из (2.3) с помощью формул (2.4) и (2.7), и имеет вид:

$$\varphi'(t) = \frac{dq\varphi(t)}{\pi^2 \sqrt{(h^2 - t^2)(d^2 - t^2)}} \int_{-h}^h \frac{\varphi(\tau)}{\tau(\tau - t)} d\tau - \frac{dh\varphi(t)}{t \sqrt{(h^2 - t^2)(d^2 - t^2)}} + \frac{v'(t)}{v(t)} \varphi(t).$$

Полагая теперь

$$\varphi(t) = t \sqrt{(h^2 - t^2)(d^2 - t^2)} (h \sqrt{d^2 - t^2} + d \sqrt{h^2 - t^2}) \frac{f(t)}{d^2(1-t^2)}, \quad (2.8)$$

для определения функции $f(t)$ будем иметь уравнение:

$$f'(t) = \frac{qf(t)}{d\pi^2 \sqrt{(h^2 - t^2)(d^2 - t^2)}} \int_{-h}^h \times \\ \times \int_{-h}^h \frac{f(\tau) \sqrt{(h^2 - \tau^2)(d^2 - \tau^2)} (h\sqrt{d^2 - \tau^2} + d\sqrt{h^2 - \tau^2})}{(\tau - t)(1 - \tau^2)} d\tau. \quad (2.9)$$

Кроме того, из (2.5) и (2.8) находим следующее условие для $f(t)$:

$$f(\pm h) = \frac{2\pi d}{\sqrt{d^2 - h^2}} \equiv \lambda. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.9) можно решить методом последовательных приближений, при этом можно доказать, что для достаточно малых значений $|\lambda|$ решение этого уравнения существует и оно единственно в пространстве функций, удовлетворяющих на отрезке $[-h, h]$ условию Гёльдера с показателем $1/2$, с нормой, определенной по формуле ([3], стр. 209):

$$\|f(t)\| = \max |f(t)| + \sup \frac{|f(t + \Delta t) - f(t)|}{|\Delta t|^{1/2}}, \quad t \in [-h, h].$$

3. Рассчитаем, однако, первое приближение для малых значений $|\lambda|$. Полагая $f(t) = f_1(t) = \lambda$, по формулам (2.8) и (2.6) найдем

$$g(t) = \lambda \frac{At^2 - Bt^2(1 - t^2) + h\pi t(d^2 - t^2)\sqrt{t^2 - h^2} + dt(h^2 - t^2)\sqrt{d^2 - t^2} \ln F(t)}{2\pi d^2(1 - t^2)} - \\ - \frac{h\pi}{2q}, \quad (3.1)$$

где

$$A = h\pi(1 - d^2)\sqrt{1 - h^2} + \\ + d(1 - h^2)\sqrt{d^2 - 1} \ln \left[\frac{d^2 + h + \sqrt{(d^2 - 1)(d^2 - h^2)}}{d^2 - h + \sqrt{(d^2 - 1)(d^2 - h^2)}} \cdot \frac{1 - h}{1 + h} \right], \\ F(t) = \frac{d^2 + ht + \sqrt{(d^2 - t^2)(d^2 - h^2)}}{d^2 - ht + \sqrt{(d^2 - t^2)(d^2 - h^2)}} \cdot \frac{t - h}{t + h}, \quad B = h\pi + 2d \arcsin \frac{h}{d}.$$

Выведем теперь соотношения для определения параметров течения h, d, q и давления P на дугу. Для этого выразим $(dw/dz) = q(t)$ и dz через значения функции $g(t)$. Из (1.1), (1.2) и (2.2) найдем

$$\frac{dw}{dz} = e^{-i\gamma} \exp \left\{ -\frac{2qd}{\pi} \int_h^t \frac{g(t) dt}{t \sqrt{(h^2 - t^2)(d^2 - t^2)}} \right\} \quad (3.2)$$

и

$$dz = \frac{2qt}{\pi(1 - t^2)} e^{i\gamma} \exp \left\{ \frac{2qd}{\pi} \int_h^t \frac{g(t) dt}{t \sqrt{(h^2 - t^2)(d^2 - t^2)}} \right\} dt,$$

или

$$dz = \frac{2qt}{\pi(1 - t^2)} \exp \left\{ \frac{2qd}{\pi} \int_d^t \frac{g(t) dt}{t \sqrt{(h^2 - t^2)(d^2 - t^2)}} \right\} dt, \quad (3.3)$$

где $\gamma = \arg q(t)$ при $t = h$.

Одно из искоемых соотношений получим из условия:

$$l = 2 \int_0^1 |tz| = \frac{4q}{\pi} \int_0^h \frac{t}{1-t^2} \exp \left\{ \frac{2qd}{\pi} \int_h^t \frac{\operatorname{Re} g(t) dt}{t \sqrt{(h^2-t^2)(d^2-t^2)}} \right\} dt,$$

подставляя в которое значения $\operatorname{Re} g(t) = \operatorname{Re} g_+(t)$ из (3.1) при $-h \leq t \leq h$ будем иметь:

$$l = \frac{4q}{\pi} \int_0^h \frac{t}{1-t^2} \exp \left\{ \frac{iq}{d\pi^2} \int_h^t \Phi(t), t-dh \int_h^t \frac{dt}{t \sqrt{(h^2-t^2)(d^2-t^2)}} \right\} dt,$$

где

$$\Phi(t) = \frac{At - Bt(1-t^2) + d(h^2-t^2) \sqrt{d^2-t^2} \ln F(t)}{(1-t^2) \sqrt{(h^2-t^2)(d^2-t^2)}}.$$

Разложим функцию $\exp \left\{ \frac{iq}{d\pi^2} \int_h^t \Phi(t) dt \right\}$ по параметру λ , тогда, ограничиваясь членами первого порядка малости относительно λ , найдем:

$$l = \frac{4q}{\pi} \int_0^h \frac{h\sqrt{d^2-t^2} + d\sqrt{h^2-t^2}}{\sqrt{d^2-h^2}(1-t^2)} dt + \\ + \frac{4\lambda q^2}{d\pi^3} \int_0^h \frac{h\sqrt{d^2-t^2} + d\sqrt{h^2-t^2}}{\sqrt{d^2-h^2}(1-t^2)} \left(\int_h^t \Phi(t) dt \right) dt$$

и, вычислив первый интеграл и преобразовав второй, окончательно получим:

$$l = \frac{4q}{\pi \sqrt{d^2-h^2}} \left[\frac{h\sqrt{d^2-1}}{2} \ln \left(\frac{d^2-h+\sqrt{(d^2-1)(d^2-h^2)}}{d^2+h+\sqrt{(d^2-1)(d^2-h^2)}} \cdot \frac{1+h}{1-h} \right) + \right. \\ \left. + h \arcsin \frac{h}{d} + \frac{d\pi}{2} (1 - \sqrt{1-h^2}) - \right. \\ \left. - \frac{4q^2\lambda}{d\pi^2 \sqrt{d^2-h^2}} \int_0^h \left[\frac{h\sqrt{d^2-1}}{2} \ln \left(\frac{d^2-t+\sqrt{(d^2-1)(d^2-t^2)}}{d^2+t+\sqrt{(d^2-1)(d^2-t^2)}} \cdot \frac{1+t}{1-t} \right) + \right. \right. \\ \left. + h \arcsin \frac{t}{d} + \frac{d\sqrt{1-h^2}}{2} \left(\arcsin \frac{h^2-t}{h(1-t)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \arcsin \frac{h^2+t}{h(1+t)} \right) + d \arcsin \frac{t}{h} \right] \Phi(t) dt. \quad (3.4)$$

Вычисляя далее интеграл $\int \frac{d\omega}{dt} dt = 2i v_\infty L$ по бесконечно большой полуокружности с центром в точке $t=0$, найдем второе соотношение:

$$q = v_\infty L.$$

И третье соотношение получим из условия (см. фиг. 1):

$$a = \int_A^D \operatorname{Re} dz = \int_h^d \operatorname{Re} \frac{dz}{dt} dt. \quad (3.5)$$

Из (3.3) найдем $\operatorname{Re} dz$ и подставим в (3.5), тогда, выполнив такие же преобразования, как и при выводе (3.4), получим:

$$\begin{aligned}
a = & \frac{2qd}{\pi\sqrt{d^2-h^2}} \left\{ \frac{\sqrt{1-h^2}}{2} \ln \left(\frac{d-h^2+\sqrt{(1-h^2)(d^2-h^2)}}{d+h^2+\sqrt{(1-h^2)(d^2-h^2)}} \cdot \frac{d+1}{d-1} \right) - \ln \frac{d+\sqrt{d^2-h^2}}{h} \right\} - \\
& - \frac{4q^2 h \lambda}{\pi^2 d^2 \sqrt{d^2-h^2}} \left\{ \left[\frac{h\sqrt{d^2-1}}{2} \ln \left(\frac{d^2-h+\sqrt{(d^2-1)(d^2-h^2)}}{d^2+h+\sqrt{(d^2-1)(d^2-h^2)}} \cdot \frac{1+h}{1-h} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + h \arcsin \frac{h}{d} \right] \int_d^h G(t) dt - \frac{h\sqrt{d^2-1}}{2} \int_h^d \left[\ln \left(\frac{d^2-t+\sqrt{(d^2-1)(d^2-t^2)}}{d^2+t+\sqrt{(d^2-1)(d^2-t^2)}} \cdot \frac{1+t}{1-t} \right) + h \arcsin \frac{t}{d} \right] G(t) dt \right\}, \quad (3.6)
\end{aligned}$$

где

$$G(t) = \frac{At - Bt(1-t^2) + h\pi(d^2-t^2)\sqrt{t^2-h^2} - d(t^2-h^2)\sqrt{d^2-t^2} \ln F(t)}{(1-t^2)\sqrt{(t^2-h^2)(d^2-t^2)}}.$$

Известно, что давление на контур, частично заключенный в канал, определяется по формуле [4]:

$$P = \rho L (1 - 2v_\infty \cos \theta(1) + v_\infty^2),$$

где $\theta(1) = \theta(t)|_{t=1}$ — угол наклона вектора скорости на струе AB в точке B . Из (3.2) при $h \leq t \leq d$ находим

$$\begin{aligned}
\theta(t) = & \gamma + \frac{2qd}{\pi} \int_h^t \frac{g(t) dt}{t \sqrt{(t^2-h^2)(d^2-t^2)}} = \frac{\pi}{2} - \\
& - \frac{\lambda l}{2} - \int_h^t \frac{dh \cdot dt}{t \sqrt{(t^2-h^2)(d^2-t^2)}} + \frac{\lambda q}{\pi d^2} \int_h^t G(t) dt,
\end{aligned}$$

откуда при $t=1$, имеем:

$$\theta(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\lambda l}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{d^2-h^2(2d^2-1)}{d^2-h^2} + \frac{\lambda q}{\pi d^2} \int_h^1 G(t) dt. \quad (3.7)$$

Наконец, для значений $t > d$ из (3.2) определяем

$$\begin{aligned}
v_\infty = & \left| \frac{dw}{dz} \right|_{t=\infty} = \exp \left\{ - \int_d^t \frac{dh \cdot dt}{t \sqrt{(t^2-h^2)(t^2-d^2)}} + \right. \\
& \left. + \frac{\lambda q}{\pi d^2} \int_h^t \frac{g(t) + \frac{h\pi}{2q}}{t \sqrt{(t^2-h^2)(t^2-d^2)}} dt \right\} \Big|_{t=\infty},
\end{aligned}$$

или

$$v_\infty = \sqrt{\frac{d-h}{d+h}} \left(1 + \frac{\lambda q}{\pi d^2} \int_0^d R(x) dx \right), \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned}
R(x) = & [h\pi(1-d^2x^2)\sqrt{1-h^2x^2} - Ax^2 - B(1-x^2) - \\
& - d(1-h^2x^2)\sqrt{1-d^2x^2} \operatorname{arctg} \frac{2h\sqrt{(1-d^2x^2)(d^2-h^2)}}{d^2-2h^2+d^2h^2x^2}] \cdot \\
& \cdot [x(1-x^2)\sqrt{(1-h^2x^2)(1-d^2x^2)}]^{-1}.
\end{aligned}$$

Интегралы, входящие в соотношения (3.4), (3.6), (3.7) и (3.8), могут быть подсчитаны одним из известных методов численного интегрирования. Отметим еще, что решения двух предельных случаев задачи, указанных в начале первого пункта, получаются из общего решения соответственно при $d = \infty$ и $d = 1$. При $\lambda = 0$ получаются точные решения таких же краевых задач на обтекание отрезка прямой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куфарев П. П. О струйном обтекании дуги окружности. ПММ, т. XVI, в. 5, 1952.
2. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1958.
3. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, М. 1962.
4. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., 1961.

Поступила 1. III. 1967.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПОРШНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С ВВОДОМ ТЕПЛА МЕТОДОМ РАСПАДА ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА

Л. В. КОМАРОВСКИЙ, Т. Л. БАЗИЛЕВИЧ

Одномерное неуставившееся течение газа с вводом тепла рассматривалось в работах [1, 2]. В статье [4] было рассмотрено численное решение задачи Лагранжа, когда происходит дополнительный вток газа, то есть к рабочему газу дополнительно подводится некоторое количество массы, импульса и энергии. Затем в работе [5] был исследован частный случай, когда вводится только энергия. Наконец, в [6] было получено точное аналитическое решение задачи Лагранжа с вводом энергии для бесконечной пусковой трубы.

В данной работе дано численное решение задачи о движении поршня в трубе под действием давления неуставившегося течения газа, когда в область рабочего газа происходит ввод некоторого количества энергии. При этом ввод энергии может происходить по произвольному закону в любом сечении пусковой трубы (в частности, в камере высокого давления) и в любой момент времени. Предлагаемая схема расчета составлена так, чтобы по ней можно было провести расчет задачи, как частный случай, когда происходит последовательный дискретный ввод энергии любой интенсивности за движущимся поршнем.

Данная работа представляет естественное продолжение работ [4, 5], где были поставлены и частично рассмотрены задачи, связанные с разгоном поршня в пусковой трубе при помощи дополнительного ввода массы, импульса и энергии. Чтобы избежать повторения и сократить введение, отсылаем к работам [4, 5], где в начале изложения дается постановка основной задачи по рассматриваемому вопросу.

Ранее в работах [4, 5] для численного решения рассматриваемого класса задач использовался в основном метод характеристик. Обладая многими преимуществами (точная аппроксимация, абсолютная устойчивость), этот метод имеет существенный недостаток: он может быть использован только для области, где все газодинамические функции непрерывны. Если же в области течения имеются поверхности сильного разрыва, то тогда этот метод может применяться к расчету течений в отдельных областях, где отсутствуют сильные разрывы. Получаемые таким образом решения в процессе расчета должны склеиваться по поверхностям сильного разрыва посредством условий динамической совместности. Эта методика может быть использована, когда в области течения имеются единичные поверхности сильного разрыва большой ин-

тенсивности. В некоторых задачах, к которым относится большинство задач, рассмотренных в работах [4, 5], даже при достаточно гладких начальных условиях, поверхности сильного разрыва возникают внутри области течения. При этом до начала решения неизвестно даже, где и когда возникают эти разрывы, неизвестна их конфигурация и число. В этом случае нужно использовать какой-нибудь метод сквозного счета. Наиболее подходящим для данного класса задач является метод распада произвольного разрыва [3], который был предложен для расчета одномерного неустановившегося течения газа, когда отсутствует ввод массы, импульса и энергии, т. е. для расчета однородной системы уравнений. В настоящей работе этот метод используется для решения задач, когда происходит только ввод энергии. В этом случае исходную систему легко можно свести к однородной и использовать метод распада произвольного разрыва [3] без существенных изменений.

Предлагаемая в работе схема расчета была апробирована на точном аналитическом решении задачи Лагранжа с вводом энергии [6]. По ней были проведены газодинамические расчеты задач о движении поршня под действием сжатого газа, когда происходит единичный ввод энергии.

Основная система уравнений для одномерного нестационарного течения газа с вводом энергии в переменных Лагранжа имеет вид [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{pv}{\gamma-1} \right) + \frac{\partial(pu)}{\partial \xi} = \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (3)$$

где u — скорость газа, p — давление, v — удельный объем, q — вводимая энергия, ξ — координата Лагранжа, равная

$$\xi = \int_{x(0,t)}^{x(\xi,t)} \frac{dx}{v}.$$

Здесь и в дальнейшем безразмерные величины будем выбирать так, чтобы основная система и основные соотношения газовой динамики были бы инвариантными. В этом случае можно произвольно выбрать только единицы длины, массы и времени, а выбор остальных безразмерных величин уже будет связан с этим выбором. Чтобы новые безразмерные возможно меньше отличались от безразмерных, употребляемых ранее [4, 5], выберем их следующим образом:

$$\bar{l} = \frac{l}{l_0}, \quad \bar{a} = \frac{a}{a_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_0},$$

где l_0 — длина камеры высокого давления, a — скорость звука. Тогда остальные безразмерные независимые переменные и искомые функции будут выражаться следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{l_0}; \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{\xi_0} = \frac{\xi v_0}{l_0}; \quad \bar{t} = \frac{ta_0}{l_0}; \quad \bar{u} = \frac{u}{a_0}; \\ \bar{p} &= \frac{p}{\gamma p_0} = \frac{pv_0}{a_0^2}; \quad \bar{E} = \frac{E}{\gamma(\gamma-1)E_0} = \frac{E}{a_0^2}; \quad \bar{q} = \frac{q}{a_0^2}, \end{aligned}$$

где E — внутренняя энергия. Такой выбор безразмерных величин обладает преимуществом, так как основная система уравнений и все газодинамические соотношения имеют один и тот же вид как в размерных, так и в безразмерных величинах.

Остановимся кратко на прямой задаче Лагранжа с вводом энергии. Дана полубесконечная труба, часть объема которой занята сжатым газом. Слева газ ограничен неподвижной стенкой, справа — поршнем. Правее поршня — вакуум. Под действием сжатого газа поршень приходит в движение. В рабочий газ по заданному закону вводится энергия. Требуется определить течение газа и закон движения поршня. В начальный момент газ покоится, следовательно, начальные условия в безразмерных величинах будут иметь вид:

$$u(\xi, 0) = 0, \quad p(\xi, 0) = \frac{1}{\gamma}, \quad v(\xi, 0) = 1.$$

Граничные условия на неподвижной стенке:

$$u(-1, t) = 0. \quad (4)$$

Граничные условия на поршне:

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = \sigma p(0, t). \quad (5)$$

В работе [3] метод распада произвольного разрыва дан для однородной системы уравнений. У нас же система (1) — (3) является неоднородной. Однако эту систему формально можно представить в виде однородной системы.

Действительно, ввод энергии определяется физической постановкой задачи, следовательно, функцию $q(\xi, t)$, которая аппроксимирует заданный закон для ввода энергии, можно выбрать из нужного нам класса функций. Уравнение (3) можно представить в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{pv}{\gamma-1} - q \right) + \frac{\partial(pu)}{\partial \xi} = 0. \quad (3^*)$$

К этой системе уравнений применяем схему расчета, изложенную в [3], с соответствующими изменениями, которые учитывают ввод энергии.

Так как практически ввод энергии в газ можно осуществлять при помощи искровых разрядов, то функцию $q(\xi, t)$ будем брать в виде

$$q(\xi, t) = \sum_{i=1}^n q_i(\xi, t),$$

где n — число разрядов в газе, а функция $q_i(\xi, t)$ имеет вид при $\xi_i - h_i \leq \xi \leq \xi_i + h_i$:

$$\begin{aligned} q_i &= 0 \text{ при } t < t_i - \tau_i, \\ q_i &= \frac{9r_i}{16\gamma(\gamma-1)\tau_i^3 h_i^3} \left(-\frac{t^3}{3} + t_i t^2 + \tau_i^2 t - t_i^2 t + \frac{t_i^3}{3} - t_i \tau_i^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \tau_i^3 \right) (\xi_i + h_i - \xi)(\xi - \xi_i + h_i) \text{ при } t_i - \tau_i \leq t \leq t_i + \tau_i, \\ q_i &= \frac{3r_i}{4\gamma(\gamma-1)h_i^3} (\xi_i + h_i - \xi)(\xi - \xi_i + h_i) \text{ при } t > t_i + \tau_i. \end{aligned} \quad (6)$$

Если же $\xi > \xi_i + h_i$ или $\xi < \xi_i - h_i$, то $q_i = 0$. В выражении (6) ξ_i и t_i — координаты центра ввода энергии (рис. 1). Энергия вводится по площади прямоугольника $ABCD$, при этом $AB = DC = 2h_i$; $AD = BC = 2\tau_i$. Величина r_i обозначает количество введенной энергии. Если $r_i = 1$, то это означает, что введенная энергия равна всей внутренней энергии газа, заключенного в камере высокого давления в начальный момент времени. Вся введенная безразмерная энергия в рабочий газ равна

$$r = \sum_{i=1}^n r_i.$$

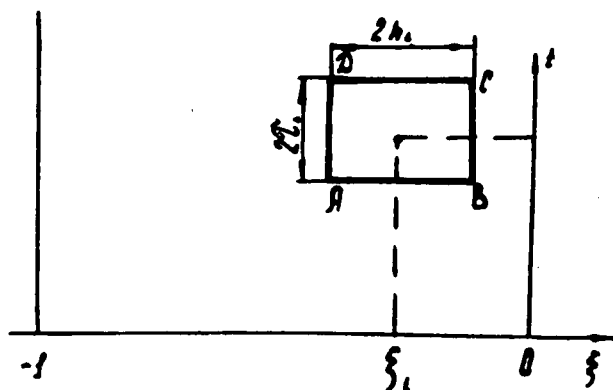


Рис. 1

Рассмотрим течение газа в момент $t = t_j$. Весь промежуток по ξ $[-1, 0]$ разобьем на n интервалов. Границу этих интервалов, согласно [3], обозначим целыми числами (целые точки). Тогда середина каждого интервала будет обозначаться $m + \frac{1}{2}$ (дробная точка). На каждом таком интервале все газодинамические функции представляются постоянными. Тогда в целых точках будет происходить распад произвольного разрыва (рис. 2). При этом скорость газа и давление между линиями разрыва будут постоянными (на контактном разрыве эти газодинамические функции разрыва не имеют). Тогда все газодинамические функции в момент $t_{j+1} = t_j + \tau$, где

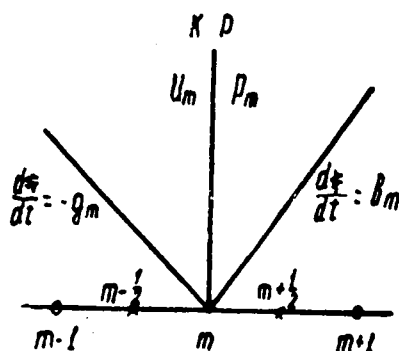


Рис. 2.

$$\tau \leq \frac{h}{\max(g_m, b_m)}, \quad h = \xi_{m+1} - \xi_m,$$

определяются по разностной схеме:

$$\begin{aligned} u^{m+\frac{1}{2}} &= u_{m+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{h} (P_{m+1} - P_m), \\ v^{m+\frac{1}{2}} &= v_{m+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h} (U_{m+1} + U_m), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{pv}{\gamma-1} \right)^{m+\frac{1}{2}} &= \left(\frac{pv}{\gamma-1} \right)_{m+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \{ (u_{m+\frac{1}{2}})^2 - (u^{m+\frac{1}{2}})^2 \} + \\ &+ q^{m+\frac{1}{2}} - q_{m+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{h} (P_{m+1} U_{m+1} - P_m U_m). \end{aligned}$$

Давление на контактной линии разрыва определяется из следующей системы при помощи итераций [3]:

$$\begin{aligned} g_m^{(i-1)} &= \left\{ \frac{(\gamma+1) P_m^{(i-1)} + (\gamma-1) p_{m-\frac{1}{2}}}{2 v_{m-\frac{1}{2}}} \right\}^{1/2} \quad \text{при } P_m^{(i-1)} \geq p_{m-\frac{1}{2}}; \\ g_m^{(i-1)} &= \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left(\frac{\gamma p_{m-\frac{1}{2}}}{v_{m-\frac{1}{2}}} \right)^{1/2} \frac{1 - \frac{P_m^{(i-1)}}{p_{m-\frac{1}{2}}}}{1 - \left(\frac{P_m^{(i-1)}}{p_{m-\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}} \quad \text{при } P_m^{(i-1)} < p_{m-\frac{1}{2}}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} b_m^{(i-1)} &= \left\{ \frac{(\gamma+1) P_m^{(i-1)} + (\gamma-1) p_{m+\frac{1}{2}}}{2 v_{m+\frac{1}{2}}} \right\}^{1/2} \quad \text{при } P_m^{(i-1)} \geq p_{m+\frac{1}{2}}; \\ b_m^{(i-1)} &= \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left(\frac{\gamma p_{m+\frac{1}{2}}}{v_{m+\frac{1}{2}}} \right)^{1/2} \frac{1 - \frac{P_m^{(i-1)}}{p_{m+\frac{1}{2}}}}{1 - \left(\frac{P_m^{(i-1)}}{p_{m+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}, \quad \text{при } P_m^{(i-1)} < p_{m+\frac{1}{2}}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$P_m^{(i)} = \varphi \{ P_m^{(i-1)} \} = \frac{b_m^{(i-1)} p_{m-\frac{1}{2}} + g_m^{(i-1)} p_{m+\frac{1}{2}} + g_m^{(i-1)} b_m^{(i-1)} (u_{m-\frac{1}{2}} - u_{m+\frac{1}{2}})}{g_m^{(i-1)} + b_m^{(i-1)}}. \quad (10)$$

После этого определяется скорость газа на касательном разрыве:

$$U_m = \frac{g_m u_{m-\frac{1}{2}} + b_m u_{m+\frac{1}{2}} + p_{m-\frac{1}{2}} - p_{m+\frac{1}{2}}}{g_m + b_m}. \quad (11)$$

Для расчета точки на неподвижной стенке использовались граничное условие (4) и одно из условий динамической совместности:

$$U_0 = 0.$$

$$P_0^{(i)} = p_{\frac{1}{2}} - b_0^{(i-1)} u_{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

где b_0 определяется формулой (9), полагая там $m=0$ и $P_0^{(0)} = p_{\frac{1}{2}}$.

Расчет точки на поршне производится из совокупности граничного условия (5) и одного из условий динамической совместности:

$$\begin{aligned} U_n &= U_n^{i-1} + \tau \sigma P_n^{i-1}, \\ P_n^{(i)} &= g_n^{(i-1)} (u_{n-\frac{1}{2}} - U_n) + p_{n-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (13).$$

где g_n — определяется формулой (8), полагая там $m=n$ и $P_n^{(0)} = p_{n-\frac{1}{2}}$.

Расчет эйлеровой координаты для целых и дробных точек производится по формуле:

$$x^{j+1} = x^j + \tau w^j. \quad (14)$$

Программа составлена так, что на печать могут выдаваться значения искомых функций с любым шагом по x . В этом случае значения искомых функций получаются путем линейного интерполирования.

Как известно, численное решение классической задачи Лагранжа зависит только от двух параметров — γ и σ . Если же происходит ввод энергии, то численное решение зависит дополнительно еще от нескольких параметров, характеризующих ввод энергии в данной задаче. Даже в простейшем случае, когда происходит единичный ввод энергии по закону (6), появляются дополнительные пять параметров, которые характеризуют величину вводимой энергии, размеры и место расположения области ввода. Если же имеется несколько вводов энергии по закону (6), то, вообще говоря, полученное численное решение будет зависеть дополнительно еще от 5 параметров, где n — число вводов энергии. Чтобы уменьшить число параметров, от которых зависит численное решение, все расчеты были проведены только для $\gamma = 1, 4$ (двухатомный газ) и $\sigma = 1$. Эти исходные данные были выбраны, во-первых, чтобы можно было сравнивать численные расчеты по методу распада произвольного разрыва с результатами, полученными нами ранее [5] методом характеристик. Во-вторых, на практике, как правило, σ принимает значение, в несколько раз превышающее единицу. Для всех этих случаев качественная картина останется без изменения, что касается количественной стороны, то скорость поршня, если условия ввода энергии останутся без изменения, будет возрастать с ростом σ или оставаться без изменения, когда σ будет превышать предельное значение для заданной длины пусковой трубы.

Чтобы получить представление о точности данного метода для задачи Лагранжа, когда происходит ввод энергии, была рассчитана этим методом задача, точное аналитическое решение которой известно [6]:

$$p(\xi, t) = \frac{1}{\gamma} - k\xi + \frac{k}{t^2} \xi^3, \quad k = \frac{\sigma}{\gamma}, \quad (15)$$

$$u(\xi, t) = kt + 4k\xi + 3\frac{k}{t} \xi^2, \quad (16)$$

$$x(\xi, t) = \frac{kt^2}{2} + (1 + 4kt)\xi + 3k \left\{ \frac{7}{6} + \ln t - \ln(-\xi) \right\} \xi^2, \quad (17)$$

$$v(\xi, t) = 1 + 4k(t + \xi) + 6k\xi \{ \ln t - \ln(-\xi) \}. \quad (18)$$

При этом закон ввода энергии для области криволинейного треугольника OAB (рис. 3) задан в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 q(\xi, t) = & \frac{k}{\gamma-1} \left\{ 4t + [3 - 4\gamma kt + 6 \ln t] \xi + [1 - 5\gamma - \right. \\
 & - 6\gamma \ln t] k \xi^2 + [4k(2-\gamma)t + 1] \frac{\xi^3}{t^2} + [7 - 3\gamma + \\
 & \left. + 6 \ln t] \frac{k}{t^2} \xi^4 + 6 \left[-1 + k\gamma\xi - k \frac{\xi^2}{t^2} \right] \xi \ln(-\xi) \right\}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

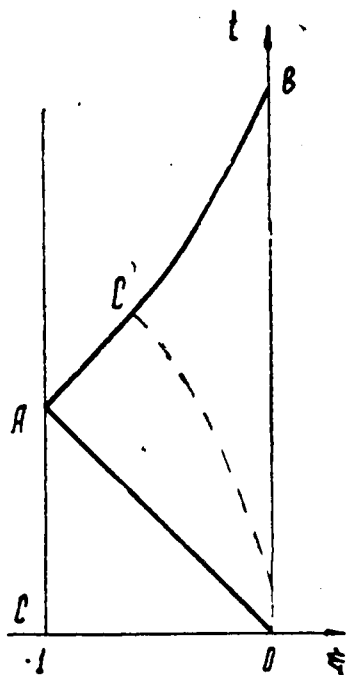


Рис. 3.

В треугольнике OAC $q=0$. Выше характеристики ввод энергии происходил для численного решения также по закону (6). Можно было бы в этой области вводить энергию по любому закону, в частности, положить $q=0$, лишь бы ввод энергии не приводил к образованию таких ударных волн, которые могли бы повлиять на течение в области OAB .

Расчет характеристики AB происходил по схеме:

$$\xi_3^{(n)} = \xi_1 + \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_3^{(n-1)}) \cdot \tau, \quad (20)$$

где α — угловой коэффициент, точное выражение которого определяется соотношением

$$\frac{d\xi}{dt} \left\{ \frac{1 - \gamma k \xi + \gamma \frac{k}{t^2} \xi^3}{1 + 4k(t + \xi) + 6k\xi [\ln t - \ln(-\xi)]} \right\}^{1/2}. \quad (21)$$

Верхний индекс n в (20) обозначает число итераций, которые продолжаются до совпадения четырех значащих цифр. Если $\xi_3^{(n)} > 0$, то расчет прекращается и определяется точка B .

Сравнение численного решения с точным производилось только в криволинейном треугольнике OAB . Результаты численного расчета с точным аналитическим решением сравнивались (15) — (18) через промежуток $\Delta\xi = 0,1$, а по времени на каждом слое — через интервал, приблизительно равный $0,2$ (на печать выдавался первый слой, у которого время превышало $0,2 \cdot k$, где $k = 1, 2, \dots$).

Чтобы упростить изложение, приведем только сравнение численного решения с точным по эйлеровой координате, которая при численном расчете определяется формулой (14), то есть через скорость частицы в каждой точке. Следует заметить, что поведение других газодинамических функций качественно не отличается от поведения эйлеровой координаты.

На рис. 4 показано, как уменьшается относительное отклонение численного решения от точного с ростом времени для эйлеровой координаты, вычисленной на поршне при различном шаге. На графике хорошо видно, как уменьшается отклонение с ростом числа разбиения основного интервала и с ростом времени. На этом же рисунке для разбиения $n=260$ приведена абсолютная погрешность эйлеровой координаты на поршне.

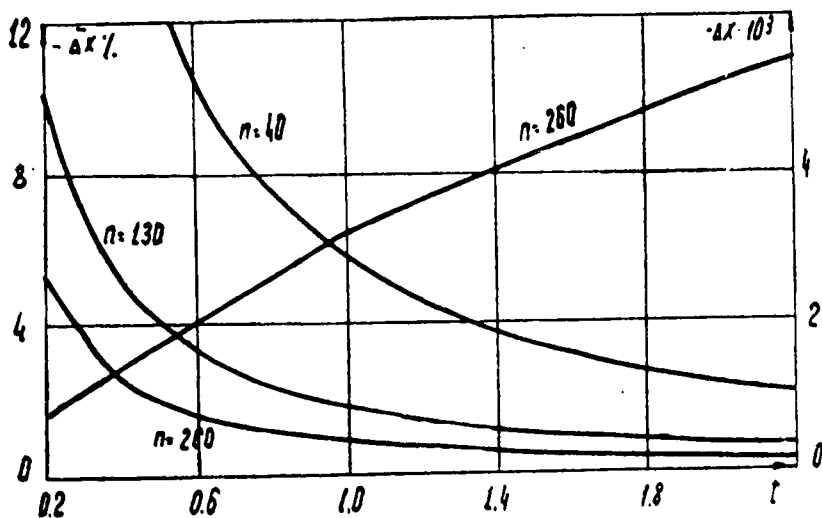


Рис. 4

По методу распада произвольного разрыва были проведены расчеты нескольких примеров, когда производился ввод большого количества энергии (количество введенной энергии равнялось полной энергии рабочего газа в начальный момент времени). В этом случае в области течения происходило образование ударных волн. Об интенсивности ударной волны можно судить по скачкам энтропийной функции и давления на поршне (скачок происходит в результате отражения ударной волны от поршня).

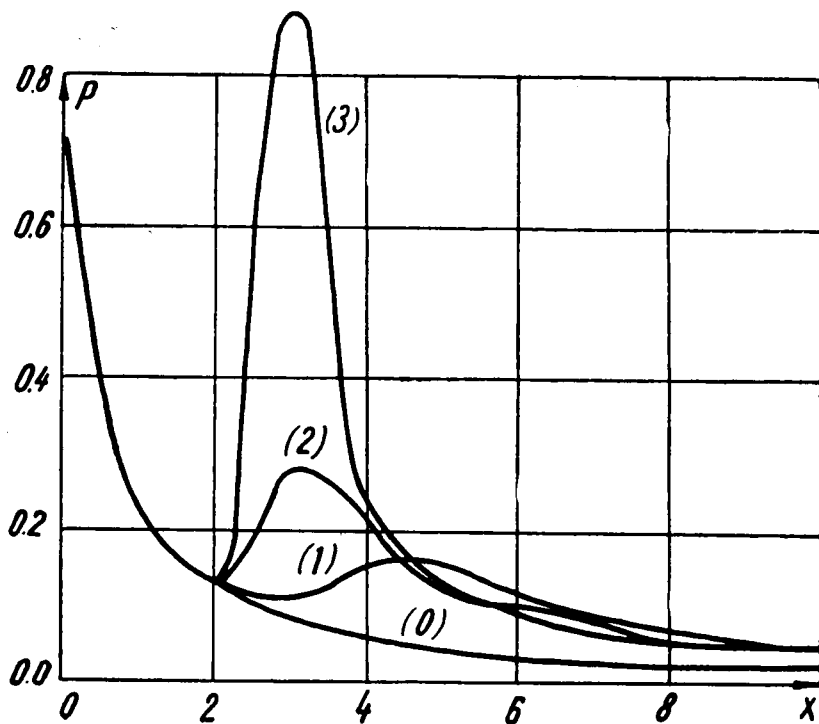


Рис. 5

Первый пример (см. кривые 1 на рис. 5 и 6) соответствует случаю, когда ввод энергии происходил в область всего рабочего газа (центр ввода находился в частице, разделяющей газ на две одинаковые части по массе). Затем центр ввода приближался к поршню, а область ввода уменьшалась. При этом центр ввода все время находился на одной и той же горизонтальной прямой, соответствующей времени, когда поршень проходил сечение пусковой трубы, соответствующее координате $x_0=3$. Кривые 2 на рис. 5 и 6 соответствуют случаю, когда центр

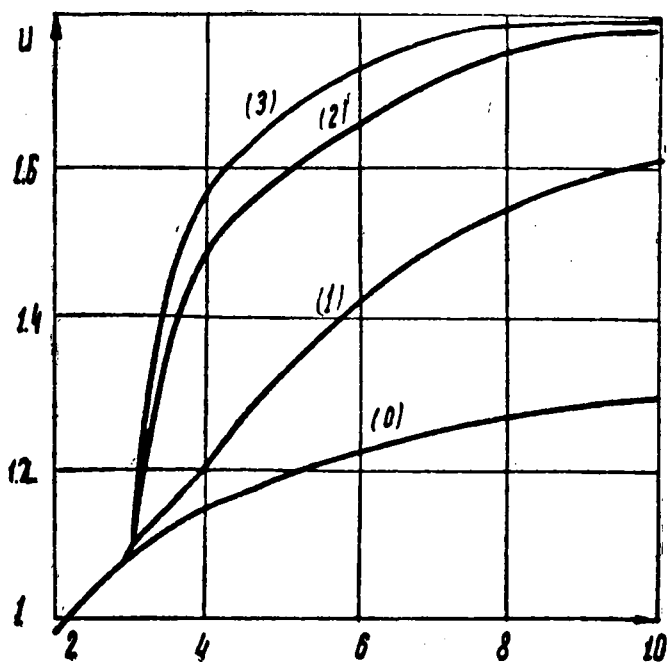


Рис. 6.

ввода приблизился по ξ к поршню в 5 раз. Размеры сторон прямоугольника, по площади которого происходил ввод энергии (см. рис. 1), уменьшились соответственно также в 5 раз. В следующей задаче снова все уменьшили в 5 раз (кривые 3 на рис. 5 и 6). В этом случае наблюдается образование достаточно сильной ударной волны.

Для сравнения на рис. 5 и 6 приведены зависимости давления на поршне и скорость поршня от сечения x для случая, когда отсутствует ввод энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. П. Станюкович. Неустойчивые движения сплошной среды, М., 1955.
2. Н. Н. Попов. Вестник Моск. ун-та, № 3, 1959.
3. С. К. Годунов. Мат. сб., т. 47 (вып. 3), 1959.
4. Л. В. Комаровский. Уч. зап. Томск. ун-та, 68, 1967.
5. С. Л. Губина, Л. В. Комаровский. Наст. сб.
6. Л. В. Комаровский. Труды конф. по проблемам аэрогидромеханики и тепло-массообмена. Киев, 1968.

Поступила 1. III. 1967.

О НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЛАГРАНЖА ДЛЯ КАНАЛА ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ С ВВОДОМ ЭНЕРГИИ

Л. В. КОМАРОВСКИЙ

Одномерные нестационарные течения газа с вводом энергии в приложении к задачам внутренней баллистики были исследованы К. П. Станюковичем [1]. Для частного случая, когда $p = p(t)$, им было получено точное аналитическое решение. Н. Н. Попов распространил этот случай на движение газа по каналу переменного сечения и дал приближенный аналитический метод решения задач с вводом энергии [2, 3]. В работе [4] было дано точное решение одномерного неустановившегося течения газа с вводом энергии по каналу переменного сечения за деформируемым поршнем, движущимся равноускоренно. При этом закон изменения площади поперечного сечения канала мог быть произвольно задан, а закон ввода энергии определялся в результате решения.

В данной работе указан общий путь получения аналитических решений, удовлетворяющих начальным и граничным условиям задачи Лагранжа, то есть задачи о движении деформируемого поршня под действием сжатого газа по бесконечному каналу переменного сечения, когда к рабочему газу может подводиться энергия. Для случая, когда функциональное пространство искомых функций вырождается, а функции, выражающие закон изменения площади поперечного сечения и закон ввода энергии, принадлежат определенному классу функций, решение задачи Лагранжа получается при помощи одних только квадратур. Для некоторых частных законов изменения площади поперечного сечения и ввода энергии получены точные решения в элементарных функциях, что позволяет использовать эти решения для апробирования численных схем, аналогично тому, как это было сделано нами для трубы постоянного сечения [5].

Основную систему уравнений для течения газа по трубе переменного сечения с вводом энергии возьмем из [1], обобщая уравнение неразрывности на случай, когда площадь поперечного сечения зависит не только от сечения, но и от времени. Если обозначить переменную Лагранжа через

$$\xi = \int_{x(0,t)}^{x(\xi,t)} \frac{s}{v} dx, \quad (1)$$

где x — сечение канала (переменная Эйлера), t — время, v — удельный объем, s — площадь поперечного сечения, то основная система уравнений будет иметь вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + s \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - s \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{v}{s} \frac{\partial s}{\partial t}, \quad (3)$$

$$v \frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p \frac{\partial v}{\partial t} = (\gamma - 1) \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (4)$$

где u — скорость газа, p — давление, γ — отношение удельных теплоемкостей.

Рассмотрим частный класс течений, когда функциональное пространство искоемых функций вырождается в кривую [6], то есть

$$u = u(p), \quad v = v(p). \quad (5)$$

Тогда функция, выражающая ввод энергии, как это следует из (4), должна принадлежать следующему классу:

$$q = \frac{1}{\gamma - 1} \Phi(p) + F(\xi), \quad (6)$$

где $\Phi(p)$ и $F(\xi)$ — произвольные функции своих аргументов.

В данной работе ограничимся случаем, когда площадь поперечного сечения выражается через искомые газодинамические функции, то есть, учитывая (5), имеем

$$s = s(p). \quad (7)$$

Тогда из системы (2) — (4) получим:

$$\dot{u} \frac{\partial p}{\partial t} + s \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad (8)$$

$$\left(\dot{v} - \frac{v}{s} \dot{s} \right) \frac{\partial p}{\partial t} - s \dot{u} \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad (9)$$

$$v + \gamma p \dot{v} = \dot{\Phi}, \quad (10)$$

где точка над функцией означает производную по давлению.

Рассмотрим первые два уравнения этой системы отдельно. Условие совместности уравнений (8) и (9) будет

$$\frac{v}{s} \dot{s} - \dot{v} = \dot{u}^2. \quad (11)$$

Интегрируя уравнение (8), получим

$$- \dot{u} \xi + st = f(p), \quad (12)$$

где $f(p)$ — произвольная функция, вид которой определяется из граничных условий конкретной задачи.

Используем полученное течение газа для решения задачи Лагранжа по каналу переменного сечения. Граничное условие на поршне в этом случае будет

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = s(0, t) \cdot p(0, t). \quad (13)$$

Начальные условия будут иметь следующий вид:

$$u(\xi, 0)=0, \quad p(\xi, 0)=\frac{1}{\gamma}, \quad v(\xi, 0)=1, \quad (14)$$

так как за основные единицы измерения приняты удельный объем, скорость звука в начальный момент времени и длина трубы, площадь поперечного сечения которой постоянна и равна площади плоскости соприкосновения поршня с газом в начальный момент времени и которая содержит массу покоящегося газа, равную массе поршня. В силу такого выбора безразмерной единицы длины в граничном условии на поршне (13) отсутствует постоянный множитель, выражающий отношение массы рабочего газа к массе поршня.

Будем считать, что до начала движения газа вся камера высокого давления имеет вид трубы с постоянным сечением, то есть $s=1$, так как все рассматриваем в пересчете на единицу площади поперечного сечения. Следовательно,

$$s\left(\frac{1}{\gamma}\right)=1. \quad (15)$$

Тогда фронт возмущения имеет уравнение

$$\xi+t=0. \quad (16)$$

Сравнивая (12) и (16), получим

$$\dot{u}\left(\frac{1}{\gamma}\right)=-1, \quad \dot{t}\left(\frac{1}{\gamma}\right)=0. \quad (17)$$

Рассматриваемое течение газа должно примыкать к области покоя по фронту возмущения (линия слабого разрыва), следовательно, имеем граничные условия в виде

$$u(-t, t)=0, \quad p(-t, t)=\frac{1}{\gamma}, \quad v(-t, t)=1. \quad (18)$$

Так как все искомые функции между собой связаны функциональной связью (5), то закон движения поршня можно представить в виде:

$$t=\theta(p). \quad (19)$$

Тогда граничное условие на поршне, учитывая, что давление на линии поршня является функцией только времени, будет.

$$\dot{u}[p(0, t)] \frac{dp(0, t)}{dt} = p(0, t) \cdot s[p(0, t)] \quad \text{или} \quad \dot{u} = \dot{\theta} ps. \quad (20)$$

Следовательно, уравнение (11) можно представить еще в виде

$$\dot{v} - \frac{\dot{s}}{s} v = - (ps\dot{\theta})^2. \quad (21)$$

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть заданы закон изменения площади поперечного сечения канала (7) и закон движения поршня (19). Требуется определить закон ввода энергии (6). Решение этой задачи можно получить при помощи одних только квадратур. Действительно, интегрируя уравнение (21), найдем удельный объем

$$v(p) = s(p) \left[1 - \int_{\frac{1}{\gamma}}^p (ps\dot{\theta})^2 dp \right]. \quad (22)$$

Скорость газа получим из соотношения (20)

$$u(p) = \int_{\frac{1}{\gamma}}^p p s \dot{\theta} dp. \quad (23)$$

Из (10) и условия примыкания к области покоя найдем закон ввода энергии:

$$\Phi(p) = \int_{\frac{1}{\gamma}}^p (v + \gamma p \dot{v}) dp, \quad F(\xi) = 0. \quad (24)$$

Таким образом нашли кривую, в которую вырождается функциональное пространство (пространство обобщенного годографа). Чтобы найти течение в физической плоскости, нам нужно определить произвольную функцию в (12) из условия на поршне ($\xi=0$):

$$\dot{f}(p) = s(p) \cdot \Theta(p). \quad (25)$$

Подставляя полученное выражение в (12) и учитывая выражение для производной от скорости по давлению (20), которое будет справедливо не только на линии поршня, а во всей области течения, получим

$$-\dot{\theta} p \xi + t = \theta. \quad (26)$$

Разрешая (26) относительно давления, если это будет возможным, получим $p = p(\xi, t)$. В противном случае эта связь будет задана неявно соотношением (26). Таким образом получили решение рассматриваемой задачи при помощи одних только квадратур через две произвольные функции, одна из которых определяет закон изменения площади поперечного сечения канала, а другая — закон движения поршня.

Так как для апробирования численных методов желательно иметь наиболее простое точное решение, то с этой целью рассмотрим некоторые частные законы движения поршня, для которых давление явно выражается из соотношения (26) через независимые переменные.

При этом заметим, что закон движения поршня, хотя и является произвольной функцией, должен удовлетворять следующим начальным условиям:

$$\theta\left(\frac{1}{\gamma}\right) = 0, \quad \dot{\theta}\left(\frac{1}{\gamma}\right) = -\gamma, \quad (27)$$

из которых первое условие очевидно, а второе — получается из (20), если принять во внимание (14), (15) и (17).

Пусть закон движения поршня будет задан в виде

$$\theta = \delta [(\gamma p)^{-\frac{1}{\delta}} - 1], \quad \delta \neq 0, \quad (28)$$

где δ — произвольная постоянная, остальные две постоянные были выбраны так, чтобы удовлетворить условиям (27). Тогда выражение для давления будет иметь вид

$$p = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\delta - \xi}{\delta + t} \right)^{\delta}. \quad (29)$$

Если закон движения поршня взять в виде

$$\theta = -\ln \gamma p, \quad p \leq \frac{1}{\gamma}, \quad (30)$$

тогда выражение для давления будет

$$p = \frac{1}{\gamma} \exp(-\xi - t). \quad (31)$$

В том случае, когда закон движения поршня берем в виде

$$\theta = \alpha(\gamma p)^2 - (2\alpha + 1)\gamma p + \alpha + 1, \quad (32)$$

то выражение для давления будет иметь вид:

$$p = \frac{1+2\alpha}{2\gamma\alpha} - \frac{1}{\gamma} \left[\left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right)^2 \left(\frac{1+\xi}{1+2\xi}\right)^2 - \frac{\alpha+1-t}{\alpha(1+2\xi)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (33)$$

Для приведенных законов движения поршня можно указать широкий класс функций, выражающих закон изменения площади поперечного сечения канала, при котором можно получить точное решение в элементарных функциях. Особенно простой вид будет иметь решение, если профиль канала для соответствующего закона движения брать, например, в виде

$$s(p) = - \frac{1}{p^{\frac{1}{\delta}}(p)}. \quad (34)$$

Пусть, к примеру, закон движения поршня задан в виде (28), тогда для закона изменения площади поперечного сечения канала вида

$$s = (\gamma p)^{\frac{1}{\delta}} \quad (35)$$

будем иметь следующие простые выражения для удельного объема и скорости газа:

$$v = (\gamma p)^{\frac{1}{\delta}} \left(1 + \frac{1}{\gamma} - p\right), \quad (36)$$

$$u = \frac{1}{\gamma} - p, \quad (37)$$

где давление через независимые переменные выражается формулой (29), где δ — параметр, которому можем придавать любые значения. При этом ввод энергии происходит по закону

$$q = \frac{1}{\gamma^2(\gamma-1)} \left\{ \frac{(\gamma+1)(\gamma+\delta)}{1+\delta} \left[(\gamma p)^{\frac{1}{\delta}+1} - 1 \right] - \frac{\gamma+\delta+\gamma\delta}{1+2\delta} \left[(\gamma p)^{\frac{1}{\delta}+2} - 1 \right] \right\}. \quad (38)$$

Аналогично можно получить решение задачи Лагранжа, когда заданы закон изменения площади поперечного сечения канала (7) и закон ввода энергии (6), а требуется определить движение поршня (19). В этом случае решение получается также при помощи одних только квадратур.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. П. Станюкович. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., 1955.
2. Н. Н. Попов. Вестник Моск. ун-та, № 3, 1953.
3. Н. Н. Попов. Вестник Моск. ун-та, № 2, 1961.
4. Л. В. Комаровский. Наст. сб., стр. 30—33.
5. Л. В. Комаровский, Т. Л. Базилевич. Наст. сб.
6. Н. Н. Яненко. ДАН СССР, т. 109, № 1, 1956.

Поступила 1. III. 1967.

О РЕШЕНИИ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЛАГРАНЖА

Л. В. КОМАРОВСКИЙ

Если в задаче о движении поршня под действием сжатого газа, которую называют задачей Лагранжа [1], зафиксировать давление и температуру в начальный момент времени, то скорость поршня в каком-нибудь фиксированном сечении x_1 будет увеличиваться с увеличением длины камеры высокого давления до величины l_1 , т. е. до тех пор, пока возмущения, отраженные от дна камеры, успевают догнать поршень до сечения x_1 . Увеличение же длины камеры высокого давления сверх l_1 не дает увеличения скорости поршня в фиксированном сечении x_1 . Можно увеличить дополнительно скорость поршня, если взять камеру высокого давления не цилиндрическую, а с некоторым уширением. Увеличивая уширение, мы тем самым будем увеличивать скорость поршня при том же начальном давлении и температуре рабочего газа. Если уширение небольшое, то расчет данной задачи можно провести численно, применяя одномерную аппроксимацию, см., например, [2]. Если же уширение значительно, то при расчете необходимо считать течение газа пространственным нестационарным потоком, что приводит к громоздким вычислениям. В данной работе рассматривается предельный случай этой задачи, когда уширение настолько большое, что течение газа из камеры высокого давления в пусковую трубу можно рассматривать как квазистационарное течение. Таким образом, в работе найдено то предельное значение скорости поршня, которое ограничивает сверху соответствующую скорость поршня в пусковой трубе при любом уширении камеры высокого давления.

Итак, рассмотрим задачу о движении поршня в трубе постоянного сечения. В сечении, которое совпадает с левым торцом поршня в начальный момент времени, пусковая труба сопрягается с камерой достаточно больших размеров, в которой находится неподвижный газ. Справа от поршня — вакуум. Требуется определить движение поршня и газа в пусковой трубе. Так как камера высокого давления достаточно больших размеров, то течение газа в переходной области можно рассматривать как квазистационарное, т. е. до сечения стыковки будет справедлив интеграл Бернулли. Кроме того, естественно предполагается, что в области потока энтропия остается постоянной, т. е. отсутствуют ударные волны. Точно такие же условия получим, если камера высокого давления является цилиндрической, радиус которой достаточно большой (в предельном случае можно рассматривать камеру высокого давления

в виде полупространства). Тогда, применяя одномерную аппроксимацию, записывая законы сохранения для сечения стыковки и переходя к пределу, получим, что закон сохранения энергии дает связь в сечении стыковки между скоростью газа и скоростью звука в виде интеграла Бернулли:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}, \quad (1)$$

где u — скорость газа, a — скорость звука, γ — отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении и объеме, индекс нулик внизу у соответствующей функции означает, что данная величина берется в начальный момент времени, т. е. при $t=0$.

Так как энтропия в потоке газа не меняется, то имеем:

$$p v^\gamma = p_0 v_0^\gamma, \quad (2)$$

где p — давление, v — удельный объем.

Основная система уравнений для одномерного неустановившегося течения газа в пусковой трубе в массовых переменных будет иметь вид [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad (4)$$

где массовая переменная ξ равна:

$$\xi = \int_{x(0,t)}^{x(\xi,t)} \frac{1}{v} dx. \quad (5)$$

В дальнейшем перейдем к безразмерным переменным, которые выбраны так, что уравнения и основные соотношения газовой динамики остаются без изменения. За основные единицы выбраны скорость звука, удельный объем и длина фиктивной цилиндрической камеры, содержащей массу рабочего газа, равную массе поршня; с диаметром, равным диаметру поршня.

В этих безразмерных единицах граничное условие на линии поршня OB ($\xi=0$, см. рис. 1) принимает довольно простой вид

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = p(0, t). \quad (6)$$

Линия стыковки OA с уравнением $x=0$ (ось Ox направлена в сторону движения поршня, начало отсчета совпадает с левой стенкой поршня в начальный момент времени) в плоскости переменных Лагранжа должна удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = - \left(\frac{u}{v} \right)_{OA}, \quad (7)$$

выражающему непрерывность массы газа в сечении стыковки.

Для нахождения течения газа в пусковой трубе воспользуемся сеточным методом характеристик. В этом случае удобно перейти к новым искомым функциям:

$$r = \frac{2}{\gamma-1} a + u, \quad s = \frac{2}{\gamma-1} a - u, \quad (8)$$

которые называют инвариантами Римана [1], так как они сохраняют свое значение вдоль соответствующих характеристик. Газодинамические функции через инварианты Римана выражаются следующим образом:

$$u = \frac{r-s}{2}, \quad v = \left(\frac{4}{\gamma-1} \frac{1}{r+s} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad p = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\gamma-1}{4} (r+s) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \quad (9)$$

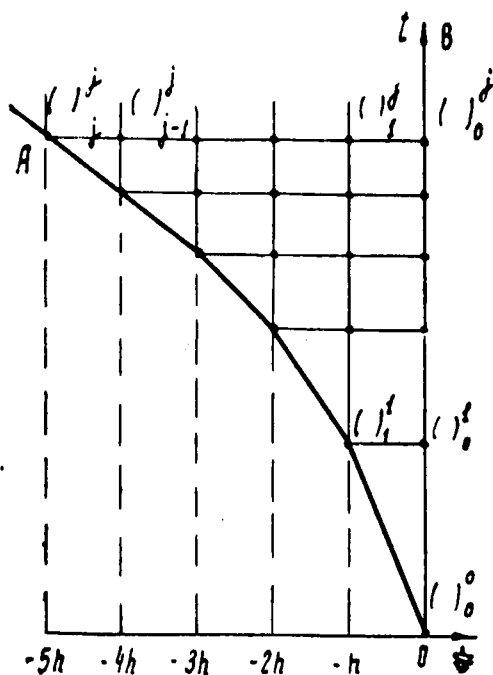


Рис. 1

Выражая граничное условие (1) через инварианты, получим после очевидных преобразований связь между инвариантами на линии OA в виде

$$r = \frac{3-\gamma}{\gamma+1} s + \frac{4}{\gamma+1} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\gamma-1}{2} s^2}. \quad (10)$$

Второй корень квадратного уравнения отбрасывается, так как он не удовлетворяет начальным условиям

$$r_0 = s_0 = \frac{2}{\gamma-1}. \quad (11)$$

Для численного решения рассматриваемой задачи шаг по ξ задаем равным h , выбор его определяется необходимой точностью расчета. Шаг по времени выбирается так, чтобы линия стыковки OA проходила через узлы сетки, т. е.

$$\tau^i = h \left(\frac{v}{u} \right)_i^i \quad (12)$$

Однако, когда $i=0$, то эта формула дает бесконечно большой шаг по времени, так как $u_0^0=0$, поэтому первый шаг по времени вычисляется следующим образом. Из дифференциального уравнения ОА (7) имеем

$$h = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{u}{v} \right)_0^0 + \left(\frac{u}{v} \right)_1^1 \right\} \tau^0. \quad (13)$$

Учитывая, что с точностью до малых первого порядка можно положить:

$$v_1^1 = 1 + \dots, \quad u_1^1 = \frac{\tau^0}{\gamma} + \dots, \quad (14)$$

получим выражение для первого шага по времени

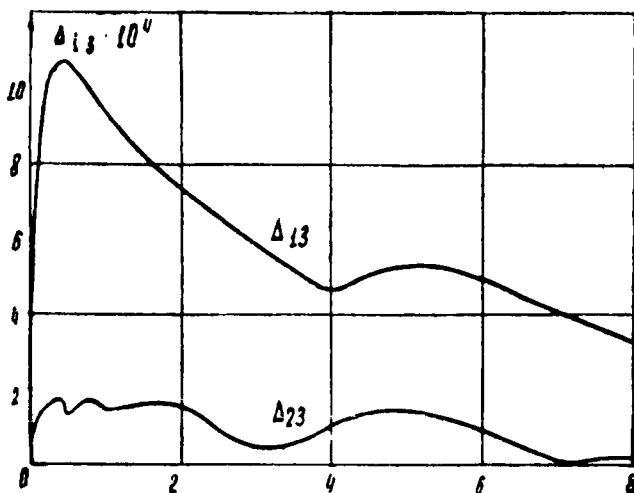


Рис. 2.

$$\tau^0 = (2\gamma h)^{1/2}. \quad (15)$$

Расчет проводится по неявной схеме бегущего счета [3]:

$$s_k^{j+1} = s_k^j + \frac{s_{k+1}^{j+1} - s_k^j}{1 + \frac{h}{\tau^j} \lambda_{k+1}^{j+1}}, \quad (16)$$

$$r_k^{j+1} = r_k^j + \frac{r_{k+1}^{j+1} - r_k^j}{1 + \frac{h}{\tau^j} \lambda_{k+1}^{j+1}}, \quad (17)$$

где $\lambda = \frac{a}{v}$ является угловым коэффициентом характеристик. При первом расчете λ берется из близлежащей точки нижнего слоя, а в дальнейшем при пересчетах в данной точке из предыдущего пересчета. Счет начинается справа (рис. 1), полагая $r_0^{j+1} = r_0^j$ и продолжается до заданной точности в определении искомых функций. Программой был предусмотрен случай возможного достижения критической скорости в сечении стыковки и соответствующая перестройка счета. Однако, как показали расчеты, скорость втока достигает критической только в пре-

деле, когда $x \rightarrow \infty$, или, что равносильно, когда масса поршня стремится к нулю. Программа расчета предусматривала увеличение шага по массовой координате через заданное число слоев, что позволило проводить

расчет практически для неограниченно больших значений времени. В приведенных расчетах было принято, что число интервалов может возрастать до $n=200$, затем происходило увеличение шага в два раза, и снова расчет продолжался $n=200$, и т. д. Пересчет на каждом временном слое продолжался до тех пор, пока не выполнялось неравенство

$$|(r_0^j)^{(k)} - (r_0^j)^{(k-1)}| < 10^{-4}. \quad (18)$$

На рис. 2 приведены результаты сравнения для скорости поршня при трех различных шагах $h_1 = 0,005$, $h_2 = 0,001$ и $h_3 = 0,0001$, где $\Delta_{iz} = u_i - u_z$. В дальнейшем все результаты приведены для случая,

когда шаг по массовой координате равен 0,0001.

На рис. 3 приведены графики зависимости скорости поршня от сечения пусковой трубы для предельной задачи Лагранжа в двух масшта-

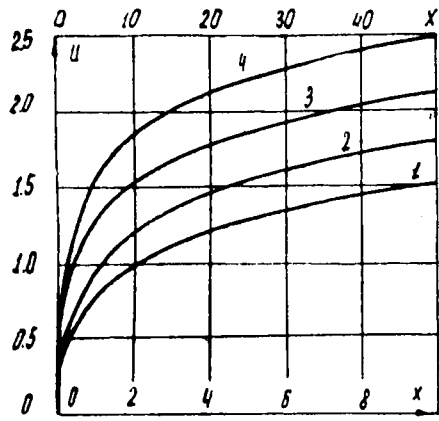


Рис. 3

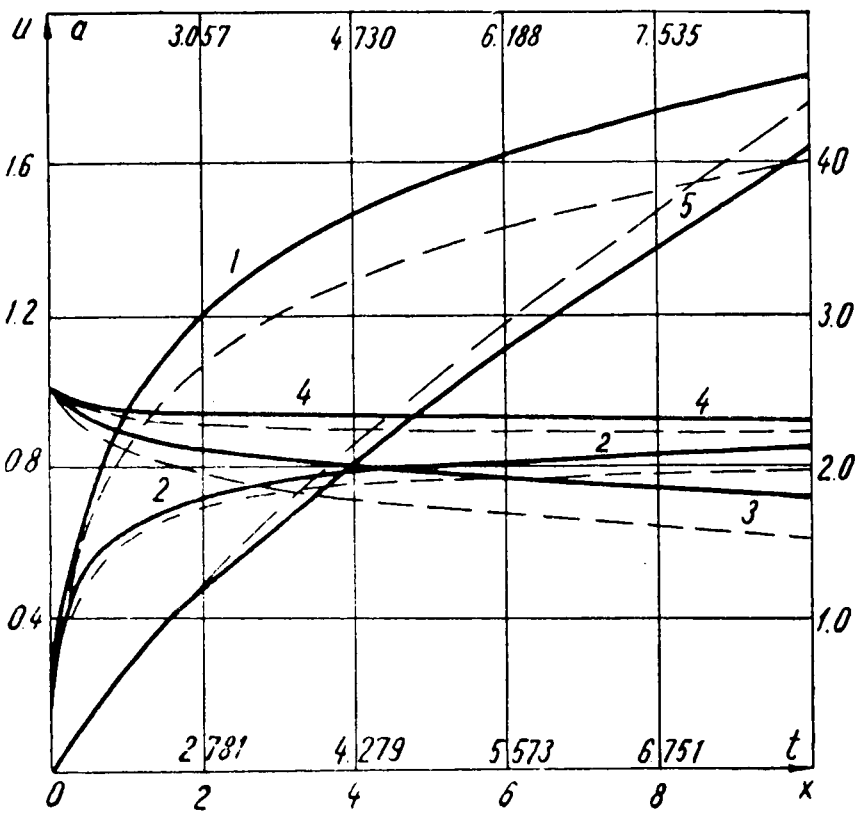


Рис. 4

бах (кривые 2 и 4). Для сравнения на этом же графике приведена та же зависимость для случая, когда уширение отсутствует, т. е. камера является цилиндрической трубой того же диаметра, что и пусковая труба. В этом случае известно точное решение типа простой волны [1], если камера бесконечной длины (на рис. 3 кривые 1 и 3). Эти графики соответствуют случаю, когда $\gamma=1,4$ (двухатомный газ). Как видно из предыдущего изложения, предельная задача зависит только от одного параметра γ .

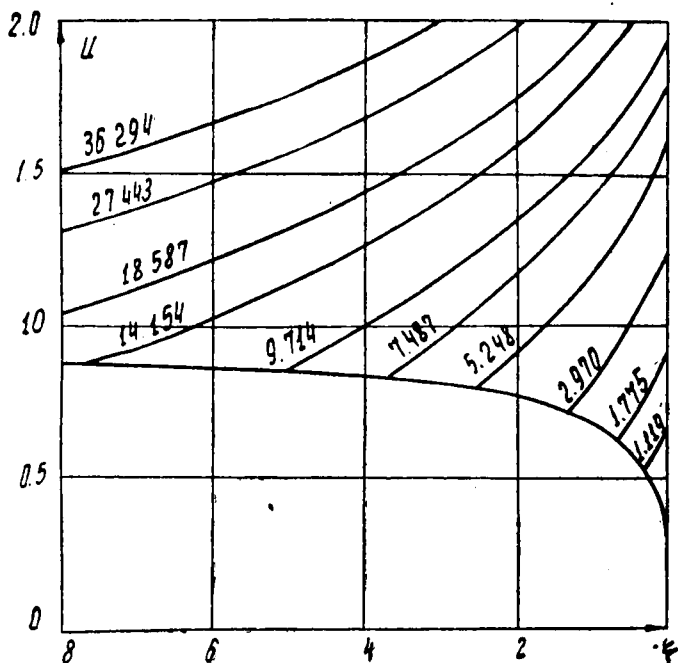


Рис. 5.

На рис. 4 приведены скорость поршня и скорость газа в сечении стыковки (кривые 1 и 2). Кривая 3 изображает поведение скорости звука на поршне, а кривая 4 показывает изменение скорости звука в сечении стыковки. На этом же графике дается зависимость втекающей массы газа от времени (кривая 5). Все эти зависимости даны для двухатомного газа. Соответствующие кривые для одноатомного газа ($\gamma=5/3$) приведены на этом же графике пунктирными линиями. Внизу указано время для двухатомного газа, а сверху — для одноатомного.

На рис. 5 дано распределение скорости по частицам газа в зависимости от времени. На кривых $t=\text{const}$ указано безразмерное время.

На рис. 6 приводится зависимость скорости поршня от сечения для больших x . Следует заметить, что скорость втока газа достигнет критической только в пределе при $x \rightarrow \infty$. В силу выбора безразмерных величин это равносильно случаю, когда масса поршня стремится к нулю, т. е. происходит простое истечение газа в пусковую трубу. Ранее нами было получено аналитическое решение обобщенной задачи Лагранжа [4], которое в частном случае можно использовать для решения предельной задачи Лагранжа, когда начальная скорость поршня больше критической скорости втока газа в пусковую трубу. Здесь сразу же в сечении стыковки устанавливается критическая скорость, возмущения

из пусковой трубы в камеру высокого давления не поступают, и данная задача имеет аналитическое решение, которое получается простым пересчетом из решения [4].

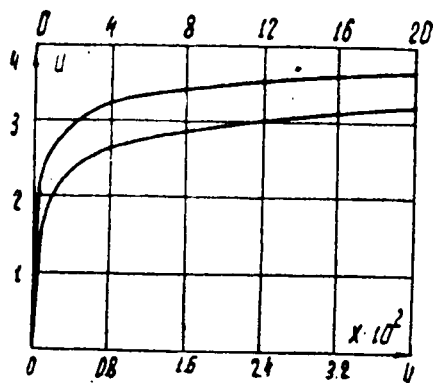


Рис. 6

Расчеты по данной задаче были проведены С. Л. Губиной, за что автор выражает благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. П. Станюкович Неустановившиеся движения сплошной среды, М., 1955.
2. Б. М. Павлов, Н. Н. Попов. Численное решение задачи Лагранжа для канала переменного сечения. Сб. «Численные методы в газовой динамике», МГУ, вып. 4, 1965.
3. Д. Е. Охоцимский, И. Л. Кондрашева, З. П. Власова, Р. К. Казакова. Расчет точечного взрыва с учетом противодействия. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. 50, 1957.
4. Л. В. Комаровский. Об одном из обобщений задачи Лагранжа. Доклады Третьей Сиб. конф. по математике и механике, 1964.

Поступила 1. III. 1967.

ОДИН СЛУЧАЙ ВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ В КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

В. П. ХАРИТОНОВ

Исследованию движения двухфазных сред в каналах постоянного и переменного сечения посвящено значительное число работ [1, 2].

Однако в большинстве из них авторы ограничиваются одномерным случаем, что не позволяет изучить данный вопрос в более широком плане. Кроме того, не рассматривается вопрос о влиянии закрутки потока на параметры течения.

В настоящей работе исследуется случай винтового двухпараметрического течения двухфазной среды в круглой цилиндрической трубе. Задача рассматривается при условиях справедливости уравнений, данных в работе [3], и условия Громеки—Бельтрами [4], наложенном на течение жидкой фазы.

Получено аналитическое решение. Указана возможность теоретического нахождения коэффициента взаимодействия. Определен расход компонент смеси. Рассмотрено распределение компонент по длине и поперечному сечению трубы. Проведено исследование влияния закрутки потока на параметры течения.

1. В работе [3] в дифференциальной форме представлены уравнения неразрывности и движения двухфазных сред в виде:

$$\begin{aligned}\nabla(\rho\bar{u}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} &= 0, \\ \nabla(\rho_d\bar{v}) + \frac{\partial\rho_d}{\partial t} &= 0, \\ (\bar{u}\nabla)\bar{u} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho^0}\nabla p + \frac{\rho_\alpha K_\alpha}{\rho}(\bar{u}-\bar{v}) - \bar{F} &= 0, \\ (\bar{v}\nabla)\bar{v} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_\alpha^0}\nabla p - K_\alpha(\bar{u}-\bar{v}) - \bar{F} &= 0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

выведенные с учетом ряда допущений, оговоренных в этой работе.

Здесь $\bar{u}$, $\bar{v}$ — скорости жидкой и твердой фаз смеси; p — давление; ρ , ρ_α — приведенные плотности; ρ^0 , ρ_α^0 — истинные плотности; K_α — коэффициент взаимодействия фаз смеси; $\bar{F}$, $\bar{F}_\alpha$ — массовые силы. Параметрам твердой фазы придан индекс α . Параметры жидкой фазы без индекса.

Рассмотрим в цилиндрической (x, Θ, y) системе координат установившееся вихревое движение двухфазной среды в круглой цилиндрической трубе. Ось трубы совпадает с осью ox и наклонена к вертикали под углом ε . Учет составляющие силы тяжести фаз смеси только по оси ox . В связи с малым изменением градиента давления в уравнении движения твердой фазы опустим член $\frac{1}{\rho_a^0} \nabla p$ [5]. Будем также считать $\rho^0 = \text{const}$, $\rho_a^0 = \text{const}$, но приведенные плотности — переменными.

Тогда, записывая в проекциях уравнение движения жидкой фазы (1.1) в форме Ламба—Громеки и накладывая условие Громеки—Бельтрами

$$\frac{\Omega_x}{u_x} = \frac{\Omega_y}{u_y} = \frac{\Omega_\theta}{u_\theta} = \frac{\lambda}{2} \quad (1.2)$$

с учетом независимости параметров течения от Θ , получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = g \cos \varepsilon - \frac{1}{\rho^0} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\rho_a K_a}{\rho} (u_x - v_x), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) = - \frac{1}{\rho^0} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\rho_a K_a}{\rho} (u_y - v_y), \quad (1.4)$$

$$\frac{\rho_a K_a}{\rho} (u_\theta - v_\theta) = 0, \quad (1.5)$$

где $\lambda = \text{const}$; u_x, u_y, u_θ — проекции вектора скоростей жидкой фазы; v_x, v_y, v_θ — проекции вектора скорости твердой фазы; $\Omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} \times \frac{\partial}{\partial y} (y v_\theta) \right)$, $\Omega_y = - \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial x}$, $\Omega_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$ — проекции вектора вихря; $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_\theta^2$.

Расписывая условие (1.2), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\theta}{\partial x} &= -\lambda u_y, \quad \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (y u_\theta) = \lambda u_x, \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \lambda u_\theta. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Подставляя u_x и u_y из первых двух равенств в третье, получим

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u_\theta}{\partial y} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{y^2} \right) u_\theta = 0. \quad (1.7)$$

Уравнения неразрывности для каждой из компонент смеси и уравнения движения твердой фазы, с учетом (1.5) и условия $\Theta = \text{const}$, станут

$$u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{u_y}{y} \right) = 0, \quad (1.8)$$

$$v_x \frac{\partial \rho_a}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho_a}{\partial y} + \rho_a \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{v_y}{y} \right) = 0, \quad (1.9)$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = g \cos \varepsilon + K_a (u_x - v_x), \quad (1.10)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{v_\theta^2}{y} = K_a (u_y - v_y) \quad (1.11)$$

$$v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_\theta}{\partial y} + \frac{v_y v_\theta}{y} = 0. \quad (1.12)$$

Учтем еще соотношение [3]

$$\rho = \rho^0 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_0^0} \right). \quad (1.13)$$

Уравнения (1.3) — (1.13) будут составлять основу для описания вихревого течения двухфазной среды при граничных условиях

$$u_0(x, 0) = 0, \quad u_0(x, r) = \frac{C}{r}, \quad (1.14)$$

$$u_0(0, y) = \omega_0 y, \quad (1.15)$$

где $C = \text{const}$; $\omega_0 = \text{const}$; r — постоянный радиус трубы.

Также считаем, что в начальном сечении ($x=0$) известны $\rho_0(y)$, $\rho_0(y)$, $u_{x0} = \text{const}$. Функция $u_0(x, y)$ при $x \rightarrow \infty$ ограничена. Здесь параметрам в начальном сечении придан индекс 0.

2. Основным определяющим уравнением данной задачи является уравнение (1.7), решение которого рассмотрим при граничных условиях (1.14), (1.15).

Приравнявая значение u в точке $(0, r)$, найдем, что $C = \omega_0 r^2$. Введем теперь новую функцию

$$\Phi(x, y) = u_0(x, y) - \omega_0 y \quad (2.1)$$

и подставим ее значение в уравнение (1.7) и в условия (1.14) и (1.15), тогда получим.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{y^2} \right) \Phi = -\omega_0 \lambda^2 y \quad (2.2)$$

$$\Phi(x, 0) = 0, \quad \Phi(x, r) = 0 \quad (2.3)$$

$$\Phi(0, y) = 0. \quad (2.4)$$

При $x \rightarrow \infty$ из условия для u_0 следует, что функция $\Phi(x, y)$ ограничена.

Применяя метод разделения переменных, будем искать решение уравнения (2.2) при граничных условиях (2.3), (2.4) в виде ряда, по предположению допускающего почленное дифференцирование два раза по x и y

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) I_1(\mu_n y), \quad (2.5)$$

где $I_1(\mu_n y)$ — Бесселевы функции первого рода.

Из решения однородного уравнения, полученного из (2.2) отбрасыванием правой части и удовлетворяющего условиям (2.3), имеем, что $\mu_n = \frac{\kappa_n}{r}$ — собственные числа, а $I_1(\mu_n y)$ — соответствующие им собственные функции. Числа $\mu_n = \frac{\kappa_n}{r}$ определяются через корни трансцендентного уравнения

$$I_1(\mu_n r) = I_1(\kappa_n) = 0. \quad (2.6)$$

Подстановка ряда (2.5) в уравнение (2.2) дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_n''(x) - (\mu_n^2 - \lambda^2) \Phi_n(x)] I_1(\mu_n y) = -\omega_0 \lambda^2 y.$$

Разлагая правую часть данного соотношения в ряд Фурье—Бесселя по функциям $I_1(\mu_n y)$ и приравнявая значения коэффициентов при $I_1(\mu_n y)$, получим уравнение для $\Phi_n(x)$.

$$\Phi_n''(x) - (\mu_n^2 - \lambda^2) \Phi_n(x) = \frac{2\omega_0 r \lambda^2}{x_n I_0(x_n)},$$

решение которого имеет вид

$$\Phi_n(x) = A_n e^{\sqrt{\mu_n^2 - \lambda^2} x} + B_n e^{-\sqrt{\mu_n^2 - \lambda^2} x} - \frac{2\omega_0 r \lambda^2}{x_n (\mu_n^2 - \lambda^2) I_0(x_n)}. \quad (2.7)$$

Удовлетворяя условиям (2.4), необходимо положить

$$A_n = 0, \quad B_n = \frac{2\omega_0 r \lambda^2}{x_n (\mu_n^2 - \lambda^2) I_0(x_n)}. \quad (2.8)$$

При этом ряд (2.5), с учетом (2.7), (2.8), запишется

$$\Phi(x, y) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega_0 r \lambda^2 (1 - e^{-\sqrt{\mu_n^2 - \lambda^2} x})}{x_n (\mu_n^2 - \lambda^2) I_0(x_n)} I_1(\mu_n y). \quad (2.9)$$

Тогда общее решение уравнения (1.7), удовлетворяющее граничным условиям (1.14) и (1.15), будет

$$\begin{aligned} u_\theta(x, y) &= \Phi(x, y) + \omega_0 y = \\ &= \omega_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} L_n (e^{-b_n x} - 1) I_1\left(\frac{x_n y}{r}\right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$L_n = \frac{2\omega_0 \lambda^2 r^3}{x_n (x_n^2 - \lambda^2 r^2) I_0(x_n)}, \quad b_n = \frac{\sqrt{x_n^2 - \lambda^2 r^2}}{r};$$

$I_0(x_n)$ — функции Бесселя нулевого порядка.

Легко заметить, что ряд (2.10) в промежутке $0 < x < \infty$ мажорируется абсолютно сходящимся рядом. $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2\omega_0 r^3 \lambda^2}{x_n I_0(x_n) (x_n^2 - \lambda^2 r^2)} \right|$, значит по признаку Вейерштрасса и ряд (2.14) равномерно сходится в этом промежутке. Чтобы u_θ принимало действительные значения, необходимо на λ наложить условие

$$0 < \lambda < \frac{x_1}{r},$$

где x_1 — первый корень уравнения (2.6). Однако это условие не является сильным ограничением и позволяет рассматривать закрученные потоки вплоть до 75° в большом диапазоне радиусов труб.

Из первых двух соотношений (1.6) с учетом (2.10) будем иметь

$$u_x = \frac{2\omega_0}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n L_n}{r} (e^{-b_n x} - 1) I_0\left(\frac{x_n y}{r}\right), \quad (2.11)$$

$$u_y = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} b_n L_n e^{-b_n x} I_1 \left(\frac{x_n y}{r} \right). \quad (2.12)$$

Из соотношения (2.12) видим, что условие непротекания на стенке трубы ($u_y = 0$ при $y=r$) здесь выполняется автоматически.

Плотность жидкой фазы определим из уравнения неразрывности (1.8). При этом, учитывая значения u_x и u_y из соотношений (2.11), (2.12), получим, что

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{u_y}{y} = 0.$$

Тогда уравнение для ρ запишется

$$u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0. \quad (2.13)$$

Составляем вспомогательную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{\alpha \rho}{0}. \quad (2.14)$$

Ее первые интегралы имеют вид

$$\rho = C_1, \quad -\omega_0 y^2 + \sum_{n=1}^{\infty} L_n (1 - e^{-b_n x}) y I_1 \left(\frac{x_n y}{r} \right) = C_2.$$

Интеграл исходного уравнения (2.20) в разрешенном относительно ρ виде будет

$$\rho = f \left[-\omega_0 y^2 + \sum_{n=1}^{\infty} L_n (1 - e^{-b_n x}) y I_1 \left(\frac{x_n y}{r} \right) \right],$$

где f — произвольная дифференцируемая функция.

Решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$\rho = \rho_0(y) \text{ при } x=0,$$

запишется

$$\rho = \rho_0 \sqrt{y^2 - \frac{1}{\omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} L_n (1 - e^{-b_n x}) y I_1 \left(\frac{x_n y}{r} \right)}. \quad (2.15)$$

Из равенства (1.13), учитывая соотношение (2.15), определим плотность твердой фазы ρ_α ,

$$\rho_\alpha = \rho_\alpha^0 - \frac{\rho_\alpha^0}{\rho_0^0} \rho_0 \left(\sqrt{y^2 - \frac{1}{\omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} L_n (1 - e^{-b_n x}) y I_1 \left(\frac{x_n y}{r} \right)} \right). \quad (2.16)$$

Система уравнений (2.14) и соотношение (1.13) показывают, что в данном случае поверхностями тока фаз будут поверхности равных приведенных плотностей.

Принимая во внимание соотношение (1.5), найдем проекции вектора скорости твердой фазы.

При этом из (1.5) имеем

$$v_0 = u_0. \quad (2.17)$$

Выразим теперь v_y из уравнения (1.12) в виде

$$v_y = - \frac{v_x \frac{\partial v_0}{\partial x}}{\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{y} v_0} = \frac{v_x u_y}{u_x} \quad (2.18)$$

и подставим в уравнение (1.10), после чего получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{u_y}{u_x} \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{v_x} [g \cos \varepsilon + K_a (u_x - v_x)]. \quad (2.19)$$

Используя соотношения (2.16) и (2.18), из уравнения неразрывности (1.9) будем иметь

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_x \frac{u_y}{u_x} \right) + v_x \frac{u_y}{y u_x} = 0$$

или

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{u_y}{u_x} \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_x \frac{u_y}{u_x^2} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{v_x}{u_x} \frac{\partial u_y}{\partial y} - v_x \frac{u_y}{y u_x}. \quad (2.20)$$

Приравнивая правые части уравнений (2.19) и (2.20), после простых преобразований получим алгебраическое уравнение для определения v_x :

$$\left(\frac{u_y}{u_x} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{u_y}{y} \right) v_x^2 + K_a u_x v_x - u_x (g \cos \varepsilon + K_a u_x) = 0,$$

откуда

$$v_x = \frac{-K_a u_x + \sqrt{K_a^2 u_x^2 + 4 u_x \left(\frac{u_y}{u_x} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{u_y}{y} \right) (g \cos \varepsilon + K_a u_x)}}{2 \left(\frac{u_y}{u_x} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{u_y}{y} \right)}. \quad (2.21)$$

Перед корнем берем знак $+$, так как $v_x \geq 0$.

Давление p , с учетом (1.3) и (1.4), может быть определено из соотношения

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = \rho^0 \left\{ \left[g \cos \varepsilon - \frac{\rho_a}{\rho} K_a (u_x - v_x) \right] dx + \right. \\ \left. + \left[\frac{\rho_a}{\rho} K_a (u_y - v_y) \right] dy - d \left(\frac{u^2}{2} \right) \right\}$$

или, после некоторых преобразований и интегрирования, найдем

$$p = \rho^0 \left[g x \cos \varepsilon - \frac{u^2}{2} - \int \frac{\rho_a}{\rho} \frac{K_a}{u_x} (u_x - v_x) (u_x dx + u_y dy) \right] + C_3, \quad (2.22)$$

где C_3 — константа интегрирования, которая определяется из условия $p = p_0(y)$ при $x = 0$.

Соотношения (2.10) — (2.12), (2.15) — (2.18), (2.21) — (2.22) определяют все необходимые параметры двухпараметрического вихревого течения двухфазной среды в круглой цилиндрической трубе.

Коэффициент взаимодействия компонент смеси K^a , при данной постановке задачи, может быть определен теоретически из уравнения (1.11) и при необходимости проверен из эксперимента.

Это, вероятно, позволит более широко изучить природу сил взаимодействия компонент смеси, обусловленных вязкостью сред. Конкретное же нахождение K^* в план данной задачи не входит.

Часто необходимо знать изменение массового состава и величины расхода компонент смеси в трубе.

Обозначим через Q и Q_α соответственно объемные расходы сред, тогда

$$Q = \int_0^r \frac{2\pi}{\rho^0} \rho u_x y dy,$$

$$Q_\alpha = \int_0^r \frac{2\pi}{\rho_\alpha^0} \rho_\alpha v_x y dy. \quad (2.23)$$

Общий объемный расход будет

$$Q_* = Q + Q_\alpha = \int_0^r 2\pi \left(\frac{\rho}{\rho^0} u_x + \frac{\rho_\alpha}{\rho_\alpha^0} v_x \right) y dy. \quad (2.24)$$

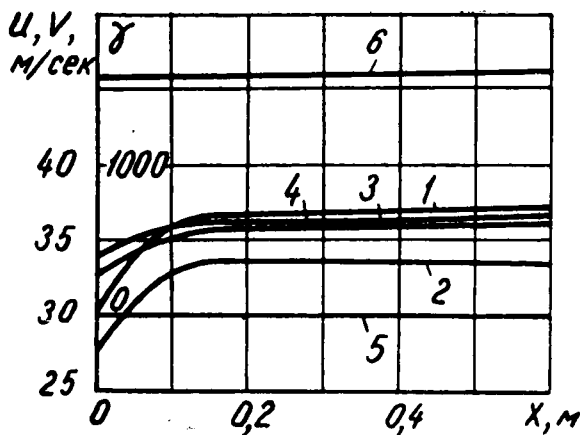


Рис. 1

Изменение массового состава смеси по длине и поперечному сечению трубы можно охарактеризовать величиной

$$\gamma = \frac{\rho_\alpha}{\rho} = \frac{\rho_\alpha^0 (\rho^0 - \rho)}{\rho^0 \rho}. \quad (2.25)$$

Полученные формулы (2.10) — (2.12), (2.17) — (2.18), (2.20) и (2.24) показывают, что при увеличении коэффициента λ скорости компонент и общий расход смеси увеличиваются, а давление, как видно из (2.22), уменьшается. При этом одновременно проявляется более сильная, чем при малых λ , зависимость параметров от переменной x .

Выражения (2.15) — (2.16) показывают, что в зависимости от начальных условий приведенные плотности могут как расти при увеличении λ , так и падать. В зависимости от ρ_α и ρ будет изменяться и массовый состав смеси по длине и поперечному сечению трубы.

Во все приведенные выше формулы, чтобы не загромождать общего текста, не подставлены полученные значения параметров u^2 , u_x , u_y , u_θ , ρ , ρ_α , v_x . Однако это не представит больших затруднений при решении и исследовании конкретных физических задач с использованием данных формул.

3. В качестве примера рассмотрено течение смеси газа и твердых частиц в круглой цилиндрической трубе при начальных данных: $r=14$ см; $\rho_a^0=3,35$ г/см³; $\rho^0=0,0026$ г/см³; $\rho_0(y)=\rho^0-0,01y$; $\mu=0,73 \cdot 10^{-6}$ гсек/см² — вязкость газа; $u_{x_0}=30$ м/сек; $r_a=2,5 \cdot 10^{-4}$ см — радиус частиц; $\gamma_0 = \frac{0,01\rho_a^0 y}{\rho^0(\rho^0-0,01y)}$; $\varepsilon=0^\circ$; $\alpha=30^\circ$ — угол закрутки потока (угол между u_x и u); $\omega_0=116$ 1/сек; $\lambda=7,7$ 1/м.

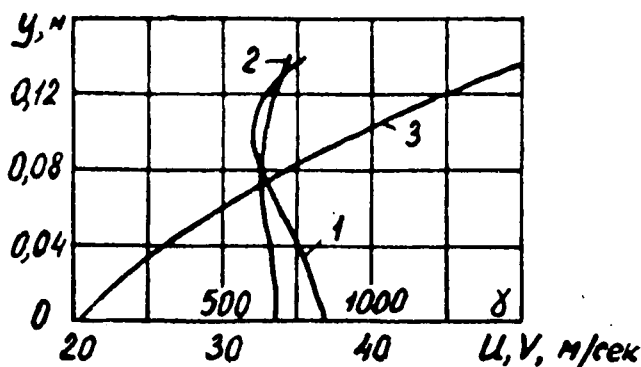


Рис. 2

По полученным формулам были проведены вычисления при достаточно произвольных, но, кажется, достаточно разумных значениях параметров. Некоторые результаты расчетов представлены ниже. На рис. 1 показано изменение скоростей фаз u , v по оси (кривые 1 и 2) и вдоль стенки трубы (кривые 3 и 4), а также изменение массового состава

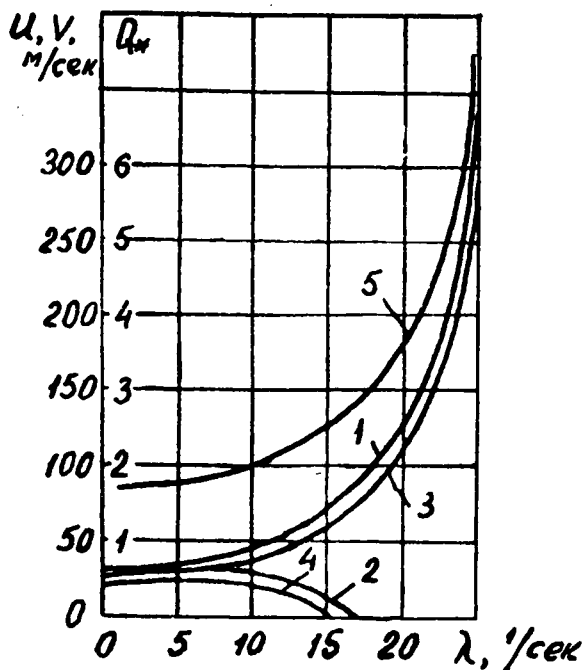


Рис. 3

смеси (кривые 5 и 6). На рис. 2 (при $x=0,4$) показано изменение скоростей фаз смеси u и v по поперечному сечению трубы (кривые 1 и 2) и массового состава смеси (кривая 3). Далее, на рис. 3, при тех же начальных условиях приведены зависимости параметров u_x , v_x , Q_* от λ . Графики 1, 3 показывают изменение u_x и v_x при ($x=0,4$; $y=0$), графики 2, 4 — при ($x=0,4$; $y=r$). Кривая 5 дает изменение Q_* в сечении $x=0,4$.

При всех расчетах здесь бралось два члена ряда. Расчеты изменения давления, скоростей, плотностей сред в продольном и поперечном сечениях с учетом трех и более членов ряда показали, что отличие от предыдущих результатов сравнительно невелико.

В заключение автор благодарит Е. Д. Томилова за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Ф. Файзуллаев. Ламинарное движение многофазных сред в трубопроводах. Изд-во «Фан» Узб. ССР, Ташкент, 1966.
2. Детонация и двухфазное течение. Сб. статей. Перевод с английского, Изд-во «Мир», М., 1966.
3. А. Н. Крайко, Л. Е. Стернин. К теории течений двускоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
4. О. Ф. Васильев. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. Госэнеггоиздат, 1958.
5. I. R. Kliegel, G. R. Nickerson. Calculation of Gas-Particle Flos in Axially Symmetric Nozzles, Space Technology Lab. Rept. 7106—0017—RV—000.

Поступила 1. III. 1967.

О ПРИМЕНЕНИИ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА НЬЮТОНА В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Г. И. КУЗНЕЦОВ, Н. И. ЛУЖАНСКАЯ

Последние годы характеризовались значительным прогрессом в развитии теории оптимизации и в приложении ее результатов к проблеме полета летательных аппаратов. Появление сложных летательных аппаратов различного назначения привело к использованию теории оптимизации на стадии предварительного проектирования и расчета различных маневров.

В настоящее время становится возможным построение общей теории оптимальных систем, включающей как формулировку общих задач, так и методы их решения. В общих чертах основной подход к проблеме оптимизации выглядит следующим образом: а) задать функцию потерь или критерий качества; в) определить динамические характеристики системы; с) выделить некоторые ограничения в виде равенств, наложенные на фазовые характеристики и управляющие функции, либо на те и другие. Тогда цель оптимизации заключается в следующем: при заданных характеристиках системы (в) оптимизировать критерий качества (а) при ограничениях (с).

1. Постановка задачи. Пусть движение регулируемого процесса описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, u_l, t); \quad x_i \in X, \quad u_l \in U, \quad (1.1)$$
$$(i=1, 2, \dots, n; \quad l=1, 2, \dots, r; \quad t_0 \leq t \leq t_k).$$

Здесь x_i — координаты состояния, принадлежащие фазовому пространству X ; u_l — управления, принадлежащие области управления U и определяющие ход управляемого процесса; t — время, t_k — время переходного процесса.

Задача заключается в том, чтобы определить оптимальное значение управления u_l , обеспечивающее достижение экстремального значения функционала (критерия качества)

$$I = \int_{t_0}^{t_k} f_0(x_i, u_i, t) dt \quad (1.2)$$

и удовлетворяющих начальным и граничным условиям

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad (1.3)$$

$$\varphi_p[x_i(t_k), t_k] = 0, \quad p = 1, 2, \dots, m < n. \quad (1.4)$$

2. Решение задачи. Сформулированная выше задача является вариационной задачей и может быть сведена при помощи формализма Л. С. Понтрягина [2] к решению краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого прежде всего запишем сопряженную систему уравнений

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(x_i, u_i, t)}{\partial x_i} \psi_j, \quad (2.1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Введя функцию Гамильтона

$$H = \sum_{j=0}^n \psi_j f_j(x_i, u_i, t), \quad (2.2)$$

задача (1.1) — (1.4) может быть записана в виде двухточечной краевой задачи:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, u_i, t), \quad (2.3)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(x_i, u_i, t)}{\partial x_i} \psi_j, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0, \quad (2.5)$$

$$\left[H - \sum_{j=0}^n \psi_j f_j(x_i, u_i, t) \right] \Big|_{t=t_k} = 0, \quad (2.6)$$

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad (2.7)$$

$$\varphi_p[x_i(t_k), t_k] = 0. \quad (2.8)$$

Граничные условия (2.8) и условия трансверсальности (2.6) удовлетворяются в конечной точке $t = t_k$ и в общем виде могут быть представлены в следующем виде:

$$\Psi_p(x_i, \psi_i, t) \Big|_{t=t_k} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, n+1. \quad (2.9)$$

Учитывая (2.5), двухточечная краевая задача (2.3) — (2.8) в конечном итоге сводится к решению системы $2n$ уравнений при заданных начальных и граничных условиях (2.7), (2.8):

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, \psi_i, t); \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad (2.10)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = g_i(x_i, \psi_i, t).$$

Если время переходного процесса не фиксировано, то оно может быть определено из условия равенства нулю функции переключения L , т. е.

$$L = \Psi_k'(x_i, \psi_i, t) - \Psi_k(x_i, \psi_i, t) = 0. \quad (2.11)$$

$$(1 \leq k \leq n+1)$$

Итак, двухточечная краевая задача (2.9) — (2.11) состоит в подборе начальных условий $\psi_i(t_0)$. Для решения этой задачи можно привлечь следующий итерационный процесс. На каждом шаге процесса точно удовлетворяются уравнения (2.10) и начальные условия (2.7) и выбранные по какому-либо закону значения $\psi_i(t_0)$ и от шага к шагу происходит приближение конечных условий (2.9) к нулю. Основу этого итерационного процесса составляет сведение краевой задачи к задаче Коши с последующим подбором начальных условий по какому-либо закону. Для этого прежде всего введем вспомогательную функцию Q :

$$Q_q = \Psi_q^2(x_i, \psi_i, t), \quad q = 1, 2, \dots, n. \quad (2.12)$$

При оптимальных значениях начальных условий $\psi_i(t_0) = \psi_i(t_0)_{\text{опт}}$ значение функции $Q_q = 0$, при $\psi_i(t_0) \neq \psi_i(t_0)_{\text{опт}} - Q_q > 0$. Таким образом, для решения задачи необходимо подобрать $\Psi_i(t_0)$ так, чтобы невязка Q_q , являющаяся функцией начальных условий, обращалась в нуль

$$Q_q = Q_q[\psi_i(t_0)]. \quad (2.13)$$

Применяя обобщенный метод Ньютона к решению сформулированной выше проблемы, получим следующее соотношение для определения $\Psi_i^{(v)}(t_0)$:

$$\psi_i^{(v)}(t_0) = \psi_i^{(v-1)}(t_0) + \delta\psi_i^{(v)}; \quad (2.14)$$

v — номер итерации. При этом величина $\delta\psi_i^{(v)}$ определяется из решения линейной алгебраической системы уравнений

$$-Q_q^{(v-1)} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial Q_q}{\partial \psi_j(t_0)} \right]^{(v-1)} \delta\psi_j^{(v)}. \quad (2.15)$$

Значение производных $\partial Q_q / \partial \psi_j(t_0)$ согласно (2.12) определим, как

$$\frac{\partial Q_q}{\partial \psi_j(t_0)} = 2\Psi \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Psi_q}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \psi_j(t_0)} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Psi_q}{\partial \psi_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial \psi_j(t_0)} \right]. \quad (2.16)$$

Величину производных $\frac{\partial \psi_j}{\partial \psi_j(t_0)}$, $\frac{\partial x_j}{\partial \psi_j(t_0)}$ можно определить либо путем численного дифференцирования, либо путем интегрирования системы уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial x_k}{\partial \psi_j(t_0)} \right] &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_s} \left[\frac{\partial x_s}{\partial \psi_j(t_0)} \right] + \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial \psi_s} \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial \psi_j(t_0)} \right], \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial \psi_j(t_0)} \right] &= \sum_{s=1}^n \frac{g_k}{\partial x_s} \left[\frac{\partial x_s}{\partial \psi_j(t_0)} \right] + \sum_{s=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial \psi_s} \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial \psi_j(t_0)} \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$(k, j = 1, 2, \dots, n)$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial \psi_j(t_0)} \Big|_{t=t_0} &= 0, \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial \psi_j(t_0)} \Big|_{t=t_0} &= \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq j, \\ 1, & \text{при } k = j. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.18)$$

В качестве критерия сходимости итерационного процесса можно выбрать величину ε , определяемую

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^n Q_j, \quad (2.19)$$

либо ε' , определяемую как

$$\varepsilon' = \frac{\delta \psi_j^{(v)}}{\psi_j^{(v)}(t_0)}. \quad (2.20)$$

Если величина ε или ε' будет меньше наперед заданных величин δ , δ' , то итерационный процесс можно считать законченным. В этом случае выполняются соотношения

$$|\varepsilon - \delta| \leq 0, \quad |\varepsilon' - \delta'| \leq 0, \quad (2.21)$$

а в противном случае итерационный процесс продолжается.

Вычислительный алгоритм решения краевой задачи (2.9) будет заключаться в следующем:

1. Задаем величину $\psi_j^{(0)}(t_0)$ ($j = 1, 2, \dots, n$).
2. Интегрируем систему уравнений (2.10), (2.17) с учетом (2.11).
3. Определяем величину $\delta \psi_j^{(v)}$ из (2.15) — (2.16).
4. Проверяем условие (2.21). Если оно выполняется, то итерационный процесс заканчивается, в противном же случае переходим к пункту 2, определив при этом величину $\psi_j^{(v+1)}(t_0)$ по (2.14).

3. Пример. В качестве примера рассмотрим решение одной задачи динамики, которую сформулируем в следующем виде: найти оптимальную программу изменения угла атаки летательного аппарата, движущегося в центральном гравитационном поле, и обеспечивающую достижение экстремального значения величины конечной скорости (скорости в конце активного участка) при заданных начальных условиях фазовых характеристик и фиксированном времени полета.

Применяя формализм Л. С. Понтрягина [2], приходим к следующей краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{P}{m} \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} - \frac{\mu}{r^2} \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{P}{vm} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} + \left(\frac{v}{r} - \frac{\mu}{vr^2} \right) \cos \theta, \\ \frac{dr}{dt} &= v \sin \theta, \\ \frac{dm}{dt} &= -q, \\ \frac{dl}{dt} &= \frac{v}{r} \cos \theta, \end{aligned}$$

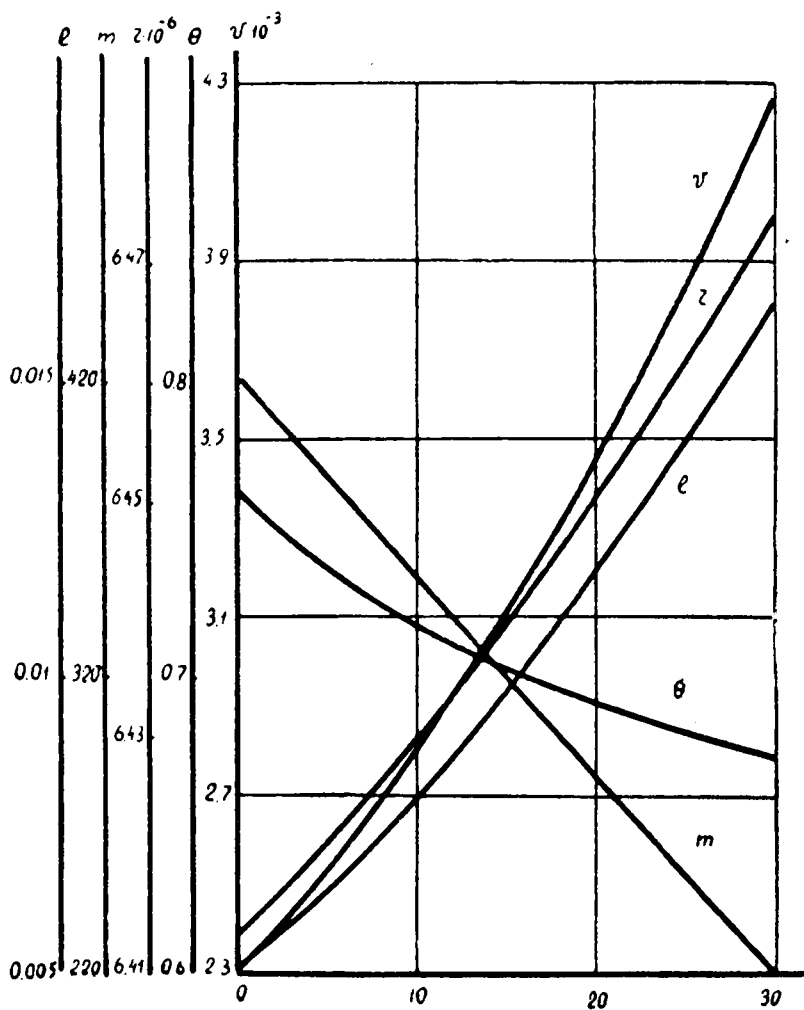


Рис. 1

$$\frac{d\psi_\theta}{dt} = \psi_\theta \left[\frac{P}{v^2 m} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} - \left(\frac{1}{r} + \frac{\mu}{v^2 r^2} \right) \cos \theta \right] - \psi_r \sin \theta - \psi_l \frac{1}{r} \cos \theta, \quad (3.1)$$

$$\frac{d\psi_0}{dt} = \psi_v \frac{\mu}{r^2} \cos \theta + \psi_0 \left[\left(\frac{v}{r} - \frac{\mu}{v r^2} \right) \sin \theta \right] - \psi_r v \cos \theta + \psi_l \frac{v}{r} \sin \theta,$$

$$\frac{d\psi_m}{dt} = \frac{P}{m^2} \left(\frac{\psi_v \gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} + \frac{\psi_0}{v \sqrt{1+\gamma^2}} \right),$$

$$\frac{d\psi_l}{dt} = 0,$$

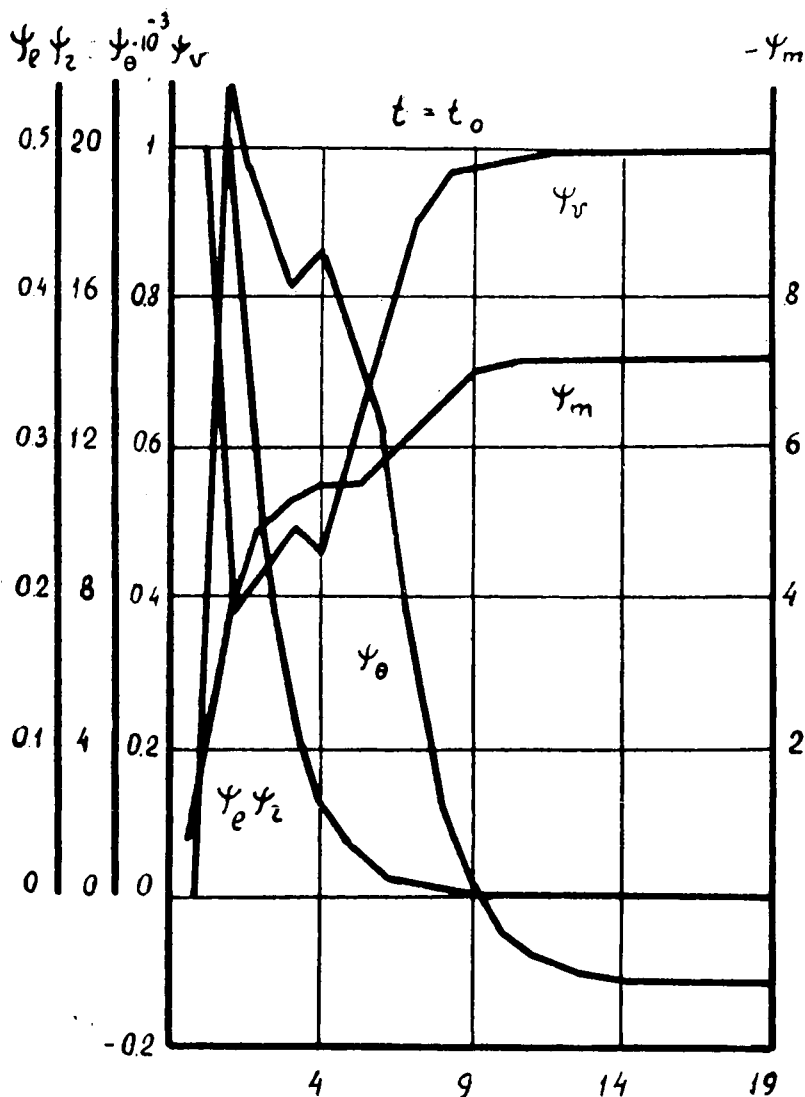


Рис. 2

$$\gamma = v \psi_v / \psi_\theta, \quad \alpha = \arctg \gamma.$$

Начальные условия

$$\begin{aligned} v(t_0) &= v_0, & m(t_0) &= m_0, \\ \theta(t_0) &= \theta_0, \\ r(t_0) &= r_0, & l(t_0) &= l_0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь P , m — тяга двигательной установки и масса летательного аппарата; v — скорость, θ — угол между касательной траектории и местным горизонтом; r — радиус-вектор, исходящий из центра Земли; l — дальность полета; α — угол атаки.

Система (3.1) представляет собой систему 10-ти дифференциальных уравнений с известными 5-ю начальными условиями (3, 2). Для

решения поставленной задачи необходимо определить такие начальные значения $\psi_v(t_0)$, ..., $\psi_l(t_0)$, которые будут удовлетворять условиям трансверсальности (2.6) в конечный момент времени t_k .

$$\begin{aligned}\Psi_v &= \psi_v - 1, \quad \Psi_\theta = \psi_\theta, \\ \Psi_r &= \psi_r, \quad \Psi_m = \psi_m, \quad \Psi_l = \psi_l,\end{aligned}\tag{3.3}$$

соответственно для Q имеем

$$\begin{aligned}Q_v &= (\psi_v - 1)^2, \quad Q_\theta = \psi_\theta^2, \quad Q_r = \psi_r^2, \\ Q_m &= \psi_m^2, \quad Q_l = \psi_l^2.\end{aligned}\tag{3.4}$$

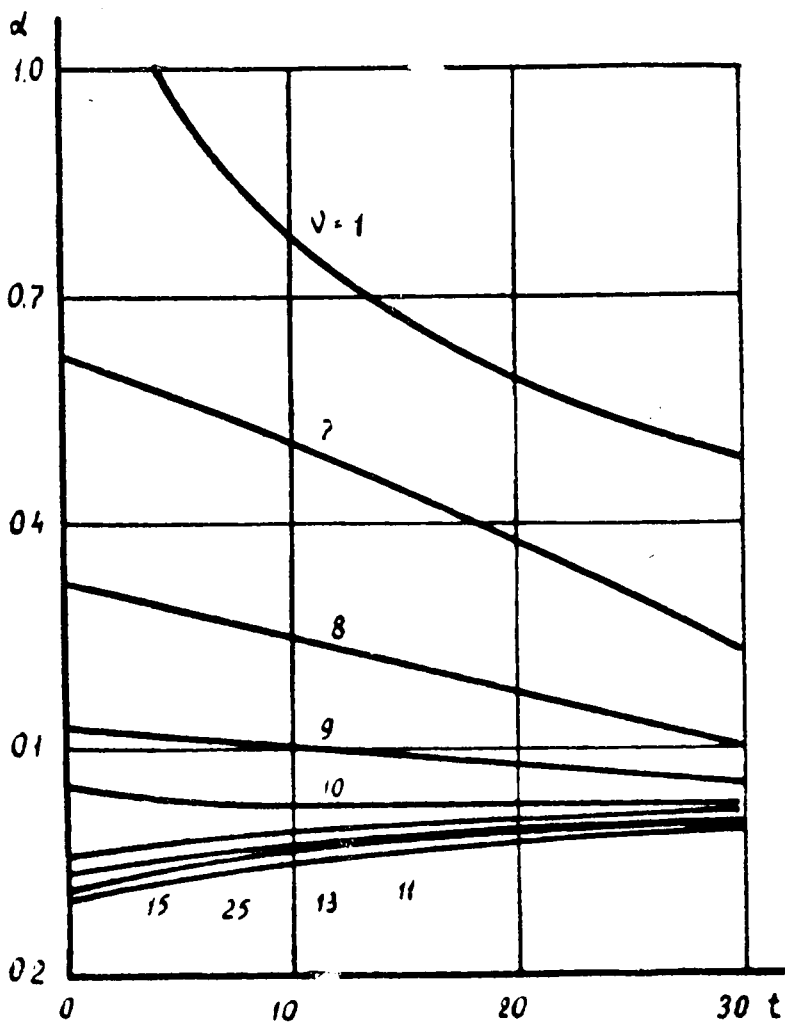


Рис. 3

Система уравнений (2.17) для рассматриваемой задачи будет представлять собой систему 50-ти линейных дифференциальных уравнений. При численной реализации задачи удобно решать совместно эти уравнения с уравнениями (3.1) при начальных условиях (3.2), (2.18) и заданных значениях $\psi_v(t_0)$, ..., $\psi_l(t_0)$. На ЭЦВМ М-20 был просчитан ряд

примеров, в частности, решалась задача, когда в качестве экстремизируемой функции бралась величина конечной скорости, конечной массы, дальности. Во всех случаях в качестве нулевого приближения для недостающих начальных условий $\psi_v(t_0), \dots, \psi_l(t_0)$ выбирались произвольно, равные единице. На рис. 1 приводится значение фазовых характеристик летательного аппарата для 20-ти итераций для $v_{k\max}$. Время счета одной итерации составляет 29 сек. при шаге 0,2 сек. и $t_k = 30$ сек. На рис. 2 приводятся значения начальных значений $\psi_v(t_0), \dots, \psi_l(t_0)$ от номера итерации. Анализ результатов показывает, что для $v=15$ значения $\psi_v(t_0), \dots, \psi_l(t_0)$ принимают почти постоянное значение, а величина критерия сходимости ε убывает почти по экспоненте. Так, для $v=1$, $\varepsilon=0,237127633 \cdot 10^{10}$, для $v=5$, $\varepsilon=0,223236792 \cdot 10^4$, для $v=15$, $\varepsilon=0,900114123 \cdot 10^1$, для $v=20$, $\varepsilon=0,880925505 \cdot 10^{-2}$, для $v=30$, $\varepsilon=0,537738410 \cdot 10^{-8}$. На рис. 3 приведена зависимость оптимального значения угла атаки от времени для различных итераций.

Для случая, когда летательный аппарат состоит из двух-трех ступеней, отделяющихся во время полета, предлагаемый метод также позволяет быстро найти оптимальную программу изменения угла атаки. Критерий сходимости ε ведет себя аналогичным образом.

Итак, предлагаемый метод решения может быть распространен на широкий круг задач динамики летательных аппаратов и обладает сравнительно хорошей сходимостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи математич. наук, т. 3, № 6, 1948.
2. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. Госуд. изд-во физико-математич. литературы, М., 1961.
3. G. Leitmann. Optimization techniques with applications to aerospace systems, Academs PRESS, N. Y., 1962.

Поступила 1. III. 1967.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ДВУХСЛОЙНОМ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ В СЛУЧАЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ ПО ЗАКОНУ $T_c = T_n e^{-\varepsilon \tau} \cdot \cos \omega \tau$

Г. А. БЮЛЕР, **П. С. СОЛОМИН**

Во многих процессах охлаждения или нагревания тех или иных конструкций приходится рассматривать задачи теплопроводности и термоупругости, когда тела помещаются в среду, температура которой изменяется по некоторому закону. Температуру окружающей среды с достаточной степенью точности во многих задачах прикладного характера можно аппроксимировать зависимостью вида

$$T_c = T_n \cdot e^{-\varepsilon \tau} \cdot \cos \omega \tau. \quad (1)$$

Рассмотрим решение задачи теплопроводности, а затем и термоупругости при заданном законе изменения температуры окружающей среды (1) на примере системы двухслойных полых цилиндров.

Дифференциальные уравнения линейной задачи теплопроводности для системы двухслойных цилиндров имеют вид

$$\frac{1}{a_j} \cdot \frac{\partial T_j(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_j(r, \tau)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_j(r, \tau)}{\partial r^2}, \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

Начальные условия

$$T(r, 0) = T_0 = \text{const}, \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=c} &= h_1 [T_c(\tau) - T_1(r, \tau)]_{r=c}, \\ \frac{\partial T_2(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=a} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Условия сопряжения на границе смежных цилиндров

$$\begin{aligned} T_1(r, \tau) \Big|_{r=b} &= T_2(r, \tau) \Big|_{r=b}, \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=b} &= \lambda_2 \frac{\partial T_2(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=b}. \end{aligned} \quad (5)$$

Переходя в (2) - (5) к новым относительным переменным

$$\rho = \frac{r}{c}, \quad t = \frac{\bar{a}_2}{c^2} \tau = F_0, \quad \alpha = \frac{a}{c}, \quad \beta = \frac{b}{c}, \quad \sigma^2 = \frac{\bar{a}_2}{a_1}, \quad (6)$$

получим преобразованную систему уравнений, окончательное решение которой найдено операционным методом в виде

$$T_j(\rho, t) = T_\kappa Re \frac{P_j(\rho, \bar{i}\bar{\omega} - \bar{\varepsilon})}{\Delta_2^0(\bar{i}\bar{\omega} - \bar{\varepsilon})} e^{(\bar{i}\bar{\omega} - \bar{\varepsilon})t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{f}_1(\rho_k) P_j(\rho, \rho_k)}{\Delta_2^{0'}(\rho_k)} e^{\rho_k t}, \quad j=1, 2, \quad (7)$$

где $T_j(\rho, t)$ — текущая температура в j -м слое;

$$\bar{\omega} = \frac{c^2}{a} \omega, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{c^2 \varepsilon}{a}, \quad \rho_k = -q_k^2,$$

$$P_1(\rho, \rho) = Bi_1 [\lambda B_{11}(\beta q, \alpha q) B_{00}(\sigma \rho q, \sigma \beta q) - B_{01}(\sigma \rho q, \sigma \beta q) B_{01}(\beta q, \alpha q)], \quad (8)$$

$$P_2(\rho, \rho) = \frac{2Bi_1}{\pi \sigma \beta q} B_{10}(\alpha q, \rho q),$$

q_k — корни трансцендентного уравнения

$$\Delta_2^0(\rho) = \lambda B_{11} (Bi_1 \bar{B}_{00} - q \sigma \bar{B}_{10}) - B_{01} (Bi_1 \bar{B}_{01} - q \sigma \bar{B}_{11}) = 0, \quad (9)$$

где

$$\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}, \quad Bi_1 = ch_{,1}$$

$$B_{ij}(x, y) = N_i(x) I_j(y) - I_i(x) N_j(y), \quad (10)$$

$$B_{ij} \equiv B_{ij}(\beta q, \alpha q), \quad \bar{B}_{ij} \equiv B_{ij}(\sigma q, \beta \sigma q), \quad (11)$$

$$\bar{f}(p) = \frac{T_\kappa(p + \bar{\varepsilon})}{(p + \bar{\varepsilon})^2 + \bar{\omega}^2} - \frac{T_0}{p},$$

Bi — критерий Био.

Первая группа термоупругих напряжений найдется с помощью функции термоупругого потенциала перемещений Φ , удовлетворяющей основному дифференциальному уравнению

$$\Delta \Phi_j = \frac{d^2 \Phi_j}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\Phi_j}{d\rho} = \frac{1 + \mu_j}{1 - \mu_j} \alpha_j T_j(\rho, t), \quad j=1, 2, \quad (12)$$

μ_j — коэффициент Пуассона j -го слоя,

α_j — коэффициент линейного температурного расширения j -го слоя.

Для нахождения напряжений первой группы по известным формулам [1]

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma}_r)_j &= 2G_j \left(\frac{d^2 \Phi_j}{d\rho^2} - \Delta \Phi_j \right), \\ (\bar{\sigma}_\varphi)_j &= 2G_j \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\Phi_j}{d\rho} - \Delta \Phi_j \right), \\ (\bar{\sigma}_z)_j &= -2G_j \Delta \Phi_j \end{aligned} \quad (13)$$

достаточно найти первую и вторую производные от функции Φ_j . Так как

нас интересует лишь частное решение уравнения (12), то для определения производной $\frac{d\Phi_1}{d\rho}$ в первом слое необходимо взять следующий неопределенный интеграл

$$\frac{d\Phi_1}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \int \rho \frac{1+\mu_1}{1-\mu_1} \alpha_1 T_1(\rho, t) d\rho. \quad (14)$$

Подставляя значение функции $T_1(\rho, t)$ из (7) в (14) и интегрируя по ρ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_1}{d\rho} = \frac{1+\mu_1}{1-\mu_1} \alpha_1 \left[T_{\kappa} Re \frac{\tilde{P}_1(\rho, i\bar{\omega}-\bar{\varepsilon})}{\Delta_2^0(i\bar{\omega}-\bar{\varepsilon})} e^{(i\bar{\omega}-\bar{\varepsilon})t} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{f}_1(\rho_k) \tilde{P}_1(\rho, \rho_k)}{\Delta_2^{0'}(\rho_k)} e^{\rho_k t} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1(\rho, \rho) = Bi_1 \frac{1}{\alpha q} [\lambda B_{11}(\beta q, \alpha q) B_{10}(\alpha \rho q, \beta \rho q) - \\ - B_{01}(\beta q, \alpha q) B_{11}(\alpha \rho q, \beta \rho q)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя формулы (12) и (15), находим напряжения первой группы первого слоя (при $j=1$) по зависимостям (13); при этом нет необходимости в вычислении второй производной.

Поступая аналогичным образом с функцией термоупругого потенциала перемещений Φ_2 для второго слоя, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_2}{d\rho} = \frac{1+\mu_2}{1-\mu_2} \alpha_2 \left[T_{\kappa} Re \frac{\tilde{P}_2(\rho, i\bar{\omega}-\bar{\varepsilon})}{\Delta_2^0(i\bar{\omega}-\bar{\varepsilon})} e^{(i\bar{\omega}-\bar{\varepsilon})t} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{f}_1(\rho_k) \tilde{P}_2(\rho, \rho_k)}{\Delta_2^{0'}(\rho_k)} e^{\rho_k t} \right], \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\tilde{P}_2(\rho, \rho) = \frac{2Bi_1}{\pi \alpha \rho q^2} B_{11}(\alpha q, \rho q). \quad (18)$$

Напряжения первой группы для второго слоя найдутся по формулам (13) (при $j=2$), с учетом зависимостей (17) и (12).

Относительные деформации первой группы определяются по формулам

$$\begin{aligned} (\bar{\varepsilon}_r)_j = \frac{d^2\Phi_j}{d\rho^2} = -\frac{1}{2G_j} (\bar{\sigma}_\varphi)_j, \\ (\bar{\varepsilon}_z)_j = 0, \\ (\bar{\varepsilon}_\varphi)_j = \frac{1}{\rho} \frac{d\Phi_j}{d\rho} = -\frac{1}{2G_j} (\bar{\sigma}_r)_j, \end{aligned} \quad (19)$$

Вторая группа напряжений находится, как известно [2], из решения системы однородных уравнений теории упругости с помощью бигармонической функции напряжений Эри в виде

$$(\bar{\sigma}_r)_j = \frac{1}{\rho} \frac{dF_j}{d\rho}, \quad (\bar{\sigma}_\varphi)_j = \frac{d^2F_j}{d\rho^2}, \quad (\bar{\sigma}_z)_j = \mu_j \Delta F_j, \quad j=1, 2. \quad (20)$$

Функцию напряжений Эри в задачах о плоской деформации можно принять в виде

$$F_j = A_j \ln \rho + B_j \rho^2, \quad j=1, 2. \quad (21)$$

Граничные условия термоупругой задачи имеют вид

$$[(\bar{\sigma}_r)_1 + (\bar{\sigma}_r)_1]_{\rho=1} = 0, \quad (22)$$

$$[(\bar{\sigma}_r)_2 + (\bar{\sigma}_r)_2]_{\rho=\alpha} = 0,$$

как на свободных от нагрузки поверхностях.

Очевидно, на границе двух цилиндрических слоев радиальные перемещения и напряжения должны быть равны. Отсюда имеем условия сопряжения в виде

$$[(\bar{\sigma}_r)_1 + (\bar{\sigma}_r)_1]_{\rho=\beta} = [(\bar{\sigma}_r)_2 + (\bar{\sigma}_r)_2]_{\rho=\beta}, \quad (23)$$

$$[(\bar{\varepsilon}_\varphi)_1 + (\bar{\varepsilon}_\varphi)_1]_{\rho=\beta} = [(\bar{\varepsilon}_\varphi)_2 + (\bar{\varepsilon}_\varphi)_2]_{\rho=\beta}.$$

Итак, для определения четырех постоянных в (21) имеем четыре условия (22) и (23). Выражая напряжения и деформации через функцию Эри F_j , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} A_1 + 2B_1 &= -(\bar{\sigma}_r)_1|_{\rho=1}, \\ A_2 \frac{1}{\alpha^2} + 2B_2 &= -(\bar{\sigma}_r)_2|_{\rho=\alpha}, \\ A_1 \frac{1}{\beta^2} + 2B_1 - A_2 \frac{1}{\beta^2} - 2B_2 &= -[(\bar{\sigma}_r)_1 - (\bar{\sigma}_r)_2]_{\rho=\beta}, \\ -A_1 \frac{1}{\beta^2} + 2(1-2\mu_1) B_1 + \frac{G}{\beta^2} A_2 - 2G(1-2\mu_2) B_2 &= \\ &= [(\bar{\sigma}_r)_1 - G(\bar{\sigma}_r)_2]_{\rho=\beta}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$G = G_1/G_2.$$

Определитель системы (24) отличен от нуля, отсюда имеем

$$\Delta = 4 \left[\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \left(\frac{1}{\beta^2} + 1 - 2\mu_1 \right) - G \left(\frac{1}{\beta^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1-2\mu_2}{\alpha^2} \right) \right]. \quad (25)$$

В силу того, что $\alpha < \beta$ и $\mu \leq 0,5$, первые две круглые скобки в квадратных скобках (25) дадут отрицательное число, а две вторые круглые скобки дадут положительное число. Следовательно, определитель Δ строго меньше нуля. Тогда система неоднородных линейных уравнений (24) имеет отличное от нуля решение. Разрешая систему (23) относительно коэффициентов, получим

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad B_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad A_2 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad B_2 = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \quad (26)$$

где $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ — определители, полученные из определителя системы Δ путем замены соответствующих столбцов свободными членами.

Определив коэффициенты (26), подставив их значения в (21), а затем в формулы (20), найдем напряжения второй группы в первом слое (при $j=1$) и во втором слое (при $j=2$).

Полные температурные напряжения и деформации найдутся, используя принцип суперпозиции, как алгебраическая сумма двух групп решений. В формулах для первой группы напряжений при этом необходимо отделить вещественную и мнимую части. Из полученного решения нетрудно получить, как частный случай, решение задачи теплопроводности и термоупругости в однородной цилиндрической трубке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Мелан, Г. Паркус. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Физматгиз., М., 1959.
2. А. Ляв. Математическая теория упругости. ОНТИ, НКТП, М.—Л., 1935.

Поступила 1. III. 1967.

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ, ПОМЕЩЕННОМ В СРЕДУ, ТЕМПЕРАТУРА КОТОРОЙ ИЗМЕНЯЕТСЯ ПО ЗАКОНУ $T_1 f(\varphi)$

В. С. ЕГОРОВ

Имеем полый круговой цилиндр длины $2l$, внутреннего радиуса — a , внешнего — b . Начальная температура цилиндра

$$T(r, \varphi, z, 0) = \Psi(r, \varphi, z). \quad (1.1)$$

Цилиндр помещается в среду, температура которой изменяется по закону $T_1 f(\varphi)$. Функции $\Psi(r, \varphi, z)$ и $f(\varphi)$ разлагаются в абсолютно и равномерно сходящиеся ряды Фурье по собственным функциям, $T_1 = \text{const}$. Теплоотдача осуществляется по закону Ньютона.

Решая уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах методом Фурье, найдем нестационарное температурное поле в виде

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [A(t) \cos n\varphi + B(t) \sin n\varphi] R(\lambda_{n,m} r) \cos \delta_j z, \quad (1.2)$$

где

$$R(\lambda_{n,m} r) = \frac{\left(h_3 + \frac{n}{a}\right) B_{n,n}(\lambda_{n,m} r, \lambda_{n,m} a) - \lambda_{n,m} B_{n,n+1}(\lambda_{n,m} r, \lambda_{n,m} a)}{\left(h_3 + \frac{n}{a}\right) N_n(\lambda_{n,m} a) - \lambda_{n,m} N_{n+1}(\lambda_{n,m} a)},$$

$$A(t) = \left(\frac{\beta}{\gamma a} + C_{nmj}\right) (e^{-\gamma a t} - 1),$$

$$B(t) = \left(\frac{\beta}{\gamma a} + D_{nmj}\right) (e^{-\gamma a t} - 1),$$

$$\gamma = \delta_j^2 + \lambda_{n,m}^2, \quad \beta = \frac{\kappa a}{2N_{nmj}},$$

$$\kappa = - \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^l \frac{T_1}{r^2} f''(\varphi) (\cos n\varphi + \sin n\varphi) R(\lambda_{n,m} r) \cos \delta_j z \, r dr d\varphi dz,$$

$$C_{nmj} = \frac{\int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^l G(r, \varphi, z) \cos \delta_j z \cos n\varphi \, r dr d\varphi dz}{D_{nmj}},$$

$$D_{nmj} = \frac{\int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^l G(r, \varphi, z) \cos \delta_j z \sin n \varphi r dr d\varphi dz}{N_{nmj}},$$

$$N_{nmj} = \|R(\lambda_{n,m} r) \cos \delta_j z \cos n \varphi\| = \|R(\lambda_{n,m} r) \cos \delta_j z \sin n \varphi\|,$$

$$G(r, \varphi, z) = T_1 f(\varphi) - \psi(r, \varphi, z),$$

$\bar{\alpha}$ — температуропроводность материала.

Основное уравнение для определения термоупругого потенциала перемещений [1] имеет вид

$$\Delta \Phi(r, \varphi, z, t) = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \theta(r, \varphi, z, t),$$

где α — коэффициент теплового расширения, или, подставляя (1.2), получим

$$\Delta \Phi = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \sum_{n,m,j} [A(t) \cos n \varphi + B(t) \sin n \varphi] R(\lambda_{n,m} r) \cos \delta_j z. \quad (1.3)$$

Частное решение этого уравнения можно представить в виде

$$\Phi = -\frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\alpha}{\gamma} \sum_{n,m,j} [A(t) \cos n \varphi + B(t) \sin n \varphi] R(\lambda_{n,m} r) \cos \delta_j z.$$

Напряжения первой группы через функцию Φ запишутся

$$\bar{\sigma}_r = -\frac{E}{1-\mu} \alpha \sum_{n,m,j} \left[\frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 R(\lambda_{n,m} r)}{\partial r^2} + R(\lambda_{n,m} r) \right] \times \\ \times \cos \delta_j z [A(t) \cos n \varphi + B(t) \sin n \varphi],$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \frac{E}{1-\mu} \alpha \sum_{n,m,j} \left[\left(\frac{n^2}{\gamma r^2} - 1 \right) R(\lambda_{n,m} r) - \frac{1}{\gamma r} \frac{\partial R(\lambda_{n,m} r)}{\partial r} \right] \times \\ \times \cos \delta_j z [A(t) \cos n \varphi + B(t) \sin n \varphi],$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{E}{1-\mu} \alpha \sum_{n,m,j} \left(\frac{\delta_j^2}{\gamma} - 1 \right) R(\lambda_{n,m} r) \cos \delta_j z [A(t) \cos n \varphi + B(t) \sin n \varphi],$$

$$\bar{\sigma}_{r\varphi} = -\frac{E}{1-\mu} \frac{\alpha n}{\gamma} \sum_{n,m,j} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial R(\lambda_{n,m} r)}{\partial r} \frac{1}{2r^2} R(\lambda_{n,m} r) \right] \times \\ \times \cos \delta_j z [-A(t) \sin n \varphi + B(t) \cos n \varphi],$$

$$\bar{\sigma}_{rz} = \frac{E}{1-\mu} \frac{\alpha \delta_j}{\gamma} \sum_{n,m,j} \frac{\partial R(\lambda_{n,m} r)}{\partial r} \sin n \varphi [A(t) \cos n \varphi + B(t) \sin n \varphi],$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi z} = \frac{E}{1-\mu} \frac{\alpha n \delta_j}{\gamma} \sum_{n,m,j} R(\lambda_{n,m} r) \sin n \varphi [-A(t) \sin n \varphi + B(t) \cos n \varphi].$$

Решение уравнений теории упругости (решение второй группы) можно построить при помощи функций L и M , причем

$$\Delta \Delta L = 0, \quad (1.4)$$

$$\Delta M = 0, \quad (1.5)$$

Компоненты напряжения, выраженные через функции L и M , имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \frac{2G}{1-2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial M}{\partial r} - \frac{M}{r} \right) \right], \\ \bar{\sigma}_\varphi &= \frac{2G}{1-2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta L - \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial M}{\partial r} - \frac{M}{r} \right) \right], \\ \bar{\sigma}_z &= \frac{2G}{1-2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left((2-\mu) \Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right) \right], \\ \bar{\sigma}_{r\varphi} &= -\frac{2G}{1-2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 M}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \right) \right], \\ \bar{\sigma}_{rz} &= \frac{2G}{1-2\mu} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\mu) \Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi \partial z} \right\}, \\ \bar{\sigma}_{\varphi z} &= \frac{2G}{1-2\mu} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(1-\mu) \Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M}{\partial r \partial z} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Функции L и M впервые ввел в рассмотрение П. С. Соломин.

Для удовлетворения граничных условий по боковым поверхностям

$$\sigma_r, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz} \Big|_{\substack{r=a \\ r=b}} = 0 \quad (1.7)$$

функции L и M удобно выбрать в виде

$$L_1 = \sum_{n,j} [A_{nj} I_n(\delta_j r) + B_{nj} \delta_j r I_{n+1}(\delta_j r) + C_{nj} K_n(\delta_j r) + \\ + D_{nj} \delta_j r K_{n+1}(\delta_j r)] \frac{1}{\delta_j^2} \sin \delta_j z [A(t) \cos n\varphi + B(t) \sin n\varphi],$$

$$M_1 = \sum_{n,j} [E_{nj} I_n(\delta_j r) + F_{nj} K_n(\delta_j r)] \cos \delta_j z [-A(t) \sin n\varphi + B(t) \cos n\varphi],$$

где $I_n(\delta_j r)$, $K_n(\delta_j r)$ — модифицированные функции Бесселя, A_{nj} , B_{nj} , C_{nj} , D_{nj} , E_{nj} , F_{nj} — произвольные постоянные.

Подставляя функции L_1 и M_1 в уравнения (1.6), получим

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r^1 &= \frac{2G}{1-2\mu} \sum_{n,j} [A_{nj} \psi_{A1} + B_{nj} \psi_{B1} + C_{nj} \psi_{C1} + D_{nj} \psi_{D1} + \\ &+ E_{nj} \psi_{E1} + F_{nj} \psi_{F1}] \cos \delta_j z [A(t) \cos n\varphi + B(t) \sin n\varphi], \\ \bar{\sigma}_\varphi^1 &= \frac{2G}{1-2\mu} \sum_{n,j} [A_{nj} \psi_{A2} + B_{nj} \psi_{B2} + C_{nj} \psi_{C2} + D_{nj} \psi_{D2} + E_{nj} \psi_{E2} + \\ &+ F_{nj} \psi_{F1}] \cos \delta_j z [A(t) \cos n\varphi + B(t) \sin n\varphi], \\ \bar{\sigma}_z^1 &= \frac{2G}{1-2\mu} \sum_{n,j} [A_{nj} \psi_{A3} + B_{nj} \psi_{B3} + C_{nj} \psi_{C3} + D_{nj} \psi_{D3}] \times \\ &\times \cos \delta_j z [A(t) \cos n\varphi + B(t) \sin n\varphi], \\ \bar{\sigma}_{r\varphi}^1 &= \frac{2G}{1-2\mu} \sum_{n,j} [A_{nj} \psi_{A4} + B_{nj} \psi_{B4} + C_{nj} \psi_{C4} + D_{nj} \psi_{D4} + E_{nj} \psi_{E4} + \\ &+ F_{nj} \psi_{F4}] \cos \delta_j z [-A(t) \sin n\varphi + B(t) \cos n\varphi], \end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_{rz}^1 = \frac{2G}{1-2\mu} \sum_{n,j} [A_{nj}\psi_{A5} + B_{nj}\psi_{B5} + C_{nj}\psi_{C5} + D_{nj}\psi_{D5} + E_{nj}\psi_{E5} + F_{nj}\psi_{F5}] \sin \delta_j z [A(t) \cos n\varphi + B(t) \sin n\varphi],$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi z}^1 = \frac{2G}{1-2\mu} \sum_{n,j} [A_{nj}\psi_{A6} + B_{nj}\psi_{B6} + C_{nj}\psi_{C6} + D_{nj}\psi_{D6} + E_{nj}\psi_{E6} + F_{nj}\psi_{F6}] \sin \delta_j z [-A(t) \sin n\varphi + B(t) \cos n\varphi],$$

где $\psi = \psi(\delta_j, r)$ — функции, полученные при дифференцировании функций L, M и подстановке их в уравнения (1.6), например,

$$\psi_{A1} = -\frac{1}{r} I_{n+1}(\delta_j r) + \frac{\delta_j^2 r^2 + (n-1)n}{\delta_j r^2} I_n(\delta_j r).$$

Записывая полное напряжение в виде

$$\sigma = \bar{\sigma} + \bar{\sigma}^1$$

и используя граничные условия (1.7), получим систему шести алгебраических линейных неоднородных уравнений относительно шести произвольных постоянных $A_{nj}, B_{nj}, C_{nj}, D_{nj}, E_{nj}, F_{nj}$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_r^1 \Big|_{\substack{r=a \\ r=b}} &= -\bar{\sigma}_r \Big|_{\substack{r=a \\ r=b}} \\ \bar{\sigma}_{r\varphi}^1 \Big|_{\substack{r=a \\ r=b}} &= -\bar{\sigma}_{r\varphi} \Big|_{\substack{r=a \\ r=b}} \\ \bar{\sigma}_{rz}^1 \Big|_{\substack{r=a \\ r=b}} &= -\bar{\sigma}_{rz} \Big|_{\substack{r=a \\ r=b}} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Произвольные постоянные из полученной системы определяются единственным образом.

Для удовлетворения граничных условий на торцах

$$\sigma_z, \sigma_{rz}, \sigma_{\varphi z} \Big|_{z=\pm l} = 0, \quad (1.9)$$

функции L и M выберем следующим образом:

$$L_2 = [P_{12} I_n(\bar{\lambda} r) + P_{22} \bar{\lambda} r I_{n+1}(\bar{\lambda} r) + P_{32} N_n(\bar{\lambda} r) + P_{42} \bar{\lambda} r N_{n+1}(\bar{\lambda} r)] \times \\ \times \frac{1}{\bar{\lambda}^2} (q_{12} \operatorname{ch} \bar{\lambda} z \cos n\varphi + q_{22} \operatorname{ch} \bar{\lambda} z \sin n\varphi + q_{32} \operatorname{sh} \bar{\lambda} z \cos n\varphi + q_{42} \operatorname{sh} \bar{\lambda} z \sin n\varphi),$$

$$M_2 = [P_{52} I_n(\bar{\lambda} r) + P_{62} N_n(\bar{\lambda} r)] (q_{12} \operatorname{sh} \bar{\lambda} z \sin n\varphi - q_{22} \operatorname{sh} \bar{\lambda} z \cos n\varphi + \\ + q_{32} \operatorname{ch} \bar{\lambda} z \sin n\varphi - q_{42} \operatorname{ch} \bar{\lambda} z \cos n\varphi),$$

где $I_n(\bar{\lambda} r), N_n(\bar{\lambda} r)$ — функции Бесселя соответственно первого и второго рода, $\bar{\lambda}$ — число, подлежащее определению, P_{k2} и q_{k2} — произвольные постоянные.

По формулам (1.6) находим компоненты напряжения

$$\bar{\sigma}_r^2 = \frac{2G}{1-2\mu} [P_{12} f_{11} + P_{22} f_{21} + P_{32} f_{31} + P_{42} f_{41} + P_{52} f_{51} + P_{62} f_{61}] \times \\ \times (q_{12} \operatorname{sh} \bar{\lambda} z \cos n\varphi + q_{22} \operatorname{sh} \bar{\lambda} z \sin n\varphi + q_{32} \operatorname{ch} \bar{\lambda} z \cos n\varphi + \operatorname{ch} \bar{\lambda} z \sin n\varphi),$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi}^2 = \frac{2G}{1-2\mu} [P_{12}f_{12} + P_{22}f_{22} + P_{32}f_{32} + P_{42}f_{42} + P_{52}f_{52} + P_{62}f_{62}] \times$$

$$\times (q_{12} \text{sh} \bar{\lambda} z \cos n\varphi + q_{22} \text{sh} \bar{\lambda} z \sin n\varphi + q_{32} \text{ch} \bar{\lambda} z \cos n\varphi + \text{ch} \bar{\lambda} z \sin n\varphi),$$

$$\bar{\sigma}_z^2 = \frac{2G}{1-2\mu} [P_{12}f_{13} + P_{22}f_{23} + P_{32}f_{33} + P_{42}f_{43}] (q_{12} \text{sh} \bar{\lambda} z \cos n\varphi +$$

$$+ q_{22} \text{sh} \bar{\lambda} z \sin n\varphi + q_{32} \text{ch} \bar{\lambda} z \cos n\varphi + \text{ch} \bar{\lambda} z \sin n\varphi),$$

$$\bar{\sigma}_{r\varphi}^2 = \frac{2G}{1-2\mu} [P_{12}f_{14} + P_{22}f_{24} + P_{32}f_{34} + P_{42}f_{44} + P_{52}f_{54} + P_{62}f_{64}] \times$$

$$\times (q_{12} \text{sh} \bar{\lambda} z \sin n\varphi - q_{22} \text{sh} \bar{\lambda} z \cos n\varphi + q_{32} \text{ch} \bar{\lambda} z \sin n\varphi - q_{42} \text{ch} \bar{\lambda} z \cos n\varphi),$$

$$\bar{\sigma}_{rz}^2 = \frac{2G}{1-2\mu} [P_{12}f_{15} + P_{22}f_{25} + P_{32}f_{35} + P_{42}f_{45} + P_{52}f_{55} + P_{62}f_{65}] \times$$

$$\times (q_{12} \text{ch} \bar{\lambda} z \cos n\varphi + q_{22} \text{ch} \bar{\lambda} z \sin n\varphi + q_{32} \text{sh} \bar{\lambda} z \cos n\varphi + q_{42} \text{sh} \bar{\lambda} z \sin n\varphi),$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi z}^2 = \frac{2G}{1-2\mu} [P_{12}f_{16} + P_{22}f_{26} + P_{32}f_{36} + P_{42}f_{46} + P_{52}f_{56} + P_{62}f_{66}] \times$$

$$\times (q_{12} \text{ch} \bar{\lambda} z \sin n\varphi - q_{22} \text{ch} \bar{\lambda} z \cos n\varphi + q_{32} \text{sh} \bar{\lambda} z \sin n\varphi - q_{42} \text{sh} \bar{\lambda} z \cos n\varphi),$$

где $f = f(\bar{\lambda}r)$ — функции получают подобно функциям ψ , например,

$$f_{11} = (1-2\mu) \left[\frac{1}{r} I_{n+1}(\bar{\lambda}r) + \left(\frac{n^2}{\bar{\lambda}r^2} - \bar{\lambda} \right) I_n(\bar{\lambda}r) \right].$$

Напряжение $\sigma = \bar{\sigma} + \bar{\sigma}^1$ на боковых поверхностях удовлетворяет граничным условиям. Следовательно, если полное напряжение записать в виде $\sigma = \bar{\sigma} + \bar{\sigma}^1 + \bar{\sigma}^2$, то для выполнения условий (1.7) необходимо

$$\bar{\sigma}^2 = 0, \text{ при } r=a, \quad r=b$$

или

$$\bar{\sigma}_r^2 \Big|_{r=a} = 0, \quad \bar{\sigma}_{r\varphi}^2 \Big|_{r=a} = 0, \quad \bar{\sigma}_{rz}^2 \Big|_{r=a} = 0.$$

Учитывая, что в выражениях для $\bar{\sigma}^2$ множители, стоящие за квадратными скобками, не равны нулю, получим систему шести алгебраических однородных уравнений относительно шести постоянных P_{k2} , $k=1, 2, \dots, 6$. Приравнявая нулю определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных P_{k2} , получим

$$\begin{vmatrix} f_{11}(\bar{\lambda}a) & f_{21}(\bar{\lambda}a) & \dots & f_{61}(\bar{\lambda}a) \\ f_{12}(\bar{\lambda}b) & f_{22}(\bar{\lambda}b) & \dots & f_{62}(\bar{\lambda}b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{16}(\bar{\lambda}b) & f_{26}(\bar{\lambda}b) & \dots & f_{66}(\bar{\lambda}b) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.10)$$

Трансцендентное уравнение (1.10) определяет бесчисленное множество корней λ_s ($s=1, 2, \dots$).

Известно, что если определитель системы n однородных алгебраических уравнений с n неизвестными равен нулю, то, по крайней мере, одно

из уравнений является следствием других. Тогда неизвестные P_{k2} можно выразить через одно какое-либо неизвестное и отношение соответствующих адъюнкт.

Подставляя найденные таким способом λ_s и P_{k2} в выражения $\bar{\sigma}_z^2$, $\bar{\sigma}_{rz}^2$, $\bar{\sigma}_{\varphi z}^2$, получим четыре произвольные постоянные

$$\kappa_{12}=P_{12}q_{12}, \quad \kappa_{22}=P_{12}q_{22}, \quad \kappa_{32}=P_{12}q_{32}, \quad \kappa_{42}=P_{12}q_{42}.$$

Для удовлетворения граничных условий на торцах (1.9) нужно иметь шесть произвольных постоянных. Поэтому введем в рассмотрение еще две вспомогательные функции вида

$$L_3=[P_{13}I_n(\bar{k}r)+P_{23}\bar{k}rI_{n+1}(\bar{k}r)+P_{33}K_n(\bar{k}r)+P_{43}\bar{k}rK_{n+1}(\bar{k}r)]\times \\ \times \frac{1}{k^2}(q_{13}\cos\bar{k}z\cos n\varphi+q_{23}\cos\bar{k}z\sin n\varphi),$$

$$M_3=[P_{53}I_n(\bar{k}r)+P_{63}K_n(\bar{k}r)](q_{13}\sin\bar{k}z\sin n\varphi-q_{23}\sin\bar{k}z\cos n\varphi),$$

где $\bar{k}$ — числа, подлежащие определению; P_{k3} , q_{k3} — произвольные постоянные.

По формулам (1.6) находим компоненты напряжения

$$\bar{\sigma}_r^3=-\frac{2G}{1-2\mu}[P_{13}\bar{\Psi}_{11}+P_{23}\bar{\Psi}_{21}+P_{33}\bar{\Psi}_{31}+P_{43}\bar{\Psi}_{41}+P_{53}\bar{\Psi}_{51}+P_{63}\bar{\Psi}_{61}]\times \\ \times (q_{13}\sin\bar{k}z\cos n\varphi+q_{23}\sin\bar{k}z\sin n\varphi),$$

$$\bar{\sigma}_\varphi^3=-\frac{2G}{1-2\mu}[P_{13}\bar{\Psi}_{12}+P_{23}\bar{\Psi}_{22}+P_{33}\bar{\Psi}_{32}+P_{43}\bar{\Psi}_{42}+P_{53}\bar{\Psi}_{52}+P_{63}\bar{\Psi}_{62}]\times \\ \times (q_{13}\sin\bar{k}z\cos n\varphi+q_{23}\sin\bar{k}z\sin n\varphi),$$

$$\bar{\sigma}_z^3=-\frac{2G}{1-2\mu}[P_{13}\bar{\Psi}_{13}+P_{23}\bar{\Psi}_{23}+P_{33}\bar{\Psi}_{33}+P_{43}\bar{\Psi}_{43}]\times \\ \times (q_{13}\sin\bar{k}z\cos n\varphi+q_{23}\sin\bar{k}z\sin n\varphi),$$

$$\bar{\sigma}_{r\varphi}^3=-\frac{2G}{1-2\mu}[P_{13}\bar{\Psi}_{14}+P_{23}\bar{\Psi}_{24}+P_{33}\bar{\Psi}_{34}+P_{43}\bar{\Psi}_{44}+P_{53}\bar{\Psi}_{54}+P_{63}\bar{\Psi}_{64}]\times \\ \times (q_{13}\sin\bar{k}z\sin n\varphi-q_{23}\sin\bar{k}z\cos n\varphi),$$

$$\bar{\sigma}_{rz}^3=\frac{2G}{1-2\mu}[P_{13}\bar{\Psi}_{15}+P_{23}\bar{\Psi}_{25}+P_{33}\bar{\Psi}_{35}+P_{43}\bar{\Psi}_{45}+P_{53}\bar{\Psi}_{55}+P_{63}\bar{\Psi}_{65}]\times \\ \times (q_{13}\cos\bar{k}z\sin n\varphi-\cos\bar{k}z\cos n\varphi),$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi z}^3=-\frac{2G}{1-2\mu}[P_{13}\bar{\Psi}_{16}+P_{23}\bar{\Psi}_{26}+P_{33}\bar{\Psi}_{36}+P_{43}\bar{\Psi}_{46}+P_{53}\bar{\Psi}_{56}+P_{63}\bar{\Psi}_{66}]\times \\ \times (q_{13}\cos\bar{k}z\sin n\varphi-q_{23}\cos\bar{k}z\cos n\varphi),$$

где $\bar{\Psi}=\Psi(\bar{k}r)$.

Представляя полное напряжение в виде

$$\sigma=\bar{\sigma}+\bar{\sigma}^1+\bar{\sigma}^2+\bar{\sigma}^3, \quad (1.11)$$

потребуем, чтобы $\sigma^3=0$, при $r=a$, $r=b$. Как и в случае функций L_2 и M_2 , получим систему шести однородных алгебраических уравнений относительно шести произвольных постоянных P_{k3} . Постоянные P_{k3} и числа $\bar{k}_s$ определяются аналогично постоянным P_{k2} и числам $\bar{\lambda}_s$.

Тогда в выражениях $\bar{\sigma}_z^3$, $\bar{\sigma}_{rz}^3$, $\bar{\sigma}_{\varphi z}^3$ остаются две произвольные постоянные $x_{52}=P_{13}q_{13}$, $x_{62}=P_{13}q_{23}$, а суммарное напряжение (1.11) будет содержать шесть произвольных постоянных x_{12} , x_{22} , x_{32} , x_{42} , x_{52} , x_{62} .

Используя граничные условия на торцах (1.9), получим систему алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\bar{\sigma}_z^2 + \bar{\sigma}_z^3) \Big|_{z=\pm l} &= -(\bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_z^1) \Big|_{z=\pm l} \\ (\bar{\sigma}_{rz}^2 + \bar{\sigma}_{rz}^3) \Big|_{z=\pm l} &= -(\bar{\sigma}_{rz} + \bar{\sigma}_{rz}^1) \Big|_{z=\pm l} \\ (\bar{\sigma}_{\varphi z}^2 + \bar{\sigma}_{\varphi z}^3) \Big|_{z=\pm l} &= -(\bar{\sigma}_{\varphi z} + \bar{\sigma}_{\varphi z}^1) \Big|_{z=\pm l} \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Число уравнений полученной системы и число неизвестных будет зависеть от количества точек, выбранных на торце, и количества корней $\bar{\lambda}_s$ и $\bar{k}_s$.

Учитывая сказанное, полученную систему можем записать в виде

$$\sum_s [f_{11}(r_1, \varphi_1, \bar{\lambda}_s l) x_{12}^s + \dots + f_{16}(r_1, \varphi_1, \bar{k}_s l) x_{62}^s] = -F_1(r, \varphi_1, l),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_s [f_{61}(r_1, \varphi_1, -\bar{\lambda}_s l) x_{12}^s + \dots + f_{66}(r_1, \varphi_1, -\bar{k}_s l) x_{61}^s] = -F_6(r_1, \varphi_1, -l),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_s [f_{11}(r_s, \varphi_s, \bar{\lambda}_s l) x_{12}^s + \dots + f_{16}(r_s, \varphi_s, \bar{k}_s l) x_{62}^s] = -F_1(r_s, \varphi_s, l),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_s [f_{61}(r_s, \varphi_s, -\bar{\lambda}_s l) x_{12}^s + \dots + f_{66}(r_s, \varphi_s, -\bar{k}_s l) x_{62}^s] = -F_6(r_s, \varphi_s, -l),$$

где $F_i(r, \varphi, z) = \bar{\sigma} + \bar{\sigma}^1$,

$f_{ik}(r, \varphi, \xi z)$ — выражения, стоящие при

$$\xi = \begin{cases} \bar{\lambda}_s & \text{при } 1 \leq k \leq 4 \\ \bar{k}_s & \text{при } 5 \leq k \leq 6 \end{cases} \quad (i, k=1, 2, \dots, 6).$$

Таким образом, мы получили бесконечную систему уравнений с бесконечным числом неизвестных. Решить такую систему можно приближенными методами.

Следовательно, граничные условия на торцах (1.9) можно удовлетворить приближенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. ИФМ, 1963.

Поступила 1. III. 1967.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОРТОТРОПНЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

А. Н. КУДИНОВ

Высокие температуры нагрева деталей современных машин и применение полимерных материалов (стеклопластики, асбопластмассы и т. п.) приводят к необходимости учета изменения физико-механических характеристик материала от температуры при расчетах на прочность и устойчивость конструктивных элементов типа стержней, пластин и оболочек.

Вопросу расчета температурных напряжений в ортотропных оболочках с учетом зависимости физико-механических характеристик материала от температуры посвящены работы [1], [2], в которых получены решения некоторых частных задач для цилиндрических оболочек.

В данной работе рассматривается задача об определении термупругих напряжений в ортотропных конических оболочках для некоторых частных случаев распределения температуры вдоль образующей. В качестве исходной системы уравнений берутся уравнения моментной теории. Изменение физико-механических характеристик материала с температурой учитывается путем рассмотрения оболочки с переменной жесткостью.

Обозначения

S — расстояние от вершины до точки на срединной поверхности; φ — угол между аксиальной плоскостью, проходящей через данную точку, и некоторой плоскостью отсчета; h — толщина оболочки; Θ — угол между касательной к меридиану и осью вращения; R_1, R_2 — радиусы главных кривизн срединной поверхности оболочки; u, v, w — перемещения соответственно по образующей s , по касательной к сечению $s = \text{const}$ и по внутренней нормали к срединной поверхности; N_1, N_2 — нормальные усилия; M_1, M_2 — изгибающие моменты; Q — перерезывающее усилие; E_1, E_2 — модули Юнга, μ_1, μ_2 — коэффициенты Пуассона; α_1, α_2 — коэффициенты линейного температурного расширения. Индексы 1 и 2 соответствуют координатным напряжениям s и φ ; индекс «о» означает, что данная величина берется при температуре 20°C .

§ 1. Постановка задачи. Основные допущения

Пусть усеченная коническая оболочка вращения постоянной толщины h подвергается воздействию нагрева. При этом распределение тем-

пературы вдоль образующей может быть аппроксимировано одним из выражений

$$\text{а) } T = T^0 e^{-a \ln \frac{s}{s^0}}, \quad \text{б) } T = T^0 e^{-a \left(1 - \frac{s}{s^0}\right)}, \quad (1.1)$$

где T^0 — превышение текущей температуры над начальной у меньшего основания; s^0 — расстояние от вершины до меньшего основания; a и d — некоторые постоянные коэффициенты.

Материал оболочки обладает криволинейной анизотропией, при этом в разных точках оболочки координатные направления совпадают с эквивалентными упругими направлениями. Считается справедливой гипотеза Кирхгоффа-Лява.

Модули Юнга являются линейными функциями температуры

$$E_1 = E_{10}(1 - \beta_1 T), \quad E_2 = E_{20}(1 - \beta_2 T). \quad (1.2)$$

Коэффициенты линейного температурного расширения с ростом температуры изменяются линейно

$$\alpha_1 = \alpha_{10}(1 + \gamma_1 T), \quad \alpha_2 = \alpha_{20}(1 + \gamma_2 T). \quad (1.3)$$

Коэффициенты Пуассона считаются независимыми от температуры

§ 2. Основные уравнения

Уравнения равновесия для симметрично нагретой конической оболочки можно записать в виде:

$$\frac{d(sN_1)}{ds} - N_2 = 0; \quad \frac{d(sQ)}{ds} + N_2 \operatorname{ctg} \theta = 0; \quad \frac{d(sM_1)}{ds} - M_2 - sQ = 0. \quad (2.1)$$

Компоненты деформаций срединной поверхности и изгиба выражаются через перемещения по формулам

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds}; \quad \varepsilon_2 = \frac{u - w \operatorname{ctg} \theta}{s}; \quad \kappa_1 = -\frac{d\vartheta}{ds}; \quad \kappa_2 = -\frac{\vartheta}{s}, \quad \vartheta = \frac{dw}{ds}. \quad (2.2)$$

Уравнение неразрывности деформаций запишется в виде:

$$\frac{d(s\varepsilon_2)}{ds} - \varepsilon_1 + \vartheta \operatorname{ctg} \theta = 0. \quad (2.3)$$

Усилия и моменты с учетом (1.2) и (1.3) определяются по формулам

$$\begin{aligned} N_1 &= D(\varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_2) - (N_{1\tau} + \mu_1 N_{2\tau}); \\ N_2 &= \mu_2 D(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 / \mu_1) - (\mu_2 N_{1\tau} + N_{2\tau}); \\ M_1 &= C(\kappa_1 + \mu_2 \kappa_2); \quad M_2 = \mu_2 C \left(\kappa_1 + \frac{\kappa_2}{\mu_1} \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} D &= \frac{E_{10} h}{1 - \mu_1 \mu_2} (1 - \beta_1 T); \quad C = \frac{E_{10} h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)} (1 - \beta_1 T); \\ N_{1\tau} &= \frac{E_{10} \alpha_{10} h T}{1 - \mu_1 \mu_2} [1 - (\beta_1 - \gamma_1) T - \beta_1 \gamma_1 T^2]; \\ N_{2\tau} &= \frac{E_{20} \alpha_{20} h T}{1 - \mu_1 \mu_2} [1 - (\beta_2 - \gamma_2) T - \beta_2 \gamma_2 T^2]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Выражая усилия через новую функцию V по следующим формулам

$$N_1 = \frac{V}{s}, \quad N_2 = \frac{dV}{ds}, \quad Q = -\frac{V \operatorname{ctg} \theta}{s} \quad (2.6)$$

и учитывая соотношения (2.4), сведем уравнения (2.1) и (2.3) к системе двух уравнений относительно функций V и θ , обычно называемых переменными Мейснера.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V}{ds^2} + p_1 \frac{dV}{ds} - p_2 V + p_3 \theta &= \psi(s); \\ \frac{d^2 \theta}{ds^2} + q_1 \frac{d\theta}{ds} - q_2 \theta + q_3 V &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{s} - \frac{1}{D} \frac{dD}{ds}; \quad p_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1 s^2} - \frac{\mu_2}{sD} \frac{dD}{ds}; \quad p_3 = \frac{D\mu_2(1-\mu_1\mu_2)}{s\mu_1 \operatorname{tg} \theta}; \\ q_1 &= \frac{1}{s} + \frac{1}{C} \frac{dC}{ds}; \quad q_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1 s^2} - \frac{\mu_2}{C \cdot s} \frac{dC}{ds}; \quad q_3 = -\frac{\operatorname{ctg} \theta}{s \cdot C}; \\ \psi(s) &= (1-\mu_1\mu_2) \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{N_{r1}}{s} - \frac{N_{r2}}{s} - \frac{dN_{r2}}{ds} + \frac{N_{r2}}{D} \frac{dD}{ds} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Получить аналитическое решение системы (2.7) в общем случае изменения температуры вдоль образующей вряд ли представляется возможным. Поэтому рассмотрим решение этой системы в двух частных случаях, определяемых выражениями (1.1).

§ 3. Решение для первого частного случая

Пусть температура вдоль образующей изменяется по закону (1.1а). Введем новую независимую переменную $\varphi = \ln \frac{s}{s_0}$. В этом случае выражения (2.5) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} D &= \frac{E_{10}^0 h}{1-\mu_1\mu_2} e^{b\varphi}; \quad C = \frac{E_{01}^0 h^3}{12(1-\mu_1\mu_2)} e^{b\varphi}; \\ N_{1r} &= \frac{E_{10}^0 a_{10} h T^0}{(1-\mu_1\mu_2)} [e^{-a\varphi} - (\beta_1 - \gamma_1) T^0 e^{-2a\varphi} - \beta_1 \gamma_1 (T^0)^2 e^{-3a\varphi}]; \\ N_{2r} &= \frac{E_{20}^0 a_{20} h T^0}{1-\mu_1\mu_2} [e^{-a\varphi} - (\beta_2 - \gamma_2) T^0 e^{-2a\varphi} - \beta_2 \gamma_2 (T^0)^2 e^{-3a\varphi}], \end{aligned} \quad (3.1)$$

где E_{10}^0 — модуль Юнга, взятый при температуре у меньшего основания; b — некоторый постоянный коэффициент.

Тогда, вводя вместо V новую функцию $\bar{V} = V e^{-b\varphi}$, преобразуем систему уравнений (2.7) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{V}}{d\varphi^2} + b \frac{d\bar{V}}{d\varphi} - (\nu - \mu_2 b) \bar{V} + \lambda_1^2 e^{\varphi} \theta &= \psi_1(\varphi); \\ \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} + b \frac{d\theta}{d\varphi} - (\nu - \mu_2 b) \theta - \lambda_2^2 e^{\varphi} \bar{V} &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 &= s^0 E_{10}^0 h \nu \operatorname{ctg} \theta; \quad \lambda_2^2 = \frac{12(1 - \mu_1 \mu_2) s^0}{E_{10}^0 h^3} \operatorname{ctg} \theta; \quad \nu = \frac{\mu_2}{\mu_1}; \\ \Psi_1(\varphi) &= k_1 e^{-(a+b-1)\varphi} - k_2 e^{-(2a+b-1)\varphi} - k_3 e^{-(3a+b-1)\varphi}; \\ k_1 &= s^0 \nu E_{10} h T^0 [\alpha_{10} - \alpha_{20}(1+a+b)]; \\ k_2 &= s^0 \nu E_{10} h (T^0)^2 [\alpha_{10}(\beta_1 - \gamma_1) - \alpha_{20}(\beta_2 - \gamma_2)(1+2a+b)]; \\ k_3 &= s^0 \nu E_{10} h (T^0)^3 [\alpha_{10} \gamma_1 \beta_1 - \alpha_{20} \beta_2 \gamma_2 (1+2a+b)].\end{aligned}\quad (3.3)$$

Система уравнений (3.2) с помощью замены функций и независимой переменной по следующим формулам

$$\sigma = \vartheta - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} i V, \quad \eta = 2 \sqrt{\lambda_2 \lambda_1} e^{-\frac{\varphi}{2}}, \quad \sigma = \tau \cdot \eta^{-\left(\frac{1}{2} + b\right)}$$

сводится к одному уравнению вида

$$\frac{d^2 \tau}{d\eta^2} - \left[\left(4\rho - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\eta^2} + i \right] \tau = i \eta^{\frac{1}{2}-b} [\bar{\rho}_1 \eta^{-2a} - \bar{\rho}_2 \eta^{-4a} - \bar{\rho}_3 \eta^{-6a}], \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned}\rho &= \nu - \mu_2 b + \frac{b^2}{4}, \quad \bar{\rho}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} k_1 (4\lambda_2 \lambda_1)^{a+b-1} \\ \bar{\rho}_2 &= -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} k_2 (4\lambda_2 \lambda_1)^{2a+b-1}, \quad \bar{\rho}_3 = \frac{\lambda_2 k_3}{\lambda_1} (4\lambda_2 \lambda_1)^{3a+b-1}.\end{aligned}$$

Полученное уравнение представляет собой одну из форм уравнения Бесселя. Общий интеграл этого уравнения можно представить в виде

$$\begin{aligned}\tau &= \eta^{\frac{1}{2}+b} [C_1 I_2 \nu \bar{\rho} (i \sqrt{i} \bar{\eta}) + C_2 Y_2 \nu \bar{\rho} (i \sqrt{i} \bar{\eta})] + \\ &+ \frac{\pi i}{2} Y_2 \nu \bar{\rho} (i \sqrt{i} \bar{\eta}) \int \eta^{\frac{5-2b}{2}} I_2 \nu \bar{\rho} (i \sqrt{i} \bar{\eta}) Z(\eta) d\eta - \\ &- \frac{\pi i}{2} I_2 \nu \bar{\rho} (i \sqrt{i} \bar{\eta}) \int \eta^{\frac{5-2b}{2}} Y_2 \nu \bar{\rho} (i \sqrt{i} \bar{\eta}) Z(\eta) d\eta,\end{aligned}\quad (3.5)$$

где

$Z(\eta) = \bar{\rho}_1 \eta^{-2a} - \bar{\rho}_2 \eta^{-4a} - \bar{\rho}_3 \eta^{-6a}$, C_1 и C_2 — комплексные постоянные.

Зная τ , определим ϑ и V , пользуясь которыми, можно определить усилия, моменты и перемещения. Для случая, когда аргумент бесселевых функций принимает большое значение, можно воспользоваться асимптотическими формулами для этих функций [4]. Так, для функций $\bar{V}$ и ϑ получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\bar{V} &= -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left\{ C_1 \operatorname{ch} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \cos \bar{\eta} - C_2 \operatorname{sh} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \sin \bar{\eta} + C_3 \operatorname{ch} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \sin \bar{\eta} - C_4 \operatorname{sh} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \cos \bar{\eta} + \right. \\ &+ \eta^{-(1+b)} \operatorname{sh} \frac{\eta}{\sqrt{2}} [\cos \bar{\eta} \int \eta^{-(3+b)} Z(\eta) (\operatorname{ch} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \cos \bar{\eta} + \operatorname{sh} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \sin \bar{\eta}) d\eta + \\ &\left. + \sin \bar{\eta} \int \eta^{-(3+b)} Z(\eta) (\operatorname{ch} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \sin \bar{\eta} + \operatorname{sh} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \cos \bar{\eta}) d\eta \right\};\end{aligned}\quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \vartheta = & C_4 \operatorname{ch} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \sin \bar{\eta} + C_3 \operatorname{sh} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \cos \bar{\eta} - C_1 \operatorname{sh} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \sin \bar{\eta} - C_2 \operatorname{ch} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \cos \bar{\eta} - \\ & - \eta^{-(1+b)} \operatorname{ch} \frac{\eta}{\sqrt{2}} [\sin \bar{\eta} \int \eta^{-(3+b)} Z(\eta) (\operatorname{ch} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \cos \bar{\eta} + \operatorname{sh} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \sin \bar{\eta}) d\eta - \\ & - \cos \bar{\eta} \int \eta^{-(3+b)} Z(\eta) (\operatorname{ch} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \sin \bar{\eta} + \operatorname{sh} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \cos \bar{\eta}) d\eta], \end{aligned}$$

где

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} + \pi \sqrt{\rho}.$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из крайних условий закрепления торцов оболочки.

§ 4. Решение для второго частного случая

Если температура вдоль образующей конуса изменяется по закону (1.16), то выражения (2.5) можно записать в виде

$$D = \frac{E_{10}^0 h}{1 - \mu_1 \mu_2} e^{c(1-x)}, \quad C = \frac{E_{10}^0 h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)} e^{c(1-x)},$$

$$N_{1r} = \frac{E_{10} \alpha_{10} h T^0}{1 - \mu_1 \mu_2} [e^{-d(1-x)} - (\beta_1 - \gamma_1) T^0 e^{-2d(1-x)} - \beta_1 \gamma_1 (T^0)^2 e^{-3d(1-x)}]; \quad (4.1)$$

$$N_{2r} = \frac{E_{20} \alpha_{20} h T^0}{1 - \mu_1 \mu_2} [e^{-d(1-x)} - (\beta_2 - \gamma_2) T^0 e^{-2d(1-x)} - \beta_2 \gamma_2 (T^0)^2 e^{-3d(1-x)}],$$

где

$x = \frac{s}{s_0}$ — новая независимая переменная, E_{10}^0 — модуль Юнга, взятый при температуре у меньшего основания, c — некоторый постоянный коэффициент.

Тогда посредством замены $V = e^{c(1-x)}$ $\bar{V}$ разрешающие уравнения (2.7) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{V}}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - c \right) \frac{d\bar{V}}{dx} - \left(\frac{\nu}{x^2} + \frac{c\mu_2 + c}{x} \right) \bar{V} + \frac{\lambda_1^2}{x} \vartheta = e^{-c(1-x)} \psi_1(x), \\ \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - c \right) \frac{d\vartheta}{dx} - \left(\frac{\nu}{x^2} + \frac{c\mu_2}{x} \right) \vartheta - \frac{\lambda_2^2}{x} \bar{V} = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\psi_1(x) = k_1 e^{-d(1-x)} - k_2 e^{-2d(1-x)} - k_3 e^{-3d(1-x)}, \quad k_1, k_2 \text{ и } k_3$$

определяются формулами (3.3), в которые вместо a и b соответственно следует подставить d и c .

Однородная система уравнений (4.2) путем введения новых функций и независимой переменной по формулам

$$\sigma = \vartheta - \frac{(c + 2\kappa i)}{2\lambda_1^2} \bar{V}, \quad \sigma = \tau x^{-\nu} \bar{\sigma}, \quad \xi = cx \quad (4.3)$$

сводится к дифференциальному уравнению так называемой вырожденной гипергеометрической функции

$$\xi \frac{d^2 \tau}{d\xi^2} + (\gamma - \xi) \frac{d\tau}{d\xi} - \alpha \tau = 0, \quad (4.4)$$

где

$$\alpha = \mu + \rho i, \quad \mu = 1 + 2\mu_2 - \sqrt{\nu}, \quad \rho = \frac{x}{c},$$

$$x = \lambda_1 \lambda_2 \sqrt{1 - \frac{c^2}{4\lambda_1^2 \lambda_2^2}}, \quad \gamma = 1 - 2\sqrt{\nu}.$$

Общее решение уравнения (4.4) при условии

$$\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2 \pm \dots \pm n, \quad (4.5)$$

которое для ортотропных оболочек практически всегда выполняется, может быть представлено в виде

$$\tau = C_1 F(\alpha, \gamma, \xi) + C_2 \xi^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, 2-\gamma, \xi), \quad (4.6)$$

где гипергеометрическая функция $F(\alpha, \gamma, \xi)$ определяется рядом

$$F(\alpha, \gamma, \xi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\prod_{n=0}^{k-1} \frac{\alpha+n}{(1+n)(\gamma+n)} \right] \xi^k. \quad (4.7)$$

Применяя к полученному ряду признак Даламбера, нетрудно убедиться, что этот ряд сходится при любых значениях α, γ и ξ .

Частные решения неоднородной системы уравнений (4.2) отыскиваются в виде

$$\bar{V}_i'' = k_i e^{-m_i(1-x)} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{in} x^n, \quad \Phi_i'' = k_i e^{-m_i(1-x)} \sum_{n=0}^{\infty} q_{in} x^n, \quad (4.8)$$

где

$$i = 1, 2, 3; \quad m_1 = c + d, \quad m_2 = c + 2d, \quad m_3 = c + 3d.$$

После подстановки $\bar{V}_i''$ и Φ_i'' в систему уравнений (4.2) получим следующую систему для определения коэффициентов β_{in} и q_{in} :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{in}(n^2 - \nu)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda_1^2 q_{in} - (l_{in} + f_i) \beta_{in}] x^{n+1} + \delta_i \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{in} x^{n+2} &= x^2; \\ \sum_{n=0}^{\infty} q_{in}(n^2 - \nu)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} [-\lambda_2^2 \beta_{in} - (l_{in} + f_i - c) q_{in}] x^{n+1} + \delta_i \sum_{n=0}^{\infty} q_{in} x^{n+2} &= 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где

$$l_i = c - 2m_i, \quad f_i = m_i + c\mu_2 + c, \quad \delta_i = m_i^2 + m_i c.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , будем иметь бесконечную систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов β_{in} и q_{in} .

Общее решение неоднородной системы уравнений (4.2) представится как сумма общего решения (4.6) однородной системы и частных решений (4.8). Для функций V и Φ получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
V = & -\frac{\lambda_1^2 e^{c(1-x)}}{x x^{\nu}} [A_1 \chi_1(cx) + B_1 \varphi(cx) + A_2 \chi(cx) - \\
& - B_2 \varphi_1(cx)] + x^2 \sum_{i=1}^3 k_i e^{-id(1-x)} (\beta_{i0} + x \beta_{i1} + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_{in} x^n); \\
\vartheta = & x^{-\nu} \left[A_1 \left(\varphi + \frac{c}{2x} \chi_1 \right) + B_1 \left(\chi - \frac{c}{2x} \varphi_1 \right) + \right. \\
& \left. + A_2 \left(\varphi_1 + \frac{c}{2x} \chi \right) + B_2 \left(\chi_1 - \frac{c}{2x} \varphi \right) + x^3 \sum_{i=1}^3 k_i e^{-m_i(1-x)} (q_{i1} + \sum_{n=2}^{\infty} q_{in} x^n) \right], \quad (4.10)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\varphi(cx) &= 1 + c^2 x^2 (a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n c^n x^n); \\
\chi(cx) &= c^2 x^2 (b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n c^n x^n); \\
\varphi_1(cx) &= (cx)^{2\nu} [1 + c^2 x^2 (a_{01} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n1} c^n x^n)]; \\
\chi_1(cx) &= (cx)^{2(1+\nu)} (b_{01} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n1} c^n x^n), \quad (4.11)
\end{aligned}$$

A_1, B_1, A_2, B_2 — произвольные постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Коэффициенты $a_n, b_n, a_{n,1}, b_{n,1}$ и β_{in}, g_{in} ($n=2, 3, \dots, k$) вычисляются с помощью рекуррентных формул:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(\mu+1+n) a_{n-1}}{(2+n)(\gamma+1+n)} - \rho \frac{b_{n-1}}{(2+n)(\gamma+1+n)}; \\
b_n &= \frac{\rho a_{n-1}}{(2+n)(\gamma+1+n)} + \frac{(\mu+1+n) b_{n-1}}{(2+n)(3-\gamma+n)}; \\
a_{n,1} &= \frac{(\mu+2-\gamma+n)}{(2+n)(3-\gamma+n)} a_{n-1,1} - \rho \frac{b_{n-1,1}}{(2+n)(3-\gamma+n)}; \\
b_{n1} &= \frac{\rho a_{n-1}}{(2+n)(3-\gamma+n)} + \frac{(\mu+2-\gamma+n)}{(2+n)(3-\gamma+n)} b_{n-1}; \\
a_0 &= \frac{\mu+1}{2(\gamma+1)}; \quad b_0 = \frac{\rho}{2(\gamma+1)}; \quad a_{01} = \frac{\mu+2-\gamma}{2(3-\gamma)}; \quad b_{01} = \frac{\rho}{2(3-\gamma)}; \quad (4.12) \\
\beta_{in} &= \frac{\lambda_2^2 \beta_{i,n+1} + [(n+2)l_i + f_i - c] \beta_{i,n-1} - \delta_i \beta_{i,n-2}}{(n+2)^{2-\nu}}; \\
q_{in} &= \frac{\lambda_2^2 \beta_{i,n+1} + [(n+2)l_i + f_i - c] q_{i,n-1} - \delta_i q_{i,n-2}}{(n+2)^{2-\nu}}; \\
\beta_{i0} &= \frac{1}{4-\nu}, \quad q_{i0} = 0, \quad \beta_{i1} = \frac{3l_i + f_i}{(4-\nu)(9-\nu)}, \quad q_{i1} = \frac{\lambda_2^2}{(4-\nu)(9-\nu)}.
\end{aligned}$$

Зная ϑ и V , по формулам (2.2), (2.4) и (2.6) определим усилия, моменты и перемещения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. А. Аксельрод. Деформация оболочек при переменном по толщине температурном расширении. Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., № 6, 1960.
2. С. М. Дургарьян. К температурному расчету тонких ортотропных оболочек вращения. Инж. ж., 2, 1962, № 3.
3. А. Д. Коваленко. Тепловые напряжения в конической оболочке переменной толщины при осесимметричном распределении температуры. Сб. «Тепловые напряжения в элементах турбомашин». АН УССР, вып. 1, 1961.
4. Д. С. Кузнецов. Специальные функции. ГИЗ «Высшая школа», М., 1962.

Поступила 1. III. 1967.

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА УПРУГОСТИ ДЛЯ ТОЛСТОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА, СКРЕПЛЕННОГО С ТОНКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

В. Г. ПОТЕЙКО

При исследовании осесимметричного напряженно-деформированного состояния толстостенных цилиндров, скрепленных с оболочкой, большей частью рассматривают задачу как об обобщенной плоской деформации. Решения, полученные при таком допущении, дают возможность определить такие важные величины, как радиальные и тангенциальные напряжения и деформации, соответствующие приблизительно средней части цилиндра. Однако подобные решения не позволяют определить величины напряжений и деформаций у торцов цилиндра и не дают касательных напряжений, знание которых, особенно на контактной поверхности, представляет во многих случаях интерес. Эти величины могут быть найдены лишь при решении пространственных задач.

В данной работе рассматривается пространственная осесимметричная задача о напряженно-деформированном состоянии толстостенного цилиндра, скрепленного с тонкой ортотропной оболочкой, находящегося под действием внутреннего равномерного давления. Получено аналитическое решение применительно к расчетам на ЭВЦМ, которое точно удовлетворяет уравнениям равновесия, граничным условиям на внутренней боковой и контактной поверхностях и позволяет приближенно, с необходимой степенью точности, удовлетворить граничным условиям на торцах.

Задача решается при следующих допущениях: материал цилиндра считается упругим и изотропным; материал оболочки упругий и ортотропный. Кроме того, для оболочки принимаются обычные допущения технической теории оболочек. Задача решается в линейной постановке.

Основные обозначения: r, z, φ — цилиндрические координаты; a — внутренний радиус цилиндра; b — внешний радиус цилиндра; R — радиус срединной поверхности оболочки; l — длина цилиндра; h — толщина оболочки; u, w — радиальное и осевое перемещения в цилиндре; u_0, w_0 — радиальное и осевое перемещения в срединной поверхности оболочки; $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{rz}$ — радиальное, осевое, тангенциальное нормальные напряжения и касательное напряжение в цилиндре; N_z, N_φ, Q, M_z — осевое и окружное усилия, перерезывающая сила и изгибающий момент в оболочке; σ, τ — контактные нормальное и касательное напряжения; E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала цилиндра; E_1, μ_1 — модуль упругости материала оболочки в осевом направлении и коэффициент Пуассона, отвечающий деформации в тангенциальном направлении; E_2, μ_2 — модуль упругости оболочки в тангенциальном направлении и коэффициент Пуассона, отвечающий де-

формации в осевом направлении; $B_1 = \frac{E_1 h}{1 - \mu_1 \mu_2}$, $B_2 = \frac{E_2 h}{1 - \mu_1 \mu_2}$ — жесткости растяжения оболочки соответственно в осевом и тангенциальном направлениях; $D = \frac{E_1 h}{12(1 - \mu_1 \mu_2)}$ — изгибная жесткость оболочки в осевом направлении; P — внутреннее давление.

§ 1. Основные уравнения

Уравнения равновесия толстостенного цилиндра в случае осесимметричного напряженного состояния и при отсутствии массовых сил имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

При выводе уравнений равновесия оболочки необходимо учесть контактные нормальное σ и касательное τ напряжения, обусловленные воздействием цилиндра, и момент, возникающий вследствие наличия τ . С учетом этих величин уравнения равновесия оболочки могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{dN_z}{dz} + \tau &= 0, \quad \frac{dQ}{dz} - \frac{N_\varphi}{R} + \sigma = 0, \\ \frac{dM_z}{dz} + Q + \frac{h}{2} \tau &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Причем усилия и момент связаны с перемещениями следующими соотношениями

$$\begin{aligned} N_z &= B_1 \left(\frac{dw_0}{dz} + \mu_2 \frac{u_0}{R} \right), \\ N_\varphi &= B_2 \left(\frac{u_0}{R} + \mu_1 \frac{dw_0}{dz} \right), \\ M_z &= D \frac{d^2 u_0}{dz^2}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Исключая из (1.2) перерезывающую силу и выражая усилия и момент через перемещения, получим уравнения равновесия оболочки в перемещениях

$$\begin{aligned} B_1 \left(\frac{d^2 w_0}{dz^2} + \mu_2 \frac{1}{R} \frac{du_0}{dz} \right) + \tau &= 0, \\ D \frac{d^4 u_0}{dz^4} + \frac{B_2}{R} \left(\frac{u_0}{R} + \mu_1 \frac{dw_0}{dz} \right) + \frac{h}{2} \frac{d\tau}{dz} - \sigma &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

К системам (1.1) и (1.4) необходимо присовокупить граничные условия, которые будут иметь следующий вид.

На внутренней боковой поверхности цилиндра

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = -p, \quad \sigma_{rz}|_{r=a} = 0; \quad (1.5)$$

на контактной поверхности

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}\big|_{r=b} &= -\tau, \quad \sigma_{rz}\big|_{r=b} = -\tau, \\ u\big|_{r=b} &= u_0, \quad w\big|_{r=b} = w_0 + \frac{h}{2} \frac{du_0}{dz},\end{aligned}\quad (1.6)$$

или, выражая σ и τ (из (1.4) и подставляя в первое и второе условия (1.6), с учетом третьего и четвертого условий получим

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}\big|_{r=b} &= \left[\frac{B_3}{R} \left(\frac{u}{R} + \mu_1 \frac{\partial w}{\partial z} - \mu_1 \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - D \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \right]_{r=b} - \frac{h}{2} \frac{d\tau}{dz}, \\ \sigma_{rz}\big|_{r=b} &= B_1 \left[\frac{\mu_2}{R} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{h}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right]_{r=b},\end{aligned}\quad (1.7)$$

на торцах:

для цилиндра

$$\sigma_{zz}\bigg|_{z=\pm \frac{l}{2}} = -p, \quad \sigma_{rz}\bigg|_{z=\pm \frac{l}{2}} = 0. \quad (1.8)$$

На оболочку по торцам будет действовать нормальное растягивающее усилие, которое приближенно можно считать равным $P \cdot \pi \cdot b^2$, или на единицу длины сечения $\frac{pb^2}{2R}$. Кроме того, обычно по торцам осуществляется довольно жесткое соединение оболочки с днищами и другими конструктивными элементами. Поэтому можем приближенно считать, что по торцам оболочка жестко зашкреплена для прогибов и углов поворота. Следовательно, граничные условия на торцах оболочки могут быть записаны в виде

$$N_z\bigg|_{z=\pm \frac{l}{2}} = \frac{pb^2}{2R}, \quad u_0\bigg|_{z=\pm \frac{l}{2}} = 0, \quad \frac{du_0}{dz}\bigg|_{z=\pm \frac{l}{2}} = 0. \quad (1.9)$$

§ 2. Решение задачи

1. Выразим напряжения и перемещения в цилиндре через одну бигармоническую функцию Φ [1]

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right), \quad \sigma_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\mu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \quad \sigma_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\mu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \\ u &= -\frac{1+\mu}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, \quad w = \frac{1+\mu}{E} \left[2(1-\mu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right],\end{aligned}\quad (2.1)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Функция Φ может быть найдена из бигармонического уравнения

$$\left(\Delta_r + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\Delta_r + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Положим $\Phi = X(r)$, $Z(z)$ и подставим в (2.2). Деля каждый член этого уравнения на Φ , будем иметь

$$\frac{\Delta_r^2 X}{X} + 2 \frac{\Delta_r X}{X} \cdot \frac{Z''}{Z} + \frac{Z^{IV}}{Z} = 0.$$

Продифференцируем это уравнение по z и по r . Получим

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\Delta_r X}{X} \right) \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{Z''}{Z} \right) = 0.$$

Отсюда следует, что хотя бы один из множителей равен нулю. Имея в виду в дальнейшем точно удовлетворить граничным условиям на боковых поверхностях, предположим, что

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{Z''}{Z} \right) = 0.$$

В этом случае $X(r)$ и $Z(z)$ будут определяться следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \Delta_r^2 X + 2k^2 \Delta_r X + k^4 X &= 0, \\ Z'' - k^2 Z &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

откуда найдем при $k \neq 0$

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) = [C_1 I_0(kr) + C_2 N_0(kr) + C_3 r I_1(kr) + C_4 r N_1(kr)] \times \\ \times [C_5 \cosh kz + C_6 \sinh kz], \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $I_0(kr)$, $N_0(kr)$ — функции Бесселя действительного аргумента первого и второго рода нулевого порядка, $I_1(kr)$, $N_1(kr)$ — те же функции первого порядка.

И при $k=0$

$$\Phi(r, z) = (C_7 + C_8 \ln r + C_9 r^2 + C_{10} r^2 \ln r)(C_{11} + C_{12} z). \quad (2.5)$$

2. Построим решения систем (1.1) и (1.4), которые бы точно удовлетворяли граничным условиям (1.5) и (1.7) на боковых поверхностях. Этим условиям можно удовлетворить, взяв функцию Φ в виде (2.5).

Подставляя (2.5) в (2.1) и находя неизвестные постоянные из (1.5) и (1.7), получим

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} &= \frac{p}{r^2} [a_1(1-2\mu)(a^2-r^2)-a^2], \\ \sigma'_{zz} &= 4(1-\mu)pa_1, \quad \sigma'_{rz} = 0, \\ \sigma'_{\varphi\varphi} &= \frac{p}{r^2} [a^2-a_1(-2\mu)r^2], \\ u' &= -\frac{(1+\mu)p}{E} \left[\frac{a^2}{r} [(1-2\mu)a_1-1] + a_1 r \right], \end{aligned}$$

$$w' = \frac{4(1-\mu^2)}{E} \cdot p a_1 z. \quad (2.6)$$

Перемещения в оболочке будут равны $u_0' = u' \Big|_{r=b}$, $w_0' = w'$. И из (1.3) найдем

$$\begin{aligned} N_z' &= F_1 p a_1 \left\{ 4(1-\mu) - \mu_2 \frac{a^2}{b^2} \left[(1-2\mu) - \frac{1}{a_1} \right] - \mu_2 \right\}, \\ N_\varphi' &= F_2 p a_1 \left\{ 4(1-\mu) \mu_1 - \frac{a^2}{b^2} \left[(1-2\mu) - \frac{1}{a_1} \right] - 1 \right\}, \\ M_z' &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В формулах (2.6) и (2.7) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{B_i(1+\mu)}{E}, \quad (i=1, 2), \\ a_1 &= \frac{a^2(b-F_2)}{b \left\{ (1-2\mu)(a^2-b^2) + \frac{F_2}{b} [4(1-\mu)\mu_1 b^2 - (1-2\mu)a^2 - b^2] \right\}}. \end{aligned}$$

В этих соотношениях и в дальнейшем будем полагать $b \approx R$.

Полученная группа решений не удовлетворяет граничным условиям на торцах. Для того, чтобы удовлетворить граничные условия на торцах, построим вторую группу решений [1], которые бы не изменяли уже выполненных граничных условий на боковых поверхностях и содержали необходимое число произвольных постоянных для приближенного удовлетворения условий на торцах.

3. Для построения второй группы решений возьмем функцию Φ в виде (2.4). Подставляя (2.4) в (2.1) и удовлетворяя уже нулевым условиям на внутренней боковой поверхности и условиям (1.7), получим следующую систему четырех линейных однородных уравнений относительно постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 .

$$\begin{aligned} &C_1 \left[k I_0(\alpha) - \frac{I_1(\alpha)}{a} \right] + C_2 \left[k N_0(\alpha) - \frac{N_1(\alpha)}{a} \right] + \\ &+ C_3 [\alpha I_1(\alpha) - (1-2\mu) I_0(\alpha)] + C_4 [\alpha N_1(\alpha) - (1-2\mu) N_0(\alpha)] = 0, \\ &C_1 k I_1(\alpha) + C_2 k N_1(\alpha) + C_3 [2(\mu-1) I_1(\alpha) - \alpha I_0(\alpha)] + \\ &+ C_4 [2(\mu-1) N_1(\alpha) - \alpha N_0(\alpha)] = 0, \\ &C_1 [a_2 k I_0(\beta) - a_3 I_1(\beta)] + C_2 [a_2 k N_0(\beta) - a_3 N_1(\beta)] + \\ &+ C_3 [a_4 \beta I_1(\beta) - a_5 I_0(\beta)] + C_4 [a_4 \beta N_1(\beta) - a_5 N_0(\beta)] = 0, \\ &C_4 [a_6 k I_1(\beta) + k^2 F_1 I_0(\beta)] + C_2 [a_6 k N_1(\beta) + k^2 F_1 N_0(\beta)] + \\ &+ C_3 [a_7 I_1(\beta) + a_8 \beta I_0(\beta)] + C_4 [a_7 N_1(\beta) + a_8 \beta N_0(\beta)] = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\alpha = ka$, $\beta = kb$,

$$a_2 = 1 - \frac{\mu_1 F_2}{b}, \quad a_3 = \frac{1}{b} + \frac{F_2}{b} \left(\frac{h \mu_1 k^2}{2} - \frac{1}{b} \right) + \frac{h}{2} k^2 - \frac{D(1+\mu)}{E} k^4,$$

$$a_4 = a_2 + \frac{h(1-\mu)}{b}, \quad a_5 = 1 - 2\mu - b \left(a_3 - \frac{1}{b} \right) - \frac{4(1-\mu) \mu_1 F_2}{b},$$

$$a_6 = a_2 + \frac{hF_2}{2} k^2, \quad a_7 = -2(1-\mu) + F_1 b k^2, \\ a_8 = -a_6 - \frac{4(1-\mu)F_1}{b}.$$

Для того, чтобы постоянные не были одновременно равны нулю, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю. Приравнивая нулю определитель, получим

$$\begin{vmatrix} kI_0(\alpha) - \frac{I_1(\alpha)}{\alpha} kN_0(\alpha) - \frac{N_1(\alpha)}{\alpha} \alpha I_1(\alpha) - (1-2\mu)I_0(\alpha) & \alpha N_1(\alpha) - (1-2\mu)N_0(\alpha) \\ kI_1(\alpha) & kN_1(\alpha) & 2(\mu-1)I_1(\alpha) - \alpha I_0(\alpha) & 2(\mu-1)N_1(\alpha) - \alpha N_0(\alpha) \\ a_2 kI_0(\beta) - a_3 I_1(\beta) & a_2 kN_0(\beta) - a_3 N_1(\beta) & a_{11} \beta I_1(\beta) - a_5 I_0(\beta) & a_{11} \beta N_1(\beta) - a_5 N_0(\beta) \\ a_6 kI_1(\beta) + k^2 F_1 I_0(\beta) a_6 kN_1(\beta) + k^2 F_1 N_0(\beta) a_7 I_1(\beta) + a_8 \beta I_0(\beta) a_7 N_1(\beta) + a_8 \beta N_0(\beta) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.9)$$

Это уравнение определяет бесчисленное множество значений параметров k_n . Для каждого значения k_n из (2.8) найдем соответствующие значения C_{1n} , C_{2n} , C_{3n} , C_{4n} с точностью до постоянного общего множителя Q_n

$$C_{1n} = A_{11}(k_n)Q_n, \quad C_{2n} = -A_{12}(k_n)Q_n, \\ C_{3n} = A_{13}(k_n)Q_n, \quad C_{4n} = -A_{14}(k_n)Q_n,$$

где $A_{1i}(k_n)$ — миноры элементов 1-й строки определителя.

Подставляя найденные значения коэффициентов в выражения для напряжений и перемещений и суммируя по всем k_n , получим следующие соотношения для напряжений и перемещений второй группы

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sum_{k_n} k_n^2 \left\{ A_{11} \left[k_n I_0(k_n r) - \frac{I_1(k_n r)}{r} \right] - A_{12} \left[k_n N_0(k_n r) - \frac{N_1(k_n r)}{r} \right] + \right. \\ &\quad \left. + A_{13} [k_n r I_1(k_n r) - (1-2\mu)I_0(k_n r)] - A_{14} [k_n r N_1(k_n r) - \right. \\ &\quad \left. - (1-2\mu)N_0(k_n r)] \right\} [L_n \operatorname{sh} k_n z + M_n \operatorname{ch} k_n z], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sum_{k_n} k_n \left\{ A_{11} \frac{k_n I_1(k_n r)}{r} - A_{12} \frac{k_n N_1(k_n r)}{r} + A_{13} (2\mu-1)I_0(k_n r) - \right. \\ &\quad \left. - A_{14} (2\mu-1)N_0(k_n r) \right\} [L_n \operatorname{sh} k_n z + M_n \operatorname{ch} k_n z], \\ \sigma_{zz} &= \sum_{k_n} k_n^2 \left\{ -A_{11} k_n I_0(k_n r) + A_{12} k_n N_0(k_n r) + A_{13} [2(2-\mu)I_0(k_n r) - \right. \\ &\quad \left. - k_n r I_1(k_n r)] - A_{14} [2(2-\mu)N_0(k_n r) - k_n r N_1(k_n r)] \right\} [L_n \operatorname{sh} k_n z + M_n \operatorname{ch} k_n z], \\ \sigma_{rz} &= \sum_{k_n} k_n^2 \left\{ A_{11} k_n I_1(k_n r) - A_{12} k_n N_1(k_n r) + A_{13} [2(\mu-1)I_1(k_n r) - \right. \\ &\quad \left. - k_n r I_0(k_n r)] - A_{14} [2(\mu-1)N_1(k_n r) - k_n r N_0(k_n r)] \right\} [L_n \operatorname{ch} k_n z + M_n \operatorname{sh} k_n z], \\ u'' &= \frac{1+\mu}{E} \sum_{k_n} k_n^2 \left\{ A_{11} I_1(k_n r) - A_{12} N_1(k_n r) - A_{13} r I_0(k_n r) + \right. \\ &\quad \left. + A_{14} r N_0(k_n r) \right\} [L_n \operatorname{sh} k_n z + M_n \operatorname{ch} k_n z], \\ w'' &= \frac{1+\mu}{E} \sum_{k_n} k_n \left\{ -A_{11} k_n I_0(k_n r) + A_{12} k_n N_0(k_n r) + A_{13} [4(1-\mu)I_0(k_n r) - \right. \\ &\quad \left. - k_n r I_1(k_n r)] - A_{14} [4(1-\mu)N_0(k_n r) - k_n r N_1(k_n r)] \right\} [L_n \operatorname{ch} k_n z + M_n \operatorname{sh} k_n z], \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$u_0'' = u''|_{r=b},$$

$$\begin{aligned} w_0'' = \frac{1+\mu}{E} \sum_{k_n} k_n \{ & -A_{11} \left[\frac{h}{2} k_n I_1(\beta_n) + I_0(\beta_n) \right] k_n + A_{12} \left[\frac{h}{2} k_n N_1(\beta_n) + \right. \\ & \left. + N_0(\beta_n) \right] k_n + A_{13} \left[\left(\frac{h}{2} k_n \beta_n + 4(1-\mu) \right) I_0(\beta_n) - \beta_n I_1(\beta_n) \right] - \\ & \left. - A_{14} \left[\left(\frac{h}{2} k_n \beta_n + 4(1-\mu) \right) N_0(\beta_n) - \beta_n N_1(\beta_n) \right] \right\} [L_n \operatorname{ch} k_n z + M_n \operatorname{sh} k_n z]. \end{aligned}$$

Усилия и момент второй группы найдем из (1.3) в виде

$$\begin{aligned} N_z'' = F_1 \sum_{k_n} k_n^2 \{ & A_{11} \left[\left(\frac{\mu_2}{b} - \frac{k_n^2 h}{2} \right) I_1(\beta_n) - k_n I_0(\beta_n) \right] - A_{12} \left[\left(\frac{\mu_2}{b} - \frac{k_n^2 h}{2} \right) N_1(\beta_n) - \right. \\ & \left. - k_n N_0(\beta_n) \right] + A_{13} \left[\left(\frac{h}{2} \beta_n k_n + 4(1-\mu) - \mu_2 \right) I_0(\beta_n) - \beta_n I_1(\beta_n) \right] - A_{14} \left[\left(\beta_n k_n \frac{h}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 4(1-\mu) - \mu_2 \right) N_0(\beta_n) - \beta_n N_1(\beta_n) \right] \} [L_n \operatorname{sh} k_n z + M_n \operatorname{ch} k_n z], \\ N_\varphi'' = F_2 \sum_{k_n} k_n^2 \{ & A_n \left[\left(\frac{1}{b} - \frac{\mu_1 k_n^2 h}{2} \right) I_1(\beta_n) - \mu_1 k_n I_0(\beta_n) \right] - \\ & - A_{12} \left[\left(\frac{1}{b} - \frac{\mu_1 k_n^2 h}{2} \right) N_1(\beta_n) - \mu_1 k_n N_0(\beta_n) \right] + A_{13} \left[\left(\frac{\mu_1 \beta_n k_n h}{2} + \mu_1 4(1-\mu) - \right. \right. \\ & \left. \left. - 1 \right) I_0(\beta_n) - \mu_1 \beta_n I_1(\beta_n) \right] - A_{14} \left[\left(\frac{\mu_1 \beta_n k_n h}{2} + \mu_1 4(1-\mu) - 1 \right) N_0(\beta_n) - \right. \\ & \left. - \mu_1 \beta_n N_1(\beta_n) \right] \} [L_n \operatorname{sh} k_n z + M_n \operatorname{ch} k_n z], \\ M_z'' = \frac{D(1+\mu)}{E} \sum_{k_n} k_n^4 \{ & A_{11} I_1(\beta_n) - A_{12} N_1(\beta_n) - A_{13} b I_0(\beta_n) + \\ & + A_{14} b N_0(\beta_n) \} [L_n \operatorname{sh} k_n z + M_n \operatorname{ch} k_n z], \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$L_n = C_{5n} Q_n, \quad M_n = C_{6n} Q_n.$$

4. Налагая вторую группу решений (2.10) и (2.11) на первую группу (2.6) и (2.7), получим решение, которое точно удовлетворяет граничным условиям на боковых поверхностях и содержит произвольные постоянные n и M_n , с помощью которых можем приближенно удовлетворить граничные условия на торцах.

Беря конечное число частных решений второй группы, потребуем для оболочки выполнения условий (1.9), а для цилиндра потребуем удовлетворения граничных условий (1.8) лишь в конечном числе точек радиуса. Количество точек, обозначим его через m , выбирается в зависимости от требуемой точности. Получим

$$\begin{aligned} (N_z' + N_z'')_{z=\pm \frac{l}{2}} &= \frac{pb}{2}, \quad \frac{du_0''}{dz} \Big|_{z=\pm \frac{l}{2}} = 0, \\ (u_0' + u_0'')_{z=\pm \frac{l}{2}} &= 0, \quad \sigma_{rz} \Big|_{r=r_i} = 0, \end{aligned}$$

$$(\sigma_{zz}' + \sigma_{zz}'')_{\substack{z = \pm \frac{l}{2} \\ r = r_i}} = -p, \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (2.12)$$

При этом число взятых частных решений, иначе говоря, количество оставленных в рядах (2.10) и (2.11) членов, должно быть таковым, чтобы система (2.12) была замкнута.

(2.12) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Решая ее, мы найдем постоянные L_n и M_n , после чего можем вычислить напряжения, перемещения, усилия и моменты в любой точке цилиндра и оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Прокопов. Равновесие упругого толстостенного осесимметричного цилиндра. ПММ, т. XIII, вып. 2, 1949.
2. В. И. Блох. Теория упругости. Издательство Харьковского университета, 1964.
3. А. С. Вольмир. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.

Поступила 1. III. 1967.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ДЛИННОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЕКТОРЕ

П. С. СОЛОМИН

Рассмотрим длинный цилиндрический сектор, ограниченный меридиональными плоскостями $\varphi = \pm\beta$ и цилиндрическими поверхностями радиусов $r=a$ и $r=b$. Сектор в начальный момент времени $t=0$ имеет постоянную температуру $T=T_0=\text{const}$; в последующие моменты времени $t>0$ на границах сектора задана температура $T_1=\text{const}$. Считаем, что температура, напряжения и деформации в теле не зависят от координаты z , т. е. рассматриваем плоскую задачу.

Уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\bar{a}^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

где $\bar{a}$ — коэффициент температуропроводности материала, $T \equiv T(r, \varphi)$ — текущая температура.

Заменой переменных $u(r, \varphi) = T(r, \varphi) - T_1$ решение сводится к задаче с нулевыми граничными условиями. Разделяя переменные, найдем частное решение в виде

$$U_{iv} = [I_v(\lambda_i r) + \alpha_{iv} N_v(\lambda_i r)] \cos v\varphi \cdot e^{-\bar{a}\lambda_i^2 t}, \quad (2)$$

где $I_v(\lambda_i r)$ — функции Бесселя,
 $N_v(\lambda_i r)$ — функции Неймана.

Частное решение (2) выбрано в силу четности температуры как функции угла φ . Величина v выбирается с таким расчетом, чтобы при $\varphi = \pm\beta$

$$\cos v\varphi = 0.$$

Отсюда получим для v бесконечное множество значений

$$v = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2n-1}{\beta}, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Характеристические числа α_{iv} и λ_i найдутся из условия на контурах v_1 и v_2 с радиусами $r=a$ и $r=b$ в виде

$$\alpha_{iv} = -\frac{I_v(\lambda_i a)}{N_v(\lambda_i a)} = -\frac{I_v(\lambda_i b)}{N_v(\lambda_i b)}. \quad (4)$$

Полное решение уравнения (1) находится в виде двойного ряда

$$\frac{T(r, \varphi) - T_1}{T_0 - T_1} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu} A_{i\nu} [I_{\nu}(\lambda_i r) + \alpha_{i\nu} N_{\nu}(\lambda_i r)] \cos \nu \varphi \cdot e^{-\bar{a} \lambda_i^2 t}. \quad (5)$$

Выражение $[I_{\nu}(\lambda_i r) + \alpha_{i\nu} N_{\nu}(\lambda_i r)] \cos \nu \varphi$ ортогонально с весом r на промежутке

$$a \leq r \leq b, \quad -\beta \leq \varphi \leq \beta,$$

поэтому коэффициенты $A_{i\nu}$ найдутся по формуле

$$A_{i\nu} = \frac{\int_a^b r [I_{\nu}(\lambda_i r) + \alpha_{i\nu} N_{\nu}(\lambda_i r)] dr \int_{-\beta}^{\beta} \cos \nu \varphi \cdot d\varphi}{\int_a^b r [I_{\nu}(\lambda_i r) + \alpha_{i\nu} N_{\nu}(\lambda_i r)]^2 dr \int_{-\beta}^{\beta} \cos^2 \nu \varphi d\varphi}. \quad (6)$$

Термоупругие напряжения определяются с помощью функции термоупругого потенциала перемещений Φ , определенной для случая плоской деформации следующим образом:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad e = \Delta \Phi. \quad (7)$$

Основное дифференциальное уравнение для определения функции Φ в этом случае имеет вид

$$\Delta \Phi = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha [T(r, \varphi) - T_0], \quad (8)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \text{ — оператор Лапласа,}$$

μ — коэффициент Пуассона,

α — коэффициент линейного температурного расширения, $T(r, \varphi)$ — T_0 разность температуры: текущей и начальной.

Подставляя разность температур из выражения (5) в (8), получим

$$\Delta \Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu} B_{i\nu} [I_{\nu}(\lambda_i r) + \alpha_{i\nu} N_{\nu}(\lambda_i r)] \cos \nu \varphi, \quad (9)$$

где

$$B_{i\nu} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha (T_0 - T_1) A_{i\nu} e^{-\bar{a} \lambda_i^2 t}.$$

Частный интеграл уравнения (9), как в этом легко убедиться непосредственной подстановкой, имеет вид

$$\Phi = - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu} \frac{B_{i\nu}}{\lambda_i^2} [I_{\nu}(\lambda_i r) + \alpha_{i\nu} N_{\nu}(\lambda_i r)] \cos \nu \varphi. \quad (10)$$

В случае плоского температурного поля, когда функция распределения температуры $T = T(r, \varphi)$, температурные напряжения первой группы, как известно [1], [2], определяются следующим образом:

$$\bar{\sigma}_r = -2G \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right),$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_\varphi &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \\ \bar{\sigma}_{r\varphi} &= 2G \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} \right),\end{aligned}\quad (11)$$

где $\bar{\sigma}_r$ и $\bar{\sigma}_\varphi$ — нормальные радиальные и тангенциальные напряжения, $\bar{\sigma}_{r\varphi}$ — касательные напряжения.

Из выражений (10) и (11) определяются напряжения первой группы, в общем случае не удовлетворяющие граничным условиям задачи. Поэтому на полученное решение (11) необходимо наложить решение основной задачи теории упругости с тем, чтобы компенсировать нагрузки на границе.

Суммарные напряжения для случая плоской задачи термоупругости, как известно [1], имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) (F - 2G\Phi), \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} (F - 2G\Phi), \\ \sigma_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (F - 2G\Phi) \right], \\ \sigma_z &= \Delta(\mu F - 2G\Phi),\end{aligned}\quad (12)$$

где F — функция напряжений Эри, удовлетворяющая уравнению $\Delta \Delta F = 0$.

На границах цилиндрического сектора, как на свободных от нагрузки поверхностях, имеем следующие нулевые граничные условия:

$$\sigma_r \Big|_{r=a} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} \Big|_{r=a} = 0, \quad (13)$$

$$\sigma_\varphi \Big|_{\varphi=\pm\beta} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} \Big|_{\varphi=\pm\beta} = 0. \quad (14)$$

Для удовлетворения граничных условий (13) по боковым поверхностям сектора используем функцию напряжений Эри в виде

$$F_1 = \sum_\nu [K_\nu r^{-\nu} + M_\nu r^\nu + P_\nu r^{\nu+2} + Q_\nu r^{-\nu+2}] \cos \nu \varphi. \quad (15)$$

Коэффициенты бигармонической функции (15) K_ν , M_ν , P_ν , Q_ν определяются из граничных условий (13), которые удовлетворяются точным образом; для их определения имеем, для каждого значения ν , систему четырех алгебраических неоднородных уравнений

1. $f_1(i_\nu, \nu, a) = [\nu(1+\nu)a^{-(\nu+2)}K_\nu - \nu(1-\nu)a^{\nu-2}M_\nu - (2+\nu-\nu^2)a^\nu P_\nu + (\nu-2+\nu^2)a^{-\nu}Q_\nu],$
2. $f_1(i_\nu, \nu, b) = [\nu(1+\nu)b^{-(\nu+2)}K_\nu - \nu(1-\nu)b^{\nu-2}M_\nu - (2+\nu-\nu^2)b^\nu P_\nu + (\nu-2+\nu^2)b^{-\nu}Q_\nu],$
3. $f_2(i_\nu, \nu, a) = [\nu(1+\nu)a^{-(\nu+2)}K_\nu + \nu(1-\nu)a^{\nu-2}M_\nu - \nu(1+\nu)a^\nu P_\nu + \nu(\nu-1)a^{-\nu}Q_\nu],$

$$4. \quad f_2(\lambda_i, \nu, b) = [\nu(1+\nu)b^{-(\nu+2)}K_\nu + \nu(1-\nu)b^{\nu-2}M_\nu - \\ - \nu(1+\nu)b^\nu P_\nu + \nu(1-\nu)b^{-\nu}Q_\nu]. \quad (16)$$

В системе уравнений (16) функции $f_1(\lambda_i, \nu, r)$ и $f_2(\lambda_i, \nu, r)$ имеют следующие значения:

$$f_1(\lambda_i, \nu, r) = 2G \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{i\nu}}{\lambda_i r} \left\{ I_{\nu-1}(\lambda_i r) - \frac{\nu I_\nu(\lambda_i r)}{\lambda_i r} + \right. \\ \left. + \alpha_{i\nu} \left[N_{\nu-1}(\lambda_i r) - \frac{\nu N_\nu(\lambda_i r)}{\lambda_i r} \right] \right\} - \\ - 2G \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu^2 B_{i\nu}}{\lambda_i^2 r^2} [I_\nu(\lambda_i r) + \alpha_{i\nu} N_\nu(\lambda_i r)], \quad (17)$$

$$f_2(\lambda_i, r, \nu) = 2G \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu B_{i\nu}}{\lambda_i r} \left\{ I_{\nu-1}(\lambda_i r) - \frac{\nu I_\nu(\lambda_i r)}{\lambda_i r} + \alpha_{i\nu} \left[N_{\nu-1}(\lambda_i r) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\nu N_\nu(\lambda_i r)}{\lambda_i r} \right] \right\} - 2G \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu B_{i\nu}}{\lambda_i^2 r^2} [I_\nu(\lambda_i r) + \alpha_{i\nu} N_\nu(\lambda_i r)].$$

Определив коэффициенты K_ν , M_ν , P_ν , Q_ν из системы уравнений (16) по формуле (15), найдем функцию напряжений F_1 , через которую по известным формулам

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \\ \bar{\sigma}_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \\ \bar{\sigma}_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right), \quad (18)$$

определим вторую группу напряжений $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\varphi$, $\bar{\sigma}_{r\varphi}$. Суммарные напряжения

$$\sigma_r = \bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_r, \quad \sigma_\varphi = \bar{\sigma}_\varphi + \bar{\sigma}_\varphi, \quad \sigma_{r\varphi} = \bar{\sigma}_{r\varphi} + \bar{\sigma}_{r\varphi}$$

удовлетворяют уравнениям равновесия, совместности деформаций и граничным условиям (13). Остается удовлетворить граничные условия (14). С этой целью привлечем к рассмотрению функцию напряжений

$$F_2 = [p_{12}r^{-\delta} + p_{22}r^\delta + p_{32}r^{\delta+2} + p_{42}r^{-\delta+2}] \times \\ \times (q_{12}\cos\delta\varphi + q_{22}\sin\delta\varphi). \quad (19)$$

Напряжения $\bar{\sigma}_r^2$ и $\bar{\sigma}_{r\varphi}^2$, выраженные через функцию F_2 по формулам (18), должны принимать нулевые значения на границах $r=a$ и $r=b$. Подставляя значения напряжений $\bar{\sigma}_r^2$ и $\bar{\sigma}_{r\varphi}^2$ в граничные условия (13), получим систему четырех алгебраических однородных уравнений относительно коэффициентов p_{12} , ..., p_{42} . Система имеет решение в том случае, если ее определитель равен нулю. Так как выражения

$$(q_{12}\cos\delta\varphi + q_{22}\sin\delta\varphi) \neq 0, \\ (q_{12}\sin\delta\varphi - q_{22}\cos\delta\varphi) \neq 0,$$

(в противном случае получим тривиальное решение), имеем

$$\begin{vmatrix} \delta(1+\delta)a^{\delta-2}, & \delta(1-\delta)a^{\delta-2}, & -(\delta+2-\delta^2)a^{\delta}, & (\delta-2+\delta^2)a^{-\delta} \\ \delta(1+\delta)b^{\delta-2}, & -\delta(1-\delta)b^{\delta-2}, & -(\delta+2-\delta^2)b^{\delta}, & (\delta-2+\delta^2)b^{-\delta} \\ \delta(1+\delta)a^{\delta-2}, & \delta(1-\delta)a^{\delta-2}, & -\delta(\delta+1)a^{\delta}, & \delta(\delta-1)a^{-\delta} \\ \delta(1+\delta)b^{\delta-2}, & \delta(1-\delta)b^{\delta-2}, & -\delta(\delta+1)b^{\delta}, & \delta(\delta-1)b^{-\delta} \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

Из уравнения (20) определяется бесчисленное множество корней δ_s . Функция F_2 в этом случае запишется в виде

$$F_2 = \left[r^{-\delta} + \frac{A_{22}}{A_{12}} r^{\delta} + \frac{A_{32}}{A_{12}} r^{\delta+2} + \frac{A_{42}}{A_{12}} r^{-\delta+2} \right] (x_{12} \cos \delta \varphi + x_{22} \sin \delta \varphi), \quad (21)$$

где A_{12} , A_{22} , A_{32} , A_{42} — адьюнкты элементов любой строки определителя (20),

$$x_{12} = p_{12} q_{12}, \quad x_{22} = p_{12} q_{22}, \quad (22)$$

x_{12} , x_{22} — коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий (14).

С помощью функции F_2 получили два коэффициента (22)', а условий на границе $\varphi = \pm \beta$ четыре. Два недостающих коэффициента найдем с помощью функции F_3 , которую выбираем в виде

$$F_3 = [p_{13} \cos(m \ln r) + p_{23} \sin(m \ln r) + p_{33} r^2 \cos(m \ln r) + p_{43} r^2 \sin(m \ln r)] (q_{13} \operatorname{ch} m \varphi + q_{23} \operatorname{sh} m \varphi). \quad (23)$$

Легко показать, что функция F_3 является бигармонической. Поступая с функцией F_3 аналогичным образом, получим для определения чисел m трансцендентное уравнение вида

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{a^2} [m \cos(m \ln a) - \sin(m \ln a)], & \frac{m}{a^2} [m \sin(m \ln a) + \cos(m \ln a)], \\ \text{idem}(b) \\ \frac{m}{a^2} [\cos(m \ln a) + m \sin(m \ln a)], & \frac{m}{a^2} [\sin(m \ln a) - m \cos(m \ln a)], \\ \text{idem}(b) \\ (2+m^2) \cos(m \ln a) - m \sin(m \ln a), & (m^2+2) \sin(m \ln a) + m \cos(m \ln a) \\ \text{idem}(b) \\ m[m \sin(m \ln a) - \cos(m \ln a)], & -m[\sin(m \ln a) + m \cos(m \ln a)] \\ \text{idem}(b) \end{vmatrix} = 0. \quad (24)$$

Уравнение (24) определяет бесконечное множество корней m_k ; функция F_3 принимает вид

$$F_3 = \left[\cos(m \ln r) + \frac{A_{23}}{A_{13}} \sin(m \ln r) + \frac{A_{33}}{A_{13}} r^2 \cos(m \ln r) + \frac{A_{43}}{A_{13}} r^2 \sin(m \ln r) \right] (x_{13} \operatorname{ch} m \varphi + x_{23} \operatorname{sh} m \varphi), \quad (25)$$

где A_{13} , A_{23} , A_{33} , A_{43} — адьюнкты элементов любой строки определителя (24),

коэффициенты $\kappa_{13} = p_{13}q_{13}$, $\kappa_{23} = p_{13}q_{23}$ определяются из граничных условий (14).

Граничные условия (14), с учетом введенных функций F_2 и F_3 , запишутся в виде

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{\varphi} &= \bar{\sigma}_{\varphi}^1 + \bar{\sigma}_{\varphi}^2 + \bar{\sigma}_{\varphi}^3 \Big|_{\varphi=\pm\beta} = 0, \\ \bar{\sigma}_{r\varphi} &= \bar{\sigma}_{r\varphi}^1 + \bar{\sigma}_{r\varphi}^2 + \bar{\sigma}_{r\varphi}^3 \Big|_{\varphi=\pm\beta} = 0,\end{aligned}\quad (26)$$

где индекс сверху у напряжений означает номер функции напряжений F_i ($i=1, 2, 3$).

Вычисляя напряжения $\bar{\sigma}_{\varphi}^2$, $\bar{\sigma}_{r\varphi}^2$ по формулам (18) и (19), $\bar{\sigma}_{\varphi}^3$, $\bar{\sigma}_{r\varphi}^3$ по формулам (18) и (25) и подставляя их значения в граничные условия (26), получим систему четырех неоднородных уравнений относительно четырех неизвестных коэффициентов в виде

$$\begin{aligned}[f_3(r, \delta)(\kappa_{12} \cos \delta \varphi + \kappa_{22} \sin \delta \varphi) + f_4(r, m)(\kappa_{13} \operatorname{ch} m \varphi + \\ + \kappa_{23} \operatorname{sh} m \varphi)]_{\varphi=\pm\beta} = -(\bar{\sigma}_{\varphi}^1 + \bar{\sigma}_{r\varphi}^1)_{\varphi=\pm\beta}, \\ [f_5(r, \delta)(-\kappa_{12} \sin \delta \varphi + \kappa_{22} \cos \delta \varphi) + f_6(r, m)(\kappa_{13} \operatorname{sh} m \varphi + \\ + \kappa_{23} \operatorname{ch} m \varphi)]_{\varphi=\pm\beta} = -(\bar{\sigma}_{r\varphi}^1 + \bar{\sigma}_{\varphi}^1)_{\varphi=\pm\beta},\end{aligned}\quad (27)$$

где для краткости введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}f_3(r, \delta) &= \delta(\delta+1)r^{-\delta-2} + \delta(\delta-1)\frac{A_{22}}{A_{12}}r^{\delta-2} + (\delta+1)(\delta+2)\frac{A_{32}}{A_{12}}r^{\delta} + \\ &+ (\delta-2)(\delta-1)\frac{A_{42}}{A_{12}}r^{-\delta}, \\ f_4(r, m) &= \frac{m}{r^2} [\sin(m \ln r) - m \cos(m \ln r)] - \frac{m}{r^2} \frac{A_{23}}{A_{13}} [\cos(m \ln r) + \\ &+ m \sin(m \ln r)] \frac{A_{33}}{A_{13}} [(2-m^2) \cos(m \ln r) - \\ &- 3m \sin(m \ln r)] + \frac{A_{43}}{A_{13}} [(2-m^2) \sin(m \ln r) + 3m \cos(m \ln r)], \\ f_5(r, \delta) &= \delta[(1+\delta)r^{-\delta-2} + (1+\delta)\frac{A_{22}}{A_{12}}r^{\delta-2} - (\delta+1)\frac{A_{32}}{A_{12}}r^{\delta} + \\ &+ (\delta-1)\frac{A_{42}}{A_{12}}r^{-\delta}], \\ f_6(r, m) &= \frac{m}{r^2} [\cos(m \ln r) + m \sin(m \ln r)] + \frac{m}{r^2} \frac{A_{23}}{A_{13}} [\sin(m \ln r) - \\ &- m \cos(m \ln r)] + m \frac{A_{33}}{A_{13}} [m \sin(m \ln r) - \cos(m \ln r)] - \\ &- m \frac{A_{43}}{A_{13}} [\sin(m \ln r) + m \cos(m \ln r)].\end{aligned}\quad (28)$$

Граничные условия в меридиональных плоскостях могут быть удовлетворены только приближенным образом, так как система уравнений (27) содержит функции от r в левой и правой частях. Каждому выбран-

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

П. С. СОЛОМИН

Рассматривается задача о симметричной деформации в полом цилиндре с анизотропией частного вида. Трансверсально-изотропное тело характеризуется тем, что его упругие свойства являются эквивалентными для всех сечений, нормальных к оси тела вращения.

Известно [2], что напряжения первой группы выражаются посредством некоторой функции Ψ следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_r &= \beta \bar{A}_{33} A_{44} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(d\Delta_r^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - q \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta_r^2 + a^* \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \psi, \\ \bar{\sigma}_\varphi &= \beta \bar{A}_{33} A_{44} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(d\Delta_r^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - q \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\Delta_r^2 + a^* \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \psi, \\ \bar{\sigma}_z &= \beta \bar{A}_{33} A_{44} \Delta_r^2 \left(d\Delta_r^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi, \\ \bar{\sigma}_{rz} &= -\beta \bar{A}_{33} A_{44} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(d\Delta_r^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi,\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$\Delta_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}.$$

Функция Ψ определяется [2] из уравнения

$$T - T_0 = \bar{A}_{33} A_{44} \left(\mu_1^2 \Delta_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\mu_3^2 \Delta_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi,\tag{2}$$

где $T \equiv T(r, z, t)$ — функция распределения температуры, находится из решения нестационарной задачи теплопроводности,

T_0 — начальная температура.

Решение нестационарной задачи теплопроводности для трансверсально-изотропного полого цилиндра конечных размеров при граничных условиях третьего рода на наружных поверхностях и при условии теплоизоляции в канале цилиндра имеет вид

$$\frac{T(r, z, t) - T_c}{T_0 - T_c} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} E_{ij} B_{i0} \left(\frac{\lambda_i a}{\mu_5}, \frac{\lambda_i r}{\mu_5} \right) \cos \beta_j z \cdot e^{-\frac{\lambda_i^2 + \beta_j^2}{a^2} t},\tag{3}$$

где T_c — температура окружающей среды,

$$B_{10}\left(\frac{\lambda_i a}{\mu_5}, \frac{\lambda_i r}{\mu_5}\right) = N_1\left(\frac{\lambda_i a}{\mu_5}\right) I_0\left(\frac{\lambda_i r}{\mu_5}\right) - I_1\left(\frac{\lambda_i a}{\mu_5}\right) N_0\left(\frac{\lambda_i r}{\mu_5}\right),$$

$N_0\left(\frac{\lambda_i r}{\mu_5}\right), \dots, I_1\left(\frac{\lambda_i a}{\mu_5}\right)$ — функции Неймана и Бесселя.

λ_i, β_j — собственные числа; находятся из граничных условий задачи теплопроводности,

E_{ij} — коэффициенты; определяются из начального условия задачи теплопроводности,

$$\mu_5^2 = \frac{\lambda}{\lambda'}, \quad \sigma^2 = \frac{c\rho}{\lambda'},$$

λ, λ' — коэффициенты теплопроводности соответственно в направлении, нормальном к оси вращения, и в направлении оси вращения,

c, ρ — теплоемкость и плотность материала.

Совместное решение уравнений (2) и (3) определяет функцию Ψ в виде

$$\Psi = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_{ij}}{H_{ij}} (T_0 - T_c) B_{10}\left(\frac{\lambda_i a}{\mu_5}, \frac{\lambda_i r}{\mu_5}\right) \cos \beta_j z \cdot e^{-\frac{\lambda_i^2 + \beta_j^2}{\sigma^2} t}, \quad (4)$$

где

$$H_{ij} = \bar{A}_{33} A_{44} \left(\frac{\mu_5^2}{2} \lambda_i^2 + \beta_j^2 \right) \left(\frac{\mu_5^2}{2} \lambda_i^2 + \beta_j^2 \right).$$

Через функцию Ψ по формулам (1) определяются искомые напряжения первой группы. Напряжения первой группы не удовлетворяют граничным условиям задачи, которые для рассматриваемого полого цилиндра, свободного от внешних нагрузок, имеют вид

$$\sigma_r \Big|_{r=a} = 0, \quad \sigma_{rz} \Big|_{r=a} = 0, \quad (5)$$

$$\sigma_z \Big|_{z=\pm l} = 0, \quad \sigma_{rz} \Big|_{z=\pm l} = 0. \quad (6)$$

В граничных условиях (5) и (6) $\sigma_r, \dots, \sigma_{rz}$ без черты означают полные термоупругие напряжения. Вторая группа напряжений $\bar{\sigma}_r^1, \dots, \bar{\sigma}_z^1$ находится с помощью функции С. Г. Лехницкого [1], [3] Φ , удовлетворяющей уравнению

$$\left(\mu_1^2 \Delta_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\mu_3^2 \Delta_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = 0. \quad (7)$$

Напряжения второй группы через функцию Лехницкого Φ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= -\bar{A}_{33} A_{44} \frac{\partial}{\partial z} \left[a_1 \Delta_r^2 - (a_1 - b_1) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \gamma \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Phi, \\ \bar{\sigma}_\varphi &= -\bar{A}_{33} A_{44} \frac{\partial}{\partial z} \left[a_1 \Delta_r^2 - (a_1 - b_1) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \gamma \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Phi, \\ \bar{\sigma}_z &= \bar{A}_{33} A_{44} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \Delta_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\bar{\varepsilon}_{rz} = \bar{A}_{33} A_{44} \frac{\partial}{\partial r} \left(a_1 \Delta_r^2 - \gamma \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi,$$

где для краткости введены обозначения

$$a_1 = \mu_1^2 \mu_3^2, \quad b_1 = \mu_1^2 \mu_3^2 - 2\mu_7^2 \left(\gamma + \frac{1}{\eta} \right),$$

$$\gamma = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad p = \mu_1^2 + \mu_3^2 + \gamma.$$

Решение уравнения (7) зависит от соотношения между μ_1 и μ_3 . Рассматривается два случая.

1. Случай $\mu_1 \neq \mu_3$. В этом случае функция Лехницкого выбирается в следующем виде:

$$\varphi_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_j I_0 \left(\frac{\beta_j r}{\mu_1} \right) + B_j I_0 \left(\frac{\beta_j r}{\mu_3} \right) + C_j K_0 \left(\frac{\beta_j r}{\mu_1} \right) + D_j K_0 \left(\frac{\beta_j r}{\mu_3} \right) \right] \sin \beta_j z, \quad (9)$$

где $I_0 \left(\frac{\beta_j r}{\mu_1} \right)$, $K_0 \left(\frac{\beta_j r}{\mu_3} \right)$ — модифицированные функции Бесселя.

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (5) с помощью функции φ_1 (9) выполняются точным образом. Коэффициенты A_j , ..., D_j для каждого значения j определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} 1. \quad & f_1(\beta_j a) A_j + f_2(\beta_j a) B_j + f_3(\beta_j a) C_j + f_4(\beta_j a) D_j = \\ & = \frac{1}{\beta_j} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i E_{ij}}{H_{ij}} (T_0 - T_c) \left[\beta_j^2 \left(d \frac{\lambda_i^2}{\mu_5^2} + \beta_j^2 e \right) B_{10} \left(\frac{\lambda_i a}{\mu_5}, \frac{\lambda_i a}{\mu_5} \right) \right] \times \\ & \times \exp \left[- \frac{\lambda_i^2 + \beta_j^2}{\sigma^2} t \right]. \\ 2. \quad & f_1(\beta_j b) A_j + f_2(\beta_j b) B_j + f_3(\beta_j b) C_j + f_4(\beta_j b) D_j = \\ & = \frac{1}{\beta_j} \sum_{i=1}^{\infty} \beta \frac{E_{ij}}{H_{ij}} (T_0 - T_c) \left[\beta_j^2 \left(d \frac{\lambda_i^2}{\mu_5^2} + \beta_j^2 e \right) B_{10} \left(\frac{\lambda_i a}{\mu_5}, \frac{\lambda_i b}{\mu_5} \right) - \right. \\ & \left. - q \frac{\lambda_i}{b \mu_5} \left(\frac{\lambda_i^2}{\mu_5^2} + a^* \beta_j^2 \right) B_{11} \left(\frac{\lambda_i a}{\mu_5}, \frac{\lambda_i b}{\mu_5} \right) \right] \exp \left[- \frac{\lambda_i^2 + \beta_j^2}{\sigma^2} t \right]. \quad (10) \\ 3. \quad & f_5(\beta_j a) A_j + f_6(\beta_j a) B_j - f_7(\beta_j a) C_j - f_8(\beta_j a) D_j = 0. \\ 4. \quad & f_5(\beta_j b) A_j + f_6(\beta_j b) B_j - f_7(\beta_j b) C_j - f_8(\beta_j b) D_j = \\ & = - \frac{1}{\beta_j} \sum_{i=1}^{\infty} \beta \frac{E_{ij}}{H_{ij}} (T_0 - T_c) \frac{\beta_j \lambda_i}{\mu_5} \left(d \frac{\lambda_i^2}{\mu_5^2} + \beta_j^2 e \right) \times \\ & \times B_{11} \left(\frac{\lambda_i a}{\mu_5}, \frac{\lambda_i b}{\mu_5} \right) \exp \left[- \frac{\lambda_i^2 + \beta_j^2}{\sigma^2} t \right], \end{aligned}$$

где для краткости введены обозначения:

$$f_1(\beta_j r) = \beta_j^2 \left(\frac{a_1}{\mu_1^2} + \gamma \right) I_0 \left(\frac{\beta_j r}{\mu_1} \right) - (a_1 - b_1) \frac{\beta_j}{r \mu_1} I_1 \left(\frac{\beta_j r}{\mu_1} \right),$$

$$\begin{aligned}
f_3(\beta_j r) &= \beta_j^2 \left(\frac{a_1}{\mu_1^2} + \gamma \right) K_0 \left(\frac{\beta_j r}{\mu_1} \right) + (a_1 - b_1) \frac{\beta_j}{r \mu_1} K_1 \left(\frac{\beta_j r}{\mu_1} \right), \\
f_5(\beta_j r) &= \frac{\beta_j^2}{\mu_1} \cdot \left(\frac{a_1}{\mu_1^2} + \gamma \right) I_1 \left(\frac{\beta_j r}{\mu_1} \right), \\
f_7(\beta_j r) &= \frac{\beta_j^2}{\mu_1} \left(\frac{a_1}{\mu_1^2} + \gamma \right) K_1 \left(\frac{\beta_j r}{\mu_1} \right). \quad (11)
\end{aligned}$$

Функции f_2, f_4, f_6, f_8 аналогичны функциям (11), в которых всюду следует заменить величину μ_1 на μ_3 . Определив коэффициенты из (11) для каждого значения β_j , подставив их величины в формулу (9), найдем функцию Лехницкого φ_1 , посредством которой по формулам (8) найдется вторая группа напряжений. Для полного решения задачи необходимо удовлетворить граничные условия (6) по торцам цилиндра. С этой целью привлечем к рассмотрению функции Лехницкого φ_2 и φ_3 , выбранные следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \left[p_{12} I_0 \left(\frac{\delta r}{\mu_1} \right) + p_{22} I_0 \left(\frac{\delta r}{\mu_3} \right) + p_{32} N_0 \left(\frac{\delta r}{\mu_1} \right) + \right. \\
&\quad \left. + p_{42} N_0 \left(\frac{\delta r}{\mu_3} \right) \right] \cdot (q_{12} \operatorname{ch} \delta z + q_{22} \operatorname{sh} \delta z), \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_3 &= \left[p_{13} I_0 \left(\frac{\nu r}{\mu_1} \right) + p_{23} I_0 \left(\frac{\nu r}{\mu_1} \right) + p_{33} K_0 \left(\frac{\nu r}{\mu_1} \right) + \right. \\
&\quad \left. + p_{43} K_0 \left(\frac{\nu r}{\mu_3} \right) \right] (q_{13} \cos \nu z + q_{23} \sin \nu z). \quad (13)
\end{aligned}$$

Выбранные функции (12) тождественно удовлетворяют уравнение Лехницкого (7).

Потребуем, чтобы напряжения $\bar{\sigma}_r^2, \bar{\sigma}_{rz}^2$ найденные по формулам (8) и (12), удовлетворяли граничным условиям (5). Для этого необходимо, чтобы

$$\bar{\sigma}_r^2 \Big|_{r=a} = 0, \quad \bar{\sigma}_{rz}^2 \Big|_{r=a} = 0. \quad (14)$$

Однородная система уравнений (14) имеет отличное от нуля решение только в том случае, если определитель системы равен нулю, имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{f}_1(\delta, a), & \bar{f}_2(\delta, a), & \bar{f}_3(\delta, a), & \bar{f}_4(\delta, a) \\ & \operatorname{idem}(\delta, b) & & \\ \bar{f}_9(\delta, a), & \bar{f}_{10}(\delta, a), & \bar{f}_{11}(\delta, a), & \bar{f}_{12}(\delta, a) \\ & \operatorname{idem}(\delta, b) & & \end{vmatrix} = 0, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{f}_1(\delta, r) &= \delta \left[\left(\frac{a_1}{\mu_1^2} + \gamma \right) \delta^2 I_0 \left(\frac{\delta r}{\mu_1} \right) - (a_1 - b_1) \frac{\delta}{r \mu_1} I_1 \left(\frac{\delta r}{\mu_1} \right) \right], \\
\bar{f}_3(\delta, r) &= \delta \left[\left(\frac{a_1}{\mu_1^2} + \gamma \right) \delta^2 N_0 \left(\frac{\delta r}{\mu_1} \right) - (a_1 - b_1) \frac{\delta}{r \mu_1} N_1 \left(\frac{\delta r}{\mu_1} \right) \right], \\
\bar{f}_9(\delta, r) &= \frac{\delta^3}{\mu_1} \cdot \left(\frac{a_1}{\mu_1^2} + \gamma \right) I_1 \left(\frac{\delta r}{\mu_1} \right),
\end{aligned}$$

$$\bar{f}_{11}(\delta, r) = \frac{\delta^3}{\mu_1} \cdot \left(\frac{a_1}{\mu_1^2} + \gamma \right) N_1 \left(\frac{\delta r}{\mu_1} \right). \quad (16)$$

Функции $\bar{f}$ с четным номером получаются из (16) путем замены значения μ_1 на μ_3 . Уравнение (15) определяет бесконечное множество чисел σ . Напряжения третьей группы запишутся в виде

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z^2 &= x_1(\delta, r)(x_{12} \operatorname{sh} \delta z + x_{22} \operatorname{ch} \delta z), \\ \bar{\sigma}_{rz}^2 &= x_2(\delta, r)(x_{12} \operatorname{ch} \delta z + x_{22} \operatorname{sh} \delta z), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$x_{12} = p_{12} q_{12}, \quad x_{22} = p_{12} q_{22}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x_1(\delta, r) &= \bar{A}_{33} A_{44} \left[\bar{f}_5(\delta, r) + \frac{A_{22}}{A_{12}} \bar{f}_6(\delta, r) + \frac{A_{32}}{A_{12}} \bar{f}_7(\delta, r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_{42}}{A_{12}} \bar{f}_8(\delta, r) \right], \\ x_2(\delta, r) &= \bar{A}_{33} A_{44} \left[\bar{f}_9(\delta, r) + \frac{A_{22}}{A_{12}} \bar{f}_{10}(\delta, r) + \frac{A_{32}}{A_{12}} \bar{f}_{11}(\delta, r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_{42}}{A_{12}} \bar{f}_{12}(\delta, r) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\bar{f}_5(\delta, r) = \delta^3 \left(1 - \frac{p}{\mu_1^2} \right) I_0 \left(\frac{\delta r}{\mu_1} \right), \quad \bar{f}_7(\delta, r) = \delta^3 \left(1 - \frac{p}{\mu_1^2} \right) N_0 \left(\frac{\delta r}{\mu_1} \right),$$

$A_{12}, \dots, A_{42}$ — адьюнкты элементов любой строки определителя (15).

Поступая аналогичным образом с функцией φ_3 (13), получим трансцендентное уравнение для определения корней v в виде

$$\Delta' = \begin{vmatrix} f_1(v, a), f_2(v, a), f_3(v, a), f_4(v, a) \\ \operatorname{idem}(v, b) \\ f_5(v, a), f_6(v, a), f_7(v, a), f_8(v, a) \\ \operatorname{idem}(v, b) \end{vmatrix} = 0, \quad (20)$$

где функции $f_1(v, r), \dots, f_8(v, r)$ определяются по формулам (11), в которых β_j всюду необходимо заменить на v . Напряжения четвертой группы выразятся формулами:

$$\bar{\sigma}_z^3 = x_3(v, r)(-x_{13} \sin v z + x_{23} \cos v z), \quad (21)$$

$$\bar{\sigma}_{rz}^3 = x_4(v, r)(x_{13} \cos v z + x_{23} \sin v z), \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} x_{13} &= p_{13} q_{13}, \quad x_{23} = p_{23} q_{23}, \\ x_3(v, r) &= v \left[f_9(v, r) + \frac{A_{23}}{A_{13}} f_{10}(v, r) + \frac{A_{33}}{A_{43}} f_{11}(v, r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_{43}}{A_{13}} f_{12}(v, r) \right] \bar{A}_{33} A_{44}, \\ x_4(v, r) &= v \bar{A}_{33} A_{44} \left[f_5(v, r) + \frac{A_{23}}{A_{13}} f_6(v, r) - \frac{A_{33}}{A_{13}} f_7(v, r) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{A_{43}}{A_{13}} f_8(v, r) \right], \end{aligned}$$

$$f_{11}(v, r) = v^2 \left(\frac{p}{\mu_1^2} - 1 \right) K_0 \left(\frac{vr}{\mu_1} \right).$$

$A_{13}, \dots, A_{43}$ — адъюнкты элементов любой строки определителя (20).

В формулах для напряжений (17) и (21) входит для каждого значения δ_k и ν_k по две неизвестные константы (18) и (22); всего имеем четыре константы для каждой пары значений (δ_k, ν_k) . Постоянные $\chi_{12}^k, \chi_{22}^k, \chi_{13}^k, \chi_{23}^k$ найдутся из граничных условий (6). Для их определения имеем систему уравнений

$$\begin{aligned}
1. \quad & \sum_{\delta_k} x_1(\delta_k, r_k)(x_{12}^k \text{sh} \delta_k l + x_{22}^k \text{ch} \delta_k l) + \\
& + \sum_{v_k} x_3(v_k, r_k)(-x_{13}^k \sin v_k l + x_{23}^k \cos v_k l) = -(\bar{\gamma}_z + \bar{\gamma}_l^1) \Big|_{r=r_k}^{z=l}. \\
2. \quad & \sum_{\delta_k} x_1(\delta_k, r_k)(-x_{12}^k \text{sh} \delta_k l + x_{22}^k \text{ch} \delta_k l) + \\
& + \sum_{v_k} x_3(v_k, r_k)(x_{13}^k \sin v_k l + x_{23}^k \cos v_k l) = -(\bar{\gamma}_z + \bar{\gamma}_l^1) \Big|_{r=r_k}^{z=-l}. \\
3. \quad & \sum_{\delta_k} x_2(\delta_k, r_k)(x_{12}^k \text{ch} \delta_k l + x_{22}^k \text{sh} \delta_k l) + \sum_{v_k} x_4(v_k, r_k)(x_{13}^k \cos v_k l + \\
& + x_{23}^k \sin v_k l) = -(\bar{\gamma}_{rz} + \bar{\gamma}_{rz}^1) \Big|_{r=r_k}^{z=l}. \\
4. \quad & \sum_{\delta_k} x_2(\delta_k, r_k)(x_{12}^k \text{ch} \delta_k l - x_{22}^k \text{sh} \delta_k l) + \\
& + \sum_{v_k} x_4(v_k, r_k)(x_{13}^k \cos v_k l - x_{23}^k \sin v_k l) = -(\bar{\gamma}_{rz} + \bar{\gamma}_{rz}^1) \Big|_{r=r_k}^{z=-l}.
\end{aligned} \quad (23)$$

Система уравнений (23) может быть решена приближенным образом. После определения коэффициентов χ_{12}^k , χ_{22}^k , χ_{13}^k , χ_{23}^k (k — любое число) легко находятся функции Лехницкого, а следовательно, и напряжения третьей и четвертой групп. Полные температурные напряжения равны алгебраической сумме напряжений всех четырех групп

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_r &= \overline{\mathfrak{J}}_r + \overline{\mathfrak{J}}_r^1 + \overline{\mathfrak{J}}_r^2 + \overline{\mathfrak{J}}_r^3, \\ &\vdots \\ \mathfrak{J}_{r\bar{z}} &= \overline{\mathfrak{J}}_{r\bar{z}} + \overline{\mathfrak{J}}_{r\bar{z}}^1 + \overline{\mathfrak{J}}_{r\bar{z}}^2 + \overline{\mathfrak{J}}_{r\bar{z}}^3. \end{aligned} \quad (24)$$

2. Случай $\mu_1 = \mu_3$. В этом случае температурные напряжения первой группы, как и прежде, определяются формулами (1), (4). Функция напряжений Лехницкого φ_1 (9) при $\mu_1 = \mu_3$ будет содержать только две константы, что явно недостаточно для удовлетворения граничных условий (5). Для случая $\mu_1 = \mu_3$ функцию Лехницкого φ_1 следует выбрать в виде

в виде

$$\Phi_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_j I_0 \left(\frac{\beta_j r}{\mu_1} \right) + B_j \frac{\beta_j r}{\mu_1} I_1 \left(\frac{\beta_j r}{\mu_1} \right) + C_j K_0 \left(\frac{\beta_j r}{\mu_1} \right) + \right. \\ \left. + D_j \frac{\beta_j r}{\mu_1} K_1 \left(\frac{\beta_j r}{\mu_1} \right) \right] \sin \beta_j z. \quad (25)$$

Коэффициенты $A_j, \dots, D_j$ для каждого значения j найдутся из граничных условий (5), а напряжения по формулам (8).

Для удовлетворения граничных условий (6) по торцам цилиндра необходимо привлечь к рассмотрению еще две функции Лехницкого вида

$$\Phi_2 = \left[p_{12} I_0 \left(\frac{\delta r}{\mu_1} \right) + p_{22} \frac{\delta r}{\mu_1} I_1 \left(\frac{\delta r}{\mu_1} \right) + p_{32} N_0 \left(\frac{\delta r}{\mu_1} \right) + \right. \\ \left. + p_{42} \frac{\delta r}{\mu_1} N_1 \left(\frac{\delta r}{\mu_1} \right) \right] (q_{12} \operatorname{ch} \delta z + q_{22} \operatorname{sh} \delta z), \\ \Phi_3 = \left[p_{13} I_0 \left(\frac{\nu r}{\mu_1} \right) + p_{23} \frac{\nu r}{\mu_1} I_1 \left(\frac{\nu r}{\mu_1} \right) + p_{33} K_0 \left(\frac{\nu r}{\mu_1} \right) + \right. \\ \left. + p_{43} \frac{\nu r}{\mu_1} K_1 \left(\frac{\nu r}{\mu_1} \right) \right] (q_{13} \cos \nu z + q_{23} \sin \nu z). \quad (26)$$

С помощью функций (26) граничные условия (6) удовлетворяются приближенным образом. Методика использования функций Φ_2 и Φ_3 аналогичны методике, изложенной выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Лехницкий. Симметричная деформация и кручение анизотропного тела вращения с анизотропией частного вида. П. М. М., 1940, т. IV, вып. 3.
2. В. Новацкий. Вопросы термоупругости. Изд. АН СССР, М., 1962.
3. М. М. Фридман. Математическая теория упругости анизотропных сред. П. М. М. 1960, т. X, вып. 3.

Поступила 1. III. 1967.

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРОВ

В. Г. ПОТЕЙКО

Методом начальных функций [1], [2], [3] решается осесимметричная задача теории упругости для многослойного цилиндра. Получено аналитическое решение, точно удовлетворяющее граничным условиям на боковых поверхностях и условиям сопряжения на контактных поверхностях и позволяющее приближенно удовлетворить граничные условия на торцах. Численная реализация проводится для двуслойного цилиндра. Граничные условия на торцах удовлетворяются методом коллокаций и интегрально.

Обозначения: K — число слоев; k — номер слоя ($k=1, 2, \dots, K$); G_k — модуль сдвига и коэффициент Пуассона k -го слоя; ρ_0, ρ_k — внутренний и внешний радиусы цилиндра; r, z, φ — цилиндрические координаты (r и z — безразмерные, отнесенные к ρ_0); r_k — безразмерные радиусы поверхностей сопряжения слоев, l — безразмерная длина цилиндра; $\sigma_{rr}^k, \sigma_{rz}^k, \sigma_{zz}^k, \sigma_{\varphi\varphi}^k$ — компоненты тензора напряжений; u^k, w^k — радиальные и осевые перемещения.

§ 1. Основные соотношения

Следуя методу начальных функций [1], примем за основные искоемые функции $u^k, w^k, \sigma_{rr}^k, \sigma_{rz}^k$, и введем обозначения $V_1^k = u^k, V_2^k = w^k, V_3^k = \rho_0 \sigma_r^k, V_4^k = \rho_0 \sigma_{rz}^k, V_5^k = \rho_0 \sigma_{zz}^k, V_7^k = \rho_0 \sigma_{\varphi\varphi}^k$ ($k=1, 2, \dots, K$).

В этих обозначениях уравнения равновесия смешанного метода в цилиндрических координатах для осесимметричного случая и при отсутствии массовых сил запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1^k}{\partial r} &= -\frac{\mu_k}{1-\mu_k} \left(\frac{V_1^k}{r} + \alpha V_2^k \right) + \frac{1-2\mu_k}{2G_k(1-\mu_k)} V_3^k, \\ \frac{\partial V_2^k}{\partial r} &= -\alpha V_1^k + \frac{1}{G_k} V_4^k, \\ \frac{\partial V_3^k}{\partial r} &= \frac{2G_k}{1-\mu_k} \cdot \frac{V_1^k}{r^2} + \frac{2G_k \mu_k}{1-\mu_k} \frac{\alpha V_2^k}{r} - \frac{1-2\mu_k}{1-\mu_k} \frac{V_3^k}{r} - \alpha V_4^k, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_4^k}{\partial r} = -\frac{2G_k \mu_k}{1-\mu_k} \frac{\alpha V_1^k}{r} - \frac{2G_k}{1-\mu_k} \alpha^2 V_2^k - \frac{\mu_k}{1-\mu_k} \alpha V_3^k - \frac{V_4^k}{r},$$

$$r_{k-1} \leq r \leq r_k, \quad (k=1, 2, \dots, K). \quad (1.1)$$

Здесь через α обозначен символ дифференцирования по z $\alpha^n = \frac{\partial^n}{\partial z^n}$.

Функции V_5^k и V_7^k выражаются через основные по формулам

$$V_5^k = \frac{2G_k \mu_k}{1-\mu_k} \frac{V_1^k}{r} + \frac{2G_k}{1-\mu_k} \alpha V_2^k + \frac{\mu_k}{1-\mu_k} V_3^k,$$

$$V_7^k = \frac{2G_k}{1-\mu_k} \frac{V_1^k}{r} + \frac{2G_k \mu_k}{1-\mu_k} \alpha V_2^k + \frac{\mu_k}{1-\mu_k} V_3^k,$$

$$(k=1, 2, \dots, K). \quad (1.2)$$

Пусть граничные условия на боковых поверхностях заданы в напряжениях

$$V_3^I \Big|_{r=r_0} = \varphi_1(z), \quad V_4^I \Big|_{r=r_0} = \psi_1(z), \quad (1.3)$$

$$V_3^K \Big|_{r=r_K} = \varphi_2(z), \quad V_4^K \Big|_{r=r_K} = \psi_2(z). \quad (1.4)$$

Кроме того, на поверхностях сопряжения должны выполняться условия:

$$V_n^k \Big|_{r=r_k} = V_n^{k+1} \Big|_{r=r_k}, \quad (k=1, 2, \dots, K-1)$$

$$(n=1, 2, 3, 4). \quad (1.5)$$

Примем за начальную поверхность внутреннюю поверхность цилиндра и обозначим основные функции на этой поверхности через U_n :

$$V_n^I \Big|_{r=r_0} = U_n \quad (n=1, 2, 3, 4). \quad (1.6)$$

Далее, рассматривая α формально, как число, проинтегрируем систему уравнений (1.1) с условиями (1.5) и (1.6). Получим

$$V_n^k = \sum_{s=1}^4 M_{ns}^k(\alpha, r) U_s(z),$$

$$r_{k-1} \leq r \leq r_k, \quad (n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), \quad (1.7)$$

где через $M_{ns}^k(\alpha, r)$ обозначены следующие дифференциальные оператор-функции:

$$M_{ns}^k(\alpha, r) = \underbrace{\sum_{j=1}^4 \sum_{t=1}^4 \dots \sum_{m=1}^4 \sum_{v=1}^4}_{k-1} L_{nj}^k(\alpha, r) \cdot L_{jt}^{k-1}(\alpha, r_{k-1}) \cdot \dots \cdot L_{mv}^2(\alpha, r_2) \cdot L_{vs}^1(\alpha, r_1),$$

$$(n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7),$$

$$(s=1, 2, 3, 4), \quad (1.8)$$

$$L_{11}^k(\alpha, r) = \alpha_k \{[(\alpha r_{k-1})^2 - 4(1-\mu_k)] B_{11}^k + \alpha r B_{10}^k + \alpha r_{k-1} (3-2\mu_k) B_{01}^k -$$

$$- \alpha^2 r r_{k-1} B_{00}^k\}, \quad L_{12}^k(\alpha, r) = L_{43}^k(\alpha, r) = \alpha_k \alpha r_{k-1} [-2(1-\mu_k) B_{11}^k +$$

$$+ \alpha r B_{10}^k + \alpha r_{k-1} B_{01}^k], \quad L_{14}^k(\alpha, r) = \frac{\alpha_k r_{k-1}}{2G_k} [-\alpha r_{k-1} B_{11}^k + \alpha r B_{00}^k],$$

$$\begin{aligned}
L_{13}^k(\alpha, r) &= \frac{a_k r_{k-1}}{2G_k} [-4(1-\mu_k)B_{11}^k + \alpha r B_{10}^k + \alpha r_{k-1} B_{01}^k], \\
L_{21}^k(\alpha, r) &= a_k [\alpha r B_{11}^k - (\alpha r_{k-1})^2 B_{10}^k - \alpha^2 r r_{k-1} B_{01}^k + (1-2\mu_k) \alpha r_{k-1} B_{00}^k], \\
L_{22}^k(\alpha, r) &= a_k r_{k-1} \alpha [\alpha r B_{11}^k - 2(1-\mu_k) B_{10}^k - \alpha r_{k-1} B_{00}^k], \\
L_{23}^k(\alpha, r) &= \frac{a_k r_{k-1}}{2G_k} [\alpha r B_{11}^k - \alpha r_{k-1} B_{00}^k], \\
L_{24}^k(\alpha, r) &= \frac{a_k r_{k-1}}{2G_k} [\alpha r_{k-1} B_{10}^k + \alpha r B_{01}^k - 4(1-\mu_k) B_{00}^k], \\
L_{31}^k(\alpha, r) &= 2a_k G_k \left\{ \frac{1}{r} [4(1-\mu_k) - (r_{k-1}^2 + r^2) \alpha^2] B_{11}^k + \right. \\
&+ \alpha [\alpha r_{k-1})^2 - (3-2\mu_k)] B_{10}^k + \frac{\alpha r_{k-1}}{r} [\alpha^2 r^2 - (3-2\mu_k)] B_{01}^k + 2\alpha^2 r_{k-1} B_{00}^k \Big\}, \\
L_{32}^k(\alpha, r) &= 2a_k G_k \alpha r_{k-1} \left\{ \frac{1}{r} [2(1-\mu_k) - (\alpha r)^2] B_{11}^k - \alpha B_{10}^k - \frac{\alpha r_{k-1}}{r} B_{01}^k + \right. \\
&+ \alpha^2 r_{k-1} B_{00}^k \Big\}, \quad L_{33}^k(\alpha, r) = a_k \left\{ \frac{r_{k-1}}{r} [4(1-\mu_k) - (\alpha r)^2] B_{11}^k - \right. \\
&- (3-2\mu_k) \alpha r_{k-1} B_{10}^k + \alpha^2 r_{k-1}^2 B_{00}^k - \frac{\alpha r_{k-1}^2}{r} B_{01}^k \Big\}, \\
L_{34}^k(\alpha, r) &= a_k \alpha r_{k-1} \left[\frac{r_{k-1}}{r} B_{11}^k - \alpha r_{k-1} B_{10}^k - \alpha r B_{01}^k + (1-2\mu_k) B_{00}^k \right], \\
L_{41}^k(\alpha, r) &= 2a_k G_k \alpha \{ (\alpha r_{k-1})^2 - 2(1-\mu_k) \} B_{11}^k + \alpha r B_{10}^k + \alpha r_{k-1} B_{01}^k - \\
&- \alpha^2 r_{k-1} r B_{00}^k, \quad L_{42}^k(\alpha, r) = 2a_k G_k \alpha^2 [\alpha r B_{10}^k + \alpha r_{k-1} B_{01}^k] \cdot r_{k-1}, \\
L_{44}^k(\alpha, r) &= a_k \alpha [2(1-\mu_k) B_{01}^k - \alpha r_{k-1} B_{11}^k + \alpha r B_{00}^k], \\
L_{51}^k(\alpha, r) &= 2a_k G_k \alpha [\alpha r B_{11}^k - [2\mu_k + (\alpha r_{k-1})^2] B_{10}^k - \alpha^2 r r_{k-1} B_{01}^k + \\
&+ \alpha r_{k-1} B_{00}^k], \\
L_{53}^k(\alpha, r) &= a_k r_{k-1} [\alpha^2 r B_{11}^k - 2\mu_k \alpha B_{10}^k - \alpha^2 r_{k-1} B_{00}^k], \\
L_{54}^k(\alpha, r) &= a_k r_{k-1} \alpha [\alpha r_{k-1} B_{10}^k + \alpha r B_{01}^k - 2(2-\mu_k) B_{00}^k], \quad (1.9) \\
L_{71}^k(\alpha, r) &= 2a_k G_k \left\{ \frac{1}{r} [-4(1-\mu_k) + (\alpha r_{k-1})^2] B_{11}^k + \alpha (1-2\mu_k) B_{10}^k + \right. \\
&+ (3-2\mu_k) \frac{\alpha r_{k-1}}{r} B_{01}^k - (1-2\mu_k) \alpha^2 r_{k-1} B_{00}^k \Big\}, \\
L_{72}^k(\alpha, r) &= 2a_k G_k \alpha r_{k-1} \left[-2(1-\mu_k) \frac{B_{11}^k}{r} + \alpha (1-2\mu_k) B_{10}^k + \frac{\alpha r_{k-1}}{r} B_{01}^k \right], \\
L_{73}^k(\alpha, r) &= a_k r_{k-1} \left[-4(1-\mu_k) \frac{1}{r} B_{11}^k + \alpha (1-2\mu_k) B_{10}^k + \frac{\alpha r_{k-1}}{r} B_{01}^k \right], \\
L_{74}^k(\alpha, r) &= a_k r_{k-1} \alpha \left[-\frac{r_{k-1}}{r} B_{11}^k + (1-2\mu_k) B_{00}^k \right],
\end{aligned}$$

$$L_{52}^k(\alpha, r) = 2a_k G_k \alpha r_{k-1} [\alpha^2 r B_{11}^k - 2\alpha B_{10}^k - \alpha^2 r_{k-1} B_{00}^k],$$

где

$$a_k = \frac{\pi}{4(1-\nu_k)}, \quad r_{k-1} < r < r_k,$$

$$(k=1, 2, \dots, K),$$

$$B_{sj}^k = N_s(\alpha, r_{k-1}) \cdot J_j(\alpha, r) - J_s(\alpha, r_{k-1}) \cdot N_j(\alpha, r), \quad (1.10)$$

$$(j, s=0,1).$$

Здесь с помощью функций Бесселя J_0, J_1 и функций Неймана N_0, N_1 символически обозначены соответствующие дифференциальные операторы.

Полагая в (1.9) $r_{k-1} = 1, k=1$, получим с точностью до постоянных множителей операторы, приведенные в работе [4].

§ 2. Нахождение начальных функций

Таким образом, все напряжения и перемещения становятся известными, как только известны начальные функции U_n . В силу граничных условий (1.3) две функции известны: $U_3 = \Phi_1(z), U_4 = \Psi_1(z)$. Для нахождения остальных двух функций воспользуемся условиями на внешней поверхности (1.4). Подставляя (1.7) в (1.4), получим:

$$M_{31}^K(\alpha, r_K) U_1 + M_{32}^K(\alpha, r_K) U_2 = -M_{33}^K(\alpha, r_K) [\Phi_1(z)] - M_{34}^K(\alpha, r_K) [\Psi_1(z)] + \Phi_2(z)$$

$$M_{41}^K(\alpha, r_K) U_1 + M_{42}^K(\alpha, r_K) U_2 = -M_{43}^K(\alpha, r_K) [\Phi_1(z)] - M_{44}^K(\alpha, r_K) [\Psi_1(z)] + \Psi_2(z). \quad (2.1)$$

Так как операторы M_{ns}^k регулярны (регулярность следует из структуры уравнений (1.1)), то соотношения (2.1) представляют собой систему двух неоднородных трансцендентных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $U_1(z), U_2(z)$.

Решение этой системы будем отыскивать в виде суммы двух решений: общего решения однородной и частного решения неоднородной системы.

Общее решение однородной системы имеет вид

$$U_n^0 = (-1)^{n+1} \sum_{\delta_m} \Delta_{nm} \cdot Q_m \cdot e^{\delta_m z}, \quad 0 \leq z \leq l$$

$$(n=1, 2), \quad (2.2)$$

где $\Delta_{1m} = M_{42}^K(\delta_m, r_K), \Delta_{2m} = M_{41}^K(\delta_m, r_K), Q_m$ — произвольные постоянные, а δ_m — корни трансцендентного уравнения

$$M_{42}^K(\delta, r_K) M_{31}^K(\delta, r_K) - M_{32}^K(\delta, r_K) M_{41}^K(\delta, r_K) = 0, \quad (2.3)$$

которое имеет бесчисленное множество комплексных корней. Решение (2.2) записано в предположении, что корни δ_m простые.

Причем в соотношениях (2.2), (2.3) $M_{ns}^k(\delta_m, r)$ уже не являются операторами, а представляют собой обыкновенные функции.

Функции $B_{vj}^k(\delta r)$ ($v, j=0,1$) в области $|\arg \delta r| < \pi$ являются четными функциями, если $v+j$ четно, и нечетными, если $v+j$ нечетно.

В этом нетрудно убедиться, воспользовавшись следующими соотношениями для функций Бесселя и Неймана:

$$J_\nu(\rho e^{i(\varphi+\pi)}) = e^{i\nu\pi} J_\nu(\rho e^{i\varphi}),$$

$$N_\nu(\rho e^{i(\varphi+\pi)}) = e^{i\nu\pi} [N_\nu(\rho e^{i\varphi}) - 2iJ_\nu(\rho e^{i\varphi})],$$

где ρ — модуль комплексного числа, φ — аргумент, $i = \sqrt{-1}$.

Действительно,

$$B_{\nu,j}^k(r\delta e^{i\pi}) = N_\nu(r_{k-1}\delta e^{i\pi}) \cdot J_j(r\delta e^{i\pi}) -$$

$$- N_j(r\delta e^{i\pi}) \cdot J_\nu(r_{k-1}\delta e^{i\pi}) = e^{i(\nu+j)\pi} \cdot B_{\nu,j}^k(r\delta).$$

Тогда из (1.8) и (1.9) следует, что $L_{ns}^k(\delta, r)$ и $M_{ns}^k(\delta, r)$ являются четными функциями, если $n+s$ четно, и нечетными, если $n+s$ нечетно. Следовательно, выражение в левой части (2.3) является четной функцией, и если $\delta_m = \gamma_m + i\omega_m$ является корнем уравнения (2.3), то корнем будет и число $-\gamma_m - i\omega_m$. Объединяя в (2.2) попарно отвечающие корням с различными знаками члены, получим

$$U_1^0 = \sum_{\delta_m} \Delta_{1m} (A_m \cdot \text{ch} \delta_m z + B_m \cdot \text{sh} \delta_m z),$$

$$U_2^0 = - \sum_{\delta_m} \Delta_{2m} (A_m \cdot \text{sh} \delta_m z + B_m \cdot \text{ch} \delta_m z), \quad (2.4)$$

здесь суммирование производится по δ_m , лежащим в полуплоскости $\text{Re } \delta > 0$.

Частное решение неоднородной системы будем отыскивать в виде

$$U_1^u = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot \cos \beta_m z, \quad U_2^u = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cdot \sin \beta_m z, \quad (2.5)$$

предварительно разложив $\varphi_j(z)$ и $\psi_j(z)$ в ряды

$$\varphi_j(z) = c_{0j} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{mj} \cdot \cos \beta_m z, \quad \psi_j = \sum_{m=1}^{\infty} f_{mj} \sin \beta_m z, \quad (2.6)$$

$$(j=1, 2)$$

где

$$c_{0j} = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi_j(z) dz, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{l}, \quad (m=1, 2, \dots),$$

$$c_{mj} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_j(z) \cdot \cos \beta_m z dz, \quad f_{mj} = \frac{2}{l} \int_0^l \psi_j(z) \cdot \sin \beta_m z dz.$$

Подставим (2.5) и (2.6) в (2.1), учитывая, что

$$M_{ns}^k(\alpha, r) [\cos \beta_m z] = \begin{cases} M_{ns}^k(i\beta_m, r) \cdot \cos \beta_m z & \text{при } n+s \text{ четном} \\ iM_{ns}^k(i\beta_m, r) \cdot \sin \beta_m z & \text{при } n+s \text{ нечетном,} \end{cases}$$

$$M_{ns}^k(\alpha, r) [\sin \beta_m z] = \begin{cases} M_{ns}^k(i\beta_m, r) \cdot \sin \beta_m z & \text{при } n+s \text{ четном,} \\ -iM_{ns}^k(i\beta_m, r) \cdot \cos \beta_m z & \text{при } n+s \text{ нечетном,} \end{cases}$$

причем $M_{ns}^k(i\beta_m, r)$ при $n+s$ четном и $iM_{ns}^k(i\beta_m, r)$ при $n+s$ нечетном являются действительными функциями: в первом случае в силу четности функций, во втором — в силу нечетности;

$$M_{ns}^k(\alpha, r) [\text{const}] = \begin{cases} m_{ns}^k(r) \cdot \text{const} & \text{при } n+s \text{ четном} \\ 0 & \text{при } n+s \text{ нечетном,} \end{cases}$$

где

$$m_{ns}^k(r) = \underbrace{\sum_{j=1}^4 \sum_{l=1}^4 \cdots \sum_{v=1}^4 \sum_{p=1}^4}_{k-1} l_{nj}^k(r) \cdot l_{lt}^{k-1}(r^{k-1}) \cdots l_{vp}^2(r_2) \cdot l'_{ps}(r_1), \quad (n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} l_{11}^k(r) &= \frac{1}{2(1-\mu_k)} \left[(1-2\mu_k) \frac{r}{r_{k-1}} + \frac{r_{k-1}}{r} \right], \quad l_{12}^k = l_{14}^k = 0, \\ l_{13}^k(r) &= \frac{1-2\mu_k}{4(1-\mu_k)G_k} \left[r - \frac{r_{k-1}^2}{r} \right], \quad l_{31}^k(r) = \frac{G_k}{1-\mu_k} \left(\frac{1}{r_{k-1}} - \frac{r_{k-1}}{r^2} \right), \\ l_{32}^k &= l_{34}^k = 0, \quad l_{33}^k(r) = \frac{1}{2(1-\mu_k)} \left[1 + (1-2\mu_k) \frac{r_{k-1}^2}{r^2} \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$l_{21}^k = l_{23}^k = 0, \quad l_{22}^k = 1, \quad l_{24}^k(r) = \frac{r_{k-1}}{G_k} (\ln r - \ln r_{k-1}),$$

$$l_{41}^k = l_{42}^k = l_{43}^k = 0, \quad l_{44}^k(r) = \frac{r_{k-1}}{r}, \quad l_{72}^k = l_{74}^k = 0,$$

$$l_{71}^k(r) = \frac{G_k}{1-\mu_k} \left(\frac{1}{r_{k-1}} + \frac{r_{k-1}}{r^2} \right), \quad l_{73}^k(r) = \frac{1}{2(1-\mu_k)} \left[1 - (1-2\mu_k) \frac{r_{k-1}^2}{r^2} \right],$$

$$l_{51}^k(r) = \frac{2G_k\mu_k}{1-\mu_k} \cdot \frac{1}{r_k}, \quad l_{53}^k = \frac{\mu_k}{1-\mu_k}, \quad l_{52}^k = l_{54}^k = 0.$$

Значения $l_{ns}^k(r)$ получаются из соответствующих значений $L_n^k(\delta, r)$ предельным переходом при $\delta \rightarrow 0$.

После подстановки (2.5) в (2.1) получим два уравнения, связывающие коэффициенты a_0 , a_m и b_m с коэффициентами c_{0j} , c_{mj} и f_m . Приравнявая в этих уравнениях коэффициенты при одинаковых гармониках, получим систему трех уравнений относительно a_0 , a_m , b_m . Решение ее будет иметь вид

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{c_{02} - m_{33}^K(r_K) c_{01}}{m_{31}^K(r_K)}, \\ a_m &= \frac{1}{D} \{ [M_{32}^K(\xi_m, r_K) M_{43}^K(\xi_m, r_K) - M_{33}^K(\xi_m, r_K) M_{42}^K(\xi_m, r_K)] c_{m1} + \\ &\quad + i [M_{34}^K(\xi_m, r_K) M_{42}^K(\xi_m, r_K) - M_{32}^K(\xi_m, r_K) M_{44}^K(\xi_m, r_K)] \cdot f_{m1} + \\ &\quad + M_{42}^K(\xi_m, r_K) c_{m2} + i M_{32}^K(\xi_m, r_K) \cdot f_{m2} \}, \\ b_m &= \frac{1}{D} \{ i [M_{41}^K(\xi_m, r_K) M_{33}^K(\xi_m, r_K) - M_{43}^K(\xi_m, r_K) M_{31}^K(\xi_m, r_K)] c_{m1} + \\ &\quad + [M_{34}^K(\xi_m, r_K) M_{41}^K(\xi_m, r_K) - M_{44}^K(\xi_m, r_K) M_{41}^K(\xi_m, r_K)] \cdot f_{m1} + \\ &\quad + M_{31}^K(\xi_m, r_K) \cdot f_{m2} - i M_{41}^K(\xi_m, r_K) c_{m2} \}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\xi_m = i\beta_m, \\ D = M_{31}^K(\xi_m, r_K) M_{42}^K(\xi_m, r_K) - M_{41}^K(\xi_m, r_K) M_{32}^K(\xi_m, r_K) \neq 0 \quad (2.10)$$

Все коэффициенты a_m и b_m являются действительными и таковы, что ряды (2.5) сходятся, если только сходятся ряды (2.6).

Таким образом, все начальные функции известны. Подставляя их в (1.7), приходим к следующим выражениям для искоемых функций:

$$V_n^k = \sum_{\delta_m} \sum_{s=1}^2 (-1)^{s+1} M_{ns}^k(\delta_m, r) \Delta_{sm} [A_m \cdot \operatorname{ch} \delta_m z + B_m \cdot \operatorname{sh} \delta_m z] + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} [M_{n1}^k(\xi_m, r) a_m - i M_{n2}^k(\xi_m, r) b_m + M_{n3}^k(\xi_m, r) c_{m1} - \\ - i M_{n4}^k(\xi_m, r) f_{m1}] \cdot \cos \beta_m z + m_{n1}^k(r) a_0 + m_{n3}^k(r) c_{01}; \quad (n=1, 3, 5, 7) \\ (k=1, 2, \dots, K), \quad (2.11)$$

$$V_n^k = \sum_{\delta_m} \sum_{s=1}^2 (-1)^{s+1} M_{ns}^k(\delta_m, r) \Delta_{sm} [A_m \operatorname{sh} \delta_m z + B_m \cdot \operatorname{ch} \delta_m z] + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} [i M_{n1}^k(\xi_m, r) a_m + M_{n2}^k(\xi_m, r) b_m + i M_{n3}^k(\xi_m, r) c_{m1} + \\ + M_{n4}^k(\xi_m, r) f_{m1}] \cdot \sin \beta_m z, \quad (n=2, 4), \quad (k=1, 2, \dots, K). \quad (2.12)$$

Первые суммы, обозначим их через V_{n0}^k , в (2.11) и (2.12) представляют однородные в смысле [5] решения, которые удовлетворяют нулевым граничным условиям на боковых поверхностях и содержат произвольные постоянные, с помощью которых можно приближенно, с нужной степенью точности, удовлетворить граничные условия на торцах. Однако пользоваться ими в таком виде неудобно, так как каждый член суммы является комплексным. Объединяя попарно члены, отвечающие комплексно-сопряженным корням, получим действительные выражения в виде

$$V_{n0}^k = \sum_{\delta_m} \{ \operatorname{Re} [\sum_{s=1}^2 (-1)^{s+1} M_{ns}^k(\delta_m, r) \Delta_{sm}] \cdot [\operatorname{ch} \gamma_m z (C_m \cdot \cos \omega_m z - \\ - F_m \cdot \sin \omega_m z) + \operatorname{sh} \gamma_m z (P_m \cdot \cos \omega_m z - D_m \cdot \sin \omega_m z)] - \\ - \operatorname{Im} [\sum_{s=1}^2 (-1)^{s+1} M_{ns}^k(\delta_m, r) \Delta_{sm}] \times [\operatorname{sh} \gamma_m z (C_m \sin \omega_m z + \\ + F_m \cos \omega_m z) + \operatorname{ch} \gamma_m z (D_m \cdot \cos \omega_m z + P_m \cdot \sin \omega_m z)] \}, \quad (2.13) \\ (n=1, 3, 5, 7), \quad (k=1, 2, \dots, K),$$

где $\delta_m = \gamma_m + i\omega_m$, $2A_m = C_m + iD_m$, $2B_m = P_m + iF_m$, и суммирование производится по δ_m , лежащим в первой четверти. Выражения для V_{n0}^k при n четном получаются из (2.13) заменой $C_m \rightleftharpoons P_m$, $D_m \rightleftharpoons F_m$.

§ 3. Расчет двуслойного цилиндра

В качестве примера рассмотрим двуслойный цилиндр, внешняя боковая поверхность которого свободна от напряжений, а на внутренней действует равномерное давление P . Примем за начальную поверхность поверхность сопряжения слоев $r=r_0$. Хотя при этом все начальные функции являются неизвестными, однако структура уравнений для их определения упрощается и, кроме того, напряжения и перемещения в обоих слоях выражаются однообразными формулами, что удобно при численной реализации.

В этом случае искомые функции будут выражаться через начальные по формулам:

$$V_n^k = \sum_{s=1}^4 L_{ns}^k(\alpha, r) \cdot \dot{U}_s(z),$$

$$(n=1, 2, 3, 4, 5, 7), \quad (k=1, 2), \quad (3.1)$$

и $L_{ns}^k(\alpha, r)$ определяются по (1.9), в которых следует положить $r_{k-1} = r_1$.

Начальные функции U_s при указанных граничных условиях будут определяться системой четырех уравнений

$$\sum_{s=1}^4 L_{3s}^k(\alpha, r_k) U_s = -P \delta_{1k},$$

$$\sum_{s=1}^4 L_{4s}^k(\alpha, r_k) U_s = 0,$$

$$(k=1, 2), \quad (3.2)$$

где δ_{1k} — символ Кронекера.

Решение (3.2) имеет вид

$$U_s = \sum_{\delta_m} \Delta_{ms} [A_m \operatorname{ch} \delta_m z + B_m \operatorname{sh} \delta_m z] + a_{0s},$$

$$(s=1, 3), \quad (3.3)$$

$$U_s = - \sum_{\delta_m} \Delta_{ms} [A_m \operatorname{sh} \delta_m z + B_m \operatorname{ch} \delta_m z],$$

$$(s=2, 4),$$

где

$$a_{01} = \frac{P \cdot l_{33}^2(r_2)}{l_{33}^1(r_1) l_{31}^2(r_2) - l_{33}^2(r_2) \cdot l_{31}^1(r_1)}, \quad a_{03} = \frac{-P l_{31}^2(r_2)}{l_{33}^1(r_1) l_{31}^2(r_2) - l_{33}^2(r_2) \cdot l_{31}^1(r_1)}, \quad (3.4)$$

δ_m — лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re} \delta > 0$ корни уравнения

$$\begin{vmatrix} L_{31}^1(\delta, r_1) & L_{32}^1(\delta, r_1) & L_{33}^1(\delta, r_1) & L_{34}^1(\delta, r_1) \\ L_{41}^1(\delta, r_1) & L_{42}^1(\delta, r_1) & L_{43}^1(\delta, r_1) & L_{44}^1(\delta, r_1) \\ L_{31}^2(\delta, r_2) & L_{32}^2(\delta, r_2) & L_{33}^2(\delta, r_2) & L_{34}^2(\delta, r_2) \\ L_{41}^2(\delta, r_2) & L_{42}^2(\delta, r_2) & L_{43}^2(\delta, r_2) & L_{44}^2(\delta, r_2) \end{vmatrix} = 0, \quad (3.5)$$

Δ_{ms} — миноры элементов первой строки определителя, стоящего в левой части (3.5) ($s=1, 2, 3, 4$), причем Δ_{ms} является четной функцией δ , если s нечетно, и нечетной, если s четно.

Подставляя (3.3) в (3.1), получим следующие расчетные формулы:

$$V_n^k = \sum_{\delta_m} \left[\operatorname{Re} \left[\sum_{s=1}^4 (-1)^{s+1} L_{ns}^k(\delta_m, r) \Delta_{sm} \right] \cdot [\operatorname{ch} \gamma_m z (C_m \cdot \cos \omega_m z - \right. \\ \left. - F_m \cdot \sin \omega_m z) + \operatorname{sh} \gamma_m z (P_m \cdot \cos \omega_m z - D_m \sin \omega_m z)] - \right. \\ \left. - \operatorname{Im} \left[\sum_{s=1}^4 (-1)^{s+1} L_{ns}^k(\delta_m, r) \Delta_{sm} \right] \cdot [\operatorname{sh} \gamma_m z (C_m \cdot \sin \omega_m z + F_m \cdot \cos \omega_m z) + \right. \\ \left. + \operatorname{ch} \gamma_m z (D_m \cdot \cos \omega_m z + P_m \cdot \sin \omega_m z)] \right] + l_{n1}^k(r) a_{01} + l_{n3}^k(r) a_{03}, \\ r_{k-1} \leq r \leq r_k, \quad (k=1, 2), \quad (n=1, 3, 5, 7). \quad (3.6)$$

Выражения для V_n^k при n четном получим из (3.6), заменив $C_m \rightleftharpoons P_m$, $D_m \rightleftharpoons F_m$ и отбросив два последних члена.

Произвольные постоянные C_m , D_m , P_m , F_m находятся из граничных условий на торцах. Примем начало отсчета для z в центре цилиндра, так что $-\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2}$, и поставим на торцах следующие граничные

условия; внешний цилиндр — тонкая оболочка — жестко зашпелен для радиальных перемещений и находится под действием растягивающих напряжений σ_1 ; внутренний толстостенный цилиндр сжимается нормальным напряжением P , касательные напряжения отсутствуют. То есть

$$V_5^2 \Big|_{z=-\frac{l}{2}} = \rho_1 \sigma_1, \quad V_1^2 \Big|_{z=\frac{l}{2}} = 0, \quad r_0 < r \leq r_2, \\ V_5^1 \Big|_{z=\frac{l}{2}} = -\rho_1 P, \quad V_4^1 \Big|_{z=-\frac{l}{2}} = 0, \quad r_1 \leq r < r_0. \quad (3.7)$$

Численная реализация проводилась на вычислительной машине М-20 при следующих значениях исходных параметров:

$$F_1 = 2G_1(1 + 2\mu_1) = 1,9 \cdot 10^8 \frac{\text{H}}{\text{M}^2}; \quad E_2 = 2G_2(1 + \mu_2) = 1,9 \cdot 10^{11} \frac{\text{H}}{\text{M}^2};$$

$$\mu_1 = 0,3; \quad \mu_2 = 0,22; \quad r_1 = 0,3769; \quad r_0 = 1; \quad r_2 = 1,005;$$

$$l = 3; \quad P = 4 \cdot 10^6 \frac{\text{H}}{\text{M}^2}; \quad \sigma_1 = \frac{P}{r_2^2 - 1}.$$

Характеристическое уравнение (3.5) решалось методом Ньютона — Рафсона [7]. Шесть первых корней таковы:

$$\delta_1 = 4,6941 + i1,5569, \quad \delta_2 = 9,3536 + i2,6542, \\ \delta_3 = 14,2550 + i3,1397, \quad \delta_4 = 19,1491 + i3,5349, \\ \delta_5 = 24,0685 + i4,0366, \quad \delta_6 = 29,0921 + i4,6179.$$

Граничные условия (3.7) удовлетворялись приближенно, двумя методами: 1) оставляя в рядах для V_n^k четыре члена, требовалось удовлетворение условий (3—7) в четырех точках радиуса $r = 0,38$, $r = 0,70$, $r = 0,9975$, $r = 1,0025$; 2) условия (3.7) удовлетворялись интегрально, для чего ограничивались в рядах двумя первыми членами.

На рис. 1 представлены эпюры безразмерных напряжений на поверхности сопряжения цилиндров для $0 \leq z \leq \frac{l}{2}$. Кривые 1 соответ-

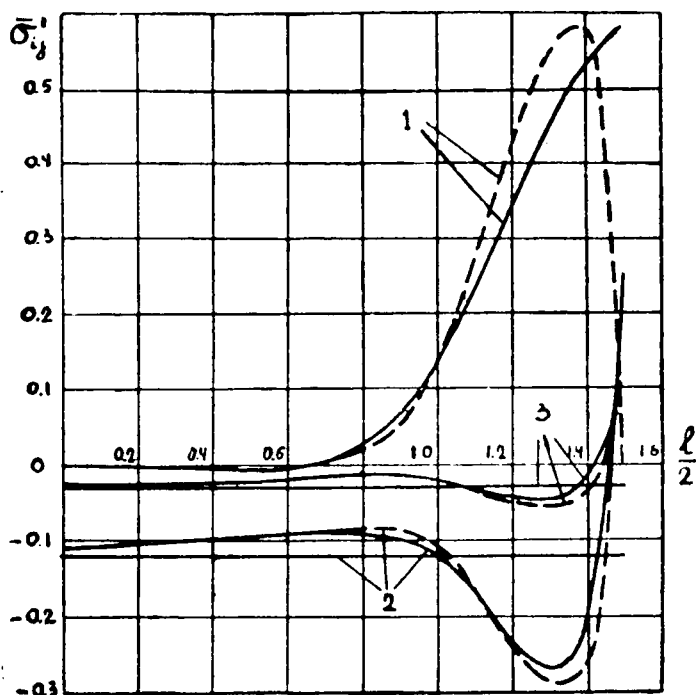


Рис. 1

вуют $\bar{\sigma}_{rz}^1$, 2— $\bar{\sigma}_{rr}^1$ и 3— $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^1$, ($\bar{\sigma}_{ij}^1 = \frac{\sigma_{ij}^1}{2,5P}$, $i, j=r, z, \varphi$). Сплошные линии соответствуют удовлетворению условий (3.7) интегрально, пунктирные — по точкам.

На остальной части цилиндра — $\frac{l}{z} < z \leq 0$ эпюры $\bar{\sigma}_{rr}^1$, $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^1$ располагаются симметрично, эпюры σ_{rz}^1 — косимметрично. Горизон-

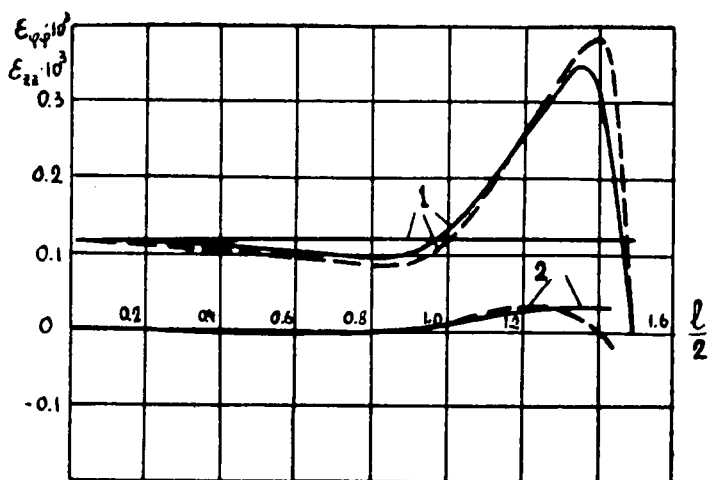


Рис. 2

тальными линиями обозначены соответствующие решения, получаемые для случая плоской деформации.

На рис. 2 представлены эпюры осевых ϵ_{zz} —2 и окружных $\epsilon_{\varphi\varphi}$ —1 деформаций для $0 \leq z \leq \frac{l}{2}$. Для $-\frac{l}{2} \leq z \leq 0$ эпюры полагаются симметрично.

Из рис. 1 и рис. 2 видно, что результаты, получаемые при интегральном удовлетворении граничных условий и при удовлетворении в четырех точках, заметно отличаются лишь в непосредственной близости торца. На расстоянии же $\sim 0,15$ — $0,20$ радиуса имеет место хорошее совпадение. Напряжения и деформации при условиях (3.7) достигают небольших по модулю значений у торцов.

Однако решения быстро затухают и на расстоянии $\sim 0,9$ — $1,0$ радиуса мало отличаются от решений для плоской деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. З. В л а с о в. Метод начальных функций в задачах теории упругости. Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1955.
2. В. В. В л а с о в. Метод начальных функций в задачах равновесия толстых многослойных плит. Изв. АН СССР, № 7, 1958.
3. В. А. А г а р е в. Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. Изд. АН УССР, 1963.
4. Ф. А. Г о х б а у м. Приближенный расчет сопряжений толстых цилиндрических оболочек и пластин. Теория оболочек и пластин. Тр. IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, 24—31 октября 1962 г. Изд. АН АрССР, 1964.
5. В. К. П р о к о п о в. Равновесие упругого толстостенного осесимметричного цилиндра. ПММ, т. XIII, вып. 2, 1949.
6. А. И. Л у р ь е. Пространственные задачи теории упругости. ГИТТЛ, 1955.
7. Дж. Н. Л а н с. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. ИЛ., 1962.

Поступила 1. III. 1967.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЕКТОРЕ

П. С. СОЛОМИН

Рассмотрим цилиндрический сектор конечной длины $2l$ с углом раствора $\varphi = \pm\beta$ и радиусами $r=a$ и $r=b$ (рис. 1). В начальный момент времени $t=0$ сектор имеет равномерно распределенную температуру $T_0 = \text{Const}$. Затем, в последующие моменты времени, при $t>0$ он помещается в среду с постоянной температурой T_c . Требуется определить перемещения, напряжения и деформации, вызванные неравномерным тепловым полем в любой момент времени $t>0$.

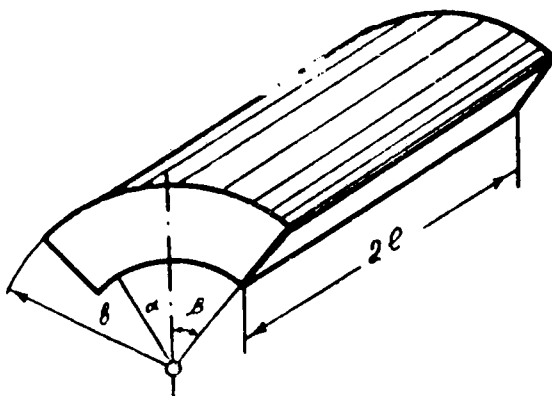


Рис. 1

Задача решается в пространственных цилиндрических координатах. Физико-механические и тепловые характеристики материала считаются независимыми от температуры.

Вначале решается нестационарная задача теплопроводности при более общих граничных условиях — условиях третьего рода. Ее решение получено в виде

$$U(r, \varphi, z, t) = \sum_{\lambda_i} \sum_{\delta_j} \sum_{\nu_k} E_{ijk} [\lambda_i B_{\nu_k+1, \nu_k}(\lambda_i b, \lambda_i r) - \\ - \left(h_1 + \frac{\nu_k}{b}\right) B_{\nu_k, \nu_k}(\lambda_i b, \lambda_i r)] \cos \nu_k \varphi \cdot \cos \delta_j z \cdot \exp[-\bar{a}(\lambda_i^2 + \delta_j^2) t], \quad (1)$$

где собственные числа λ_i определяются из трансцендентного уравнения

$$\left(h_1 + \frac{\nu_k}{b}\right)\left(\frac{\nu_k}{a} - h_2\right)B_{\nu_k, \nu_k}(\lambda b, \lambda a) - \lambda\left(\frac{\nu_k}{a} - h_2\right)B_{\nu_k+1, \nu_k}(\lambda b, \lambda a) = \\ = \lambda\left(h_1 + \frac{\nu_k}{b}\right)B_{\nu_k, \nu_k+1}(\lambda b, \lambda a) - \lambda^2 B_{\nu_k+1, \nu_k+1}(\lambda b, \lambda a), \quad (2)$$

собственные числа δ_j и ν_k определяются соответственно из уравнений

$$\delta \operatorname{tg} \delta l = h_1, \quad \operatorname{tg} \nu \beta = h_3 \quad (3)$$

h_1 — коэффициент внешней теплоотдачи от наружной поверхности и по торцам сектора;

h_2 — от меридиональных плоскостей сектора,

h_3 — от меридиональных плоскостей сектора.

В частном случае коэффициенты внешней теплоотдачи могут быть одинаковыми и равны h .

$\bar{a}$ — коэффициент температуропроводности;

E_{ijk} — коэффициенты, определяются из начального условия задачи теплопроводности;

$$B_{\nu+1, \nu}(\lambda b, \lambda r) = N_{\nu+1}(\lambda b) I_\nu(\lambda r) - I_{\nu+1}(\lambda b) N_\nu(\lambda r),$$

$N_\nu(\lambda r)$, $I_\nu(\lambda r)$ — функции Неймана и Бесселя ν -го порядка.

Термоупругие напряжения первой группы определяются через функцию термоупругого потенциала перемещений Φ , которая в данном случае находится из основного дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha (T - T_0), \quad (4)$$

где μ — коэффициент Пуассона;

α — коэффициент линейного теплового расширения;

T — текущая температура, при этом

$$T(r, \varphi, z, t) = T_c - U(r, \varphi, z, t).$$

Совместное решение (1) и (4) определяет частный интеграл для функции Φ в виде

$$\Phi = -s \sum_{\lambda_i} \sum_{\delta_j} \sum_{\nu_k} \frac{B_{ijk}}{\lambda_i^2 + \delta_j^2} \left[\lambda_i B_{\nu_k+1, \nu_k} - \right. \\ \left. - \left(h_1 + \frac{\nu_k}{b} \right) B_{\nu_k, \nu_k} \right] \cos \nu_k \varphi \cdot \cos \delta_j z, \quad (5)$$

где

$$B_{ijk} = E_{ijk} \exp[-\bar{a}(\lambda_i^2 + \delta_j^2)t], \quad s = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha.$$

$$B_{\nu_k, \nu_k} \equiv B_{\nu_k, \nu_k}(\lambda_i b, \lambda_i r).$$

Перемещения и напряжения первой группы через функцию Φ найдутся следующим образом:

$$\bar{u} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \bar{w} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \bar{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \quad (6)$$

$$\bar{\varepsilon}_r = 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \Delta \Phi \right), \quad \bar{\varepsilon}_\varphi = 2G \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Delta \Phi \right),$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_z &= 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \Delta \Phi \right), \quad \bar{\sigma}_{z\varphi} = 2G \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial z}, \\ \bar{\sigma}_{rz} &= 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, \quad \bar{\sigma}_{r\varphi} = 2G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right).\end{aligned}\quad (7)$$

Через перемещения (6) легко определяются и относительные деформации $\bar{\epsilon}_{ij}$. Напряжения (7) в общем случае не удовлетворяют краевым условиям задачи. Когда цилиндрический сектор свободен от внешних нагрузок, краевые условия первой основной задачи термоупругости имеют вид:

$$\sigma_r \Big|_{r=a} = 0, \quad \sigma_{rz} \Big|_{r=a} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} \Big|_{r=a} = 0, \quad (8)$$

$$\sigma_\varphi \Big|_{\varphi=\pm\beta} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} \Big|_{\varphi=\pm\beta} = 0, \quad \sigma_{z\varphi} \Big|_{\varphi=\pm\beta} = 0, \quad (9)$$

$$\sigma_z \Big|_{z=\pm l} = 0, \quad \sigma_{rz} \Big|_{z=\pm l} = 0, \quad \sigma_{z\varphi} \Big|_{z=\pm l} = 0. \quad (10)$$

Чтобы найти решение краевой задачи, необходимо на полученное решение (7) наложить решение аналогичной задачи при $T=0$, т. е. решение пространственной задачи теории упругости.

Для общего случая пространственной задачи теории термоупругости краевые условия можно удовлетворить с помощью суммы двух функций: обобщенной бигармонической функцией Лява L и дополнительной к ней гармонической функцией M . Перемещения и напряжения через функции L и M выражаются в виде:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= -\frac{1}{1-2\mu} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial z} \right), \quad \bar{v} = -\frac{1}{1-2\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\partial M}{\partial r} \right), \\ \bar{w} &= \frac{1}{1-2\mu} \left[2(1-\mu)\Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right].\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_r &= \frac{2G}{1-2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial \varphi} \right) \right], \\ \bar{\sigma}_\varphi &= \frac{2G}{1-2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta L - \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial \varphi} \right) \right], \\ \bar{\sigma}_z &= \frac{2G}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\mu)\Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right],\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{r\varphi} &= -\frac{2G}{1-2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi \partial z} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial r} - \frac{\partial^2 M}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2} \right) \right], \\ \bar{\sigma}_{rz} &= \frac{2G}{1-2\mu} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\mu)\Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{2r} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi \partial z} \right\}, \\ \bar{\sigma}_{z\varphi} &= \frac{2G}{1-2\mu} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(1-\mu)\Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M}{\partial r \partial z} \right\}.\end{aligned}$$

Чтобы удовлетворить граничные условия по боковым поверхностям цилиндрического сектора (8), обобщенная функция Лява L_1 и гармоническая функция M_1 выбираются в виде

$$L_1 = \sum_{\delta_j} \sum_{\nu_k} [A_{jk} I_{\nu_k}(\delta_j r) + B_{jk} \delta_j r I_{\nu_k+1}(\delta_j r) + C_{jk} K_{\nu_k}(\delta_j r) + \\ + D_{jk} \delta_j r K_{\nu_k+1}(\delta_j r)] \cdot \frac{1}{\delta_j^2} \cos \nu_k \varphi \cdot \sin \delta_j z, \quad (13)$$

$$M_1 = \sum_{\delta_j} \sum_{\nu_k} [E_{jk} I_{\nu_k}(\delta_j r) + F_{jk} K_{\nu_k}(\delta_j r)] \sin \nu_k \varphi \cdot \cos \delta_j z,$$

где I_{ν_k} , K_{ν_k} — модифицированные функции Бесселя ν_k порядка;

A_{jk} , ..., F_{jk} — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий (8).

Для их определения по формулам (12) и (13) находятся напряжения $\bar{\sigma}_r^1$, $\bar{\sigma}_{r\varphi}^1$, $\bar{\sigma}_{rz}^1$, где индекс сверху означает номер функции L_1 и M_1 , а затем найденные напряжения подставляются в граничные условия (8), которые имеют вид

$$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_r^1 \Big|_{\substack{r=a \\ r=b}} = 0, \quad \bar{\sigma}_{rz} + \bar{\sigma}_{rz}^1 \Big|_{\substack{r=a \\ r=b}} = 0, \quad \bar{\sigma}_{r\varphi} + \bar{\sigma}_{r\varphi}^1 \Big|_{\substack{r=a \\ r=b}} = 0, \quad (14)$$

где напряжения с чертой определены формулами (7).

Из граничных условий (14) для каждой пары значений (δ_j, ν_k) находятся коэффициенты A_{jk} , ..., F_{jk} . Подставляя их значения в формулы (13), найдем функции L_1 и M_1 , через которые по формулам (12) и (11) определяются перемещения и напряжения второй группы. При этом граничные условия (8) или (14) удовлетворяются точным образом.

Чтобы удовлетворить граничные условия (9), привлекаются к рассмотрению функции L_2 и M_2 вида

$$L_2 = \sum_{\beta_j} \sum_{\nu_k} [P_{1jk} I_{\nu_k}(\beta_j r) + P_{2jk} \beta_j r I_{\nu_k+1}(\beta_j r) + P_{3jk} N_{\nu_k}(\beta_j r) + \\ + P_{4jk} \beta_j r N_{\nu_k+1}(\beta_j r)] \frac{1}{\beta_j^2} (q_{1jk} \cos \nu_k \varphi \cdot \operatorname{sh} \beta_j z + \\ + q_{2jk} \cos \nu_k \varphi \cdot \operatorname{ch} \beta_j z + q_{3jk} \sin \nu_k \varphi \cdot \operatorname{sh} \beta_j z + q_{4jk} \sin \nu_k \varphi \cdot \operatorname{ch} \beta_j z), \quad (15) \\ M_2 = \sum_{\beta_j} \sum_{\nu_k} [P_{5jk} I_{\nu_k}(\beta_j r) + P_{6jk} N_{\nu_k}(\beta_j r)] (q_{1jk} \sin \nu_k \varphi \cdot \operatorname{ch} \beta_j z + \\ + q_{2jk} \sin \nu_k \varphi \cdot \operatorname{sh} \beta_j z - q_{3jk} \cos \nu_k \varphi \cdot \operatorname{ch} \beta_j z - q_{4jk} \cos \nu_k \varphi \cdot \operatorname{sh} \beta_j z).$$

Через функции L_2 и M_2 по формулам (12) найдутся напряжения $\bar{\sigma}_r^2$, $\bar{\sigma}_{rz}^2$, $\bar{\sigma}_{r\varphi}^2$, которые будут содержать (для каждого напряжения) общие множители относительно переменных φ и z . При подстановке напряжений в граничные условия (8) функции от φ и z должны быть отличными от нуля; в противном случае получится тривиальное решение.

Потребуем, чтобы напряжения $\bar{\sigma}_r^2$, $\bar{\sigma}_{rz}^2$, $\bar{\sigma}_{r\varphi}^2$, выраженные через функции (15), принимали нулевые значения на границах $r=a$ и $r=b$, имеем

$$\bar{\sigma}_r^2 \Big|_{\substack{r=a \\ r=b}} = 0, \quad \bar{\sigma}_{rz}^2 \Big|_{\substack{r=a \\ r=b}} = 0, \quad \bar{\sigma}_{r\varphi}^2 \Big|_{\substack{r=a \\ r=b}} = 0. \quad (16)$$

Подставляя напряжения третьей группы в граничные условия (16), получим систему шести однородных уравнений относительно неизвестных коэффициентов P_{1jk} , ..., P_{6jk} .

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{z\varphi}^2 = & -\frac{2G}{1-2\mu} \sum_{\beta_j} \sum_{v_k} \psi_3(\beta_j, v_k, r) (x_{1jk} \sin v_k \varphi \cdot \operatorname{sh} \beta_j z + \\ & + x_{2jk} \sin v_k \varphi \cdot \operatorname{ch} \beta_j z - x_{3jk} \cos v_k \varphi \cdot \operatorname{sh} \beta_j z - x_{4jk} \cos v_k \varphi \cdot \operatorname{ch} \beta_j z), \end{aligned}$$

где

$$x_{ijk} = P_{ijk} q_{ijk}, \quad i=1, 2, 3, 4.$$

Функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 в (19) определяются при нахождении напряжений (12) через функции L_2 и M_2 (15); например, функция ψ_1 имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_1(\beta_j, v_k, r) = & \left[\frac{v_k(1-v_k)}{\beta_j r^2} I_{v_k}(\beta_j r) - \frac{1}{r} I_{v_k+1}(\beta_j r) \right] + \\ & + \frac{A_{2jk}}{A_{1jk}} [\beta_j (1-2\mu) I_{v_k}(\beta_j r) - \frac{v_k(1+v_k)}{r} I_{v_k+1}(\beta_j r)] + \\ & + \frac{A_{3jk}}{A_{1jk}} \left[\frac{v_k(1-v_k)}{\beta_j r^2} N_{v_k}(\beta_j r) - \frac{1}{r} N_{v_k+1}(\beta_j r) \right] + \\ & + \frac{A_{4jk}}{A_{1jk}} \left[\beta_j (1-2\mu) N_{v_k}(\beta_j r) - \frac{v_k(1+v_k)}{r} N_{v_k+1}(\beta_j r) \right] - \\ & - \frac{A_{5jk}}{A_{1jk}} \bar{a}_{5jk}(\beta_j r) - \frac{A_{6jk}}{A_{1jk}} \bar{a}_{6jk}(\beta_j r). \end{aligned}$$

В формулы для напряжений третьей группы (19) входят для каждой пары значений (j, k) четыре независимые константы x_{ijk} $i=1, 2, 3, 4$. Граничные условия в меридиональных плоскостях (9) для однозначного решения должны содержать шесть констант. Две недостающие константы получим, рассматривая обобщенную функцию Лява L_3 и дополнительную к ней гармоническую функцию M_3 вида

$$\begin{aligned} L_3 = & \sum_{\gamma_j} \sum_{v_k} [Q_{1jk} I_{v_k}(\gamma_j r) + Q_{2jk} \gamma_j r I_{v_k+1}(\gamma_j r) + \\ & + Q_{3jk} K_{v_k}(\gamma_j r) + Q_{4jk} \gamma_j r K_{v_k+1}(\gamma_j r)] \cdot \frac{1}{\gamma_j^2} \times \\ & \times \cos v_k \varphi \cdot (q_{5jk} \cos \gamma_j z + q_{6jk} \sin \gamma_j z), \\ M_3 = & \sum_{\gamma_j} \sum_{v_k} [Q_{5jk} I_{v_k}(\gamma_j r) + Q_{6jk} K_{v_k}(\gamma_j r)] \times \\ & \times \sin v_k \varphi \cdot (-q_{5jk} \sin \gamma_j z + q_{6jk} \cos \gamma_j z). \end{aligned} \quad (20)$$

Напряжения четвертой группы определяются аналогично напряжениям третьей группы и имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\varphi i}^3 = & -\frac{2G}{1-2\mu} \sum_{\gamma_j} \sum_{v_k} \chi_1(\gamma_j, v_k, r) \cos v_k \varphi \times \\ & \times (-x_{5jk} \sin \gamma_j z + x_{6jk} \cos \gamma_j z), \\ \bar{\sigma}_{r\varphi}^3 = & \frac{2G}{1-2\mu} \sum_{\gamma_j} \sum_{v_k} \chi_2(\gamma_j, v_k, r) \cdot \sin v_k \varphi \times \\ & \times (-x_{5jk} \sin \gamma_j z + x_{6jk} \cos \gamma_j z), \\ \bar{\sigma}_{z\varphi}^3 = & -\frac{2G}{1-2\mu} \sum_{\gamma_j} \sum_{v_k} \chi_3(\gamma_j, v_k, r) \cdot \sin v_k \varphi \times \\ & \times (x_{5jk} \cos \gamma_j z + x_{6jk} \sin \gamma_j z), \end{aligned} \quad (21)$$

где функции χ_1, χ_2, χ_3 определяются из выражений (12) с учетом (20). Например функция $\chi_1(\gamma_j, \nu_k, r)$ имеет вид

$$\chi_1(\gamma_j, \nu_k, r) = a_{1jk}(\gamma_j r) \times \sum_{s=2}^6 \frac{B_{sjk}}{B_{1jk}} a_{sjk}(\gamma_j r),$$

γ_j — корни трансцендентного уравнения, полученные из равенства нулю определителя системы $D'(\gamma) = 0$ однородных уравнений (8).

$B_{1jk}, \dots, B_{6jk}$ — адьюнкты любой строки определителя $D'(\gamma) = 0$;

$$x_{5jk} = Q_{1jk} q_{5jk}, \quad x_{6jk} = Q_{1jk} q_{6jk},$$

a_{sjk} — функции от r , находятся при подстановке (20) в (12).

Напряжения четвертой группы (21) содержат еще две независимые константы для каждой пары значений (γ_j, ν_k) . Сумма напряжений третьей и четвертой групп содержит для каждой пары значений (δ_j, ν_k) , (γ_j, ν_k) шесть неизвестных коэффициентов χ_{ijk} $i = 1, 2, \dots, 6$.

В меридиональных плоскостях цилиндрического сектора граничные условия (9) дают также шесть уравнений. Поэтому, подставляя соответствующие напряжения в (9), получим

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \bar{\sigma}_\varphi + \bar{\sigma}_\varphi^1 + \bar{\sigma}_\varphi^2 + \bar{\sigma}_\varphi^3 \Big|_{\varphi=\pm\beta} = 0, \\ \sigma_{z\varphi} &= \bar{\sigma}_{z\varphi} + \bar{\sigma}_{z\varphi}^1 + \bar{\sigma}_{z\varphi}^2 + \bar{\sigma}_{z\varphi}^3 \Big|_{\varphi=\pm\beta} = 0, \\ \sigma_{r\varphi} &= \bar{\sigma}_{r\varphi} + \bar{\sigma}_{r\varphi}^1 + \bar{\sigma}_{r\varphi}^2 + \bar{\sigma}_{r\varphi}^3 \Big|_{\varphi=\pm\beta} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Система неоднородных уравнений (22), из которой определяются коэффициенты x_{ijk} , входящие в формулы (19), (21), может быть решена только приближенным способом на ЭВМ.

Оставшиеся невыполненными граничные условия 10 удовлетворяются следующим образом. Условия $\sigma_{rz}|_{z=\pm l} = 0$ и $\sigma_{z\varphi}|_{z=\pm l} = 0$ в принципе самосбалансируются.

Граничные условия $\sigma_z|_{z=\pm l} = 0$ можно удовлетворить с помощью введения постоянного осевого напряжения σ_z^* , которое определяется из условия равенства нулю результирующей силы по торцам сектора. Это условие выражается в интегральной форме вида

$$\int_a^b \int_{-\beta}^{\beta} (\bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_z^1 + \bar{\sigma}_z^2 + \bar{\sigma}_z^3 + \sigma_z^*) \Big|_{z=\pm l} 2\pi r dr d\varphi = 0. \quad (23)$$

Полные температурные напряжения определяются (на основе принципа суперпозиции) как алгебраическая сумма напряжений всех четырех групп. Вычисление перемещений и относительных деформаций осуществляется по известным формулам, в которых необходимо соблюдать индекс обобщенных функций Лява L и гармонических функций M .

ЛИТЕРАТУРА

Л. И. Лурье. Пространственные задачи упругости. ГИТТЛ, 1955.

Поступила 1. III. 1967.

КВАЗИСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ В ДВУХСЛОЙНОМ ПОЛОМ ШАРЕ

Г. А. БЮЛЕР, **П. С. СОЛОМИН**

Рассматривается одномерная нестационарная задача теплопроводности для двухслойного полого шара при граничных условиях третьего и четвертого рода. На основе полученного закона распределения температуры решается квазистационарная задача термоупругости. Материал слоев считается однородным и изотропным, все физико-механические и теплофизические характеристики постоянны.

Уравнения теплопроводности в сферических координатах имеют вид

$$\frac{\partial T_s(r, \tau)}{\partial \tau} = a_s \left[\frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T_s(r, \tau)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_s(r, \tau)}{\partial r^2} \right], \quad s=1,2. \quad (1)$$

Начальное условие

$$T_s(r, 0) = T_0 = \text{const}, \quad (2)$$

граничные условия

$$\frac{\partial T_1(R_2, \tau)}{\partial r} = h_1 [\psi(\tau) - T_1(R_2, \tau)], \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_2(R_0, \tau)}{\partial r} = 0.$$

Условия сопряжения на границе смежных сред

$$\begin{aligned} T_1(R_1, \tau) &= T_2(R_1, \tau), \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1(R_1, \tau)}{\partial r} &= \lambda_2 \frac{\partial T_2(R_1, \tau)}{\partial r} \end{aligned} \quad (4)$$

в (1) ÷ (4) введены следующие обозначения:

$T_1(R, \tau)$, $T_2(R, \tau)$ — текущая температура s -го слоя;

τ — время нагревания или охлаждения системы;

a_s — коэффициент температуропроводности s -го слоя;

T_0 — начальная температура системы;

h_1 — коэффициент внешней теплоотдачи;

λ_1 , λ_2 — коэффициенты теплопроводности соответствующих слоев;

$\psi(\tau)$ — температура окружающей системы среды.

Нумерация слоев s двухслойного шара начинается с наружного слоя, граничные условия (3) означают, что с наружной поверхности шара при $r=R_2$ теплоотдача происходит по закону Ньютона, а внутренняя поверхность при $r=R_0$ теплоизолирована, условия сопряжения (4) дают равенство температур и теплоточков на границе смежных сред.

R_0, R_1, R_2 — радиусы соответствующих сферических поверхностей.

Температура окружающей среды в силу линейности задачи может быть представлена в виде

$$\psi(\tau) = A_k \cos \omega_k \tau \cdot e^{-\varepsilon_k \tau}. \quad (5)$$

Переходя в уравнениях (1) ÷ (5) к безразмерным переменным

$$U(\rho, t) = T(r, \tau) - T_0, \quad \psi(t) = \psi(\tau) - T_0,$$

$$\rho = \frac{r}{R_2}, \quad t = \frac{a_1 \tau}{R_2^2} \quad (6)$$

и применяя к новой системе уравнений преобразование Лапласа,

$$L[U(\rho, t)] \equiv \bar{U}(\rho, p) = \int_0^\infty U(\rho, t) e^{-pt} dt, \quad (7)$$

получим для изображений выражения вида

$$\begin{aligned} \bar{U}_1(\rho, p) = & \frac{1}{\rho \Delta(p)} Bi_1 \bar{\psi}(p) \{ \lambda_2 [\gamma(\rho_0 - \rho_1 B_2) \cos \gamma \alpha_2 + \\ & + B_2 + \gamma^2 \rho_0 \rho_1 \sin \gamma \alpha_2] \sin \beta(\rho - \rho_1) - \lambda_1 (B_2 \sin \gamma \alpha_2 + \\ & + \gamma \rho_0 \cos \gamma \alpha_2) [\sin \beta(\rho - \rho_1) + \beta \rho_1 \cos \beta(\rho - \rho_1)] \}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_2(\rho, p) = & - \frac{Bi_1 \bar{\psi}(p)}{\rho \Delta(p)} \lambda_1 \beta \rho_1 \times \\ & \times [B_2 \sin \gamma(\rho - \rho_0) + \gamma \rho_0 \cos \gamma(\rho - \rho_0)], \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Delta(p)$ — определитель преобразованной системы уравнений (3) и (4), он имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(p) = & \lambda_2 (B_1 \sin \sqrt{-p} \alpha_1 + \sqrt{-p} \cos \alpha_1 \sqrt{-p}) \times \\ & \times [(B_2 - \rho_0 \rho_1 p \sigma^2) \sin \alpha_2 \sigma \sqrt{-p} + \\ & + \gamma(\rho_0 - \rho_1 B_2) \cos \alpha_2 \sigma \sqrt{-p}] - \lambda_1 [(B_1 + \rho_1 p) \sin \alpha_1 \sqrt{-p} + \\ & + (1 + \rho_1 B_1) \sqrt{-p} \cos \alpha_1 \sqrt{-p}] (B_2 \sin \alpha_2 \sigma \sqrt{-p} + \\ & + \sigma \rho_0 \sqrt{-p} \cos \alpha_2 \sigma \sqrt{-p}). \end{aligned} \quad (10)$$

В формулах (8), (9) и (10) введены следующие обозначения:

$$\beta = \sqrt{-p}, \quad \gamma = \sigma \sqrt{-p}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}},$$

$$\begin{aligned} Bi_1 = h_1 R_2, \quad \rho_0 = \frac{R_0}{R_2}, \quad \rho_1 = \frac{R_1}{R_2}, \quad B_1 = Bi_1 - 1, \\ B_2 = 1 + \rho_0 Bi_2, \quad \alpha_1 = 1 - \rho_1, \quad \alpha_2 = \rho_1 - \rho_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Функция $\bar{\psi}(p)$ определяется в следующем виде:

$$\bar{\psi}(p) = A_k \frac{\varepsilon_k' + p}{(\varepsilon_k' + p)^2 + (\omega_k')^2} - \frac{T_0}{p},$$

где

$$\varepsilon_k' = \varepsilon_k \frac{R_2^2}{a_1}, \quad \omega_k' = \omega_k \frac{R_2^2}{a_1}. \quad (12)$$

Корни трансцендентного уравнения (10) $\Delta(p) = 0$ являются простыми, вещественными и отрицательными, что дает возможность применить вторую теорему разложения и осуществить обратное преобразование

$$L^{-1}[\bar{U}(\rho, p)] \equiv U(\rho, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \bar{U}(\rho, p) e^{pt} dp. \quad (13)$$

Учитывая, что полюсами функций $\bar{U}_1(\rho, p)$ и $\bar{U}_2(\rho, p)$ являются $p=0$, $p = -\varepsilon_k' \pm i\omega_k'$ и корни P_n уравнения

$$\Delta(p) = 0 \quad n=1, 2, \dots, n, \dots$$

Осуществляя обратное преобразование, окончательно получим закон распределения температуры в первом слое; имеем

$$U_1(\rho, t) = -T_0 + Re \frac{R_2}{r} \left[B_k \sin q_k \frac{r-R_1}{R_2} + C_k \cos q_k \frac{r-R_1}{R_2} \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_2}{r} \left[D_n \sin \eta_n \frac{r-R_1}{R_2} + E_n \cos \eta_n \frac{r-R_1}{R_2} \right], \quad (14)$$

где введены обозначения:

$$B_k = \frac{A_k}{\Delta(i\omega_k' - \varepsilon_k')} \cdot \bar{P}_1(i\omega_k' - \varepsilon_k') \cdot e^{(i\omega_k' - \varepsilon_k')t}, \\ C_k = \frac{A_k}{\Delta(i\omega_k' - \varepsilon_k')} \cdot \bar{P}_2(i\omega_k' - \varepsilon_k') \cdot e^{(i\omega_k' - \varepsilon_k')t}, \\ q_k^2 = \varepsilon_k' - i\omega_k', \quad \eta_n = \sqrt{-p_n}, \\ \bar{P}_1(p) = Bi_1 [\lambda_2 [\gamma(\rho_0 - \rho_1 B_2) \cos \gamma \alpha_2 + \\ + (B_2 + \gamma^2 \rho_0 \rho_1) \sin \gamma \alpha_2] - \lambda_1 (B_2 \sin \gamma \alpha_2 + \gamma \rho_0 \cos \gamma \alpha_2)], \\ \bar{P}_2(p) = -\lambda_1 Bi_1 (B_2 \sin \gamma \alpha_2 + \gamma \rho_0 \cos \gamma \alpha_2), \quad (15) \\ D_n = \frac{\bar{\psi}(p_n)}{\Delta'(p_n)} \cdot \bar{P}_1(p_n) e^{-\eta_n^2 t}, \\ E_n = \frac{\bar{\psi}(p_n)}{\Delta'(p_n)} \cdot \bar{P}_2(p_n) e^{-\eta_n^2 t}.$$

Поступая аналогичным образом с функцией $\bar{U}_2(\rho, p)$ (9), найдем закон распределения температуры во втором слое в виде

$$U_2(p, t) = T_0 + Re \frac{R_2}{r} \left[B_k' \sin q_k' \frac{r-R_1}{R_2} + C_k' \cos q_k' \frac{r-R_1}{R_2} \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_2}{r} \left[D_n' \sin \eta_n' \frac{r-R_1}{R_2} + E_n' \cos \eta_n' \frac{r-R_1}{R_2} \right], \quad (16)$$

где

$$B_k' = \frac{A_k}{\Delta(i\omega_k' - \varepsilon_k')} \cdot \bar{P}_1'(i\omega_k' - \varepsilon_k') \cdot e^{(i\omega_k' - \varepsilon_k')t}, \\ C_k' = \frac{A_k}{\Delta(i\omega_k' - \varepsilon_k')} \cdot \bar{P}_2'(i\omega_k' - \varepsilon_k') \cdot e^{(i\omega_k' - \varepsilon_k')t}, \\ q_k'^2 = \sigma^2(\varepsilon_k' - i\omega_k'), \quad \eta_n' = \sigma \sqrt{-p_n}, \\ \bar{P}_1'(p) = -Bi_1 \lambda_1 B_3 \rho_1 \sqrt{-p}, \\ \bar{P}_2'(p) = Bi_1 \lambda_1 \rho_0 \rho_1 p \sigma, \\ D_n' = \frac{\bar{\Psi}(p_n)}{\Delta'(p_n)} \bar{P}_1'(p_n) e^{-\eta_n'^2 t}, \\ E_n' = \frac{\bar{\Psi}(p_n)}{\Delta'(p_n)} \bar{P}_2'(p_n) e^{-\eta_n'^2 t}. \quad (17)$$

Основное дифференциальное уравнение термоупругости для одномерного случая в сферических координатах имеет вид

$$\frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha [T(r, t) - T_0], \quad (18)$$

где Φ — функция термоупругого потенциала перемещений.

Через функцию Φ выражаются все искомые величины перемещений, напряжений и относительных деформаций первой группы, удовлетворяющих уравнениям равновесия, условиям совместимости деформации к обобщенному закону Гука. Имеем

$$\bar{u}_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \bar{u}_\theta = \bar{u}_\varphi = 0, \quad (19)$$

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \bar{\varepsilon}_\theta = \bar{\varepsilon}_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \bar{\varepsilon}_{r\theta} = \bar{\varepsilon}_{r\varphi} = \bar{\varepsilon}_{\theta\varphi} = 0, \quad (20)$$

$$\bar{\sigma}_r = 2G \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \Delta \Phi \right],$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \bar{\sigma}_\theta = 2G \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Delta \Phi \right],$$

$$\bar{\sigma}_{r\theta} = \bar{\sigma}_{\theta\varphi} = \bar{\sigma}_{r\varphi} = 0. \quad (21)$$

Величины напряжений и деформаций, определенные по формулам (20) и (21), в общем случае не удовлетворяют краевым условиям задач термоупругости, так как уравнение (18) определяет только частный интеграл.

Подставляя значение $U_1(\rho, t) = T(r, t) - T_0$ из (14) в правую часть (18), найдем для первого слоя частный интеграл в виде

$$\Phi_1 = -\frac{kT_0 r^2}{6} - kRe \frac{R_2^3}{r q_k^2} \cdot \left[B_k \sin q_k \frac{r-R_1}{R_2} + C_k \cos q_k \frac{r-R_1}{R_2} \right] - \\ - k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_2^3}{r \eta_n^2} \cdot \left[D_n \sin \eta_n \frac{r-R_1}{R_2} + E_n \cos \eta_n \frac{r-R_1}{R_2} \right], \quad (22)$$

где $k = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha$, G — модуль сдвига.

Поступая аналогичным образом с функцией (16), найдем частный интеграл во втором слое в виде

$$\Phi_2 = \frac{kT_0 r^2}{6} - kRe \frac{R_2^3}{r q_k^{12}} \cdot \left[B_k' \sin q_k' \frac{r-R_1}{R_2} + \right. \\ \left. + C_k' \cos q_k' \frac{r-R_1}{R_2} \right] - k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_2^3}{r \eta_n^{12}} \left[D_n' \sin \eta_n' \frac{r-R_1}{R_2} + \right. \\ \left. + E_n' \cos \eta_n' \frac{r-R_1}{R_2} \right]. \quad (23)$$

Первая группа напряжений, перемещений и относительных деформаций

$$\bar{\varepsilon}_r, \bar{\varepsilon}_\varphi, \bar{\varepsilon}_\theta, \bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\varphi, \bar{\sigma}_\theta, \bar{u}_r \quad (24)$$

найдется без затруднений через первые и вторые производные от функций Φ_1 и Φ_2 из выражений (22) и (23).

Чтобы удовлетворить краевым условиям задачи термоупругости, которые имеют вид

$$(\sigma_r)_2|_{r=R_0} = [(\bar{\sigma}_r)_2 + (\bar{\bar{\sigma}}_r)_2]|_{r=R_0} = 0, \\ (\sigma_r)_1|_{r=R_2} = [(\bar{\sigma}_r)_1 + (\bar{\bar{\sigma}}_r)_1]|_{r=R_2} = 0, \\ [(\bar{u}_r)_1 + (\bar{\bar{u}}_r)_1]|_{r=R_1} = [(\bar{u}_r)_2 + (\bar{\bar{u}}_r)_2]|_{r=R_1}, \\ [(\bar{\sigma}_r)_1 + (\bar{\bar{\sigma}}_r)_1]|_{r=R_1} = [(\bar{\sigma}_r)_2 + (\bar{\bar{\sigma}}_r)_2]|_{r=R_1}, \quad (25)$$

необходимо на полученное решение (24) наложить решение однородных уравнений теории упругости

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_r, \bar{\bar{\varepsilon}}_\varphi, \bar{\bar{\varepsilon}}_\theta, \bar{\bar{\sigma}}_r, \bar{\bar{\sigma}}_\varphi, \bar{\bar{\sigma}}_\theta, \bar{\bar{u}}_r. \quad (26)$$

Уравнение равновесия в перемещениях для одномерного случая имеет вид

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{d\bar{u}_r}{dr} + 2 \frac{\bar{u}_r}{r} \right) = 0. \quad (27)$$

Решением уравнения (27) является функция

$$(\bar{\bar{u}}_r)_s = A_s r + \frac{B_s}{r^2}, \quad s=1, 2. \quad (28)$$

Тогда напряжения второй группы найдутся из зависимостей

$$\begin{aligned}(\bar{\sigma}_r)_s &= 2G_s \left(A_s \frac{1+\mu_s}{1-\mu_s} - \frac{2}{r^3} B_s \right), \\ (\bar{\sigma}_\varphi)_s &= (\bar{\sigma}_\theta)_s = 2G_s \left(A_s \frac{1+\mu_s}{1-2\mu_s} + \frac{B_s}{r^3} \right),\end{aligned}\quad (29)$$

а относительные деформации второй группы в виде

$$(\bar{\varepsilon}_r)_s = A_s - \frac{2}{r^3} B_s, \quad (\bar{\varepsilon}_\theta)_s + (\bar{\varepsilon}_\varphi)_s = A_s + \frac{B_s}{r^3}.\quad (30)$$

Неизвестные коэффициенты A_s , B_s , $s=1, 2$ определяются из граничных условий (25). Для их определения имеем систему четырех линейных неоднородных алгебраических уравнений в виде

$$\begin{aligned}2G_2 \frac{1+\mu_2}{1-2\mu_2} A_2 - \frac{4G_2}{R_0^3} B_2 &= -(\bar{\sigma}_r)_2|_{r=R_0}, \\ 2G_1 \frac{1+\mu_1}{1-2\mu_1} A_1 - \frac{4G_1}{R_2^3} B_1 &= -(\bar{\sigma}_r)_1|_{r=R_2}, \\ R_1 A_1 + \frac{B_1}{R_1^2} - R_1 A_2 - \frac{B_2}{R_1^2} &= [(\bar{u}_r)_2 - (\bar{u}_r)_1]_{r=R_1}, \\ 2G_1 \frac{1+\mu_1}{1-2\mu_1} A_1 - \frac{4G_1}{R_1^3} B_1 - 2G_2 \frac{1+\mu_2}{1-2\mu_2} A_2 + \frac{4G_2}{R_1^3} B_2 &= \\ &= [(\bar{\sigma}_r)_2 + (\bar{\sigma}_r)_1]_{r=R_1}.\end{aligned}\quad (31)$$

Определитель системы (31) отличен от нуля и неизвестные коэффициенты A_1 , B_1 , A_2 , B_2 определяются единственным образом. Определив коэффициенты A_s , B_s , найдем без затруднений напряжения второй группы по формулам (29), перемещения по формулам (28) и относительные деформации по формулам (30).

Таким образом, вторая группа напряжений и деформаций определена.

Полные термоупругие напряжения, используя принцип суперпозиции, найдутся в виде алгебраической суммы:

$$\begin{aligned}(\sigma_r)_s &= (\bar{\sigma}_r)_s + (\bar{\sigma}_r)_s, \\ (\sigma_\varphi)_s &= (\bar{\sigma}_\varphi)_s + (\bar{\sigma}_\varphi)_s, \\ (\sigma_\theta)_s &= (\bar{\sigma}_\theta)_s + (\bar{\sigma}_\theta)_s.\end{aligned}\quad (32)$$

Аналогичным образом определяются полные значения перемещений и относительных деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

- Э. Мелан, Г. Паркус. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Физматгиз, М., 1959.
А. Ляв. Математическая теория упругости. ОНТИ. НКТП. М.—Л., 1935.

Поступила 10. III. 1967.

КОНЦЕНТРАЦИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОТВЕРСТИЯ

А. И. УЗДАЛЕВ, А. А. ЮРЬЕВА

В статье дано решение задачи о концентрации температурных напряжений в ортотропной пластинке с теплоизолированным эллиптическим отверстием под влиянием теплового потока. Подобная задача при условии, что контур отверстия поддерживается при нулевой температуре, рассмотрена в работе [1].

1. Рассмотрим прямоугольную ортотропную пластинку с эллиптическим отверстием в центре (рис. 1). Две противоположные стороны пластинки защемлены, а другие стороны свободны. Главные оси эллипса, а также главные направления упругой и тепловой симметрии параллельны сторонам пластинки. Оси координатной системы x, y выбраны совпадающими с главными осями эллипса. Уравнение контура отверстия имеет вид

$$x = a \cos \vartheta, \quad y = b \sin \vartheta, \quad (1.1)$$

где a и b — длины полуосей эллипса, ϑ — параметр, определяющий положение точки на контуре.

Размеры отверстия являются малыми по сравнению с размерами пластинки. Будем считать, что защемленные стороны, основания и контур эллиптического отверстия пластинки теплоизолированы. Напряженное состояние возникает под влиянием теплового потока, имеющего место при следующих температурных условиях:

$$\begin{aligned} T &= T_0 h \text{ при } x = h, \quad T = -T_0 h \\ &\text{при } x = -h. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Условие теплоизоляции контура может быть записано в виде

$$q_n = q_x \cos(n, x) + q_y \cos(n, y) = 0. \quad (1.3)$$

Здесь q_n — нормальная составляющая вектора потока тепла, n — внешняя нормаль к контуру, q_x, q_y — проекции вектора потока тепла на оси x и y , связанные с функцией температур по формулам:

$$q_x = -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (1.4)$$

где T — функция температур, λ_1 и λ_2 — коэффициенты теплопроводности в направлении осей x и y .

Поверхностные и объемные силы на пластинку не действуют.

Прежде чем приступить к изучению распределения напряжений, определим функцию температур. Функция температур удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (1.5)$$

Разыскиваем функцию температур в виде суммы

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}. \quad (1.6)$$

Функция $T^{(1)}$ определяет распределение температур в пластинке без отверстия под влиянием температуры, заданной на сторонах $x = \pm h$ условиями (1.2). Она равна

$$T^{(1)} = T_0 x. \quad (1.7)$$

Нормальная составляющая вектора потока тепла от данного температурного поля на площадках, совпадающих с контуром эллиптического отверстия, представится формулой

$$q_n^{(1)} = -\lambda_1 T_0 \cos(n, x). \quad (1.8)$$

Так как

$$\cos(n, x) = -\frac{b}{l} \cos \vartheta, \quad \cos(n, y) = -\frac{a}{l} \sin \vartheta, \quad l^2 = a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta, \quad (1.9)$$

то формула (1.8) для $q_n^{(1)}$ принимает вид

$$q_n^{(1)} = \frac{\lambda_1 T_0 b}{l} \cos \vartheta. \quad (1.10)$$

Функция $T^{(2)}$, которая входит в формулу (1.6), характеризует распределение температур в пластинке с отверстием под влиянием нормальной составляющей вектора потока тепла, заданной на эллиптическом контуре и равной

$$q_n^{(2)} = -q_n^{(1)}. \quad (1.11)$$

Температура в достаточном удалении от отверстия (теоретически в бесконечности) равна нулю. Определим функцию $T^{(2)}$ путем решения уравнения теплопроводности (1.5) при условии на контуре (1.11).

Общее решение уравнения (1.5) выражается через произвольную аналитическую функцию F_0 по формуле [2]

$$T^{(2)} = 2 \operatorname{Re} F_0(z_3), \quad (1.12)$$

где Re — обозначение вещественной части,

$$z_3 = x + my, \quad m = ix = i \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \quad (1.13)$$

Нормальная составляющая потока тепла данного температурного поля равна

$$q_n^{(2)} = - \left[\lambda_1 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial x} \cos(n, x) + \lambda_2 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial y} \cos(n, y) \right]. \quad (1.14)$$

Учитывая формулы (1.9), (1.10), (1.12) и (1.14), представим условия на контуре (1.11) в следующем виде:

$$2 \operatorname{Re}[(\lambda_1 b \cos \vartheta + i \lambda_2 a \sin \vartheta) F_0'(z_3)] = -T_0 \lambda_1 b \cos \vartheta. \quad (1.15)$$

Для определения функции F_0 отобразим конформно область определения этой функции в плоскости z_3 на внешность единичного круга плоскости ζ . Отображающей функцией является $z_3 = \omega(\zeta)$, где

$$\omega(\zeta) = \left(\frac{a + \zeta b}{2} \right) \zeta + \left(\frac{a - \zeta b}{2} \right) \frac{1}{\zeta}. \quad (1.16)$$

Приняв обозначение $F_0(z_3) = F(\zeta)$, имеем

$$F_0'(z_3) = \frac{dF_0}{dz_3} = \frac{F'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}. \quad (1.17)$$

Если подставить данную функцию $F_0'(z_3)$ в условие на контуре (1.15), то получим граничное условие для функции $F(\zeta)$.

Функция $F(\zeta)$ разыскивается в виде следующего ряда:

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^{-k}. \quad (1.18)$$

На границе $\zeta^{-k} = e^{-i\vartheta k} = \sigma^{-k}$. Путем подстановки потребуем, чтобы функция $F(\zeta)$ удовлетворяла условию на границе. Предварительно выражаем $\cos \vartheta$ и $\sin \vartheta$, входящие в граничные условия, через σ и σ^{-1} с помощью известных формул Эйлера для комплексных чисел. Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях σ в левой и правой частях граничных условий приводит к бесконечной алгебраической системе уравнений, из которой могут быть найдены постоянные a_k . Вид системы следующий:

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2)b_1 + A_1 b_3 &= M, \\ A_1 b_5 + A_2 b_3 + A_3 b_1 &= N, \\ A_1 b_7 + A_2 b_5 + A_3 b_3 &= 0, \\ &\vdots \\ A_1 b_k + A_2 b_{k-2} + A_3 b_{k-4} &= 0, \quad (k=9, 11, 13, \dots). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} b_k &= (-k)a_k, \\ A_1 &= -A_3 = -\frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{4} (a^2 - x^2 b^2), \quad A_2 = \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{2} (a^2 + x^2 b^2), \\ M &= -\frac{T_0 \lambda_1 b}{8} (a^2 + 3x^2 b^2), \quad N = \frac{T_0 \lambda_1 b}{8} (a^2 - x^2 b^2). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Исследование показывает, что 1) коэффициенты ряда (1.18) являются вещественными числами; 2) $a_k = 0$ при $k=2, 4, 6, \dots$; 3) коэффициенты a_k при $k=1, 3, 5, \dots$ определяются путем решения бесконечной системы уравнений (1.19); 4) система уравнений (1.19) является регу-

лярной и для ее решения может быть использован метод редукции [3]. Требование обращения в нуль функции $T^{(2)}$ на бесконечности позволяет определить действительную часть коэффициента a_0 : $\text{Re } a_0 = 0$.

Таким образом, закон распределения температур $T^{(2)}$ установлен. Результирующее температурное поле в поставленной задаче определяется по формулам (1.6), (1.7), (1.12). Если материал рассматриваемой пластинки изотропный, то в полученных формулах следует положить $\kappa=1$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$. Для изотропной пластинки с круговым отверстием функция температур, как следует из вышеприведенных формул, находится в замкнутом виде:

$$T = T_0 x \left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right). \quad (1.21)$$

2. Установим закон распределения напряжений в ортотропной пластинке. Напряженное состояние пластинки определяется путем наложения трех полей напряжений.

а. Поле 1 напряжений возникает в пластинке без отверстия под влиянием температуры, заданной на прямолинейных сторонах условиями (1.2). Принимаем обозначения $X_n^0(\vartheta)$ и $Y_n^0(\vartheta)$ — проекции напряжений на площадках, совпадающих с эллиптической кривой, которая соответствует контуру отверстия.

б. Поле 2 напряжений создается в пластинке с эллиптическим отверстием под влиянием функции температур $T^{(2)}$, заданной формулами (1.12) и (1.18).

в. Поле 3 напряжений имеет место в пластинке с отверстием под действием нагрузки, заданной на эллиптическом контуре. Проекция этой нагрузки на оси x и y равны $-X_n^0(\vartheta)$ и $-Y_n^0(\vartheta)$. Температура пластинки равна нулю.

Компоненты напряжения каждого напряженного состояния будем обозначать верхними индексами (1), (2) и (3) соответственно.

Напряженное состояние поля 1 в пластинке без отверстия определяется по формулам:

$$\sigma_x^{(1)} = 0, \quad \sigma_y^{(1)} = -\frac{\alpha_2}{a_{22}} T_0 x, \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь и ниже приняты обозначения: α_1 , α_2 — температурные коэффициенты линейного расширения в направлении осей x и y , a_{ij} — упругие постоянные материала.

Проекция напряжения $X_n^0(\vartheta)$ и $Y_n^0(\vartheta)$ равны

$$X_n^0 = 0, \quad Y_n^0 = -\frac{\alpha_2}{a_{22}} T_0 x \frac{dx}{ds}, \quad (2.2)$$

где s — длина дуги эллиптической кривой, отсчитываемой от начальной точки против часовой стрелки.

Формула для нормального напряжения на площадках, перпендикулярных к эллиптической кривой, которая соответствует контуру отверстия, имеет вид

$$\sigma_\vartheta^{(2)} = -\frac{\alpha_2}{a_{22}} \frac{T_0 ab^2 \cos^3 \vartheta}{a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta}. \quad (2.3)$$

В точке контура на конце большой оси эллипса, где $\vartheta = 0$,

$$\sigma_\vartheta^{(1)} = -\frac{\alpha_2}{a_{22}} T_0 a.$$

Если материал изотропный, то здесь следует положить $a_2 = \alpha$ и $a_{22} = 1/E$, где E — модуль Юнга.

Приступим к изучению поля напряжений 2, которое возникает в пластинке с отверстием под влиянием функции температур $T^{(2)}$. Подобная задача для более общего случая задания функции температур решена в работе [2].

Компоненты напряжения поля 2 определяются по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(2)} &= 2\operatorname{Re}[\mu_1^2 \Phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2'(z_2) + m^2 \Psi'(z_3)], \\ \sigma_y^{(2)} &= 2\operatorname{Re}[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2) + \Psi'(z_3)], \\ \tau_{xy}^{(2)} &= -2\operatorname{Re}[\mu_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \Phi_2'(z_2) + m \Psi'(z_3)].\end{aligned}\quad (2.4)$$

Здесь $\Phi_1(z_1)$, $\Phi_2(z_2)$, $\Psi(z_3)$ — аналитические функции комплексных переменных $z_1 = x + \mu_1 y$; $z_2 = x \pm \mu_2 y$, $z_3 = x + m y$, равные

$$\begin{aligned}\Phi_1(z_1) &= A \ln \zeta_1 + \left(\frac{m - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right) \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{N_k}{k} \zeta_1^{-k}, \\ \Phi_2(z_2) &= B \ln \zeta_2 - \left(\frac{m - \mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \right) \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{N_k}{k} \zeta_2^{-k}, \\ \Psi(z_3) &= N_0 \ln \zeta_3 - \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{N_k}{k} \zeta_3^{-k}, \\ \zeta_i &= \frac{z_i + \sqrt{z_i^2 - a^2 - \mu_i^2 b^2}}{a - i\mu_i b}, \quad \mu_3 = m \\ (i &= 1, 2, 3).\end{aligned}\quad (2.5)$$

Предположим, что комплексные параметры ортотропного материала являются чисто мнимыми величинами: $\mu_1 = i\beta$, $\mu_2 = i\delta$, $m = i\kappa$. Тогда постоянные, входящие в формулы (2.5), равны

$$\begin{aligned}N_0 &= \frac{r a_1}{2} (a + \kappa b), \quad N_k = \frac{r}{2} [a_{k+1} (a + \kappa b) - a_{k-1} (a - \kappa b)], \\ (k &= 2, 4, 6, \dots) \\ r &= \frac{\alpha_1 x^2 - \alpha^2}{a_{11} (x^2 - \beta^2) (x^2 - \delta^2)}, \\ A &= \frac{N_0 \beta}{x(\beta^2 - \delta^2)} \left[\delta^2 \left(1 + \frac{\alpha_1}{r a_{22}} \right) - x^2 \right], \\ B &= - \frac{N_0 \delta}{x(\beta^2 - \delta^2)} \left[\beta^2 \left(1 + \frac{\alpha_2}{r a_{22}} \right) - x^2 \right].\end{aligned}\quad (2.7)$$

Формула для напряжения в точках контура на площадках, нормальных к краю отверстия, имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_\theta^{(2)} &= \frac{2}{l^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{i(b \cos \vartheta + i\beta a \sin \vartheta)^2}{a \sin \vartheta - i\beta b \cos \vartheta} \left[-A + \left(\frac{x - \delta}{\beta - \delta} \right) \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} N_k \sigma^{-k} \right] + \right. \\ &+ \frac{i(b \cos \vartheta + i\delta a \sin \vartheta)^2}{a \sin \vartheta - i\delta b \cos \vartheta} \left[-B + \left(\frac{x - \beta}{\delta - \beta} \right) \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} N_k \sigma^{-k} \right] + \\ &\left. + (b \cos \vartheta + i\kappa a \sin \vartheta)^2 r \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} a_k \sigma^{-k} \right\}.\end{aligned}\quad (2.8)$$

В точке контура при $\vartheta = 0$

$$\sigma_{\vartheta}^{(2)} = 2r \left[1 - \frac{x(\beta + \delta - x)}{\beta\delta} \right] \left[\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} a_k - \frac{a_1}{2bx} (a + xb) \right] - \frac{a_1 a_2}{x b a_{22}} (a + xb).$$

Наложение двух полей напряжений, поля 1 и поля 2, дает решение задачи о напряженном состоянии прямоугольной ортотропной пластинки с эллиптическим отверстием, когда контур отверстия теплоизолирован, и к нему приложена нагрузка, определяемая по формуле (2.2). Чтобы снять эту нагрузку с контура, наложим на рассмотренные выше поля напряжений 1 и 2 третье поле. Поле 3 напряжений возникает в ортотропной пластинке с эллиптическим отверстием при условии, что температура пластинки равна нулю, а на контуре отверстия задана нагрузка

$$X_n^{(3)} = -X_n^0(\vartheta) = 0, \quad Y_n^{(3)} = -Y_n^0(\vartheta) = \frac{T_0 a_2 x}{a_{22}} \frac{dx}{ds}. \quad (2.9)$$

Решение этой части задачи для самого общего вида загрузки контура дано в работе С. Г. Лехницкого ([4], § 38). Напряжения выражаются через аналитические функции по известным формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(3)} &= 2\operatorname{Re}[\mu_1^2 \Phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2'(z_2)], \\ \sigma_y^{(3)} &= 2\operatorname{Re}[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)], \\ \tau_{xy}^{(3)} &= -2\operatorname{Re}[\mu_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \Phi_2'(z_2)]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Вид функций Φ_1 и Φ_2 в данном случае таков:

$$\Phi_1(z_1) = -\frac{T_0 a_2 a^2}{4a_{22}} \left(\frac{\delta}{\beta - \delta} \right) \zeta_1^{-2}, \quad \Phi_2(z_2) = \frac{T_0 a_2 a^2}{4a_{22}} \left(\frac{\beta}{\beta - \delta} \right) \zeta_2^{-2}. \quad (2.11)$$

На площадках, нормальных к контуру отверстия, напряжение $\sigma_{\vartheta}^{(3)}$ равно

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta}^{(3)} &= \frac{T_0 a_2 a^2}{(\beta - \delta) a_{22} l^2} \operatorname{Re} \left\{ \sigma^{-2} \left[\frac{i\beta(b \cos \vartheta - i\delta a \sin \vartheta)^2}{a \sin \vartheta - i\delta b \cos \vartheta} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{i\delta(b \cos \vartheta + i\beta a \sin \vartheta)^2}{a \sin \vartheta - i\beta b \cos \vartheta} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Напряжение $\sigma_{\vartheta}^{(3)}$ в точке контура при $\vartheta = 0$ определяется по формуле

$$\sigma_{\vartheta}^{(3)} = -\frac{T_0 a_2 a^2}{a_{22} b} \left(\frac{\beta + \delta}{\beta \delta} \right).$$

Таким образом, распределение напряжений в рассматриваемой ортотропной пластинке с теплоизолированным эллиптическим отверстием под влиянием теплового потока устанавливается путем наложения трех полей напряжений. Так, например, формула, характеризующая концентрацию напряжений у контура отверстия, имеет вид

$$\sigma_{\vartheta} = \sigma_{\vartheta}^{(1)} + \sigma_{\vartheta}^{(2)} + \sigma_{\vartheta}^{(3)}. \quad (2.13)$$

Слагаемые этой суммы определяются по формулам (2.3), (2.9) и

(2.12). Если материал пластинки изотропный и отверстие имеет форму круга, то напряжение в точке контура при $\vartheta=0$ равно

$$\sigma_{\vartheta} = -4 T_0 E \alpha. \quad (2.14)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Уздалев. Концентрация температурных напряжений около эллиптического отверстия в ортотропной пластинке под влиянием теплового потока. Изв. АН СССР, «Механика и машиностроение», 1963, № 5.
2. А. И. Уздалев. Плоская задача термоупругости для анизотропного тела. Инженерный журнал, т. 11, 1962, № 2.
3. А. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Госиздат техн.-теорет. лит., 1952.
4. С. Г. Лехницкий. Анизотропные пластинки. Госиздат техн.-теорет. лит., 1957.

Поступила 1. III. 1967.

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА СО СМЕШАННЫМИ ТЕМПЕРАТУРНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А. Д. ХАНЖОВ

В работе рассматривается осесимметричная задача о нахождении стационарных температурных напряжений в полубесконечном трансверсально-изотропном теле. Напряженное состояние возникает под влиянием сосредоточенного источника тепла и при наличии на границе тела смешанных температурных условий.

Подобная задача, но при отсутствии источника тепла решена иным способом в работе В. Новацкого [1].

1. Пусть имеем полубесконечное упругое трансверсально-изотропное тело, отнесенное к цилиндрической системе координат r, θ, z . Ось z перпендикулярна границе и направлена внутрь тела. Плоскость изотропии параллельна граничной плоскости r, θ . Источник тепла интенсивностью W расположен в точке с координатами $r=0, z=b$. Предполагаем, что упругие и тепловые характеристики материала не зависят от температуры, объемные силы не действуют, материал тела подчиняется уравнениям обобщенного закона Гука, учитывающим температурное влияние:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= A_{11}E_r + A_{12}E_\theta + A_{13}E_z - \beta T, \\ \sigma_\theta &= A_{12}E_r + A_{11}E_\theta + A_{13}E_z - \beta T, \\ \sigma_z &= A_{13}E_r + A_{13}E_\theta + A_{33}E_z - \beta' T, \\ \tau_{rz} &= A_{44}\gamma_{rz}, \\ E_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad E_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad E_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}.\end{aligned}\quad (1.1)$$

Решение будем искать при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}T \Big|_{\substack{z=0 \\ r < R}} &= T_0(r), \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ r > R}} = F_0(r), \\ \sigma_z \Big|_{z=0} &= 0, \quad \tau_{rz} \Big|_{z=0} = 0.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Уравнение теплопроводности и дифференциальные уравнения равновесия в случае осевой симметрии имеют вид

$$k\nabla_r^2 T + k' \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{W}{2\pi r} \delta(r) \delta(z-b); \quad (1.3)$$

$$A_{11} \left(\nabla_r^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right) + A_{44} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} - \beta \frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

$$A_{44} \nabla_r^2 w + A_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) - \beta' \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad (1.4)$$

где

$$\nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

T — температура,

δ -дельта — функция Дирака,

$T_0(r)$, $F_0(r)$ — заданные функции. Остальные обозначения являются общепринятыми [1, 2].

Считаем, что температура, все компоненты вектора перемещения и тензора напряжения на бесконечности равны нулю.

Применяя к уравнениям (1.3), (1.4) преобразования Ханкеля [3] по переменной r и учитывая условия на бесконечности, находим

$$\bar{T}_1(\xi, z) = \frac{Q}{2s_1\xi} e^{-(b-z)s_1\xi} + B e^{(b-z)s_1\xi} \text{ для } 0 \leq z \leq b,$$

$$\bar{T}_2(\xi, z) = \left(\frac{Q}{2s_1\xi} + B \right) e^{-(z-b)s_1\xi} \text{ для } z \geq b; \quad (1.5)$$

$$\bar{u}_{r1}(\xi, z) = \frac{Q}{2\xi^2} \sum_{i=2}^3 M_i [e^{-(b-z)s_i\xi} - e^{(b-z)s_i\xi}] +$$

$$+ M_1 \left[\frac{Q}{2\xi^2} e^{-(b-z)s_1\xi} + B \frac{s_1}{\xi} e^{(b-z)s_1\xi} \right] + h_2 C e^{-zs_2\xi} + h_3 D e^{-zs_3\xi} \text{ для } 0 \leq z \leq b,$$

$$\bar{u}_{r2}(\xi, z) = M_1 \left(\frac{Q}{2\xi^2} + B \frac{s_1}{\xi} \right) e^{-(z-b)s_1\xi} + h_2 C e^{-zs_2\xi} + h_3 D e^{-zs_3\xi} \text{ для } z \geq b; \quad (1.6)$$

$$\bar{w}_1(\xi, z) = \frac{Q}{2\xi^2} \sum_{i=2}^3 H_i [e^{-(b-z)s_i\xi} + e^{(b-z)s_i\xi}] +$$

$$+ H_1 \left[\frac{Q}{2\xi^2} e^{-(b-z)s_1\xi} - B \frac{s_1}{\xi} e^{(b-z)s_1\xi} \right] + C e^{-zs_2\xi} + D e^{-zs_3\xi} \text{ для } 0 \leq z \leq b,$$

$$\bar{w}_2(\xi, z) = -H_1 \left(\frac{Q}{2\xi^2} + B \frac{s_1}{\xi} \right) e^{-(z-b)s_1\xi} + C e^{-zs_2\xi} + D e^{-zs_3\xi} \text{ для } z \geq b. \quad (1.7)$$

Здесь $\bar{T}(\xi, z)$, $\bar{u}_r(\xi, z)$, $\bar{w}(\xi, z)$ — трансформанты Ханкеля соответственно функций $T(r, z)$, $u_r(r, z)$, $w(r, z)$, ξ — параметр интегрального преобразования, $B(\xi)$, $C(\xi)$, $D(\xi)$ — функции, определяемые из граничных условий.

Постоянные, входящие в формулы (1.5—1.7), равны

$$s_2, s_3 = \sqrt{\frac{A_{11}A_{33} - 2A_{13}A_{44} - A_{13}^2}{2A_{33}A_{44}}} \pm \sqrt{\left(\frac{A_{11}A_{33} - 2A_{13}A_{44} - A_{13}^2}{2A_{33}A_{44}} \right)^2 - \frac{A_1}{A_{33}}}$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{k}{k'}}, \quad Q = \frac{W}{2\pi k'}, \quad H_i = \frac{(A_{44}s_i^2 - A_{11})\beta' + (A_{13} + A_{44})\beta}{A_{33}A_{44}(s_j^2 - s_i^2)(s_i^2 - s_i^2)},$$

$$h_i = s_i \frac{A_{13}^2 + 2A_{13}A_{44} + A_{33}A_{44}s_i^2}{A_{11}(A_{13} + A_{44})}, \quad M_i = \frac{(A_{13} + A_{44})s_i^2\beta' + (A_{44} - A_{33}s_i^2)\beta}{A_{33}A_{44}(s_j^2 - s_i^2)(s_l^2 - s_i^2)s_i},$$

$$i, j, l = 1, 2, 3 \begin{cases} \text{при } i=1, j=2, l=3, \\ \text{при } i=2, j=3, l=1, \\ \text{при } i=3, j=1, l=2. \end{cases}$$

При составлении уравнений (1.5—1.7) были использованы условия на плоскости $z=b$:

$$\bar{T}_1(\xi, z) = \bar{T}_2(\xi, z), \quad \frac{d\bar{T}_1(\xi, z)}{dz} - \frac{d\bar{T}_2(\xi, z)}{dz} = Q,$$

$$\bar{u}_{r1}(\xi, z) = \bar{u}_{r2}(\xi, z), \quad \bar{w}_1(\xi, z) = \bar{w}_2(\xi, z),$$

$$\bar{\tau}_{z1}(\xi, z) = \bar{\tau}_{z2}(\xi, z), \quad \bar{\tau}_{rz1}(\xi, z) = \bar{\tau}_{rz2}(\xi, z).$$

Прежде чем приступить к определению напряжений, установим закон распределения температур.

Используя теорему обращения для преобразования Ханкеля для первого уравнения (1.5), дифференцируя результат по z и удовлетворяя первым двум граничным условиям (1.2), приходим к парным интегральным уравнениям

$$\int_0^\infty \bar{T}_1 I_0(\xi r) \xi d\xi = T_0(r) \quad \text{при } 0 \leq r \leq R,$$

$$\int_0^\infty \frac{d\bar{T}_1}{dz} I_0(\xi r) \xi d\xi = F_0(r) \quad \text{при } r > R. \quad (1.8)$$

Функцию $F_0(r)$ будем считать представимой интегралом Ханкеля

$$F_0(r) = \int_0^\infty \bar{F}_0(\xi) I_0(\xi r) \xi d\xi, \quad \bar{F}_0(\xi) = \int_R^\infty F_0(r) I_0(\xi r) r dr.$$

Если ввести новые переменные $u = R\xi$, $\rho = \frac{r}{R}$, то парные интегральные уравнения (1.8) после некоторых выкладок можно записать так:

$$\int_0^\infty u^{-1} g(u) I_0(u\rho) du = \lambda(R\rho) \quad \text{при } 0 \leq \rho \leq 1,$$

$$\int_0^\infty g(u) I_0(u\rho) du = 0 \quad \text{при } \rho > 1, \quad (1.9)$$

где

$$g(u) = \frac{u}{R} \left[\frac{u}{R} B e^{bs_1 \frac{u}{R}} - \bar{F} \left(\frac{u}{R} \right) \right], \quad (1.10)$$

$$\lambda(R\rho) = T_0(R\rho) - \frac{Q}{2s_1 R} \int_0^\infty e^{-bs_1 \frac{u}{R}} I_0(u\rho) du - \frac{1}{R} \int_0^\infty \bar{F} \left(\frac{u}{R} \right) I_0(u\rho) du,$$

$$F(R\rho) = \frac{Q}{2s_1} \int_0^\infty e^{-bs_1 \frac{u}{R}} I_0(u\rho) u du - \frac{R^2 F_0(R\rho)}{s_1},$$

$F\left(\frac{u}{R}\right)$ — трансформанта Ханкеля нулевого порядка функции $F(R\rho)$,
 I_ν — функция Бесселя первого рода.

Решением уравнений (1.9) является функция [3]

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} u [V \bar{u} I_{-\frac{1}{2}}(u) \int_0^1 \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \lambda(\mu) d\mu + \\ + \int_0^1 \frac{\psi d\psi}{\sqrt{1-\psi^2}} \int_0^1 \lambda(\mu \psi) (u\mu)^{\frac{3}{2}} I_1(u\mu) d\mu]. \quad (1.11)$$

Возвращаясь к старым переменным, а также используя формулы (1.5), (1.10), (1.11) и теорему обращения для преобразований Ханкеля, находим стационарное температурное поле в полубесконечном трансверсально-изотропном теле

$$T(r, z) = \int_0^\infty \bar{T}(\xi, z) I_0(\xi r) \xi d\xi. \quad (1.12)$$

Перейдем далее к определению напряжений в теле.

Уравнения (1.1) после выполнения над ними преобразования Ханкеля примут вид

$$\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta = (A_{11} + A_{12}) \xi \bar{u}_r + 2A_{13} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - 2\beta \bar{T}; \quad (1.13)$$

$$\bar{\sigma}_z = A_{13} \xi \bar{u}_r + A_{33} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - \beta' \bar{T},$$

$$\bar{\tau}_{rz} = A_{44} \left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} - \xi \bar{w} \right). \quad (1.14)$$

Подставляя в соотношения (1.14) выражения для трансформант $T_1(\xi, z)$, $\bar{u}_{r1}(\xi, z)$, $\bar{w}_1(\xi, z)$, определяемые формулами (1.5—1.7), и удовлетворяя последним двум интегрально преобразованным граничным условиям (1.2), находим функции $C(\xi)$, $D(\xi)$. Результат обратного преобразования позволяет получить формулы для напряжений

$$\sigma_r(r, z) + \sigma_\theta(r, z) = \int_0^\infty [\bar{\sigma}_r(\xi, z) + \bar{\sigma}_\theta(\xi, z)] I_0(\xi r) \xi d\xi; \quad (1.15)$$

$$\sigma_z(r, z) = \int_0^\infty \bar{\sigma}_z(\xi, z) I_0(\xi r) \xi d\xi,$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \int_0^\infty \bar{\tau}_{rz}(\xi, z) I_1(\xi r) \xi d\xi. \quad (1.16)$$

Представляя уравнения равновесия в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_r) = r(\sigma_r + \sigma_\theta) - r^2 \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}$$

и интегрируя его от 0 до r , найдем

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \int_0^r (\sigma_r + \sigma_\theta) r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} r^2 dr,$$

а затем из (1.15) и σ_θ .

2. Рассмотрим пример, когда часть границы теплоизолирована, а на остальной ее части поддерживается нулевая температура:

$$\begin{aligned} T \Big|_{\substack{z=0 \\ r < R}} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ r > R}} = 0, \\ \sigma_z \Big|_{z=0} &= 0, \quad \tau_{rz} \Big|_{z=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В этом случае

$$\lambda(R\rho) = -\frac{Q}{s_1 \sqrt{b^2 s_1^2 + R^2 \rho^2}}, \quad g(u) = -\frac{2Qbu}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(u\mu) d\mu}{b^2 s_1^2 + R^2 \mu^2},$$

а формулы (1.12), (1.15), (1.16) дадут:

$$\begin{aligned} T(r, z) = & \frac{Q}{2s_1} \left(\frac{1}{R_1^{(1)}} + \frac{1}{r_1} \right) + \frac{\sqrt{2}Q}{\pi s_1} \left[\sqrt{\frac{q_1 + \sqrt{p_1}}{p_1}} \left(\arctg \Omega_1 - \frac{\pi}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{q_1 - \sqrt{p_1}}{p_1}} \left(\arctg \omega_1 - \frac{\pi}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, z) = & -\frac{Q}{2} \sum_{i=1}^3 G_i \left(\frac{1}{R_i^{(1)}} + \frac{1}{r_i} \right) - \frac{Q}{(s_2 - s_3)} \sum_{i=1}^3 G_i \left(\frac{s_3}{R_i^{(2)}} - \frac{s_1}{R_i^{(3)}} \right) + \\ & + \frac{\sqrt{2}QG_1}{\pi(s_2 - s_3)} \sum_{i=1}^3 (s_i - s_j) \left[\sqrt{\frac{q_i + \sqrt{p_i}}{p_i}} \left(\arctg \Omega_i - \frac{\pi}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{q_i - \sqrt{p_i}}{p_i}} \left(\arctg \omega_i - \frac{\pi}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r, z) = & \frac{Q}{2r} \sum_{i=1}^3 G_i s_i^2 \left(\frac{z+b}{R_i^{(1)}} + \frac{z-b}{r_i} \right) + \\ & + \frac{Qs_2 s_3}{r(s_2 - s_3)} \sum_{i=1}^3 G_i \left(\frac{zs_2 + bs_i}{R_i^{(2)}} - \frac{zs_3 + bs_i}{R_i^{(3)}} \right) - \\ & - \frac{\sqrt{2}QG_1 z}{\pi r(s_2 - s_3)} \sum_{i=1}^3 (s_i - s_j) s_i^2 \left[\frac{t_i + \sqrt{p_i}}{\sqrt{p_i(q_i + \sqrt{p_i})}} \left(\arctg \Omega_i - \frac{\pi}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{t_i - \sqrt{p_i}}{\sqrt{p_i(q_i - \sqrt{p_i})}} \left(\arctg \omega_i - \frac{\pi}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) + \sigma_\theta(r, z) = & -\frac{Q}{2} \sum_{i=2}^3 G_i f_i \left(\frac{1}{R_i^{(1)}} + \frac{1}{r_i} \right) + \\ & + \frac{QN}{2} \left(\frac{1}{R_1^{(1)}} + \frac{1}{r_1} \right) - \frac{Q}{(s_2 - s_3)} \sum_{i=1}^3 G_i \left(\frac{f_2 s_3}{R_i^{(2)}} - \frac{f_3 s_2}{R_i^{(3)}} \right) + \\ & + \frac{\sqrt{2}QG_1}{\pi(s_2 - s_3)} \sum_{i=2}^3 (s_i - s_j) f_i \left[\sqrt{\frac{q_i + \sqrt{p_i}}{p_i}} \left(\arctg \Omega_i - \frac{\pi}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{q_i - \sqrt{p_i}}{p_i}} \left(\arctg \omega_i - \frac{\pi}{2} \right) \right] + \frac{\sqrt{2}QN}{\pi} \left[\sqrt{\frac{q_1 + \sqrt{p_1}}{p_1}} \left(\arctg \Omega_1 - \frac{\pi}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{q_1 - \sqrt{p_1}}{p_1}} \left(\arctg \omega_1 - \frac{\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 R_i^{(1)} &= \sqrt{(z+b)^2 s_i^2 + r^2}, \quad r_i = \sqrt{(z-b)^2 s_i^2 + r^2}, \\
 R_i^{(2)} &= \sqrt{(zs_2 + bs_i)^2 + r^2}, \quad R_i^{(3)} = \sqrt{(zs_3 + bs_i)^2 + r^2}, \\
 \Omega_i &= \frac{bs_1}{R} \sqrt{\frac{n_i + \sqrt{m_i}}{q_i + \sqrt{p_i}}}, \quad \omega_i = \frac{bs_1}{R} \sqrt{\frac{n_i + \sqrt{m_i}}{q_i - \sqrt{p_i}}}, \\
 q_i &= z^2 s_i^2 + r^2 + b^2 s_1^2, \quad p_i = q_i^2 - 4z^2 s_i^2 b^2 s_1^2, \quad n_i = z^2 s_i^2 + r^2 - R^2, \\
 m_i &= n_i^2 + 4z^2 s_i^2 R^2, \quad t_i = z^2 s_i^2 + r^2 - b^2 s_1^2, \\
 N &= (A_{11} + A_{12}) M_1 + 2A_{13} H_1 s_1 - \frac{2\beta}{s_1}, \quad f_i = \frac{(A_{11} + A_{12}) h_i - A_{13} s_i}{A_{13} h_i - A_{33} s_i}, \\
 G_i &= \frac{(A_{13} s_i^2 + A_{11}) \beta' - (A_{33} s_i^2 + A_{13}) \beta}{A_{33} (s_j^2 - s_i^2) (s_i^2 - s_l^2) s_i}, \\
 i, j, l &= 1, 2, 3 \left\{ \begin{array}{l} \text{при } i=1 \quad j=2, \quad l=3 \\ \text{при } i=2 \quad j=3, \quad l=1 \\ \text{при } i=3 \quad j=1, \quad l=2 \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

σ_r и σ_θ находятся аналогичным образом.

Формулы (2.2—2.5) справедливы как для $0 \leq z \leq b$, так и для $z \geq b$. Как видно, полученные функции обращаются в нуль на бесконечности и тождественно удовлетворяют граничным условиям и уравнениям термоупругости. При проверке следует иметь в виду выполнение следующих тождеств:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^3 H_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^3 M_i s_i = 0, \\
 \sum_{i=1}^3 G_i s_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^3 (s_i - s_j) = 0, \quad \sum_{i=1}^3 (s_i - s_j) s_i = 0.
 \end{aligned}$$

Заметим, что задача теплопроводности при самых общих смешанных граничных условиях и при отсутствии источника тепла рассмотрена в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Новацкий. Вопросы термоупругости. Изд. АН СССР, 1962.
2. С. Г. Лехницкий. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1950.
3. И. Снеддон. Преобразования Фурье. ИЛ, 1955.
4. Ю. Н. Кузьмин. Некоторые осесимметричные задачи теплопроводности со смешанными граничными условиями. ЖТФ, XXXVI, вып. 2, 1966.

Поступила 1. III. 1967.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОДКРЕПЛЕННОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ДИСКРЕТНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ РЕБРАМИ

А. Н. КУДИНОВ

Рассматривается усеченная коническая оболочка, подкрепленная продольными ребрами-стрингерами, ширина которых пренебрежимо мала по сравнению с шириной пролетов. Температура оболочки линейно изменяется по толщине и не зависит от двух других координат. Материал оболочки и стрингеров упругий и изотропный. Физико-механические характеристики не зависят от температуры.

Задача рассматривается как контактная. Сначала находятся значения напряжений и перемещений в оболочке, а затем в стрингерах [1].

Основные обозначения

s — расстояние от вершины до точки на срединной поверхности; φ_1 — угол между аксиальной плоскостью, проходящей через данную точку и некоторой плоскостью отсчета; z — координата по внутренней нормали к срединной поверхности; h — толщина; u, v, w — компоненты перемещений соответственно по образующей, по касательной к сечению $s = \text{const}$ и по внутренней нормали к срединной поверхности; $N_s, N_\varphi, N_{s\varphi}$ — нормальные и касательные усилия в срединной поверхности на единицу длины; M_s, M_φ, H — изгибающие и крутящие моменты; Q — перерезывающее усилие на единицу длины; 2θ — угол конусности; E — модуль упругости; s_1 — расстояние до малого основания, s_2 — расстояние до большего; $\varphi = \varphi_1 \sin \theta$. Индекс «с» означает, что величины относятся к стрингерам.

1. Разрешающие уравнения

Приведем основные уравнения для термоупругой задачи конических оболочек.

Деформации срединной поверхности и параметры изменения кривизны определяются формулами:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s} + \alpha T, & \kappa_s &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \\
\varepsilon_\varphi &= \frac{1}{s} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{u}{s} - \frac{w \operatorname{ctg} \theta}{s} + \alpha T, \\
\kappa_\varphi &= \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s}, \\
\gamma &= \frac{1}{s} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s}, \\
\chi &= -\frac{1}{s} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \\
\varepsilon_s^z &= \varepsilon_s - \kappa_s z, & \varepsilon_\varphi^z &= \varepsilon_\varphi - \kappa_\varphi z.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Уравнения равновесия имеют такой вид:

$$\begin{aligned}
s \frac{\partial N_s}{\partial s} + N_s - N_\varphi + \frac{\partial N_{s\varphi}}{\partial \varphi} &= 0, \\
s \frac{\partial N_{s\varphi}}{\partial s} + 2N_{s\varphi} + \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} - Q_\varphi \operatorname{ctg} \theta &= 0, \\
s \frac{\partial Q_s}{\partial s} + Q_s + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + N_\varphi \operatorname{ctg} \theta &= 0, \\
s \frac{\partial M_s}{\partial s} + M_s - M_\varphi + \frac{\partial H}{\partial \varphi} - Q_s s &= 0, \\
s \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + 2H - Q_\varphi s \operatorname{ctg} \theta &= 0.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Уравнение неразрывности деформаций возьмем в форме

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_s}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial^2 \varepsilon_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{s} \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial s} - \frac{1}{s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial s} - \frac{1}{s} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s \partial \varphi} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} - \frac{\kappa_s \operatorname{ctg} \theta}{s} = 0. \tag{1.3}$$

Соотношения упругости для оболочки при принятых допущениях будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
N_s &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_s + \mu \varepsilon_\varphi), \\
N_\varphi &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_\varphi + \mu \varepsilon_s), \\
M_s &= D(\kappa_s + \mu \kappa_\varphi), \\
M_\varphi &= D(\kappa_\varphi + \mu \kappa_s), \\
N_{s\varphi} &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \gamma, & H &= D(1-\mu) \chi,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Вводя функцию усилий Φ по формулам

$$N_s = \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad N_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2},$$

$$N_{s\varphi} = -\frac{1}{s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi},$$

тождественно удовлетворим первым двум уравнениям системы (1.2), а оставшиеся три приведем к одному

$$s \frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial M_s}{\partial s} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial \varphi} - \frac{\partial M_\varphi}{\partial s} + \frac{2}{s} \frac{\partial H}{\partial \varphi} +$$

$$+ \frac{1}{s} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} + N_\varphi \operatorname{ctg} \theta = 0. \quad (1.6)$$

Подставляя в уравнения (1.3) и (1.6) значения моментов, деформаций и усилий, получим систему двух дифференциальных уравнений для определения функции усилий и прогиба:

$$L(w) - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{Ds} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} = 0,$$

$$L(\Phi) + \frac{Eh \operatorname{ctg} \theta}{s} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0, \quad (1.7)$$

где

$$L = \frac{\partial^4}{\partial s^4} + \frac{2}{s} \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{s^4} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} - \frac{2}{s^3} \frac{\partial^3}{\partial s \partial \varphi^2} + \frac{4}{s^4} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{s} \frac{\partial^3}{\partial s^2} -$$

$$- \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s^3} \frac{\partial}{\partial s}.$$

2. Решение системы уравнений

Уравнения (1.7) приведем к одному уравнению. Для этого второе уравнение умножим на неопределенный множитель p и сложим с первым. в результате получим

$$\left[L(w) + \frac{pEh \operatorname{ctg} \theta}{s} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right] + p \left[L(\Phi) - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{Dps} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \right] = 0. \quad (2.1)$$

Положим:

$$pEh \operatorname{ctg} \theta = ik^2,$$

$$\operatorname{ctg} \theta / D = -ik^2. \quad (2.2)$$

Отсюда имеем $p = \pm 2i \sqrt{3(1-\mu_2)} Eh^2$. Беря одно из значений p , получим дифференциальное уравнение относительно комплексной функции $\sigma = \Phi + [2i \sqrt{3(1-\mu_2)}] Eh^2 w$:

$$L(\sigma) = \frac{ih}{2 \sqrt{3(1-\mu_2)}} \frac{1}{s} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} = 0. \quad (2.3)$$

Переходя к новой независимой переменной $x = s/s_1$, получим

$$L(\sigma) - i \frac{1}{x} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0, \quad (2.4)$$

где

$$\lambda = s_1 \hbar / 2 \sqrt{3(1 - \mu^2)}.$$

Решение этого уравнения будем искать в виде [2]

$$\sigma = \sigma_1(x) \cos \nu x, \quad (2.5)$$

где

$$\nu = \frac{m}{\sin \theta} \quad (m=0, 1, 2 \dots n).$$

После подстановки (2,5) в уравнение (2.4) получим уравнение относительно $\sigma_1(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \sigma_1}{dx^4} + \frac{2}{x} \frac{d^3 \sigma_1}{dx^3} - \frac{2\nu^2 + 1}{x^2} \frac{d^2 \sigma_1}{dx^2} + \frac{2\nu^2 + 1}{x^2} \frac{d \sigma_1}{dx} + \\ + \frac{\nu^2(\nu^2 - 4)}{x^4} \sigma_1 - i\lambda \frac{1}{x} \frac{d^2 \sigma_1}{dx^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Решение уравнения (2.6) находится в виде обобщенного ряда

$$\sigma_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k+2}, \quad (2.7)$$

коэффициенты которого $a_0, a_1, a_2, \dots$ определяются методом неопределенных коэффициентов.

Общее решение однородного уравнения (2.6) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) = [A_1 + A_2 \ln x] \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} x^{2n+2+\nu}\right) + (B_1 + B_2 \ln x) \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} x^{2n+1+\nu} + \\ + (A_3 + A_4 \ln x) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} x^{2n+2-\nu}\right) + (B_3 + B_4 \ln x) \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} x^{2n+2+\nu} - \\ - i[(A_1 + A_2 \ln x) \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} x^{2n+1+\nu} - (B_1 + B_2 \ln x) [1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} x^{2n+2-\nu}] + \\ + (A_3 + A_4 \ln x) \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} x^{2n+1-\nu} - (B_3 + B_4 \ln x) [1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} x^{2n+2-\nu}]], \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} a_{2n} &= (-1)^n \lambda^{2n} \prod_{k=1}^{2n} \frac{(k+2+\nu)(k+1+\nu)}{k(k+2)(k+2\nu)(k+2+2\nu)}; \\ b_{2n} &= (-1)^n \lambda^{2n} \prod_{k=1}^{2n} \frac{(k+2-\nu)(k+1-\nu)}{k(k+2)(k-2\nu)(k+2-2\nu)}; \\ a_{2n-1} &= (-1)^n \lambda^{2n-1} \prod_{k=1}^{2n-1} \frac{(k+2+\nu)(k+1+\nu)}{k(k+2)(k+2\nu)(k+2+2\nu)}; \\ b_{2n-1} &= (-1)^n \lambda^{2n-1} \prod_{k=1}^{2n-1} \frac{(k+2-\nu)(k+1-\nu)}{k(k+2)(k-2\nu)(k+2-2\nu)}. \end{aligned}$$

Входящие в выражения (2.8) ряды являются знакопеременными, члены которых стремятся к нулю, все время убывая по абсолютному

значению. Поэтому по признаку Лейбница эти ряды абсолютно сходятся при всех значениях x и y .

Определив значение функции σ , путем разделения на мнимую и вещественную части, найдем значения функций ω и Φ , по которым определяются усилия, моменты и перемещения в оболочке. Постоянные интегрирования A_i и B_i ($i=1, 2, 3, 4$) определим из условий закрепления торцов оболочки и условий сопряжения оболочки и стрингера.

В дальнейшем предполагается, что оболочка жестко зашкреплена по торцам, т. е. выполняются условия:

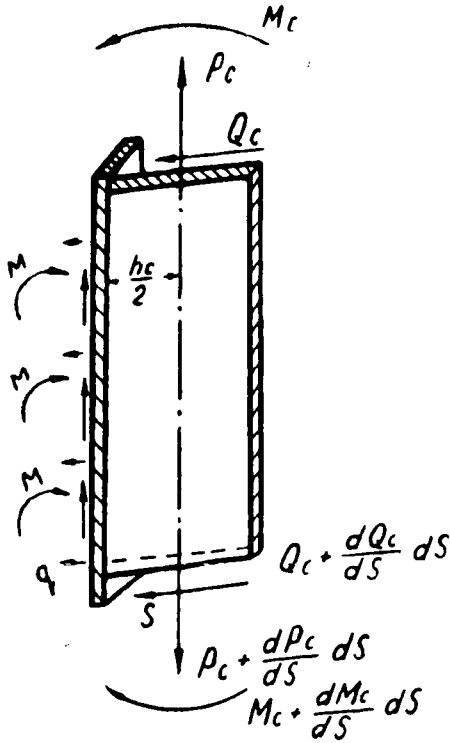


Рис. 1

$$w|_{s=s_1, s_2}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial s}|_{s=s_1, s_2}=0, \quad v|_{s=s_1, s_2}=0, \quad u|_{s=s_1, s_2}=0. \quad (2.9)$$

3. Основные уравнения для стрингера и условия сопряжения

Рассмотрим условия совместности работы оболочки со стрингером в месте контакта (рис. 1).

Стрингер рассматривается как балка, находящаяся под действием усилий со стороны оболочки $q \cos \theta = 2Q_c$, $t = 2N_{sz}$ и момента $M = 2H$. Кроме того, стрингер нагревается на температуру $T = T_c(z)$.

Тогда уравнения равновесия стрингера запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{dP_c}{ds} - t &= 0, \\ \frac{dQ_c}{ds} - q \cos \theta &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{dM_c}{ds} + \frac{th_c}{2} + M + Q_c = 0. \quad (3.1)$$

Третье уравнение равновесия дает нам уравнение для определения момента M_c :

$$\frac{d^2 M_c}{ds^2} = -2 \left[Q_\varphi + \frac{h_c}{2} \frac{dN_{s\varphi}}{ds} + \frac{dH}{ds} \right]. \quad (3.2)$$

Уравнение изогнутой оси стрингера можно записать так:

$$\frac{d^2 w_c}{ds^2} = - \frac{M_c + M_{c,\tau}}{E_c I_c}, \quad (3.3)$$

где $M_{c,\tau} = E \int_{F_c} \alpha_c T_c z dF$, F_c — площадь поперечного сечения стрингера.

Исключая из уравнений (3.2) и (3.3) момент M_c , получим дифференциальное уравнение для определения прогиба стрингера:

$$\frac{d^4 w_c}{ds^4} = \frac{2}{E_c I_c} \left[Q_\varphi + \frac{h_c}{2} \frac{dN_{s\varphi}}{ds} + \frac{dH}{ds} \right], \quad (3.4)$$

или, подставив Q_φ , $N_{s\varphi}$, H через функцию прогиба w и функцию усилий Φ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w_c}{dx^4} = \frac{2s_1^3}{E_c I_c} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ D \left[(2-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} - 2(1-\mu) \frac{w}{x^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{h_c}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{2}{x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{2}{x^2} \Phi \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} w_c = \iiint \frac{2s_1^3}{E_c I_c} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ D \left[(2-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} - 2(1-\mu) \frac{w}{x^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{h_c}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{2}{x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{2}{x^2} \Phi \right) \right\} (dx)^4 + C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Постоянные интегрирования определяются из условий закрепления торцов оболочки и стрингеров. В рассматриваемом случае из-за симметрии и нулевых граничных условий все четыре постоянные равны нулю.

Далее из соотношений:

$$\begin{aligned} \int_{F_c} \sigma_c dF = P_c, \quad \sigma_c = E_c \left(\varepsilon_c - z \frac{\partial^2 w_c}{\partial s^2} - \alpha_c T_c \right), \\ P_c = \int N_{s\varphi} ds = \frac{Eh}{1+\mu} \int \left[\frac{1}{s^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} \right] ds, \end{aligned} \quad (3.7)$$

найдем продольную деформацию стрингера

$$\varepsilon_c = \frac{Eh}{(1+\mu)E_c F_c} \int \left(\frac{1}{s^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} \right) ds + \frac{1}{F_c} \int_{F_c} \alpha_c T_c dF. \quad (3.8)$$

Из условия симметрии на линии контакта оболочки со стрингерами должны выполняться условия:

$$v|_{\varphi=\varphi_i}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi}|_{\varphi=\varphi_i}=0. \quad (3.9)$$

Перемещение v определим следующим образом. Из первых двух соотношений (1.4) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{Eh} (N_s - \mu N_\varphi) + \alpha T. \quad (3.10)$$

Пятое соотношение (1.4) продифференцируем по s и подставим в полученное выражение $\frac{\partial u}{\partial s}$, в результате получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = -\frac{1}{sEh} \left[\frac{(2+\mu)\partial^3 \Phi}{\partial s^2 \partial \varphi} - \frac{(1+2\mu)}{s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} + \frac{2(1+\mu)}{s^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \varphi^3} \right]. \quad (3.11)$$

Представив $v = v_1(s) \sin \nu \varphi$, $\Phi = \Phi_1(s) \cos \nu \varphi$ и перейдя к переменной $x = s/s_1$, получим разрешающее уравнение

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{\nu}{s_1 Eh} \left[\frac{2+\mu}{x} \frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} + \frac{1+2\mu}{x^2} \frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{2(1+\mu)-\nu^2}{x^2} \Phi_1 \right]. \quad (3.12)$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$v_1 = \frac{\nu}{s_1 Eh} \iint \left[\frac{(2+\mu)}{x} \frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \frac{(1+2\mu)}{x^2} \frac{d\Phi}{dx} + \frac{2(1+\mu)-\nu^2}{x^2} \Phi_1 \right] (dx)^2 + C_1' + C_2' x.$$

Если рассматривать оболочку жестко заземленной, то на краях будут нулевые граничные условия. Тогда постоянные интегрирования $C_1' = C_2' = 0$.

В месте контакта обшивки со стрингером должно выполняться условие равенства продольных деформаций и радиальных прогибов:

$$\varepsilon_s|_{\varphi=\varphi_i} = \varepsilon_c \Big|_{z=-\frac{h_c}{2}}, \quad w|_{\varphi=\varphi_i} = w_c \Big|_{z=-\frac{h_c}{2}}. \quad (3.13)$$

Для определения постоянных A_i , B_i ($i = 1, 2, 3, 4$) имеется восемь граничных условий (2.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Грибанов, Л. Я. Савонина. Определение температурных напряжений в подкрепленных цилиндрических оболочках при наличии осесимметричного температурного поля. Труды НИИ-5 (57) 1963.
2. А. Д. Коваленко. Обобщение некоторых вопросов теории расчета тепловых напряжений в конических оболочках. Сб. «Тепловые напряжения в элементах турбомашин», вып. 2, 1962.
3. А. И. Лурье. Статика тонкостенных оболочек. М., 1948.

Поступила 1. III. 1967.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

А. Н. КУДИНОВ

В данной работе сообщаются результаты экспериментов по выпучиванию конических оболочек под действием осевого сжатия и внутреннего давления. Полученные результаты сравниваются с опытными данными других авторов и результатами теоретических решений.

Обозначения:

s_1 — расстояние по образующей от вершины конуса до меньшего основания, r_1 — радиус меньшего основания, r_2 — радиус большего, h — толщина оболочки, 2θ — угол конусности, E — модуль Юнга, p — внутреннее давление, $q = \frac{p}{E} [r_1/h \cos \theta]^2$ — безразмерный параметр внутреннего давления, P — критическая нагрузка осевого сжатия,

$a = (P - p\pi r_1^2) / 2\pi E h^2 \cos \theta$ — параметр нагрузки,

$\xi = [12(1 - \mu^2)]^{1/2} [(r_1/\cos \theta) h] \operatorname{ctg}^2 \theta$ — геометрический параметр,

n — число вмятин по окружности.

Образцы, использованные в опытах, представляли собой тонкостенные оболочки, основные геометрические размеры которых приведены в табл. 1. В качестве материала образцов использовалась листовая сталь марки 1Х18Н9.

Таблица 1

Тип оболочки	s_1 мм	r_1 мм	r_2 мм	h мм	2θ
А — конус	50	24	70	0,2	57°
Б — конус	122	31	70	0,2	$29^\circ 40'$
В — конус	176	45	70	0,2	$29^\circ 40'$
Г — конус	671	56	70	0,2	$9^\circ 40'$
Д — цилиндр	170	70	70	0,2	—

Технология изготовления образцов и методика исследования описаны в работе [5].

В качестве характерной величины потери устойчивости при разных значениях внутреннего давления принята относительная величина сжимающего напряжения в поперечном сечении у меньшего основания.

Таблица 2

Тип оболочки	№ п.п.	$q \cdot 10^{+2}$	$\sigma \cdot 10^3$	a	n
1	2	3	4	5	6
А	1	0	1,340	0,161	—
	2	0	1,162	0,140	5
	3	0	1,000	0,120	4
	4	0	0,960	0,115	6
	5	0,97	1,730	0,208	8
	6	1,62	1,078	0,130	12
Б	1	0	0,850	0,132	—
	2	0	0,916	0,142	6
	3	0	1,085	0,169	6
	4	0	0,945	0,146	6
	5	0	1,085	0,169	—
	6	0	0,930	0,144	6
	7	0	0,936	0,145	—
	8	1,35	1,082	0,169	7
	9	2,03	1,115	0,173	8
	10	2,70	1,204	0,187	—
	11	4,05	1,396	0,216	9
	12	4,06	1,588	0,246	—
	13	5,40	1,693	0,263	9
	14	6,75	1,605	0,250	9
В	1	0	0,629	0,142	7
	2	0	0,775	0,175	7
	3	0	0,802	0,181	7
	4	0	0,695	0,157	7
	5	0	0,620	0,140	—
	6	2,8	0,839	0,189	—
	7	2,8	0,733	0,165	8
	8	5,6	1,078	0,243	8
	9	5,6	1,068	0,239	8
	10	5,6	0,911	0,205	—
	11	8,4	0,898	0,203	8
	12	8,4	1,027	0,232	—
	13	11,2	1,066	0,240	9
	14	11,2	1,136	0,256	—
	15	14,0	1,005	0,226	9
	16	14,0	1,000	0,225	—
Г	1	0	0,430	0,120	7
	2	0	0,438	0,123	7
	3	0	0,394	0,111	—
	4	0	0,408	0,114	—
	5	0	0,468	0,131	—
	6	0	0,370	0,107	7
	7	0	0,438	0,123	8
	8	0	0,520	0,145	8
	9	0	0,445	0,125	7
	10	4,4	0,737	0,206	9
	11	8,8	0,746	0,209	8
	12	13,2	0,881	0,247	9
	13	17,6	0,948	0,265	10
	14	22,0	0,985	0,276	—
	15	22,0	0,865	0,242	10
	16	26,4	0,982	0,255	—

1	2	3	4	5	6
Д	1	0	0,366	0,128	—
	2	0	0,324	0,113	5
	3	0	0,336	0,118	6
	4	0	0,336	0,118	—
	5	0	0,336	0,118	4
	6	6,5	0,473	0,165	8
	7	6,5	0,448	0,157	8
	8	13	0,441	0,155	9
	9	19,5	0,456	0,160	11
	10	19,5	0,584	0,204	—
	11	22,8	0,603	0,212	15
	12	24,7	0,795	0,278	—
	13	26,0	0,515	0,180	—

$$\bar{\sigma} = \frac{P - p\pi r_1^2}{2\pi r_1 E h \cos \theta}. \quad (1)$$

Критическая нагрузка P соответствует значению нагрузки, характеризующей общую потерю устойчивости оболочек. Результаты испытаний приведены в табл. 2. Относительная погрешность в определении нагрузки P составляет 1%, а величины $\bar{\sigma}$ — 11%. Из таблицы видно, что разброс величины $\bar{\sigma}$ превышает разброс, обусловленный погрешностью измерений. Этот разброс объясняется начальными неправильностями оболочки и неидентичностью условий закрепления торцов от опыта к опыту.

Результаты расчета по формуле [1]

$$\bar{\sigma}_\lambda = \frac{h \operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{3(1-\mu^2)} s_1}, \quad (2)$$

полученной по линейной теории, превышают опытные значения относительного сжимающего напряжения в три-четыре раза.

В настоящее время расчет на устойчивость усеченных конических оболочек под действием осевого сжатия проводится по формуле

$$\bar{\sigma}_n = f \left(\frac{R}{h} \right) \frac{h}{s_1} \operatorname{ctg} \theta, \quad (3)$$

полученной исходя из предположения локальной потери устойчивости. Формула записывается по аналогии с формулой для цилиндрической оболочки.

Здесь $f(R/h)$ — коэффициент, зависящий от отношения некоторого эквивалентного радиуса поперечного сечения конуса к толщине. Коэффициент f определяется из следующей таблицы [1]:

R/h	250	500	750	1000	1500
f	0,18	0,14	0,12	0,10	0,09

Величина этого коэффициента существенно зависит от выбора радиуса R эквивалентного цилиндра. Так, в монографии А. С. Вольмира [1] и работах А. В. Саченкова [7], [8] рекомендуется брать главный

радиус кривизны у большого основания конуса. В работах П. Сейде [9], предлагается использовать средний радиус поперечного сечения конуса. Вайнгартен, Морган и Сейде [2], [3] на основе экспериментальных данных, полученных при испытании оболочек из милара, материала, обладающего высокими упругими свойствами, рекомендуют брать радиус меньшего основания.

Таблица 3

Тип оболочки	$\bar{\sigma}_H \cdot 10^3$ $R=r_2/\cos\theta$	$\bar{\sigma}_H \cdot 10^3$ $R=(r_1+r_2)/2$	$\bar{\sigma}_H \cdot 10^3$ $R=r_1$	$\bar{\sigma} \cdot 10^3$
А	1,02	1,328	1,328	1,115
Б	0,870	1,114	1,114	0,962
В	0,603	0,730	0,775	0,706
Г	0,500	0,500	0,610	0,436
Д	0,400	0,400	0,400	0,340

В табл. 3 приведены результаты расчета для этих трех случаев и дано сравнение со средними опытными значениями. Из таблицы видно, что при выборе в качестве эквивалентного радиуса главного радиуса кривизны у большого основания расчетные значения получаются ниже опытных. Этот факт также следует из физического понятия нижнего значения критической нагрузки. В этом случае при расчетах реальных оболочек получается некоторый запас устойчивости.

Поэтому при выборе коэффициента f за эквивалентный радиус следует принимать либо главный радиус кривизны у большого основания, либо радиус, равный полусумме радиусов малого и большого оснований.

Качественная картина волнообразования для каждого типа оболочки характеризуется появлением вмятин на некотором удалении от нижнего основания, которые распространяются по поверхности оболочки под углом 45° к первоначальной вмятине. Вмятины имеют ромбовидную форму и их размеры увеличиваются к большему основанию. В процессе волнообразования наблюдается перераспределение вмятин.

В некоторых опытах с оболочками малого диаметра (тип А и Б) вмятины появились у меньшего основания. Этот факт объясняется тем, что сжимающие напряжения у меньшего основания быстрее достигают предела текучести, чем напряжения в упругой области критического значения. Эти вмятины после разгрузки не исчезают, что свидетельствует о выпучивании за пределом упругости. Результаты этих опытов нами здесь не приводятся.

Из данных табл. 2 и рис. 1 следует, что с увеличением внутреннего давления критическая нагрузка осевого сжатия растет. При этом для конусов с малым значением геометрического параметра ξ рост коэффициентов критической силы при одних и тех же значениях параметра давления более значителен, чем для конусов с большим значением параметра ξ . Кривая зависимости параметра нагрузки от параметра давления, как видно из рисунка, может быть разделена на два участка, на которых эту зависимость можно принять линейной. При этом угол наклона прямой к оси абсцисс в области малых значений параметра давления больше, чем в области больших значений. Для оболочек типа А, Б и В тангенс угла наклона прямой после точки излома становится отрицательным.

Это объясняется тем, что с ростом внутреннего давления развиваются пластические деформации и выпучивание происходит в упруго-пластической области. Поэтому положительное влияние внутреннего

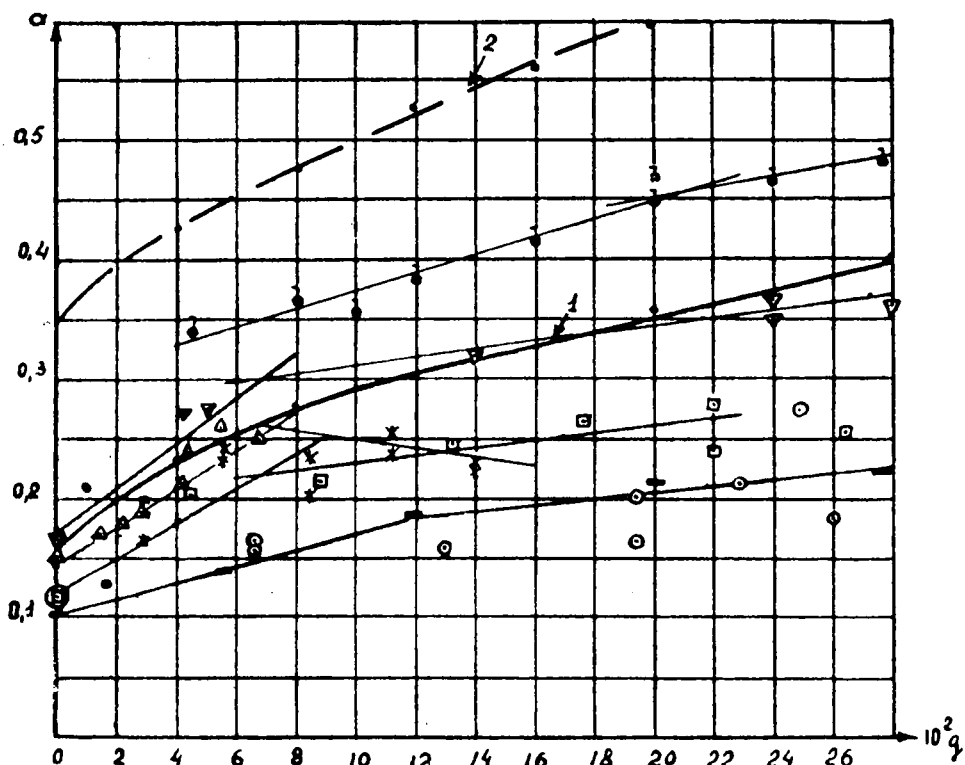


Рис. 1. Сравнение данных теории и эксперимента для осевого сжатия конических оболочек под давлением. Обозначения. Результаты данной работы: ● — конус А, $\zeta=2 \cdot 10^3$; Δ — конус Б, $\zeta=1 \cdot 10^3$; Ж — конус В, $\zeta=7,6 \cdot 10^3$; | — конус Г, $\zeta=1,3 \cdot 10^5$; ⊙ — цилиндр Д. [● — [6], $\zeta=5 \cdot 10^4$, сталь], [— Лофблад [4], $\zeta=6,6 \cdot 10^5$, сталь] Δ — Леженд [10] мат. 7075Тб, $\zeta=1,2 \cdot 10^4$, 1 — по теории локальной устойчивости, 2 — с позиций нелинейной теории [10].

давления на устойчивость оболочек при осевом сжатии может сказываться лишь до определенного значения параметра давления. Так, для оболочек типа Б и В это значение равно $\sim 7 \cdot 10^{-2}$. Аналогичный характер зависимости наблюдается по экспериментальным результатам других авторов [4], [6], [10].

Результаты решений с позиций линейной теории [9], [10] подтверждаются опытными данными в том отношении, что коэффициенты критических нагрузок линейно возрастают с ростом внутреннего давления. Однако численные значения этих коэффициентов значительно превышают опытные. Кривая 1 соответствует результатам расчета по теории локальной устойчивости [7]. Как видно из рисунка, эти результаты могут быть использованы для оболочек с ограниченным значением параметра ζ , так как в решениях по этой теории слабо учитывается влияние геометрии оболочек на величину критических нагрузок. Кривая 2 соответствует результатам решений с позиций нелинейной теории [10], которые сильно расходятся с результатами экспериментов и не могут быть использованы в практических расчетах.

Процесс волнообразования при малых значениях параметра внутреннего давления начинается с появлением вмятин на некотором удалении от большего основания, а затем распространяется по всей по-

верхности. С ростом параметра давления процесс волнообразования перемещается к меньшему основанию.

Вмятины имеют ромбовидную форму и становятся мельче, чем в случае чисто осевого сжатия. При этом, как видно из данных табл. 2, увеличивается число вмятин в окружном направлении и все яснее проявляется тенденция к кольцевому выпучиванию.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Вольмир. Устойчивость упругих систем. Физматгиз. М., 1963.
2. V. I. Weingarten, E. I. Morgan. P. Seider—Elastic Stability of Thin-Walled Cylindrical and Conical shells under Axial Compression, AIAA Journal, v. 3, № 3, 1965.
3. V. I. Weingarten, E. I. Morgan. P. Seider—Elastic Stability of Thin-Walled Cylindrical and Conical shells under Combined Internal Pressure and Axial Compression, AIAA, v. 3, № 6, 1965.
4. R. P. Lofblad. Elastic Stability of Thin-Walled Cylinders and Cones with Internal Pressure under Axial Compression, MIT—ASRL, Techn. Rep. 25—29, 1959.
5. А. Н. Кудин ов. Экспериментальное исследование устойчивости оболочек под действием осевого сжатия, внутреннего давления и нагрева. Сб. «Тепловые напр. в элементах конструкций», вып. 6, АН УССР, 1966.
6. H. Rea Robert. An Experimental study of Buckling of Thin-Walled, Pressurized, Conical shells under Compression and Compression—Bending Interaction, I. of Aero/sp. sci., v. 29, № 6, 1961.
7. А. В. Саченков. Приближенное определение нижней критической нагрузки конической оболочки при совместном действии осевого сжатия и внутреннего давления. Сб. «Исследования по теории пластин и оболочек», вып. 3, Казань, 1965.
8. А. В. Саченков. Приближенное определение нижней границы критической нагрузки при продольном сжатии тонкой конической оболочки. Изв. КФ АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, вып. 7. 1955.
9. P. Seide. On the Stability of Internally Pressurized Conical Shells under Axial Compression, Proc. of the Fourth U. S. Nat. Congress of Applied Mech. (U. of Calif, Berkeley C., 1962).
10. W. Sch nell. Die dünnwandige Kegelschale unter Axial und Innendruck. Z. für Flugwissenschaften, 10, Heft 4/5, II, Heft 8, 1962.

Поступила 1. III. 1967.

К РАСЧЕТУ ТОЛСТЫХ КРУГЛЫХ ПЛИТ, ЗАЩЕМЛЕННЫХ ПО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. М. ДЕЕВ, И. В. ЖИГАЛОВСКИЙ

Вопрос о точном выполнении граничных условий на боковой поверхности толстой круглой плиты, нагруженной на гранях внешней нагрузкой, рассматривался в работах [1], [2]. Для решения пространственной задачи теории упругости необходимо было найти решение некоторых бесконечных систем уравнений относительно коэффициентов, входящих в представление компонентов вектора смещений и тензора напряжений в виде бесконечных рядов. В работе [1] была доказана регулярность полученной системы для значений коэффициента Пуассона в пределах $0 < \nu < 1/3$. В работе [1] дано решение, свободное от этого ограничения. Однако в настоящее время известен также ряд решений для толстых круглых плит [3], [4], [5], [6], которые учитывают граничные условия лишь на одной или двух линиях, лежащих на боковой поверхности плиты. Такой способ удовлетворения граничных условий в некоторых случаях вполне удовлетворяет потребностям практического анализа напряженного состояния толстых плит, кроме того, он связан с меньшими вычислительными трудностями и в настоящее время усиленно развивается [7]. В настоящей статье проводится анализ выполнения граничных условий на боковой поверхности плиты при более точном выполнении их, чем это сделано в работах [3]—[7]. Основная идея более точного выполнения граничных условий, используемая в данной работе, заключается в следующем. Разложение компонентов вектора смещения в ряд Тейлора вдоль радиуса r в окрестности точки $z=0$, $r=R$ имеет вид:

$$u(R-\rho, 0) = u(R, 0) - \frac{\partial u(R, 0)}{\partial r} \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(R, 0)}{\partial r^2} \rho^2 - \dots$$

$$w(R-\rho, 0) = w(R, 0) - \frac{\partial w(R, 0)}{\partial r} \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w(R, 0)}{\partial r^2} \rho^2 - \dots$$

Отсюда видно, что в работах [3], [4] граничные условия соответствуют обращению в нуль первого (а иногда и второго) члена указанного разложения. В настоящей работе развивается метод, позволяющий обратить в нуль любое количество членов указанного разложения. Совершенно очевидно, что по сравнению с работами [3], [4] напряженное состояние в толстой круглой плите, найденное с учетом таких уточненных граничных условий, будет более полно отображать влияние

закрепления боковой поверхности. В данной работе производится анализ выполнения граничных условий на боковой поверхности плиты, нагруженной на своих плоских гранях только нормальной осесимметричной нагрузкой.

Компоненты тензора напряжений для круглой плиты без центрального отверстия высотой $2h$ и радиусом R возьмем в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \sum_{j=1}^s \gamma_j \Omega_j(z) I_0(\lambda_j r) \\ \sigma_{rr} &= \sum_{j=1}^s \gamma_j j [\Phi_j(z) I_0(\lambda_j r) - F_j(z) \frac{h}{r} I_1(\lambda_j r)] \\ \tau_{rz} &= \sum_{j=1}^s \gamma_j \Psi_j(z) I_1(\lambda_j r) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sum_{j=1}^s \gamma_j j [X_j(z) I_0(\lambda_j r) + F_j(z) \frac{h}{r} I_1(\lambda_j r)],\end{aligned}\quad (1)$$

где $I_0(\lambda_j r)$ — функция Бесселя нулевого порядка;

λ_j ($j=1, 2, \dots, s$) — набор произвольных параметров. Для симметричной относительно срединной поверхности плиты $z=0$ составляющей нагрузки:

$$\begin{aligned}F_j(z) &= S_j \frac{z}{h} \operatorname{sh} \lambda_j z - \frac{T_j}{\lambda_j h} \operatorname{ch} \lambda_j z, \\ \Omega_j(z) &= P_j \operatorname{ch} \lambda_j z - S_j \frac{z}{h} \lambda_j h \operatorname{sh} \lambda_j z, \\ \Psi_j(z) &= S_j \frac{z}{h} \lambda_j h \operatorname{ch} \lambda_j z - N_j \operatorname{sh} \lambda_j z, \\ \Phi_j(z) &= Q_j \operatorname{ch} \lambda_j z + S_j \frac{z}{h} \lambda_j h \operatorname{sh} \lambda_j z, \\ X_j(z) &= \nu_j \operatorname{ch} \lambda_j z,\end{aligned}\quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}T_j &= \frac{\lambda_j h \operatorname{ch} \lambda_j h - (1-2\nu) \operatorname{sh} \lambda_j h}{\operatorname{sh} \lambda_j h \operatorname{ch} \lambda_j h + \lambda_j h}, \\ S_j &= \frac{\operatorname{sh} \lambda_j h}{\operatorname{sh} \lambda_j h \operatorname{ch} \lambda_j h + \lambda_j h}, \\ P_j &= T_j + 2(1-\nu) S_j, \quad N_j = T_j + (1-2\nu) S_j, \\ Q_j &= 2\nu S_j - T_j, \quad V_j = 2\nu S_j.\end{aligned}\quad (3)$$

Для антисимметричной составляющей нагрузки

$$\begin{aligned}F_j(z) &= M_j \frac{z}{h} \operatorname{ch} \lambda_j z - \frac{R_j}{\lambda_j h} \operatorname{sh} \lambda_j z, \\ \Omega_j(z) &= B_j \operatorname{sh} \lambda_j z - M_j \lambda_j h \frac{z}{h} \operatorname{ch} \lambda_j z, \\ \Psi_j(z) &= M_j \lambda_j h \frac{z}{h} \operatorname{sh} \lambda_j z - D_j \operatorname{ch} \lambda_j z,\end{aligned}\quad (4)$$

$$\Phi_j(z) = E_j \operatorname{sh} \lambda_j z + M_j \lambda_j h \frac{z}{h} \operatorname{ch} \lambda_j z,$$

$$X_j(z) = A_j \operatorname{sh} \lambda_j z,$$

где

$$R_j = \frac{\lambda_j h \operatorname{sh} \lambda_j h - (1 - 2\nu) \operatorname{ch} \lambda_j h}{\operatorname{sh} \lambda_j h \operatorname{ch} \lambda_j h - \lambda_j h},$$

$$M_j = \frac{\operatorname{ch} \lambda_j h}{\operatorname{sh} \lambda_j h \operatorname{ch} \lambda_j h - \lambda_j h},$$

$$B_j = R_j + 2(1 - \nu) M_j, \quad D_j = R_j + (1 + 2\nu) M_j,$$

$$E_j = 2\nu M_j - R_j, \quad A_j = 2\nu M_j, \quad (5)$$

компоненты вектора смещений будут

$$u = \sum_{j=1}^s \psi_j(z) \frac{dI_0(\lambda_j r)}{dr}, \quad w = \sum_{j=1}^s \varphi_j(z) I_0(\lambda_j r), \quad (6)$$

где для симметричной составляющей

$$\psi_j(z) = C_{2j} \operatorname{ch} \lambda_j z + C_{3j} z \operatorname{sh} \lambda_j z,$$

$$\varphi_j(z) = [\lambda_j C_{2j} + (4\nu - 3) C_{3j}] \operatorname{sh} \lambda_j z + C_{3j} \lambda_j z \operatorname{ch} \lambda_j z, \quad (7)$$

а для антисимметричной составляющей

$$\psi_j(z) = C_{1j} \operatorname{sh} \lambda_j z + C_{4j} z \operatorname{ch} \lambda_j z,$$

$$\varphi_j(z) [\lambda_j C_{1j} + (4\nu - 3) C_{4j}] \operatorname{ch} \lambda_j z + C_{4j} \lambda_j z \operatorname{sh} \lambda_j z, \quad (8)$$

где

$$C_{1j} = R_j \frac{a_j}{\lambda_j}, \quad C_{2j} = T_j \frac{a_j}{\lambda_j},$$

$$C_{3j} = -S_j a_j, \quad C_{4j} = -M_j a_j, \quad a_j = \frac{1 + \nu}{E \lambda_j} \gamma_j. \quad (9)$$

Для данного решения (1) — (6) обе составляющие нормальной нагрузки будут иметь вид

$$P(r) = \sum_{j=1}^s \gamma_j I_0(\lambda_j r). \quad (10)$$

Далее будем стремиться удовлетворить условиям защемления боковой поверхности плиты. Структура вектора смещений в случае симметричной составляющей нагрузки обеспечивает на боковой поверхности при $z=0$ равенство нулю w и всех его нормальных производных, при антисимметричной нагрузке обращаются в нуль u и все его нормальные производные. Потребуем теперь, чтобы при симметричной нагрузке для $z=0$ на боковой поверхности плиты обращались в нуль u и его нормальные производные до порядка s включительно, а при антисимметричной — w и его нормальные производные до порядка s включительно. Это соответствует обращению в нуль на боковой поверхности плиты в случае симметричной нагрузки s членов в разложении u в ряд Тейлора в направлении нормали к боковой поверхности, а в случае антисимметричной нагрузки в разложении w . Такое выполнение граничных условий на боковой поверхности плиты значительно полнее выпол-

нений по линиям, и, кроме того, имеется возможность увеличивать число членов разложения, обращающихся в нуль за счет увеличения числа s . Для этой цели, следуя [6], введем связь между параметрами λ_j в виде

$$\lambda_j = k_j t. \quad (11)$$

Приравнивая нулю соответствующие определители, возникающие при составлении граничных условий, получим трансцендентное уравнение, имеющее бесчисленное множество корней $\xi_i = t_i R$.

Для случая $s = 3$ будем иметь:

а. Для симметричной составляющей

$$\begin{aligned} & k_1[k_2^2 - k_3^2] I_0(k_1 \xi) I_1(k_2 \xi) I_1(k_3 \xi) + \\ & + k_2[k_3^2 - k_1^2] I_1(k_1 \xi) I_0(k_2 \xi) I_1(k_3 \xi) + \\ & + k_3[k_1^2 - k_2^2] I_1(k_1 \xi) I_1(k_2 \xi) I_0(k_3 \xi) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Коэффициенты γ_{ij} для корня

$$\gamma_{ij} = -\gamma_{i1} \frac{T_{i1}}{T_{ij}} \frac{k_j}{k_1} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta_{i1}}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{i1} &= k_3 I_1(k_2 \xi_i) I_0(k_3 \xi_i) - k_2 I_0(k_2 \xi_i) I_1(k_3 \xi_i), \\ \Delta_{i2} &= k_3 I_1(k_1 \xi_i) I_0(k_3 \xi_i) - k_1 I_0(k_1 \xi_i) I_1(k_3 \xi_i), \\ \Delta_{i3} &= k_1 I_1(k_2 \xi_i) I_0(k_1 \xi_i) - k_2 I_0(k_2 \xi_i) I_1(k_1 \xi_i), \end{aligned} \quad (14)$$

коэффициент γ_{i1} выбирается произвольно. Нагрузка в этом случае будет

$$P_i(r) = \sum_{j=1}^s \gamma_{ij} I_0 \left(k_j \xi_i \frac{r}{R} \right). \quad (15)$$

б. Для антисимметричной составляющей

$$\begin{aligned} & k_1[k_2^2 - k_3^2] I_1(k_1 \xi) I_0(k_2 \xi) I_0(k_3 \xi) + \\ & + k_2[k_3^2 - k_1^2] I_0(k_1 \xi) I_1(k_2 \xi) I_0(k_3 \xi) + \\ & + k_3[k_1^2 - k_2^2] I_0(k_1 \xi) I_0(k_2 \xi) I_1(k_3 \xi) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Коэффициенты γ_{ij} для корня ξ_i

$$\gamma_{ij} = -\gamma_{i1} \frac{\Pi_{i1}}{\Pi_{ij}} \frac{k_j}{k_1} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta_{i1}}, \quad (17)$$

где

$$\Pi_{ij} = \frac{k_j \xi_i \frac{h}{R} \operatorname{sh} k_j \xi_i \frac{h}{R} + 2(1-\nu) \operatorname{ch} k_j \xi_i \frac{h}{R}}{k_j \xi_i \frac{h}{R} - \operatorname{sh} k_j \xi_i \frac{h}{R} \operatorname{ch} k_j \xi_i \frac{h}{R}}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{i1} &= k_2 I_1(k_2 \xi_i) I_0(k_3 \xi_i) - k_3 I_0(k_2 \xi_i) I_1(k_3 \xi_i), \\ \Delta_{i2} &= k_1 I_1(k_1 \xi_i) I_0(k_3 \xi_i) - k_3 I_0(k_2 \xi_i) I_1(k_3 \xi_i), \\ \Delta_{i3} &= k_2 I_1(k_2 \xi_i) I_0(k_1 \xi_i) - k_1 I_0(k_2 \xi_i) I_1(k_1 \xi_i). \end{aligned} \quad (19)$$

Нагрузка в этом случае определяется по формуле, аналогичной (15). Для случая $s = 4$ будем иметь:

а) для симметричной составляющей

$$\begin{aligned}
 & k_3 k_4 [k_3^2 - k_4^2] [k_2^2 - k_1^2] I_1(k_1 \xi) I_1(k_2 \xi) I_0(k_3 \xi) I_0(k_4 \xi) + \\
 & + k_2 k_4 [k_1^2 - k_2^2] [k_3^2 - k_1^2] I_1(k_1 \xi) I_0(k_2 \xi) I_1(k_3 \xi) I_0(k_4 \xi) + \\
 & + k_2 k_3 [k_2^2 - k_3^2] [k_4^2 - k_1^2] I_1(k_1 \xi) I_0(k_2 \xi) I_0(k_3 \xi) I_1(k_4 \xi) + \\
 & + k_1 k_3 [k_1^2 - k_4^2] [k_3^2 - k_2^2] I_0(k_1 \xi) I_1(k_2 \xi) I_1(k_3 \xi) I_0(k_4 \xi) + \\
 & + k_1 k_3 [k_1^2 - k_3^2] [k_2^2 - k_4^2] I_0(k_1 \xi) I_1(k_2 \xi) I_0(k_3 \xi) I_1(k_4 \xi) + \\
 & + k_1 k_2 [k_1^2 - k_2^2] [k_4^2 - k_3^2] I_0(k_1 \xi) I_0(k_2 \xi) I_1(k_3 \xi) I_1(k_4 \xi) = 0. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Коэффициенты $\gamma_i j$ определяются по формуле (13), в которой следует положить

$$\begin{aligned}
 \Delta_{i1} = & k_2 [k_3^2 - k_4^2] I_0(k_2 \xi_i) I_1(k_3 \xi_i) I_1(k_4 \xi_i) + \\
 & + k_3 [k_4^2 - k_2^2] I_0(k_3 \xi_i) I_1(k_2 \xi_i) I_1(k_4 \xi_i) + \\
 & + k_4 [k_2^2 - k_3^2] I_0(k_4 \xi_i) I_1(k_2 \xi_i) I_1(k_3 \xi_i), \quad (21)
 \end{aligned}$$

Δ_{ij} получается из Δ_{i1} заменой индекса j на индекс 1 ;

б) для антисимметричной составляющей нагрузки характеристическое уравнение и величины Δ_{ij} определяются по формулам (20) и (21), в которых функция $I_0(k_j \xi_i)$ заменена на $I_1(k_j \xi_i)$, а функция $I_1(k_j \xi_i)$ на $I_0(k_j \xi_i)$; коэффициенты γ_{ij} определяются по формулам (17), (18). В случае а) и в случае б) нагрузка определяется по формуле (15). Таким образом, удовлетворяя на боковой поверхности плиты наперед заданным граничным условиям, мы тем самым влияем на вид нормальной нагрузки. Однако следует заметить, что в нашем распоряжении имеются параметры k_j ($j=1, 2, \dots, s$), варьирование которыми позволяет влиять на вид нормальной нагрузки. В табл. 1 приведены корни трансцендентных уравнений при различных наборах k_j .

Таблица 1

Корни характеристических уравнений (12, 16, 20)

	Симметричная нагрузка				Антисимметричная нагрузка			
	$s=3$		$s=4$					
	$k=1; 1,2; 1,5$	$k=1; 1,5; 2,25$	$k=1; 2; 4$	$k=1; 2; 4; 6$	$k=1; 1,2; 1,5$	$k=1; 1,5; 2,25$	$k=1; 2; 4$	$k=1; 2; 4; 6$
ξ_1	4,3296	3,2700	1,7143	1,5053	3,1219	2,4384	1,4227	1,6373
ξ_2	6,8591	4,4662	3,2453	2,6811	5,6765	3,9251	2,2241	3,1974
ξ_3	9,0843	7,1755	4,0436		8,0621	5,3687	3,0382	
ξ_4	10,9236	8,6403			10,0282	8,0893	4,5621	
ξ_5	13,1882				11,9815			

При $s=3$ и при $k=1; 1,2; 1,5$ получаем следующие нагрузочные функции для h : $R=0,5$; $\nu=0,3$.

Для симметричной составляющей (рис. 1):

$$\begin{aligned}
 P_1(r) &= I_0\left(4,3296 \frac{r}{R}\right) - 1,1636 I_0\left(5,1955 \frac{r}{R}\right) + 1,6388 I_0\left(6,4944 \frac{r}{R}\right), \\
 P_2(r) &= I_0\left(6,8591 \frac{r}{R}\right) + 0,5391 I_0\left(8,2309 \frac{r}{R}\right) + 4,7293 I_0\left(10,288 \frac{r}{R}\right), \\
 P_3(r) &= I_0\left(9,0843 \frac{r}{R}\right) + 5,4957 I_0\left(10,901 \frac{r}{R}\right) + 18,542 I_0\left(13,626 \frac{r}{R}\right), \\
 P_4(r) &= I_0\left(10,923 \frac{r}{R}\right) - 15,868 I_0\left(13,108 \frac{r}{R}\right) - 79,649 I_0\left(16,385 \frac{r}{R}\right), \\
 P_5(r) &= I_0\left(13,188 \frac{r}{R}\right) + 1,4047 I_0\left(15,826 \frac{r}{R}\right) - 14,381 I_0\left(19,782 \frac{r}{R}\right). \quad (22)
 \end{aligned}$$

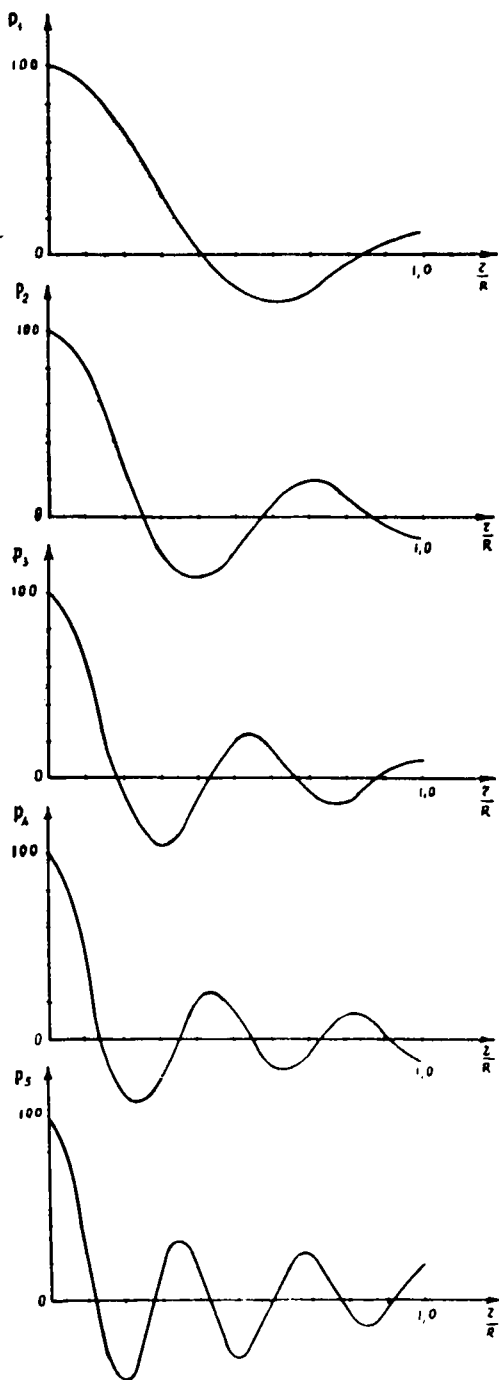


Рис. 1

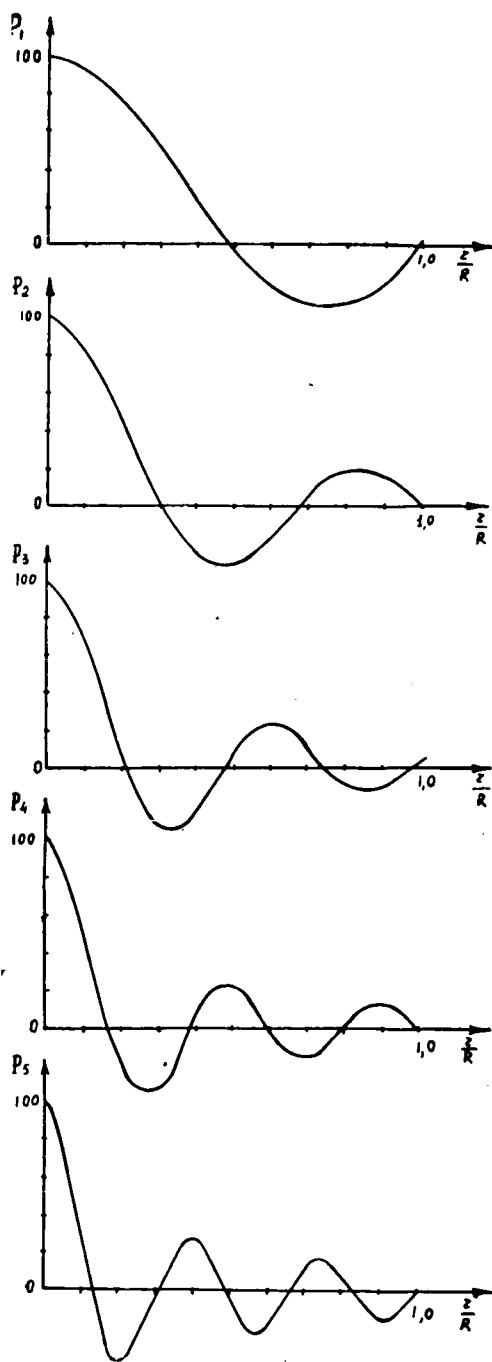


Рис. 2

Для антисимметричной составляющей (рис. 2):

$$P_1(r) = I_0 \left(3,1219 \frac{r}{R} \right) - 1,9400 I_0 \left(3,7463 \frac{r}{R} \right) + 1,9367 I_0 \left(4,6829 \frac{r}{R} \right),$$

$$\begin{aligned}
 P_2(r) &= I_0 \left(5,6765 \frac{r}{R} \right) - 0,5246 I_0 \left(6,8118 \frac{r}{R} \right) + 3,5982 I_0 \left(8,5150 \frac{r}{R} \right), \\
 P_3(r) &= I_0 \left(8,0621 \frac{r}{R} \right) + 2,5992 I_0 \left(9,6746 \frac{r}{R} \right) + 10,315 I_0 \left(12,093 \frac{r}{R} \right), \\
 P_4(r) &= I_0 \left(10,028 \frac{r}{R} \right) + 19,563 I_0 \left(12,033 \frac{r}{R} \right) + 77,862 I_0 \left(15,0423 \frac{r}{R} \right), \\
 P_5(r) &= I_0 \left(11,982 \frac{r}{R} \right) - 2,0810 I_0 \left(14,378 \frac{r}{R} \right) - 27,114 I_0 \left(17,972 \frac{r}{R} \right). \quad (23)
 \end{aligned}$$

На рис. 3 изображен график нагрузочной функции

$$\begin{aligned}
 P(r) &= -0,4980 I_0 \left(1,5053 \frac{r}{R} \right) + 6,9350 I_0 \left(3,0105 \frac{r}{R} \right) + \\
 &+ 34,681 I_0 \left(6,0210 \frac{r}{R} \right) + 58,882 I_0 \left(9,0315 \frac{r}{R} \right) \quad (24)
 \end{aligned}$$

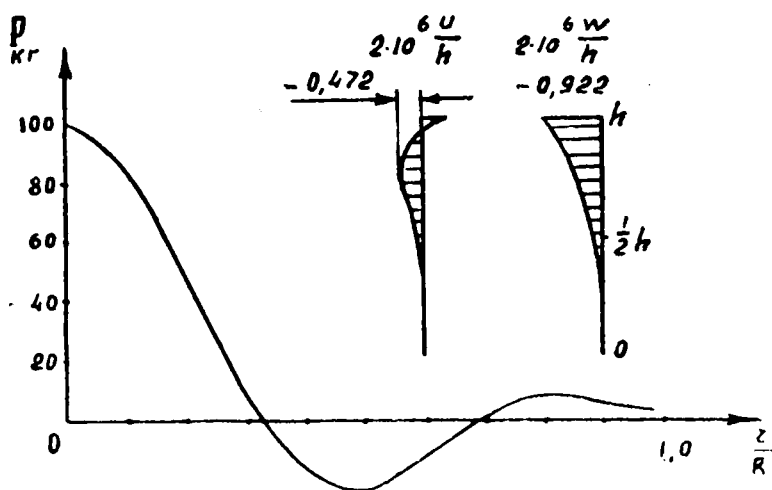


Рис. 3

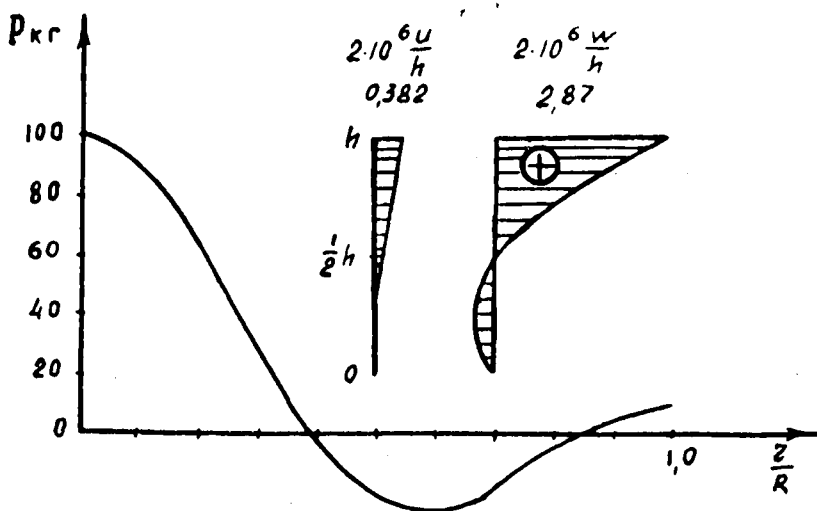


Рис. 4

и смещение w и u на боковой поверхности плиты $h=0,5R$ для симметричной нагрузки при $s=4$ ($k=1; 2; 4; 6$), $\nu=0,3$. На рис. 4 — то же для $s=3$ ($k=1; 2; 4$) и нагрузки

$$P(r) = -3,3802 I_0 \left(1,7143 \frac{r}{R} \right) + 26,235 I_0 \left(3,4287 \frac{r}{R} \right) + 77,147 I_0 \left(6,8573 \frac{r}{R} \right). \quad (25)$$

На рис. 5 изображена деформация плиты $h=0,5R$ под действием антисимметричной составляющей нагрузки при $s=4$ ($k=1; 2; 4; 6$), $\nu=0,3$:

$$P(r) = 0,0391 I_0 \left(1,6373 \frac{r}{R} \right) + 2,0784 I_0 \left(3,2746 \frac{r}{R} \right) + 28,881 I_0 \left(6,5492 \frac{r}{R} \right) + 69,002 I_0 \left(9,8238 \frac{r}{R} \right). \quad (26)$$

На рис. 6 — то же самое для случая $s=2$ ($k=1; 2$) и нагрузки [6]:

$$P(r) = 8,2440 I_0 \left(3,3842 \frac{r}{R} \right) + 91,756 I_0 \left(6,7684 \frac{r}{R} \right). \quad (27)$$

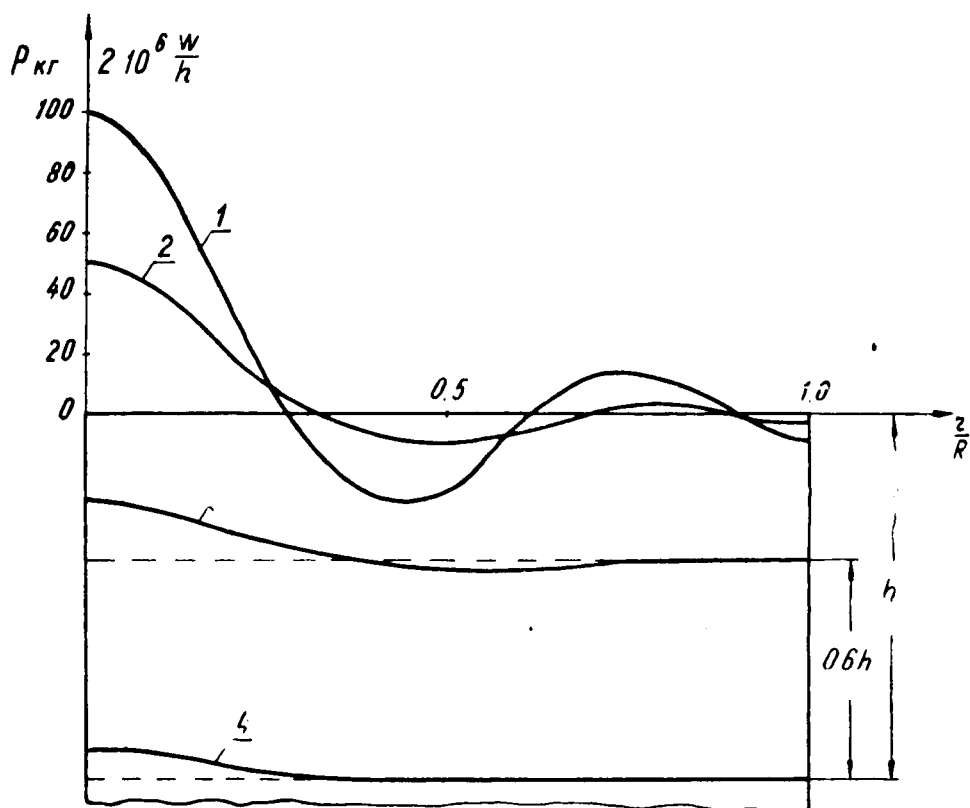


Рис. 5

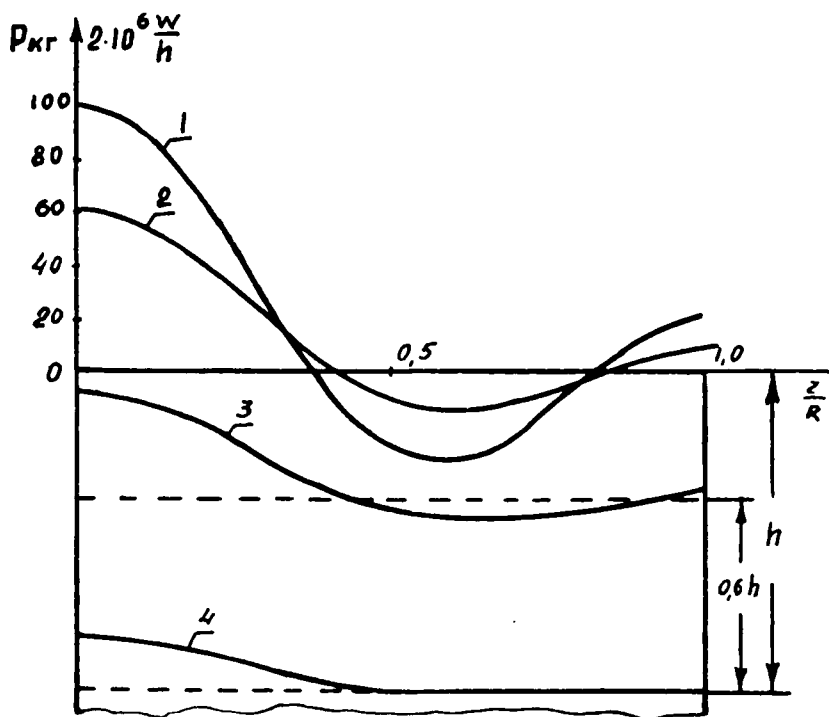


Рис. 6

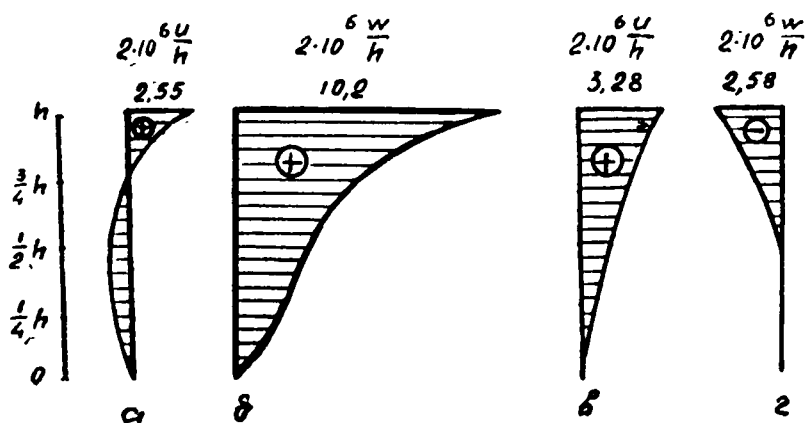


Рис. 7

Там кривые 1 — нагрузочные функции, кривые 2, 3, 4 — сечения, бывшие до деформации параллельными срединной плоскости. Здесь следует отметить, что величины нагрузочных функций при $r=0$ равны 100 единицам. На рис. 7 изображены смещения u и w на боковой поверхности для $s=2$ ($k=1; 2$) (а, б) и для $s=4$ ($k=1; 2; 4; 6$) (в, г) для нагрузок (27) и (26).

Числовые значения на рис. 3, 4, 7 даны для смещений на контуре $z=h, r=R$. Анализ полученных результатов свидетельствует о том, что граничные условия на боковой поверхности плиты выполняются достаточно хорошо. Максимальные смещения u и w на боковой поверхности

значительно меньше изменения размера h (половины толщины плиты), для нагрузки (25) граничные условия для w выполняются точно на трех линиях боковой поверхности, для нагрузки (27) граничные условия для u выполняются точно на трех линиях, для нагрузки (26) практически половина боковой поверхности плиты свободна от перемещений w . Анализируя выполнение граничных условий при $s=2$ и $s=4$ видим, что они с возрастанием s выполняются лучше. Таким образом, увеличивая s , можно всегда построить такую систему функций, которая позволит рассмотреть определенный класс нагрузок и как угодно близко приблизиться к выполнению одного граничного условия на боковой поверхности плиты, когда другое условие будет выполняться на нескольких линиях, лежащих на боковой поверхности плиты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Валов. Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины, ПММ, 26, вып. 4, 1962.
2. В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко. О точном решении осесимметрической задачи теории упругости для круглой жесткозакрепленной плиты. Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, т. XVI, вып. 5, 1963.
3. Б. Г. Галеркин. Собрание сочинений. Т. 1, АН СССР, 1952.
4. С. А. Алексеев. Изгиб толстых плит. Труды ВВИА им. проф. Жуковского, вып. 312, 1949.
5. В. И. Блох. К общей теории упругих толстых плит. Инженерный сборник, Изд. АН СССР, т. XVIII, 1954.
6. В. М. Деев. До разраханку товстих пружиних плит. ДАН УРСР, № 9, 1959.
7. Н. Т. Глазунова. К вопросу об осесимметричном изгибе плит. Труды Новочеркасского ордена Трудового Красного Знамени политехнического института им. Серго Орджоникидзе, т. 136, 1963.

Поступила 1. III. 1964.

К РАСЧЕТУ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРАХ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

В. Г. ПОТЕЙКО

В данной работе, являющейся продолжением [3], рассматривается задача о температурных напряжениях в многослойных цилиндрах. Температурное поле предполагается осесимметричным. Физико-механические характеристики считаются независимыми от температуры. Решение проводится методом начальных функций [1]. При этом полностью сохранены обозначения, принятые в [3].

1. Основные уравнения термоупругости для многослойного цилиндра по смешанному методу будут отличаться от (1.1) в [3] наличием температурных членов и могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_1^k}{\partial r} &= -\frac{\mu_k}{1-\mu_k} \left(\frac{V_1^k}{r} + \alpha V_2 \right) + \frac{1-2\mu_k}{2G_k(1-\mu_k)} V_3^k + \frac{(1+\mu_k)\lambda_k T}{1-\mu_k}, \\ \frac{\partial V_2^k}{\partial r} &= -\alpha V_1^k + \frac{1}{G_k} V_4^k, \\ \frac{\partial V_3^k}{\partial r} &= \frac{2G_k}{1-\mu_k} \frac{V_1^k}{r^2} + \frac{2G_k\mu_k}{1-\mu_k} \frac{\alpha}{r} V_2^k - \frac{(1-2\mu_k)}{1-\mu_k} \frac{V_3^k}{r} = \\ &= -\alpha V_4^k - \frac{2G_k(1+\mu_k)}{1-\mu_k} \frac{\lambda_k T}{r}, \\ \frac{\partial V_4^k}{\partial r} &= \frac{2G_k\mu_k}{1-\mu_k} \frac{\alpha V_1^k}{r} - \frac{2G_k}{1-\mu_k} \alpha^2 V_2^k - \frac{\mu_k}{1-\mu_k} \alpha V_3^k - \\ &= -\frac{V_4^k}{r} + \frac{2G_k(1+\mu_k)\alpha\lambda_k T}{1-\mu_k}, \quad r_{k-1} \leq r \leq r_k \\ &\quad (k=1, 2, \dots, K),\end{aligned}\tag{1.1}$$

где λ_k — коэффициент теплового расширения материала k слоя, умноженный на ρ_0 , $T=T(r, z, t)$ — температура.

Остальные функции V_5^k и V_7^k будут определяться следующими формулами:

$$V_5^k = \frac{2G_k\mu_k}{1-\mu_k} \frac{V_1^k}{r} + \frac{2G_k}{1-\mu_k} \alpha V_2^k + \frac{\mu_k}{1-\mu_k} V_3^k - \frac{2G_k(1+\mu_k)\lambda_k T}{1-\mu_k},$$

$$V_7^k = \frac{2G_k}{1-\mu_k} \frac{V_1^k}{r} + \frac{2G_k \mu_k}{1-\mu_k} \alpha V_2^k + \frac{\mu_k}{1-\mu_k} V_3^k - \frac{2G_k(1+\mu_k)\lambda_k T}{1-\mu_k},$$

$$(k=1, 2, \dots, K).$$

Рассмотрим систему (1.1) при однородных граничных условиях в напряжениях на внутренней и внешней боковых поверхностях

$$V_3^1(r_0) = V_4^1(r_0) = 0, \quad (1.2)$$

$$V_3^K(r_K) = V_4^K(r_K) = 0 \quad (1.3)$$

и условиях сопряжения на поверхностях контакта слоев

$$V_n^k(r_k) = V_n^{k+1}(r_k),$$

$$(k=1, 2, \dots, K-1),$$

$$(n=1, 2, 3, 4). \quad (1.4)$$

Решение (1.1) будем отыскивать в виде суммы двух решений: общего решения однородной системы и частного решения неоднородной. Общее решение однородной системы найдено в [3]. Частное решение неоднородной системы отыскивалось методом вариации произвольных постоянных. В результате получим

$$V_n^1 = \sum_{s=1}^4 L_{ns}^1(\alpha, r) U_s + \sum_{s=1}^2 H_{ns}^1(\alpha, r) \Phi_s^1(\alpha, r) - (\delta_{7n} + \delta_{5n}) \frac{2G_1(1+\mu_1)\lambda_1 T}{1-\mu_1}$$

$$V_n^k = \sum_{s=1}^4 L_{ns}^k(\alpha, r) V_s^{k-1}(r_{k-1}) + \sum_{s=1}^2 H_{ns}^k(\alpha, r) \Phi_s^k(\alpha, r) -$$

$$-(\delta_{7n} + \delta_{5n}) \frac{2G_k(1+\mu_k)\lambda_k T}{1-\mu_k}, \quad r_{k-1} \leq r \leq r_k, \quad (k=2, 2, \dots, K).$$

$$(n=1, 2, 3, 4, 5, 7). \quad (1.5)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Phi_1^k(\alpha, r) = \frac{\pi G_k(1+\mu_k)\lambda_k}{1-\mu_k} [\int r \alpha N_0(\alpha, r) T dr - (\int r \alpha N_0(\alpha, r) T dr)_{r=r_{k-1}}],$$

$$\Phi_2^k(\alpha, r) = \frac{\pi G_k(1+\mu_k)\lambda_k}{1-\mu_k} [\int r J_0(\alpha, r) T dr - (\int r J_0(\alpha, r) T dr)_{r=r_{k-1}}], \quad (1.6)$$

причем $\Phi_s^k(\alpha, r)$ известны, если только известно температурное поле $T(r, z, t)$ и $\Phi_s^k(r_{k-1}) = 0$, δ_{7n} и δ_{5n} — символы Кронекера.

Входящие в (1.5) оператор-функции $L_{ns}^k(\alpha, r)$ приведены в [3], а $H_{ns}^k(\alpha, r)$ определяются соотношениями:

$$H_{11}^k = \frac{J_1(\alpha r)}{2G_k}, \quad H_{12}^k = \frac{\alpha N_1(\alpha r)}{2G_k}, \quad H_{21}^k = -\frac{J_0(\alpha r)}{2G_k},$$

$$H_{22}^k = -\frac{\alpha N(\alpha r)}{2G_k}, \quad H_{31}^k = \alpha J_0(\alpha r) - \frac{J_1(\alpha r)}{r},$$

$$H_{32}^k = \alpha^2 N_0(\alpha r) - \frac{\alpha N_1(\alpha r)}{r}, \quad H_{41}^k = \alpha J_1(\alpha r),$$

$$H_{42}^k = \alpha^2 N_1(\alpha, r), \quad H_{51}^k = -\alpha J_0(\alpha r), \quad H_{52}^k = -\alpha^2 N_0(\alpha r)$$

$$H_{71}^k = \frac{J_1(\alpha r)}{r}, \quad H_{72}^k = \frac{\alpha N_1(\alpha r)}{r}. \quad (1.7)$$

Объединяя в (1.5) оба соотношения и учитывая, что в силу граничных условий (1.2) отличными от нуля являются только две начальные функции U_1 и U_2 , можем записать

$$V_n^k = \sum_{s=1}^2 M_{ns}^k(\alpha, r) U_s + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{s=1}^2 W_{ns}^{ki}(\alpha, r) \Phi_s^i(\alpha, r_i) + \\ + \sum_{s=1}^2 H_{ns}^k(\alpha, r) \Phi_s^k(\alpha, r) - (\delta_{5n} + \delta_{7n}) \frac{2G_k(1+\mu_k) \lambda_k T}{1-\mu_k}, \quad (1.8) \\ r_{k-1} \leq r \leq r_k, \quad (n=1, 2, 3, 4, 5, 7), \quad (k=1, 2, \dots, K),$$

где

$$W_{ns}^{ki}(\alpha, r) = \underbrace{\sum_{j=1}^4 \sum_{v=1}^4 \cdots \sum_{l=1}^4 \sum_{p=1}^4}_{k-i} L_{nj}^k(\alpha, r) L_{jv}^{k-1}(\alpha, r_{k-1}) \cdots L_{lp}^{i+1}(\alpha, r_{i+1}) H_{ps}^i(\alpha, r_i)$$

Входящие в (1.8) неизвестные начальные функции U_1 и U_2 в силу граничных условий (1.3) будут определяться следующей системой неоднородных трансцендентных дифференциальных уравнений:

$$M_{31}^K(\alpha, r_K) U_1 + M_{32}^K(\alpha, r_K) U_2 = - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{s=1}^2 W_{3s}^{Ki}(\alpha, r_K) \cdot \Phi_s^i(\alpha, r_i) - \\ - \sum_{s=1}^2 H_{3s}^K(\alpha, r_K) \Phi_s^K(\alpha, r_K), \\ M_{41}^K(\alpha, r_K) U_1 + M_{42}^K(\alpha, r_K) U_2 = - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{s=1}^2 W_{4s}^{Ki}(\alpha, r_K) \Phi_s^i(\alpha, r_i) - \\ - \sum_{s=1}^2 H_{4s}^K(\alpha, r_K) \Phi_s^K(\alpha, r_K). \quad (1.9)$$

Эта система отличается от (2.1) в [3] лишь видом правых частей, и решение ее может быть проведено аналогичным образом.

2. Рассмотрим подробнее случай однородного температурного поля. Поставим задачу следующим образом. Пусть система — многослойный цилиндр при некоторой температуре T_0 находилась в ненапряженном состоянии. Затем, в некоторый момент времени t_0 , она была помещена в среду с температурой T_1 . Следует определить температурные напряжения в системе в моменты времени, достаточно удаленные от t_0 , когда температура системы во всех ее точках станет равной T_1 . Таким образом, речь будет идти о температурных напряжениях, возникающих за счет различия коэффициентов теплового расширения слоев (в некоторых элементах конструкций коэффициенты теплового расширения слоев могут отличаться на порядок) и наличия на торцах каких-либо ограничений на перемещения.

Подставляя в соотношения (1.5) — (1.8) вместо $T(r, z, t)$ $\Delta T = T_1 - T_0 = \text{const}$ и беря в (1.6) интегралы, после некоторых преобразований получим следующие выражения для искомых функций:

$$V_n^k = \sum_{s=1}^2 M_{ns}^k(\alpha, r) U_s + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{s=1}^4 m_{ns}^{ki+1}(r) \varphi_s^i(r_i) + \varphi_n^k(r), \\ (n=1, 3, 5, 7), \\ V_n^k = \sum_{s=1}^2 M_{ns}^k(\alpha, r) U_s, \quad (2.1)$$

$$(n=2, 4) \\ r_{k-1} \leq r \leq r_k, \quad (k=1, 2, \dots, K),$$

где

$$m_{ns}^{ki+1}(r) = \underbrace{\sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 \dots \sum_{l=1}^4 \sum_{p=1}^4}_{k-i+1} l_{nj}^k(r) \cdot l_{jv}^{k-1}(r_{k-1}) \cdot \dots \cdot l_{lp}^{i+2}(r_{l+2}) \cdot l_{ps}^{i+1}(r_{i+1}), \\ \varphi_1^k(r) = -\frac{(1+\mu_k)\lambda_k \Delta T}{2(1-\mu_k)} \left(\frac{r_{k-1}^2}{r} - r \right), \quad \varphi_2^k = \varphi_4^k = 0, \\ \varphi_3^k(r) = \frac{G_k(1+\mu_k)\lambda_k \Delta T}{1-\mu_k} \left(\frac{r_{k-1}^2}{r^2} - 1 \right), \quad \varphi_5^k = -\frac{2G_k(1+\mu_k)\lambda_k \Delta T}{1-\mu_k}, \\ \varphi_7^k(r) = -\frac{G_k(1+\mu_k)\lambda_k \Delta T}{1-\mu_k} \left(\frac{r_{k-1}^2}{r^2} + 1 \right);$$

здесь физико-механические характеристики отнесены к температуре T_1 .

Система уравнений (1.9) для определения начальных функций в этом случае упрощается и будет иметь вид

$$M_{31}^K(\alpha, r_K)U_1 + M_{32}^K(\alpha, r_K)U_2 = -\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{s=1}^4 m_{3s}^{Ki+1}(r_K) \varphi_s^i(r_i) - \varphi_n^K(r_K), \\ M_{41}^K(\alpha, r_K)U_1 + M_{42}^K(\alpha, r_K)U_2 = 0. \quad (2.2)$$

Проводя решение (2.2) в том же духе, что и в [3] и подставляя полученное решение в (2.1), получим окончательно следующие выражения для искомых функций:

$$V_n^k(r, z) = \sum_{\delta_m} \{ \operatorname{Re} [\sum_{s=1}^2 (-1)^{s+1} M_{ns}^k(\delta_m, r) \Delta_{sm}] [\operatorname{ch} \gamma_m z (C_m \cos \omega_m z - \\ - F_m \cdot \sin \omega_m z) + \operatorname{sh} \gamma_m z (P_m \cos \omega_m z - D_m \sin \omega_m z)] - \\ - \operatorname{Im} [\sum_{s=1}^2 (-1)^{s+1} M_{ns}^k(\delta_m, r) \Delta_{sm}] [\operatorname{sh} \gamma_m z (C_m \sin \omega_m z + \\ + F_m \cos \omega_m z) + \operatorname{ch} \gamma_m z (D_m \cos \omega_m z + P_m \sin \omega_m z)] \} + \\ + m_{n1}^k(r) u_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{s=1}^4 m_{ns}^{ki+1}(r) \varphi_s^i(r_i) + \varphi_n^k(r), \\ (n=1, 3, 5, 7), \quad (2.3)$$

$$V_n^k(r, z) = \sum_{\delta_m} \{ \operatorname{Re} [\sum_{s=1}^2 (-1)^{s+1} M_{ns}^k(\delta_m, r) \Delta_{sm}] [\operatorname{ch} \gamma_m z (P_m \cos \omega_m z - \\ - D_m \sin \omega_m z) + \operatorname{sh} \gamma_m z (C_m \cdot \cos \omega_m z - F_m \cdot \sin \omega_m z)] - \\ - \operatorname{Im} [\sum_{s=1}^2 (-1)^{s+1} M_{ns}^k(\delta_m, r) \Delta_{sm}] [\operatorname{sh} \gamma_m z (P_m \cdot \sin \omega_m z + \\ + D_m \cdot \cos \omega_m z) + \operatorname{ch} \gamma_m z (F_m \cdot \cos \omega_m z + C_m \sin \omega_m z)] \}, \\ (n=2, 4),$$

где

$$r_{k-1} \leq r \leq r_k, \quad (k=1, 2, \dots, K)$$

$$a_1 = \frac{1}{m_{31}^K(r_K)} \left[- \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{s=1}^4 m_{3s}^{K_{i+1}}(r_K) \varphi_s^i(r_i) - \varphi_3^K(r_K) \right].$$

Полученное решение содержит произвольные постоянные C_m, D_m, F_m, P_m , с помощью которых можно приближенно удовлетворить граничные условия на торцах.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. З. Власов. Метод начальных функций в задачах теории упругости. Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1955.
2. Э. Мелан, Г. Паркус. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями, Физматгиз, 1958.
3. В. Г. Потейко. Осесимметричное напряженное состояние многослойных цилиндров. Настоящий сборник.

Поступила 1. III. 1967.

ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СФЕРЫ, ПОМЕЩЕННОЙ В ЗАДАННУЮ СРЕДУ

Л. К. АХАЕВА, В. Е. ТОМИЛОВ

1. Постановка задачи. Имеем сплошную однородную сферу радиуса R , центр которой находится в начале координат. Начальная температура шара $T(r, \varphi, 0) = \Psi(r, \varphi)$, где r, θ, φ — сферические координаты (рис. 1). Сфера помещается в среду, температура которой изменяется по закону $T_0 \cdot f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ — заданная функция сферической координаты. На поверхности сферы происходит теплообмен с окружающей средой, который осуществляется по закону Ньютона.

Требуется определить неустановившиеся температурные напряжения, перемещения и деформации, возникающие в сфере.

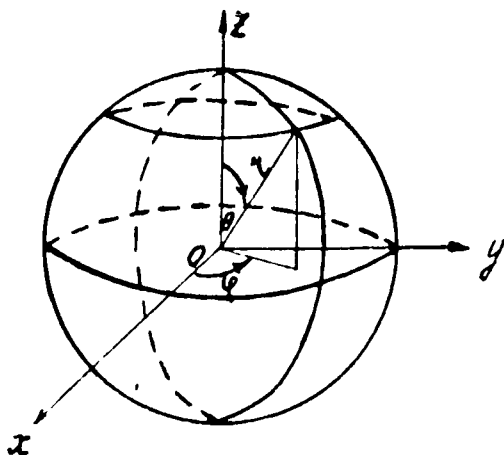


Рис. 1

2. Первый этап в решении этой задачи заключается в нахождении температурного поля T . Он сводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T, \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ — оператор Лапласа для осесиммет-

рического случая; a^2 — коэффициент температуропроводности при начальном условии, определяющем распределение температуры в момент времени $t=0$

$$T(r, \varphi, 0) = \Psi(r, \varphi), \quad (2)$$

и при граничном условии, устанавливающем закон теплообмена между окружающей средой и поверхностью тела

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = h[T_0 \cdot f(\varphi) - T]_{r=R}, \quad (3)$$

где h — коэффициент теплообмена; $T_0 \cdot f(\varphi)$ — температура окружающей среды; $T_0 = \text{const}$; T — текущая температура.

Введем новую функцию при помощи соотношения

$$T(r, \varphi, t) = T_0 \cdot f(\varphi) + u,$$

где $u = u(r, \varphi, t)$.

Уравнение (1), начальное и граничное условия принимают вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{T_0}{r^2 \sin^2 \theta} f''(\varphi), \quad (1)'$$

$$u(r, \varphi, 0) = \Psi(r, \varphi) - T_0 \cdot f(\varphi), \quad (2)'$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = -hu \Big|_{r=R}. \quad (3)'$$

При решении соответствующего однородного уравнения методом разделения переменных

$$u = Q(t) \cdot Y(r) \cdot \Phi(\varphi)$$

получаем три граничных задачи:

$$1) \quad Q'(t) + a^2 k^2 Q(t) = 0;$$

$$2) \quad \Phi''(\varphi) + \lambda^2 \Phi(\varphi) = 0;$$

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi);$$

$$3) \quad \frac{d^2 Y(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dY(r)}{dr} + \left(k^2 - \frac{\lambda^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) Y(r) = 0,$$

$$Y|_{r=0} \neq \infty, \quad \left. \frac{dY}{dr} \right|_{r=R} = -hY|_{r=R},$$

где k^2, λ^2 — постоянные. Объединяя решения этих задач и частное решение неоднородного уравнения, получим искомое температурное поле в следующем виде:

$$T(r, \varphi, t) = T_0 \cdot f(\varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A^{(2)}(t) \zeta_{mn}^{(2)}(r, \varphi) + A^{(1)}(t) \zeta_{mn}^{(1)}(r, \varphi)], \quad (4)$$

где $\zeta_{mn}^{(1)}, \zeta_{mn}^{(2)}$ — собственные функции, определяемые равенствами:

$$\zeta_{mn}^{(1)} = \frac{I_\nu \left(\frac{\mu_{mn} r}{R} \right)}{\sqrt{r}} \sin n\varphi,$$

$$\zeta_{mn}^{(2)} = \frac{I_\nu \left(\frac{\mu_{mn} r}{R} \right)}{\sqrt{r}} \cos n\varphi,$$

$I_\nu \left(\frac{\mu_{mn} r}{R} \right)$ — функция Бесселя 1-го рода ν -го порядка,

$\nu = \frac{n^2}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{4}$ — число, не равное целому,

μ_{mn} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\left[hR - \frac{1}{2} \right] I_\nu(\mu) + \mu I'_\nu(\mu) = 0;$$

$A^{(1)}(t)$, $A^{(2)}(t)$ — коэффициенты, найденные из начального условия.

3. Определим температурные напряжения, перемещения и деформации, возникающие в сплошной сфере при действии на нее температурного поля (4). Уравнения термоупругости в перемещениях для осесимметрического случая имеют вид [1, 7]

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2} u_r + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial l}{\partial r} - \frac{1+\mu}{1-2\mu} \alpha_T \frac{\partial T}{\partial r} &= 0, \\ \Delta u_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{(1-2\mu)r \sin \theta} \frac{\partial l}{\partial \varphi} - \frac{1+\mu}{(1-2\mu)r \sin \theta} \alpha_T \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где l — объемное расширение; μ — коэффициент Пуассона; α_T — коэффициент теплового расширения; T — разность температур $T = T - T_0$; T — текущая температура; u_r , u_θ , u_φ — компоненты смещения $\vec{u}$; T_0 — начальная температура.

Разумеется, что уравнения (5) справедливы при $T=0$ и переходят в этом случае в уравнения теории упругости. Граничные условия в нашем случае имеют вид

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0 \quad \text{при } r=R. \quad (6)$$

Эти условия отражают тот факт, что полные нормальные и касательные напряжения на свободной поверхности равны нулю.

Решение уравнения (5) имеет вид

$$\vec{u} = \vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}, \quad (7)$$

где $\vec{u}^{(1)}$ — частное решение неоднородного уравнения, $\vec{u}^{(2)}$ — решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (5). Частное решение имеет вид

$$\vec{u}^{(1)} = \text{grad } \Phi^{(1)}, \quad (8)$$

где скалярная функция $\Phi^{(1)}$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \Phi^{(1)} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha_T T. \quad (9)$$

В дальнейшем решение поведем следующим образом: сначала при известном температурном поле находится частное решение уравнения (9) для термоупругого потенциала $\Phi^{(1)}$, первые производные которого определяют соответствующие частные решения для перемещений (решения 1-й группы).

Далее вычисляются отвечающие термоупругому потенциалу перемещений $\Phi^{(1)}$ тепловые напряжения, которые, вообще говоря, не удовлетворяют заданным условиям на поверхности.

Затем на это решение 1-й группы накладывается решение соответствующей краевой задачи изотермической теории упругости, содержа-

шее необходимое число постоянных интегрирования для удовлетворения граничных условий (решения 2-й группы).

В нашем случае тепловые напряжения обусловлены симметричным температурным полем $T(r, \varphi, t)$. Осесимметричному температурному полю отвечает осесимметрическое напряженное состояние, при котором компоненты вектора перемещения u_θ , тензора деформации $\varepsilon_{r\theta}$ и $\varepsilon_{\theta\varphi}$ и тензора напряжения $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\varphi}$ равны нулю:

$$u_\theta = 0, \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta\varphi} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\varphi} = 0. \quad (10)$$

Компоненты вектора перемещения u_r и u_φ имеют вид

$$u_r = u_r^{(1)} + u_r^{(2)}, \quad (11)$$

$$u_\varphi = u_\varphi^{(1)} + u_\varphi^{(2)}, \quad (12)$$

где

$$u_r^{(1)} = \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r}, \quad u_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi}.$$

Как нетрудно убедиться, объемное расширение через функцию выражается в виде

$$I^{(1)} = \Delta \Phi^{(1)}. \quad (13)$$

Компоненты тензора напряжений и деформаций через функцию запишутся [1, 7]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)} &= 2G \left[\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} - \Delta \Phi^{(1)} \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} &= 2G \left[\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} - \Delta \Phi^{(1)} \right], \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} &= 2G \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} - \Delta \Phi^{(1)} \right], \\ \sigma_{r\varphi}^{(1)} &= 2G \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \varphi \partial r} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2}, \\ \varepsilon_\theta^{(1)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r}, \\ \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{r\varphi}^{(1)} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \varphi \partial r} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ — модуль сдвига, E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона. В дальнейшем решения (12), (14), (15) будем называть решениями 1-й группы и отличать их индексом (1) вверх.

4. Для отыскания решения первой группы надо найти термоупругий потенциал перемещений $\Phi^{(1)}$. Для этого необходимо решить урав-

нение (9), учитывая выражения найденного температурного поля (4) и начального распределения температуры, то есть записывая разность температур

$$T = \sum_{n,m} [B^{(2)} Y(k_{mn}r) \cos n\varphi + B^{(1)} Y(k_{mn}r) \sin n\varphi], \quad (16)$$

где $B^{(1)}(t)$, $B^{(2)}(t)$ — новые коэффициенты.

Как нетрудно видеть, решением этого уравнения (9) является

$$\Phi^{(1)} = -\frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\alpha_T}{k_{mn}^2} \sum_{n,m} Y(k_{mn}r) [B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi]. \quad (17)$$

Находя частные производные термоупругого потенциала перемещений, определим по формулам (12), (14), (15) перемещения, деформации и напряжения:

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(1)} &= -\frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\alpha_T}{k_{mn}^2} \sum_{n,m} \frac{\partial Y(k_{mn}r)}{\partial r} [B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi], \\ u_\varphi^{(1)} &= -\frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\alpha_T n}{k_{mn}^2} \sum_{n,m} \frac{1}{r \sin \theta} Y(k_{mn}r) [-B^{(2)} \sin n\varphi + B^{(1)} \cos n\varphi]. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= -\frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\alpha_T}{k_{mn}^2} \sum_{n,m} \frac{\partial^2 Y(k_{mn}r)}{\partial r^2} [B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi], \\ \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\alpha_T}{k_{mn}^2} \sum_{n,m} \left[\frac{n^2}{r^2 \sin^2 \theta} Y(k_{mn}r) - \frac{1}{r} \frac{\partial Y(k_{mn}r)}{\partial r} \right] \times \\ &\quad \times [B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi], \\ \varepsilon_\theta^{(1)} &= -\frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\alpha_T}{k_{mn}^2} \sum_{n,m} \frac{1}{r} \frac{\partial Y(k_{mn}r)}{\partial r} [B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi], \\ \varepsilon_{r\varphi}^{(1)} &= -\frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\alpha_T n}{k_{mn}^2} \sum_{n,m} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Y(k_{mn}r)}{\partial r} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} Y(k_{mn}r) \right] \times \\ &\quad \times [-B^{(2)} \sin n\varphi + B^{(1)} \cos n\varphi]. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= -\frac{E}{1-\mu} \alpha_T \sum_{n,m} \left[\frac{1}{k_{mn}^2} \frac{\partial^2 Y(k_{mn}r)}{\partial r^2} + Y(k_{mn}r) \right] \times \\ &\quad \times [B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi], \\ \sigma_\varphi^{(1)} &= \frac{E}{1-\mu} \alpha_T \sum_{n,m} \left[\left(\frac{n^2}{k_{mn}^2 r^2 \sin^2 \theta} - 1 \right) Y(k_{mn}r) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{k_{mn}^2} \frac{\partial Y(k_{mn}r)}{\partial r} \right] \times [B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi], \\ \sigma_\theta^{(1)} &= -\frac{E}{1-\mu} \alpha_T \sum_{n,m} \left[\frac{1}{k_{mn}^2 r} \frac{\partial Y(k_{mn}r)}{\partial r} + Y(k_{mn}r) \right] \times \\ &\quad \times [B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi], \\ \sigma_{r\varphi}^{(1)} &= -\frac{E}{1-\mu} \frac{\alpha_T n}{k_{mn}^2} \sum_{n,m} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Y(k_{mn}r)}{\partial r} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r^2 \sin \theta} Y(k_{mn}r) \right] \times [-B^{(2)} \sin n\varphi + B^{(1)} \cos n\varphi]. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Таким образом, нашли решение первой группы. Однако, как мы уже говорили, определенное таким способом решение уравнения (5) не удовлетворяет граничным условиям (6). Поэтому на полученное решение следует наложить решения уравнений теории упругости (решения 2-й группы) или уравнений (5) при $T=0$.

5. Решение уравнения теории упругости

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2} u_r + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial l}{\partial r} &= 0, \\ \Delta u_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{(1-2\mu)r \sin \theta} \frac{\partial l}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

можно представить в форме Папковича [4, 7]

$$\vec{u}^{(2)} = 4(1-\mu) \vec{B} - \text{grad}(\vec{B} \cdot \vec{r} + B_0)$$

или

$$\begin{aligned} u_r^{(2)} &= 4(1-\mu) B_r - \frac{\partial}{\partial r} (r B_r + B_0), \\ u_\varphi^{(2)} &= 4(1-\mu) B_\varphi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r B_r + B_0), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\vec{B}$ — гармонический вектор, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta \vec{B} = 0, \quad (23)$$

B_0 — гармонический скаляр, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta B_0 = 0, \quad (24)$$

$\vec{r}$ — радиус-вектор. Надо отметить, что гармонический вектор $\vec{B}$ и гармонический скаляр B_0 , определяемые соответственно формулами (23) и (24), являются функциями только двух координат r и φ . При использовании этого решения следует иметь в виду, что в системе криволинейных координат компоненты гармонического вектора $\vec{B}$ не удовлетворяют уравнениям Лапласа.

Для составления уравнений для B_r и B_φ , необходимых для определения перемещения (22), используем векторное уравнение

$$\Delta \vec{B} = \text{grad div } \vec{B} - \text{rot rot } \vec{B} = 0. \quad (25)$$

Выполняя в нем векторные операции, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_B}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \omega_B}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial l_B}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r \omega_B)}{\partial r} &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} l_B &= \text{div } \vec{B} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (B_\varphi) \right], \\ \omega_B &= \text{rot}_\theta \vec{B} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Уравнения (26) для функций l_B и ω_B оказались связанными. Применяя операцию div , а затем операцию rot к уравнению (25), получим два независимых уравнения относительно l_B и ω_B :

$$\Delta l_B = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial l_B}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 l_B}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (28)$$

$$\Delta \omega_B = \frac{\partial^2 \omega_B}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega_B}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \omega_B}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (29)$$

Уравнение для гармонической функции B_0 , входящей в решение (22), принимает вид

$$\frac{\partial^2 B_0}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 B_0}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (30)$$

Методом разделения переменных решения этих уравнений представляются в виде сумм слагаемых:

$$l_{Bmn} = E_{mn} r^{\lambda_m} (B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi), \quad (31)$$

$$\omega_{Bmn} = F_{mn} r^{\lambda_m} (B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi), \quad (32)$$

где

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} + \nu, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \nu.$$

Постоянные E_{mn} и F_{mn} не могут быть независимыми, так как l_{Bmn} и ω_{Bmn} связаны уравнениями (26). Подставляя выражения для l_{Bmn} и ω_{Bmn} в эти уравнения (26), находим

$$F_{mn} = \frac{n}{(\lambda_m + 1) \sin \theta} \frac{(-B^{(2)} \sin n\varphi + B^{(1)} \cos n\varphi)}{(B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi)} E_{mn}. \quad (33)$$

Заменяя теперь в уравнениях (27) функции l_{Bmn} и ω_{Bmn} их выражениями (31) и (32) и принимая во внимание равенство (33) для определения B_{rmn} и $B_{\varphi mn}$, получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_{rmn}) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial B_{\varphi mn}}{\partial \varphi} &= E_{mn} r^{\lambda_m + 1} (B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi), \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial B_{rmn}}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r B_{\varphi mn})}{\partial r} &= \frac{1}{(\lambda_m + 1) \sin \theta} r^{\lambda_m + 1} E_{mn} \frac{\partial (B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi)}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Частное решение этой системы уравнений представляется в виде

$$\begin{aligned} B_{rmn} &= C_{mn} r^{\lambda_m + 1} (B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi), \\ B_{\varphi mn} &= C_{mn} \frac{1}{(\lambda_m + 1) \sin \theta} r^{\lambda_m + 1} \frac{\partial (B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi)}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (35)$$

где введены новые постоянные интегрирования по формуле

$$C_{mn} = \frac{E_{mn}}{\lambda_m + 3 - \frac{n^2}{(\lambda_m + 1) \sin^2 \theta}}. \quad (36)$$

Из-за функционального произвола, существующего в решении (22), общее решение системы уравнений (34) не используется; соответствующе-

щая часть решения может быть охвачена функцией B_0 , которую представляем в виде суммы слагаемых

$$B_{0mn} = -D_{mn} r^{\lambda_m} (B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi). \quad (37)$$

Подставляя (35) и (37) в выражения для функций B_r , B_φ и B_0 в (22) и суммируя по целочисленным n и m , получаем

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^2 [(2-4\mu-\lambda_m) C_{mn} r^{\lambda_m+1} + \lambda_m D_{mn} r^{\lambda_m-1}] (B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi), \\ u_\varphi^{(2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^2 \left[\frac{3-4\mu-\lambda_m}{(\lambda_m+1) \sin \theta} C_{mn} r^{\lambda_m+1} + \frac{1}{\sin \theta} D_{mn} r^{\lambda_m-1} \right] n (-B^{(2)} \sin n\varphi + \\ &\quad + B^{(1)} \cos n\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Далее по известным формулам, связывающим напряжения, деформации и перемещения, вычисляем деформации и напряжения [1, 3, 5, 7].

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(2)} &= \sum_{n,m} [(-\lambda_m^2 - 4\mu\lambda_m - 4\mu + \lambda_m + 2) C_{mn} r^{\lambda_m} + \\ &\quad + (\lambda_m^2 - \lambda_m) D_{mn} r^{\lambda_m-2}] \times [B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi], \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} &= \sum_{n,m} [(2-4\mu-\lambda_m) C_{mn} r^{\lambda_m} + \\ &\quad + \lambda_m D_{mn} r^{\lambda_m-2}] [B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi], \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)} &= \sum_{n,m} \left[(2-4\mu-\lambda_m - \frac{n^2(3-4\mu-\lambda_m)}{(\lambda_m+1) \sin^2 \theta}) C_{mn} r^{\lambda_m} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\lambda_m - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \right) \right] \times [B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi], \\ \varepsilon_{r\varphi}^{(2)} &= \sum_{n,m} \left[\frac{-2\lambda_m^2 + 4\lambda_m - 8\mu\lambda_m - 4\mu + 2}{(\lambda_m+1) \sin \theta} C_{mn} r^{\lambda_m} + \left(\lambda_m + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\lambda_m-2}{\sin \theta} \right) D_{mn} r^{\lambda_m-2} \right] \times n [-B^{(2)} \sin n\varphi + B^{(1)} \cos n\varphi], \\ I^{(2)} &= \varepsilon_r^{(2)} + \varepsilon_\theta^{(2)} + \varepsilon_\varphi^{(2)} = \sum_{n,m} [(-\lambda_m^2 - \lambda_m - 4\mu\lambda_m - 12\mu + 8) C_{mn} r^{\lambda_m} + \\ &\quad + \left(\lambda_m^2 + \lambda_m - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \right) D_{mn} r^{\lambda_m-2}] (B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(2)} &= 2G \sum_{n,m} \left\{ \frac{3\mu\lambda_m^2 - \lambda_m^2 + 4\mu^2\lambda_m - 7\mu\lambda_m + \lambda_m - 4\mu^2 + 2}{1-2\mu} C_{mn} r^{\lambda_m} + \right. \\ &\quad \left. + \left[(\lambda_m^2 - \lambda_m) + \frac{\mu}{1-2\mu} \left(\lambda_m^2 + \lambda_m - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \right) \right] D_{mn} r^{\lambda_m-2} \right\} (B^{(2)} \cos n\varphi + \\ &\quad + B^{(1)} \sin n\varphi), \\ \sigma_\theta^{(2)} &= 2G \sum_{n,m} \left\{ \frac{-\mu\lambda_m^2 - 4\mu^2\lambda_m + \mu\lambda_m - \lambda_m - 4\mu^2 + 2}{1-2\mu} C_{mn} r^{\lambda_m} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\lambda_m + \frac{\mu}{1-2\mu} \left(\lambda_m^2 + \lambda_m - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \right) \right] D_{mn} r^{\lambda_m-2} \right\} (B^{(2)} \cos n\varphi + \\ &\quad + B^{(1)} \sin n\varphi), \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r\varphi}^{(2)} = & 2G \sum_{n,m} \left\{ \left[2 - 4\mu - \lambda_m - \frac{n^2(3-4\mu-\lambda_m)}{(\lambda_m+1)\sin^2\theta} + \frac{\mu}{1-2\mu} (-\lambda_m^2 - \lambda_m - \right. \right. \\ & \left. \left. - 4\mu\lambda_m - 12\mu + 8) \right] C_{mn} r^{\lambda_m} + \left[\lambda_m - \frac{n^2}{\sin^2\theta} + \frac{\mu}{1-2\mu} (\lambda_m^2 + \lambda_m - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{n^2}{\sin^2\theta}) \right] D_{mn} r^{\lambda_m-2} \right\} (B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi), \\ \sigma_{r\varphi}^{(2)} = & G \sum_{n,m} \left[\frac{-2\lambda_m^2 + 4\lambda_m - 8\mu\lambda_m - 4\mu + 2}{(\lambda_m+1)\sin\theta} C_{mn} r^{\lambda_m} + \right. \\ & \left. + \left(\lambda_m + \frac{\lambda_m-2}{\sin\theta} \right) D_{mn} r^{\lambda_m-2} \right] \times n \cdot (-B^{(2)} \sin n\varphi + B^{(1)} \cos n\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Для определения постоянных интегрирования C_{mn} и D_{mn} используем условия отсутствия напряжений на поверхности сферы

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{(2)} &= 0 \text{ при } r=R, \\ \sigma_{r\varphi}^{(1)} + \sigma_{r\varphi}^{(2)} &= 0 \text{ при } r=R. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -\frac{E}{1-\mu} \alpha_T \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k_{mn}^2} \frac{\partial^2 Y(k_{mn}r)}{\partial r^2} \right]_{r=R} + Y(k_{mn}R) \right\} + \\ + 2G \sum_{m=1}^2 \left[\frac{3\mu\lambda_m^2 - \lambda_m^2 + 4\mu^2\lambda_m - 7\mu\lambda_m + \lambda_m - 4\mu^2 + 2}{1-2\mu} C_{mn} R^{\lambda_m} + \right. \\ + \left. \left[\lambda_m^2 - \lambda_m + \frac{\mu}{1-2\mu} \left(\lambda_m^2 + \lambda_m - \frac{n^2}{\sin^2\theta} \right) \right] D_{mn} R^{\lambda_m-2} \right\} [B^{(2)} \cos n\varphi + \\ + B^{(1)} \sin n\varphi] = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -\frac{E}{1-\mu} \frac{\alpha_T n}{k_{mn}^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial Y(k_{mn}r)}{\partial r} \right]_{r=R} - \frac{1}{R^2 \sin\theta} Y(k_{mn}R) \right\} + \\ + Gn \sum_{m=1}^2 \left[\frac{-2\lambda_m^2 + 4\lambda_m - 8\mu\lambda_m - 4\mu + 2}{(\lambda_m+1)\sin\theta} C_{mn} R^{\lambda_m} + \right. \\ + \left. \left(\lambda_m + \frac{\lambda_m-2}{\sin\theta} \right) D_{mn} R^{\lambda_m-2} \right] \times [-B^{(2)} \sin n\varphi + B^{(1)} \cos n\varphi] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Сокращая на выражения

$$[B^{(2)} \cos n\varphi + B^{(1)} \sin n\varphi] \neq 0,$$

$$[-B^{(2)} \sin n\varphi + B^{(1)} \cos n\varphi] \neq 0,$$

получим систему (42)' вида

$$\begin{aligned} R_{11}(R) C_{mn} + R_{12}(R) D_{mn} &= R_1, \\ R_{21}(R) C_{mn} + R_{22}(R) D_{mn} &= R_2, \end{aligned} \quad (42)'$$

где R_{ik} — соответствующие выражения, стоящие при неизвестных; R_i — свободные члены.

Неизвестные коэффициенты найдем по правилу Крамера

$$C_{mn} = \frac{\Delta_C}{\Delta}, \quad D_{mn} = \frac{\Delta_D}{\Delta}, \quad (43)$$

где Δ — основной определитель системы; Δ с буквой внизу — определитель, полученный путем замены столбца, в котором стоит определяемое неизвестное, столбцом из свободных членов.

Подставляя найденные значения коэффициентов в $\sigma^{(2)}$, получим, что полное напряжение $\sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}$ на поверхности сферы обращается в 0, то есть на поверхности сферы граничные условия удовлетворены.

ЛИТЕРАТУРА

- В. З. В л а с о в. Избранные труды. Т. 1, АН СССР, 1963.
А. Д. К о в а л е н к о. Введение в термоупругость. Киев, АН УССР, 1965.
Э. М е л а н, Г. П а р к у с. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарным температурным полем. Физматгиз, М., 1958.
П. Ф. П а п к о в и ч. Теория упругости. Оборонгиз, 1939.
Г. П а р к у с. Неустановившиеся температурные напряжения. Физматгиз, М., 1963.
Г. Н. П о л о ж и й. Уравнения математической физики, Изд-во «Высшая школа», М., 1964.
В. Г. Р е к а ч. Руководство к решению задач по теории упругости. М., «Высшая школа», 1966.

Поступила 1. III. 1967.

СОДЕРЖАНИЕ

В. Д. Алферов. О комплексном представлении напора фильтрации в неоднородном пористом пласте	3
А. М. Гришин. Влияние кривизны нагревающей поверхности и теплоотдачи в окружающую среду на характеристики зажигания	8
С. Л. Губина, Л. В. Комаровский. Задача о движении поршня в трубе с вводом энергии.	15
Л. В. Комаровский. Точное решение задачи Лагранжа с частным законом ввода энергии.	27
Л. В. Комаровский. Об одном точном решении задачи о движении газа в трубе переменного сечения с вводом энергии	30
Л. В. Комаровский. Аналитическое решение задачи о движении поршня в трубе с противодавлением.	34
Г. И. Назаров. О двух классах точных общих решений уравнений типа Чаплыгина в газовой динамике.	40
Г. И. Назаров. О сходимости ряда Бергмана для функции тока при сверхзвуковом движении газа.	50
В. П. Харитонов. К теории винтовых течений двухкомпонентных сред.	56
В. А. Шваб, А. П. Атрашенко. Об одном приближенном методе расчета квазиодномерного истечения сжимаемой гетерогенной среды.	64
В. А. Штанько. Обтекание дуги окружности струей, вытекающей из канала.	74
Л. В. Комаровский, Т. Л. Базилевич. Численное решение задачи о движении поршня под действием давления одномерного неустановившегося течения газа с вводом тепла методом распада произвольного разрыва.	82
Л. В. Комаровский. О некоторых частных классах аналитических решений задачи Лагранжа для канала переменного сечения с вводом энергии.	91
Л. В. Комаровский. О решении предельной задачи Лагранжа.	96
В. П. Харитонов. Один случай вихревого течения двухфазной среды в круглой цилиндрической трубе.	103
Г. И. Кузнецов, Н. И. Лужанская. О применении обобщенного метода Ньютона в задачах теории оптимального управления	112
Г. А. Бюлер, П. С. Соломин. Температурные напряжения в двухслойном полом цилиндра в случае изменения температуры окружающей среды по закону $T_c = T_n l^{-\epsilon} \cdot \cos w \tau$.	120
В. С. Егоров. Термоупругие напряжения в полом цилиндра конечных размеров, помещенных в среду, температура которой изменяется по закону $T_1 f \tau$.	125
А. Н. Кудинов. Температурные напряжения в ортотропных конических оболочках	132
В. Г. Потейко. Осесимметричная задача упругости для толстостенного цилиндра, скрепленного с тонкой оболочкой.	140
П. С. Соломин. Температурные напряжения в длинном цилиндрическом секторе.	148
П. С. Соломин. Термоупругие напряжения в трансверсально-изотропном полом цилиндра конечных размеров	155
В. Г. Потейко. Осесимметричное напряженное состояние многослойных цилиндров	162
П. С. Соломин. Пространственная задача термоупругости в цилиндрическом секторе.	173

Г. А. Бюлер, П. С. Соломин . Квазистационарная задача термоупругости в двухслойном полойм шаре.	180
А. И. Уздалев, А. А. Юрьева. Концентрация температурных напряжений около теплоизолированного эллиптического отверстия	186
А. Д. Ханжов. Осесимметричная задача термоупругости для полубесконечного трансверсально-изотропного тела со смешанными температурными условиями	193
А. Н. Кудин ов. К определению температурных напряжений в подкрепленной конической оболочке с дискретно расположенными ребрами.	199
А. Н. Кудин ов. Экспериментальное исследование влияния внутреннего давления на устойчивость конических оболочек при осевом сжатии.	206
В. М. Деев, И. В. Жигал овский й. К расчету толстых круглых плит, защемленных по боковой поверхности.	212
В. Г. Потей ко. К расчету температурных напряжений в многослойных цилиндрах конечной длины.	222
Л. К. Ахаева, В. Е. Томилов. Задача термоупругости для сферы, помещенной в заданную среду.	227

ПРОБЛЕМЫ ГИДРОМЕХАНИКИ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Томск. Изд. ТГУ, 1973 г. 238 с.

Старший редактор **В. С. Сумарокова**
Редактор **А. Е. Гирсова**
Технический редактор **Р. М. Подгорбунская**
Корректор **Л. П. Цыганкова**

КЗ01705. Сдано в набор 30/IV 1972 г. Подписано к печати 26/III 1973 г. Формат 70×
×108¹/₁₆; объем печ. л. 15, бум. л. 7,5; уч.-изд. л. 20,3; усл. п. л. 21.
Заказ 5707. Тираж 500 экз. Цена 2 руб. 18 коп.

Издательство ТГУ, Томск, 10, пр. Ленина, 36.

Типография изд.-ва «Омская правда», г. Омск, проспект Маркса, 39.

1-169390

Цена 2 р. 18 коп.

Томский государственный университет



Научная библиотека 00269314