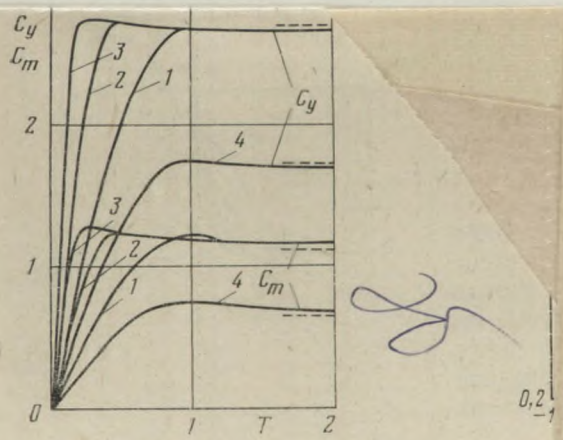
ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА



Фиг. 3

разом вследствие увеличения относительного
на задней кромке щитка в величину аэроди
C_y и C_m. Уменьшение величины α_0 (максимал
ка) ведет к уменьшению протяженности зо

1887
38

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ПРИ ТОМСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

Под редакцией доктора физико-математических наук
Л. В. Комаровского
и кандидата физико-математических наук
А. М. Бубенчикова

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Томск — 1987

533

Газовая динамика /Под редакцией Л. В. Комаровского и А. М. Бубенчикова. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987. — 196 с. — 1 р. 80 к. 500 экз. 1703040000.

В сборник включены оригинальные работы по численным и аналитическим методам решения задач газо- и гидродинамики, по исследованию течений в струях, каналах, слое смешения, пограничном слое, по эффективным методам численного расчета в импульсных установках, по изучению фильтрации вязкопластической жидкости в пористой среде и анализу нестационарных химически реагирующих и МГФ-течений в каналах.

Для научных работников, инженеров-исследователей, аспирантов и студентов, специализирующихся по газовой динамике и механике жидкостей.

Рецензент — кандидат физико-математических наук
В. А. Штанько

1703040000
Г ———————— 63—86
177(012)—87

© Издательство Томского университета, 1987

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ДВИЖЕНИЯ СТРУИ ИМПУЛЬСНОГО ВОДОМЕТА

Г. А. Атанов, Б. И. Бешевли

Показано, что связь давления на преграде, развиваемого импульсной струей, с давлением в стволе водомета может быть осуществлена с помощью двух характеристик: добротности установки и коэффициента напора.

По мнению многих отечественных и зарубежных исследователей, одним из наиболее перспективных методов разрушения горных пород является импульсный гидродинамический водомет, предполагающий использование импульсных струй жидкости сверхвысоких скоростей — ультраструй [1, 2]. Это метод обладает рядом преимуществ по сравнению с традиционными. Гидродинамическая машина имеет небольшие габариты и массу, развивает чрезвычайно большие мощности, обладает высокой производительностью и низкой энергоемкостью разрушения, улучшает условия труда и его безопасность и др.

Гидродинамические задачи, возникающие в связи с применением ультраструй, можно разделить на группы: задачи внутренней баллистики — исследование методов получения ультраструй и процессов, протекающих в установках; задачи внешней баллистики — исследование движения струи в воздухе со сверхзвуковыми скоростями; задачи об ударе струи и взаимодействии ее с преградой и разрушении. Импульсный характер движения требует учета сжимаемости воды. Перечисленные задачи являются газодинамическими.

Наиболее исследованными являются задачи первой группы. Существует большое количество работ, посвященных импульсному водомету, гидропушке, гидроимпульсной кумуляции и др. Проведен анализ методов получения ультраструй, установлены особенности процессов в различных установках. Меньше изучена внешняя баллистика ультраструй, хуже всего — процесс разрушения горных пород. И

до сих пор нет ни одной работы, которая связывала бы процессы внутренней и внешней баллистики и разрушения горных пород. В то же время понятно, что только комплексный подход позволит создавать установки, обеспечивающие эффективное разрушение горных пород с определенными свойствами.

Обычно при исследовании разрушения пород оперируют давлением в стволе гидроимпульсной установки, предполагая, что такое же давление развивается на прегра де. В то же время понятно, что оно зависит от закономерностей и условий движения струи в воздухе, т. е. внешней баллистики. При этом для пород с различными физико-химическими свойствами, эффективными с точки зрения разрушения, могут оказаться разные режимы нагружения.

Кроме того, необходимо учесть, что в установках различного принципа действия при одном и том же давлении воды в стволе скорость истечения может сильно различаться. Количественной мерой этого различия является добротность D установки, определяемая отношением максимального давления торможения на срезе сопла к максимальному давлению внутри установки [1] (например, для импульсного водомета $D \leqslant 1$, а для гидропушки $D > 1$). Однако, являясь важным критерием совершенства установки, D не может в полной мере характеризовать связь давления в установке с давлением струи на преграду, так как не учитывается внешняя баллистика.

В связи с этим представляется целесообразным введение еще одного параметра — коэффициента напора $K_н$, определяемого как отношение давлений торможения, соответствующих скорости головы струи и максимальной скорости истечения из сопла,

$$K_н = \frac{p_z}{p_{max \cdot c}} = \left(\frac{v_z}{v_{max \cdot c}} \right)^2,$$

где p_z, v_z — давление торможения и скорость головы струи; $p_{max \cdot c}$, $v_{max \cdot c}$ — максимальное давление торможения и скорость на срезе сопла. При этом предполагается расчетный режим истечения. Следует заметить, что $K_н$ является функцией расстояния L от сопла и существует такое расстояние, на котором $K_н$ имеет максимум.

В этой работе приведены результаты исследования коэффициента напора струи импульсного водомета. Эксперимен-

ты проводились на лабораторном импульсном водомете, процесс которого весьма близок к квазистационарному, поэтому для него можно принять $D=1$, а скорость истечения рассчитывать по уравнению Бернулли [3]. Таким образом, при определении $K_н$ скорость истечения рассчитывается, а скорость головы струи определяется экспериментально.

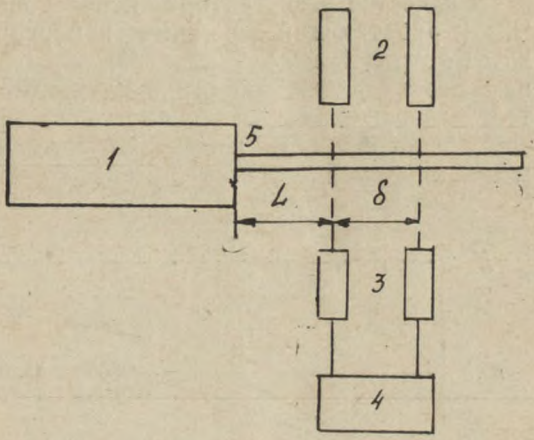


Рис. 1. Схема измерения скорости головы струи: *1*—импульсный водомет; *2*—осветители; *3*—фотоприемники; *4*—регистратор; *5* — струя

По принципу действия методы измерения скорости головы струи разделяются на контактные и бесконтактные. Контактные методы основаны на прерывании струей воды электрических цепей датчиков и имеют низкую точность, одной из причин которой является то, что при сверхзвуковых скоростях электрическая цепь разрывается не самой струей, а ударной волной, распространяющейся на некотором, в общем случае переменном, расстоянии вперед. Кроме того, при разрывании электрической цепи может происходить изменение формы и размеров струи. Поэтому в настоящее время наибольшее распространение получил бесконтактный фотоэлектрический метод.

Схема измерения скорости головы струи приведена на рис. 1. Луч света от осветителей *2* попадает на вход фотоприемника *3*, который представляет собой формирующее устройство на базе фотодиода типа ФД-26. При освещении фотодиода на выходе формирующей схемы уровень напряжения соответствует логическому 0, а при затемнении — логической *1*. Струя *5*, импульсного водомета *1* при своем

движении последовательно перекрывает первый и второй лучи, освещающие фотоприемники, на выходах которых появляются управляющие сигналы. Сигнал с первого фотоприемника включает отсчет времени на регистраторе *4*, а со второго — останавливает. При достаточно малом расстоянии между датчиками δ средняя скорость на этом участке близка к мгновенной.

В качестве регистратора использовался частотомер типа Ч3-34, работающий в режиме измерения интервалов времени. Быстродействие схемы измерения определяется временем перехода фотодиода из открытого состояния в закрытое. Относительная погрешность измерения скорости зависит от погрешности измерения базового расстояния и времени, и в процессе эксперимента составляла 1—2% при δ = 20 мм.

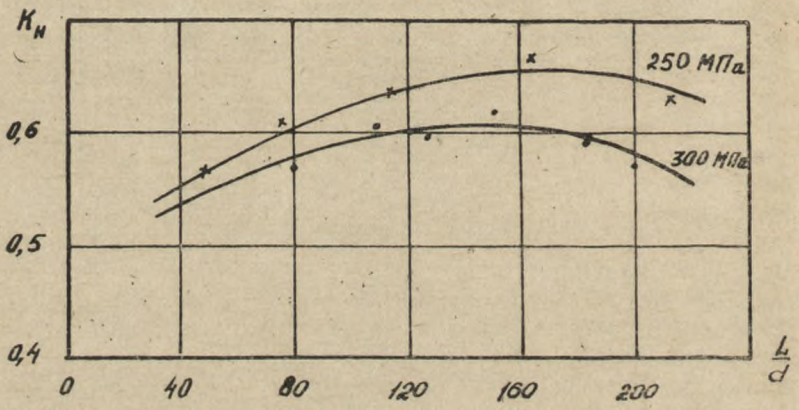


Рис. 2. Зависимость коэффициента напора $K_н$ от расстояния: L— расстояние от среза сопла; d — диаметр сопла

В результате экспериментов установлено, что характер зависимости скорости головы струи от расстояния существенно зависит от параметров внутренней баллистики водомета, в частности, максимального давления в стволе. Вначале скорость медленно возрастает, достигает максимума и монотонно убывает. С увеличением давления в стволе максимум скорости головы струи увеличивается. Этот максимум находится в диапазоне 100÷200 калибров (расстояние L, отнесенное к диаметру среза сопла d) и с увеличением давления удаляется от среза сопла.

На рис. 2 показана зависимость коэффициента напора $K_н$ от расстояния при различных максимальных давлениях в стволе. Ее характер подобен зависимости скорости головы струи от расстояния, однако с увеличением p_{max} максимальный коэффициент напора уменьшается. На рис. 3 показаны

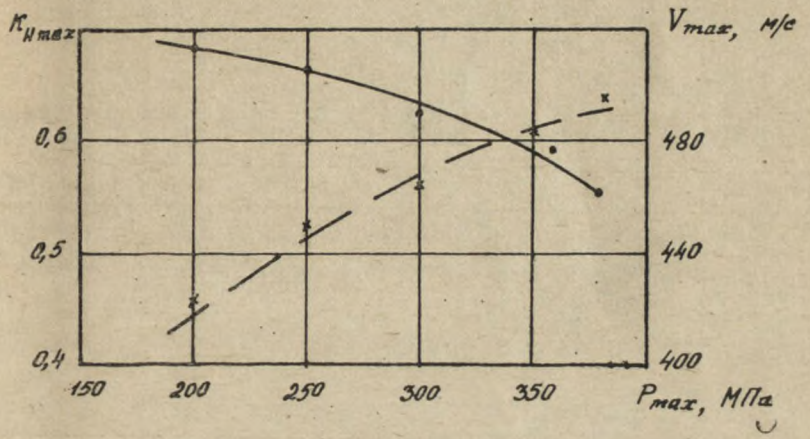


Рис. 3. Зависимость максимальных коэффициентов напора $K_{н\,max}$ и скорости головы струи V_{max} от максимального давления в стволе (сплошная линия — $K_{н\,max}$)

зависимости максимальной скорости струи (штриховая линия) и максимального коэффициента напора (сплошная линия) от максимального давления в стволе водомета. Видно, что уменьшение $K_н$ происходит при увеличении скорости головы струи. Это может быть объяснено следующим образом. Зависимость скорости истечения от времени имеет колоколообразный вид [3], поэтому в начальной стадии процесса частицы струи движутся медленно. С увеличением скорости истечения в струю поступают частицы с большей скоростью и в процессе движения им приходится пробивать предыдущие участки, имеющие меньшую скорость. Это приводит к потерям энергии и уменьшению скорости. Таким образом, $K_н$ всегда меньше единицы. Так как с увеличением скорости потери возрастают, то $K_н$ является убывающей функцией максимальной скорости истечения, а следовательно, и максимального давления в стволе. Кроме того, к это-

му же приводит и увеличение скорости нарастания давления в стволе.

Таким образом, значение максимального коэффициента напора $K_н$ для импульсного водомета существенно отличается от единицы, и для связи давления, развиваемого струей на преграде, с давлением в стволе необходимо знать фактическое значение $K_н$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Atanov G. A., Petrakov A. I. Impulsive hydrodynamic method of rock breaking. Proc. 6th Int. Conf. on Erosion by Liquid and Solid Impact.

2. Cooley W. C., Lucke W. N. Development and testing of a water cannon for tunneling. Proc. Second International Symposium on Jet Cutting Technology. Cambridge, 1977, Apr. 2—4.

3. Атанов Г. А. Расчет параметров выстрела импульсного водомета. — В кн.: Гидромеханика. Киев, 1972, вып. 12, с. 3—9.

К РАСЧЕТУ ВРЕМЕНИ УСТАНОВЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙ

Г. П. Анисимов

Турбулентные струи широко применяются в различных технологических процессах и технических устройствах, расчет и проектирование которых проводятся на основе теории стационарных струй [1, 2]. Однако при запуске установок и изменении режима их работы возникает необходимость в расчете нестационарных турбулентных струй. Такой расчет сводится к решению нестационарной системы уравнений Рейнольдса и наряду с разрешением трудностей, связанных с замыканием системы, требует значительных ресурсов ЭВМ. Задача может упроститься, если требуется определить параметры установившейся струи. Тогда можно применять результаты теории стационарных струй, но необходимо указывать область их применения — либо сечение струи, в котором параметры установились к заданному моменту времени, либо время установления в заданном сечении.

Известны теоретические [3] и экспериментальные [4] работы, посвященные определению времени установления затопленной осесимметричной турбулентной струи. Подобные исследования для спутных струй не проводились. С целью восполнить этот пробел в данной работе на основе метода расчета нестационарных турбулентных струй [5] проводится исследование времени установления спутных струй.

В работе [5] в результате ряда преобразований, основанных на приближении пограничного слоя, допущении автомодельности профиля продольной скорости и использовании для замыкания гипотезы Прандтля, исходная нестационарная система уравнений Рейнольдса для осредненных локальных параметров преобразуется в систему (1) относительно интегральных характеристик струи:

$$A_1 \frac{\partial \delta}{\partial t} + A_2 \frac{\partial \delta}{\partial x} + A_3 \frac{\partial f}{\partial t} + A_4 \frac{\partial f}{\partial x} + A_5 = 0;$$

$$B_1\frac{\partial\delta}{\partial t}+B_2\frac{\partial\delta}{\partial x}+B_3\frac{\partial f}{\partial t}+B_4\frac{\partial f}{\partial x}+B_5=0. \tag{1}$$

Здесь δ — радиус струи; $f=y_0$ — радиус потенциального ядра (на начальном участке); $f=u_m$ — скорость на оси струи (на основном участке). Выражения для коэффициентов A_i, $B_i(\delta, f)$ приведены в [5].

Система уравнений (1) является системой квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка гиперболического типа. Таким образом, в результате преобразований размерность исходной системы понизилась на единицу.

С целью определения времени установления можно решать систему (1) при заданном изменении граничных условий на срезе трубы и следить за временем, в течение которого в данном сечении наступит установление. В этом случае пришлось бы решать нестационарную систему уравнений. Но можно поступить проще. Воспользуемся тем обстоятельством, что система уравнений (1) гиперболическая, и, следовательно, область возмущения находится между характеристиками двух семейств. Тогда линия, проведенная на плоскости x, t, отражающая зависимость времени установления от продольной координаты $t_{уст}(x)$, будет являться не чем иным, как характеристикой одного из семейств. Таким образом, задача определения времени установления сводится к отысканию характеристики одного из семейств, выходящей из точки $x=0$, $t=0$ [6].

Обозначим характеристики системы (1) через $\xi_\pm$:

$$\xi_\pm=\frac{dx}{dt}, \tag{2}$$

где

$$\xi_\pm=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha}. \tag{3}$$

Коэффициенты в (3) равны

$$\begin{aligned}\alpha&=A_1B_3-A_3B_1;\\ 2\beta&=(A_1B_4-A_4B_1)+(A_2B_3-A_3B_2);\\ \gamma&=A_2B_4-A_4B_2.\end{aligned} \tag{4}$$

Поскольку нас интересует область установления, то коэффициенты A_i, $B_i(\delta, f)$ определяются как функции от пара-

метров стационарной струи. Таким образом, система уравнений (2), (4) позволяет определить зависимость времени установления $t_{уст}(x)$ без расчета нестационарной струи.

Рассчитанные указанным способом зависимости $t_{уст}(x)$ (за масштаб расстояния принят диаметр трубы — d, времени — отношение диаметра к скорости истечения — u_0) для различных параметров спутности $m = u_б/u_0$ ($u_б$ — скорость спутного потока) приведены на рис. 1.

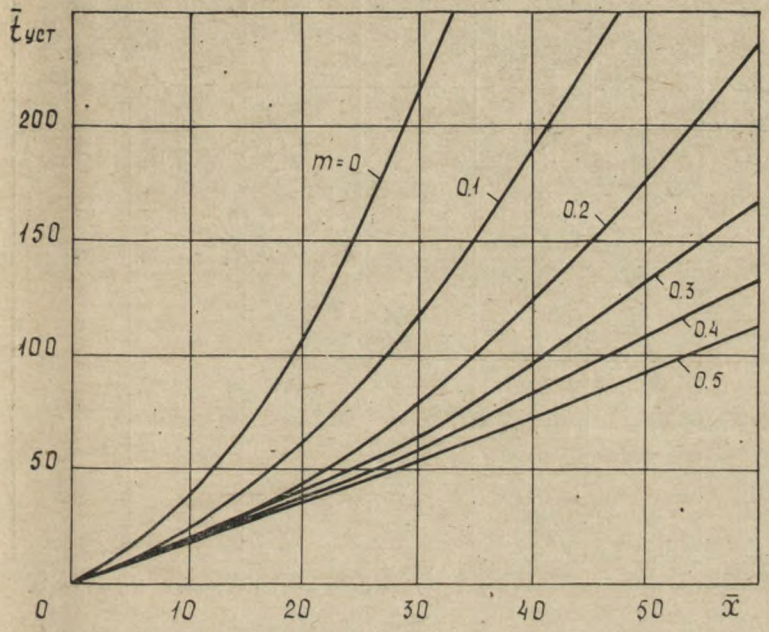


Рис. 1. Время установления спутных струй

Представляет интерес провести сравнение результатов, полученных для затопленной струи ($m = 0$), с расчетными [3] и экспериментальными [4] данными. Эти результаты приведены на рис. 2. Видно, что расчетная кривая [3], полученная с помощью $K - \varepsilon$ модели (с набором констант для стационарной струи) для чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10^4 \div 10^5$, проходит ниже экспериментальных данных, полученных для чисел Re, лежащих в этом диапазоне, в то время как ξ_--характеристика проходит несколько выше. Этому

может быть два объяснения. Либо константы, используемые в методе расчета стационарных струй [2], получены для низких чисел Рейнольдса, либо расчетные и экспериментальные данные получены для различных критериев установления. Но универсальные константы в интегральном методе Гиневского [2] подобраны в области чисел $Re = 20000 \div 120000$. Значит, первое предположение неверно.

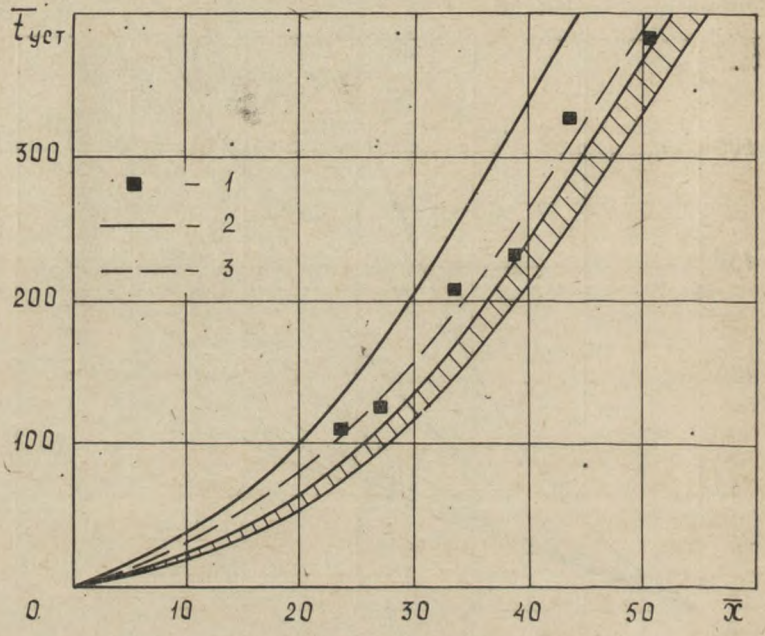


Рис. 2. Время установления затопленной струи: заштрихованная область — расчет [3]; *1* — эксперимент [4]; *2* — характеристика ξ_{-}; *3* — расчет методом установления

Для проверки правильности второго предположения были дополнительно проведены расчеты нестационарной турбулентной струи с критерием установления 0,1% u_m (таким же, как и в работе [3]). Полученная кривая лежит в области экспериментальных данных (см. рис. 2). Следовательно, второе предположение верно, и так как ξ_{-}-характеристика ограничивает область «абсолютного» установления, для достижения которого требуется больше времени, то она должна проходить выше области экспериментальных данных.

Удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных данных позволяет рекомендовать приведенный выше метод для расчета времени установления затопленных и спутных струй.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. — М.: Физматгиз, 1960. — 715 с.

2. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. — М.: Машиностроение, 1969. — 400 с.

3. Куо Т. В., Бракко Ф. В. О законах подобия для нестационарных осесимметричных турбулентных струй, формирующихся при внезапном истечении несжимаемой жидкости из сопла. — Теоретические основы инженерных расчетов, 1982, т. 104, № 2, с. 154—162.

4. Witze P. O. The impulsively started Incompressible Turbulent Jet. SAND 80—8617, 1980.

5. Анисимов Г. П., Мухаметов М. Х. Приближенный метод расчета нестационарных осесимметричных турбулентных струй. — В кн.: Аэрогазодинамика быстропротекающих процессов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982, с. 40—44.

6. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО ГИПЕРЗВУКОВОГО ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ

И. В. Бондарь, С. В. Пейгин

Исследуется нестационарное течение сжимаемого газа в гиперзвуковом пространственном вязком ударном слое на проницаемой поверхности в окрестности критической точки двоякой кривизны. Подробно рассмотрен практически важный случай течения, когда массовый расход при его вдуве через поверхность является некоторой, в том числе разрывной, функцией времени. Решение проводится на основе конечно-разностной схемы повышенной точности аппроксимации, предложенной ранее в [1] для расчета двумерных течений в пограничном слое.

Ранее нестационарное течение около затупленных тел с проницаемой поверхностью в рамках модели ламинарного пограничного слоя проводилось в [2—4]; решение стационарных уравнений гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя в широком диапазоне изменения определяющих параметров задачи получено в [5—7].

1. Постановка задачи

Пространственное обтекание затупленных тел с проницаемой поверхностью будем рассматривать в невырожденной криволинейной, в общем случае неортогональной, системе координат $\{x^i\}$ нормально связанной с поверхностью тела: ось x^3 направлена по нормали к телу, x^1, x^2 — выбраны на его поверхности.

Асимптотический анализ нестационарных уравнений Навье—Стокса, записанных в системе координат $\{x^i\}$, для случая гиперзвукового обтекания затупленных тел с проницаемой поверхностью показывает, что при выполнении условий

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_\infty V_\infty L}{\mu(T_0)} \gg 1, \quad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \ll 1, \quad \lambda = \frac{\overset{*}{\rho}_w \overset{*}{v}{}^2_w}{\rho_\infty V_\infty^2} \ll 1, \qquad (1)$$

$$M_\infty \gg 1,\ K = \varepsilon \mathrm{Re} = 0\,(1),$$

уравнения пространственного гиперзвукового нестационарного вязкого ударного слоя асимптотически верно описывают течение в слое около тела и имеют следующий вид:

$$\sqrt{a}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\rho u\,[i]\sqrt{\frac{a}{a_{(ii)}}}\right\} = 0; \tag{2}$$

$$\rho\left(Du\,[\gamma] + A^{\gamma}_{\alpha\beta}u\,[\alpha]\,u\,[\beta]\right) = -\varepsilon a^{\gamma\alpha}\sqrt{a_{(\gamma\gamma)}}\frac{\partial P}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{\mu}{K}\frac{\partial u\,[\gamma]}{\partial x^3}\right); \tag{3}$$

$$\rho A^3_{\alpha\beta}u\,[\alpha]\,u\,[\beta] = -\frac{\partial P}{\partial x^3}; \tag{4}$$

$$\rho DT = 2\varepsilon D^\circ P \cdot \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{\mu}{\sigma K}\frac{\partial T}{\partial x^3}\right) + \frac{2\mu}{K}B_{\alpha\beta}\frac{\partial u\,[\alpha]}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial u\,[\beta]}{\partial x^3}; \tag{5}$$

$$B_{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha\beta}}{\sqrt{a_{(\alpha\alpha)}\,a_{(\beta\beta)}}};$$

$$\rho DH = 2\varepsilon\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^3}\left[\frac{\mu}{\sigma K}\left(\frac{\partial H}{\partial x_3} + (\sigma - 1)\frac{\partial V^2}{\partial x^3}\right)\right]; \tag{6}$$

$$P = \rho T,\ D \equiv D^\circ + u\,[3]\frac{\partial}{\partial x^3},\ D^0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u\,[\alpha]}{\sqrt{a_{(\alpha\alpha)}}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \tag{7}$$

$$V^2 = u\,[\alpha]\,u\,[\beta]\,B_{\alpha\beta},\ H = T + V^2,\ \mu = T^\omega.$$

Здесь tL/V_∞ — время; $V_\infty u\,[1]$, $V_\infty u\,[2]$, $V_\infty \varepsilon u\,[3]$ — физические составляющие вектора скорости в направлениях x^1, x^2, x^3 соответственно; $L^2 ds^2 = a_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + (\varepsilon dx^3)^2$ — элемент длины; $\rho_\infty \varepsilon^{-1}\rho$, $\rho_\infty V^2_\infty \rho$, $\frac{V_\infty}{2c_p}T$, $\frac{1}{2}V^2_\infty H$, $\mu_0\mu$ — плотность, давление, температура, полная энтальпия и коэффициент вязкости газа соответственно; L — характерный линейный размер; $\sigma = \mathrm{const}$ — число Прандтля. Все остальные обозначения общепринятые, совпадают с обозначениями работы [5] и здесь не приводятся. Там же можно найти выражения для коэффициентов $A^i_{\alpha\beta}$.

Отметим, что члены с продольным градиентом давления оставлены в (2)—(7) в связи с тем, что при больших числах Рейнольдса они, как показывает анализ уравнений

Навье—Стокса, играют основную роль в области около поверхности тела. При малых числах Рейнольдса они могут быть опущены.

Граничные условия на ударной волне, записанные в системе координат $\{x^i\}$, имеют вид

$$u[\alpha] - u[\alpha]_\infty = \frac{\mu}{Kv}\frac{\partial u[\alpha]}{\partial x^3};$$

$$\rho(u[3] - D^\circ x_s^3) = v,\ p = v^2; \tag{8}$$

$$H - H_\infty - V^2 = \frac{\mu}{K\sigma v}\frac{\partial T}{\partial x^3} + \frac{2\mu}{Kv}\left[u[\alpha]\frac{\partial u[\alpha]}{\partial x^3} + \right.$$

$$\left. + B_{12}\frac{\partial}{\partial x_3}(u[1]u[2])\right];$$

$$v \equiv u[3]_\infty.$$

При $K \to \infty$ условия (8) переходят в обычные нестационарные соотношения Ренкина—Гюгонио, записанные в гиперзвуковом приближении.

На поверхности тела граничные условия следующие:

$$x^3 = 0:\ u[\alpha] = 0,\ \rho u[3] = G(x^1, x^2, t),$$
$$T = T_w(x^1, x^2, t). \tag{9}$$

2. Преобразование уравнений к переменным Дородницына

Преобразуем исходную систему уравнений и граничные условия к виду, удобному для численного интегрирования. Для этого перейдем в (2)—(7) к новым зависимым и независимым переменным по формулам:

$$\zeta = \frac{1}{\Delta}\int_0^{x^3}\rho\sqrt{a}dx^3,\ \xi^\alpha = x^\alpha,\ \Delta = \int_0^{x_s^3}\rho\sqrt{a}dx^3\ \tau = t; \tag{10}$$

$$u[\alpha] = u_\alpha^*(\xi^1, \xi^2)\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\zeta},\ T = T^*(\xi^1, \xi^2)\theta; \tag{11}$$

$$\rho\sqrt{a}u[3] = -\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}[\Delta\varphi_{(\alpha)}^*\varphi_\alpha] - \Delta\varphi_{(\alpha)}^*\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\xi}\frac{\partial\zeta}{\partial x^\alpha} -$$

$$-\zeta\frac{\partial\Delta}{\partial\tau} - \Delta\frac{\partial\zeta}{\partial t},\ \varphi_\alpha^* = \frac{u_\alpha^*}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}}. \tag{12}$$

Функции $u^*_\alpha(\xi^1, \xi^2)$, $T^*(\xi^1, \xi^2)$ будут определены ниже. В новых переменных уравнение неразрывности удовлетворится тождественно, а оператор D примет вид

$$D \equiv \overset{*}{\varphi}_{(\alpha)} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} - \left(\overset{*}{\varphi}_{(\alpha)} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi^\alpha} + B_\alpha \varphi_\alpha + \zeta \frac{\partial \ln \Delta}{\partial \tau} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad B_\alpha = \frac{\partial \overset{*}{\varphi}_{(\alpha)}}{\partial \xi^\alpha} + \overset{*}{\varphi}_{(\alpha)} \frac{\partial \ln \Delta}{\partial \xi^\alpha}. \tag{13}$$

Окончательно система (2)—(7) в переменных (10)—(12) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(l \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial \zeta^2} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \zeta} \right) - \left(B_\alpha \varphi_\alpha + \zeta \frac{\partial \ln \Delta}{\partial \tau} + \overset{*}{\varphi}_{(\alpha)} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi^\alpha} \right) \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial \zeta^2} +$$

$$+ \frac{P_{\gamma\alpha}}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi^\alpha} + C^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \zeta} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \zeta} + \overset{*}{\varphi}_{(\alpha)} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial \xi^\alpha \partial \zeta}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = P^3_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \zeta} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \zeta}; \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{l}{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \left(B_\alpha \varphi_\alpha + \overset{*}{\varphi}_{(\alpha)} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi_\alpha} + \zeta \frac{\partial \ln \Delta}{\partial \tau} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} -$$

$$- \frac{2\varepsilon}{\rho T^*} \left(\overset{*}{\varphi}_{(\alpha)} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \zeta} \frac{\partial P}{\partial \xi^\alpha} + \frac{\partial P}{\partial \tau} \right) - \frac{2l a_{\alpha\beta}}{T^*} \overset{*}{\varphi}_{(\alpha)} \overset{*}{\varphi}_{(\beta)} \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial \zeta^2}; \tag{16}$$

$$P = \rho T^* \theta, \quad P_{\beta\alpha} = \frac{\varepsilon a^{\sigma\beta} \sqrt{a_{(\beta\beta)}}}{\overset{*}{u}_\beta}, \quad P^3_{\alpha\beta} = - \frac{\Delta \overset{*}{u}_{(\alpha)} \overset{*}{u}_{(\beta)}}{\sqrt{a}} A^3_{\alpha\beta}. \tag{17}$$

$$C^{(\beta)}_{\alpha\beta} = \overset{*}{\varphi}_{(\alpha)} \frac{\partial \ln \overset{*}{u}_\beta}{\partial \xi^\alpha} + A^{(\beta)}_{\alpha\beta} \overset{*}{u}_{(\alpha)}, \quad l = \frac{\mu \rho a}{\Delta^2 K},$$

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = A^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\overset{*}{u}_\alpha \overset{*}{u}_\beta}{\overset{*}{u}_\gamma}, \quad \gamma \neq \alpha, \quad \gamma \neq \beta.$$

Члены, пропорциональные $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$, в уравнениях (14), (16) опущены в связи с тем, что в пристеночной области течения они малы по сравнению с оставленными членами $\frac{\partial P}{\partial \xi^\alpha}$ и $\frac{\partial P}{\partial \tau}$.

ГОСУДАРСТВЕННАЯ БИБЛИОТЕКА ДЛЯ КНИГ

Граничные условия в новых переменных: на ударной волне при $\zeta = 1$

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \zeta} + \frac{l}{\Phi}\frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial \zeta^2} = \frac{u\,[\alpha]_\infty}{u^*_{(\alpha)}}; \tag{18}$$

$$P = v^2;$$

$$B_\alpha \varphi_\alpha + \overset{*}{\varphi}_{(\alpha)} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi^\alpha} + \frac{\partial \ln \Delta}{\partial \tau} = \Phi; \tag{19}$$

$$\theta + \frac{v^2}{T^*} + \frac{l}{\Phi}\left[\sigma^{-1}\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \frac{2u^*_{(\alpha)}}{T^*}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial \zeta^2} + \frac{2a_{12}\varphi^*_1\varphi^*_2}{T^*}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta}\right)\right] =$$

$$= \theta_\infty + \frac{1}{T^*}; \tag{20}$$

на поверхности тела при $\zeta = 0$

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \zeta} = 0,\quad B_\alpha \varphi_\alpha + \overset{*}{\varphi}_{(\alpha)} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi^\alpha} = -\frac{\sqrt{a}}{\Delta} G(\xi^1, \xi^2, \tau), \tag{21}$$

$$\theta = \theta_w(\xi^1, \xi^2, \tau).$$

Рассмотрим теперь вопрос о выборе функций $u^*_\alpha(\xi^1, \xi^2)$ и $T^*(\xi^1, \xi^2)$. В общем случае их необходимо выбирать из условия разрешения всех особенностей, возникающих в коэффициентах уравнений (14)—(17) на критической линии течения. В связи с этим остановимся на анализе решения в окрестности критической точки двоякой кривизны более подробно.

Не снимая общности, будем полагать, что обтекаемое тело с поверхностью S задано в декартовой системе координат $\{y_i\}$ в виде $y^3 = f(y^1, y^2)$, причем начало координат 0 находится в критической точке на поверхности тела, координатная ось y^3 направлена по нормали к телу, а плоскости $y^1 0 y^3$ и $y^2 0 y^3$ совпадают с сечениями главных кривизн тела в критической точке. Выбирая систему координат $\{x^i\}$ аналогично работе[5], получим следующие выражения для компонент $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ первой и второй метрических форм поверхности и физических составляющих вектора скорости набегающего потока:

$$a_{(\alpha\alpha)} = 1 + q^2_\alpha,\quad a_{12} = q_1 q_2,\quad b_{\alpha\beta} = -r_{\alpha\beta}/\sqrt{a},$$

$$a = 1 + q_1^2 + q_2^2,\quad q_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha},\quad r_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}.$$

$$u[\alpha]_\infty = \sqrt{a_{(\alpha\alpha)}}\, q_\alpha/a,\ u[3]_\infty \equiv v = -1/\sqrt{a}.$$

Анализ системы уравнений (14)—(17) в выбранной системе координат показывает, что, полагая $u^*_{(\alpha)} = u[\alpha]_\infty$, $T^* = u^2[3]_\infty$, особенности в коэффициентах разрешаются, а сама система уравнений принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(l\frac{\partial^2\varphi_\gamma}{\partial\zeta^2}\right) + \left(\varphi_1 + \kappa\varphi_2 + \zeta\frac{\partial \ln\Delta}{\partial\tau}\right) = d_{(\gamma)}\left(\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial\zeta}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{\rho}P_\gamma + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial\zeta}\right); \tag{22}$$

$$\frac{\partial P}{\partial\zeta} = 0,\ \frac{\partial P_\alpha}{\partial\zeta} = 2d^2_{(\alpha)}\Delta\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\zeta}\right)^2,\ P_\alpha \equiv \frac{1}{d_{(\alpha)}\xi^\alpha}\frac{\partial P}{\partial\xi^\alpha}; \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{l}{\sigma}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\right) + \left(\varphi_1 + \kappa\varphi_2 + \zeta\frac{\partial \ln\Delta}{\partial\tau}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\zeta} = \frac{\partial\theta}{\partial\tau}, \tag{24}$$

$$P = \rho\theta,\quad d_1 = 1,\quad d_2 = k.$$

Граничные условия

$\zeta = 1$:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\tau} + \Delta(\varphi_1 + \kappa\varphi_2) = 1,\ \rho = 1,\ P_\alpha = -2d_\alpha,$$

$$\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\zeta} + l\Delta\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial\zeta^2} = 1,\ \theta + \frac{l\Delta}{\sigma}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta} = 1, \tag{25}$$

$\zeta = 0$:

$$\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\zeta} = 0,\ \theta = \theta_w,\ \varphi_1 + \kappa\varphi_2 = -\frac{G}{\Delta}. \tag{26}$$

Здесь $k = R_1/R_2$, где R_1, R_2 — радиусы главных кривизн поверхности в критической точке.

3. Некоторые результаты численного решения уравнений нестационарного вязкого ударного слоя в окрестности критической точки двоякой кривизны

Система уравнений (22)—(24) с граничными условиями (25)—(26) решалась численно. Использовалась неявная разностная схема с точностью аппроксимации $O(\Delta\zeta^4) + O(\Delta\tau)$. Для повышения точности расчетов при больших числах Рейнольдса производилось сгущение расчетной сетки у поверхности тела.

В процессе расчетов вычислялись профили скоростей и температуры поперек слоя, величины отхода, а также коэффициента трения и теплообмена на поверхности тела.

$$\tau_a = l\Delta\sqrt{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2\varphi_a}{\partial\zeta^2}\bigg|_{\zeta=0}, \quad q = \frac{l\Delta}{2\sigma}\sqrt{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta=0}.$$

Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 1—4. На рис. 1 приведены характерные профили скорости поперек ударного слоя при следующих значениях определяющих параметров задачи: $\mathrm{Re} = 50,\ 5000$ (линии *1—2* соответственно) $\theta_w = 0{,}1$, $k = 0{,}4$, $\varepsilon = 0{,}1$. Здесь же (линия *3*) при-

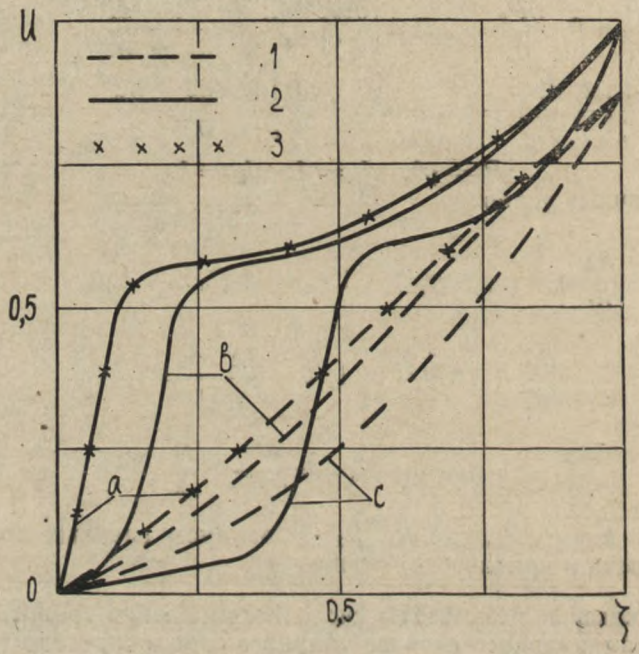


Рис. 1

ведено решение [5] для стационарного случая. Линии *a*, *b*, *c* на этом рисунке соответствуют $\tau = 0;\ 0{,}88;\ 2{,}45$. Видно, что при одном и том же значении расхода газа через поверхность влияние вдува на течение увеличивается с ростом числа Рейнольдса набегающего потока.

На рис. 2 приведены величины относительного отхода ударной волны, отнесенные к своим значениям для стационарного решения, $y_s^0 = y_s(t)/y_s(0)$ в зависимости от времени для различных значений параметра k ($k = 1{,}0$; 0,8; 0,4; 0,1; 0,01 — линии *1—5* соответственно) при $\varepsilon = 0{,}1$; $\theta_w = 0{,}5$; $\mathrm{Re} = 50$; $G(\tau) = \sin^2\tau$.

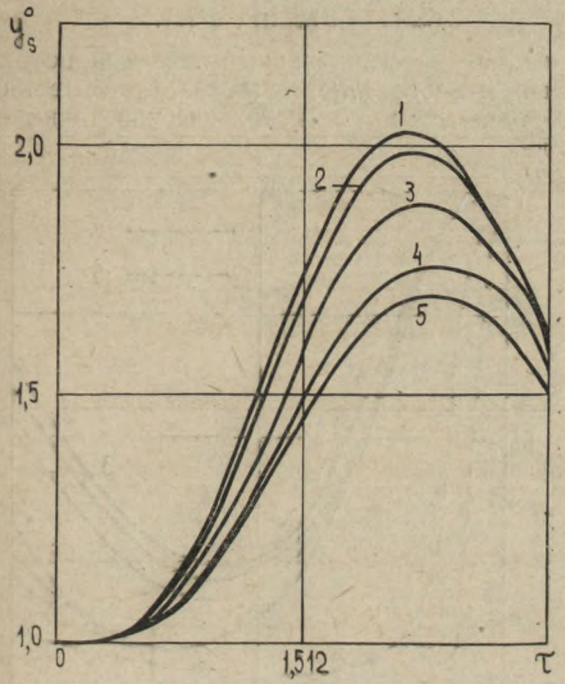


Рис. 2

Аналогичные зависимости для относительных величин $\tau_1^0 = \tau_1(t)/\tau_1(0)$ (линии *1—4*) и $q^0 = q(t)/q(0)$ (линии *5—8*) приведены на рис. 3. Здесь $\theta_w = 0{,}5$, $G = \sin^2(\tau)$; линии *a* и *b* — $\mathrm{Re} = 50$ и 5000 соответственно; линии *1* и *7* — $k = 0{,}1$; линия *2*—$k = 0{,}4$; линия *6*—$k = 0{,}8$; линия *3, 5*—$k = 1{,}0$. Отметим, что, как показали расчеты, если при малых Re величины τ_1^0 и q^0 хотя и слабо, но еще зависят от параметра k, то при $K \gg 1$ это расслоение практически отсутствует. Это хорошо видно из рис. 3, где приведены зависимости

для τ_1^0 (линия *4*) и q^0 (линия *8*) при Re=5000 (K=500), которые являются универсальными, поскольку с графической точностью соответствуют случаям k=1,0; 0,8; 0,4; 0,1; 0,01. Практическая независимость величины q^0 от параметра k позволяет предложить следующую формулу для вычисления нестационарного теплового потока к проницаемой поверхности тела в окрестности его критической точки двоякой кривизны:

$$q(k, t) = q(k, 0) \cdot q^0(t). \qquad (27)$$

Здесь $q(k, 0)$ — стационарный тепловой поток к критической точке данного тела; $q^0(t)$ — относительный нестационарный тепловой поток к критической точке осесимметричного тела.

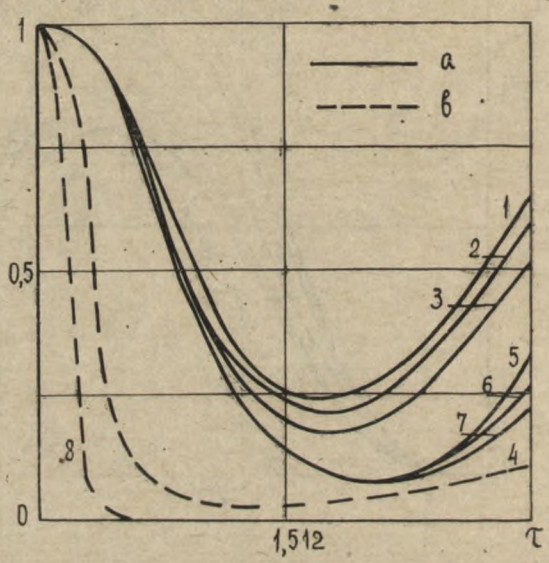


Рис. 3

В работе были проведены также расчеты и для практически важного случая течения, когда массовый расход газа через поверхность является разрывной функцией времени. Рассматривались два варианта расчета, когда величина $G(\tau)$ задавалась в виде

$$G_1(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leqslant 0; \\ 0{,}2, & \tau > 0; \end{cases} \qquad G_2(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leqslant 0; \\ 0{,}5 - 0{,}4 \sin^2\tau, & \tau > 0. \end{cases}$$

Результаты этих расчетов приведены на рис. 4, где изображены зависимости q^0 (линии *3—4*) и τ_1^0 (линии *1—2*) при $k=0{,}1$, $\theta_w=0{,}5$. Здесь линии a—$G=G_1(\tau)$, линии b—

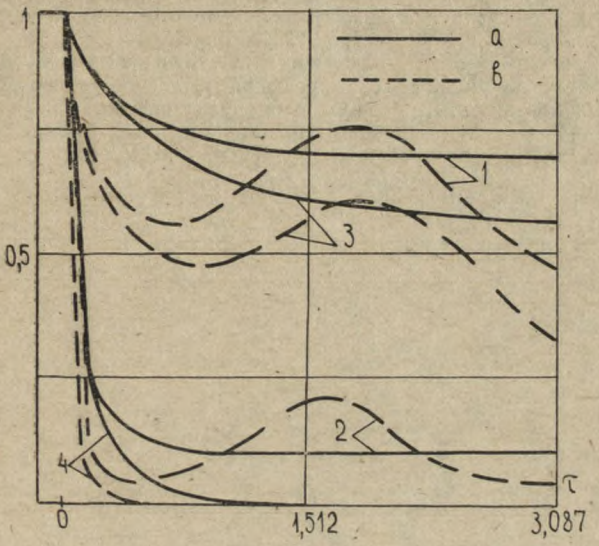


Рис. 4

$-G=G_2(\tau)$, линии *1, 3*—$\mathrm{Re}=50$, линии *2, 4*—$\mathrm{Re}=5000$. Видно, что влияние разрыва на дальнейшее решение в значительной степени локализовано в окрестности точки разрыва.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. — В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964, с. 304—325.

2. Виленский В. Д. Нестационарный конвективный теплообмен при внешнем обтекании тел. — ТВТ, 1974, т. 12, № 5, с. 1091—1103.

3. Vimala C. S., Nath G. Unsteady laminar boundary layers in compressible stagnatien flow. — J. of Fluid Mechanic, 1975, v. 70, № 8, p. 561—572.

4. Корниенко Е. С., Шманенков В. Н. О влиянии вдува на характеристики нестационарного пограничного слоя на колеблющемся клине в сверхзвуковом потоке. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 1, с. 171—175.

5. Гершбейн Э. А., Юницкий С. А. Исследование гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя в окрестности критической точки при наличии вдува или отсоса. — ПММ, 1979, т. 43, № 5, с. 817—828.

6. Карякин В. Е., Попов Ф. Д. Расчет пространственного обтекания затупленных тел сверхзвуковым потоком вязкого и теплопроводного газа. — ЖВМ и МФ, 1977, т. 17, № 6, с. 1545—1555.

7. Гершбейн Э. А., Щелин В. С., Юницкий С. А. Численные и приближенные аналитические решения уравнений гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя при умеренно малых числах Рейнольдса. — В кн.: Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 72—92.

УСТАНОВИВШИЙСЯ И НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ ДИССОЦИИРУЮЩЕГО ТЕПЛОНОСИТЕЛЯ ВО ВХОДНОМ УЧАСТКЕ КРУГЛОЙ ТРУБЫ

А. М. Бубенчиков, С. Н. Харламов

Движение высокотемпературных сред, происходящее в ряде технических устройств, может сопровождаться сложными химическими превращениями, способными существенно влиять на гидродинамику процесса и тепловой режим элементов конструкции. Такие явления протекают в двигателях внутреннего сгорания, аппаратах химической технологии, лазерной техники и т. д. Осложненный процессами турбулентного тепломассопереноса расчет химически реагирующих потоков газа в каналах представляет собой трудную задачу. Значительное место в исследовании движений высокоэнтальпийных сред занимает эксперимент, однако сложность постановки опытных исследований сопряжена с не меньшими, нежели при теоретическом изучении, трудностями. Все это существенно повышает требования к математическому моделированию данного класса движений газа [1].

В этой работе исследуется влияние диссоциации (рекомбинации) на теплообмен и трение при турбулентном движении кислорода во входном участке круглой трубы. Процессы турбулентного переноса рассмотрены на основе однопараметрической модели, включающей дифференциальное уравнение для кинетической энергии турбулентности. Нестационарный режим соответствует случаю монотонного изменения температуры стенки во времени.

Система уравнений Рейнольдса, описывающая движение газов в приближении «узкого канала», совместно с уравнениями энергии и диффузии индивидуальной компоненты имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v) = 0; \qquad (1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r(\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial r}\right]-\frac{\partial p}{\partial x},\ \frac{\partial p}{\partial r}=0; \tag{2}$$

$$\rho c_{pf}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r(\lambda+\lambda_t)\frac{\partial T}{\partial r}\right]+\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+$$

$$+\rho(c_{p_1}-c_{p_2})(D+D_t)\frac{\partial c_1}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial r}+\Delta Q; \tag{3}$$

$$\rho\left(\frac{\partial c_1}{\partial t}+u\frac{\partial c_1}{\partial x}+v\frac{\partial c_1}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\rho(D+D_t)\frac{\partial c_1}{\partial r}\right]+\dot{\omega}_1; \tag{4}$$

$$\rho\left(\frac{\partial E}{\partial t}+u\frac{\partial E}{\partial x}+v\frac{\partial E}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rD_1\frac{\partial E}{\partial r}\right)+D_2\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2-D_3E; \tag{5}$$

$$p=\rho RT,\ c_1+c_2=1, \tag{6}$$

$$\mu,\ \lambda,\ c_{pf}=f(T,\ c_1,\ c_2).$$

Здесь c_1, c_2 — массовые концентрации компонент газовой смеси; E — кинетическая энергия турбулентности: $\dot{\omega}_1$ и ΔQ — массовая скорость образования первой компоненты и приток тепла в результате химической реакции соответственно; c_{pf} — «замороженная» удельная изобарная теплоемкость газовой смеси. Другие обозначения общепринятые. Все величины в записи системы (1)—(6) осредненные.

Для определения коэффициентов турбулентного переноса использовались соотношения [2, 3]:

$$\frac{\mu_t}{\mu}=\alpha\,\mathrm{Re}_t\left[1-\exp(-\sigma_2\,\mathrm{Re}_t^2)+\sigma_3\,\mathrm{Re}_t^{1/2}\exp(-\sigma_1\,\mathrm{Re}_t^2)\right],\ \mathrm{Re}_t=$$

$$=\frac{\sqrt{E}L}{\nu}; \tag{7}$$

$$\lambda_t=\frac{\mu_t c_{pf}}{\mathrm{Pr}_t},\ \mathrm{Pr}_t=f_1\left(\frac{\mu_t}{\mu},\ \mathrm{Pr}\right),\ D_t=\frac{\mu_t}{\rho Sc_t},\ Sc_t=0{,}9; \tag{8}$$

$$\frac{L}{R}=l_0+l_1\left(\frac{r}{R}\right)^2+l_4\left(\frac{r}{R}\right)^4,\ \mathrm{Pr}=\mathrm{const}. \tag{9}$$

Теплофизические характеристики смеси рассчитывались на основе соотношений, предложенных Бердом, Стьюартом [4] для бинарной смеси:

$$\mu = \frac{\mu_1}{c_1 + c_2\psi_{12}} + \frac{\mu_2}{c_2 + c_1\psi_{21}}, \quad c_{pf} = c_{p_1}c_1 + c_{p_2}c_2, \tag{10}$$

где Ψ_{12} и Ψ_{21} — поправочные коэффициенты.

Интегрирование данной системы (1)—(6) проводится при следующих граничных условиях:

$$x = 0:$$

$$c_1 = c_1^e, \rho_в = \rho_в, u = u_в, T = T_в, E = E_в; \tag{11}$$

$r = 0$:

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial E}{\partial r} = 0, \; v = 0; \tag{12}$$

$r = R$:

$$u = v = E = 0, \; T = T_w(t), \; \frac{\partial c_1}{\partial r} = 0. \tag{13}$$

Значения исходных параметров; $T_в = 4000 \div 4500$ К, $p_в = 100$ атм, $\mathrm{Tu} = 0{,}05$, $\mathrm{Re} = u_в d/\nu = 10^5$; $d = 0{,}79 \cdot 10^{-2}$ м; $T_w = 1500 - 2000$ К; $KT_0 = -30$, где $\mathrm{Tu} = \sqrt{2/3\,E_в}/u_в$; $KT_0 = \frac{\mathrm{Pr}}{\nu} \times \times \frac{d^2}{(T_w - T_в)_0} \frac{\partial T_w}{\partial t}$; индекс 0 относится к начальному моменту времени; $в$ — к входному сечению; w — к стенке; 1 — к компоненте O_2; 2 — к O.

Числа Дамкелера, определенные по характерным параметрам задачи, в рассматриваемом случае будут иметь порядок: $Da \sim 10^4 \div 10^5$, т. е. реакции протекают в квазиравновесном режиме. Если при анализе химических превращений воспользоваться равновесным приближением, то уравнение (4) вырождается в известное соотношение Гульдберга—Вааге

$$\frac{c_2^2}{c_1} = \frac{\rho_d RT}{p} \exp\left(-\frac{T_d}{T}\right). \tag{14}$$

Проводя несложные преобразования, уравнение энергии (3) в данном случае можно представить в следующем виде:

$$\rho c_{peff}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\lambda_{eff}\frac{\partial T}{\partial r}\right] + K_{eff}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + u\frac{\partial p}{\partial x}\right) + (\mu + \mu_t)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \rho(c_{p_1} - c_{p_2})(D + D_t)\frac{\partial c_1}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial r}. \tag{15}$$

При пользовании данным приближением необходимость в постановке граничных условий для концентраций, представленных соотношениями (11) и (12), отпадает. Условие (12) удовлетворяется автоматически.

Здесь $c_{peff} = c_{pf} + Q_R c'_{2T}$, $\lambda_{eff} = \lambda + \lambda_t + \rho (D + D_T) Q_R c'_{2T}$, $\kappa_{eff} = 1 - \rho Q_R c_{2\rho}$ — эффективные коэффициенты, причем $\lambda_t = \frac{\mu_t c_{pf}}{\mathrm{Pr}_t} \left(\frac{c_{pf}}{c_{peff}} \right)$ [5]; Q_R — теплота образования; c'_{2T}, $c'_{2\rho}$ — суть производные от c_2 по температуре и давлению соответственно.

Численное решение системы (1), (2), (5)—(10), (14), (15) с соответствующими граничными и начальными условиями проводилось с использованием экономичных неявных конечно-разностных схем на неравномерной логарифмической сетке со сгущением узлов в пристенной области. Применялось преобразование координат вида

$$\{x, r\} \to \{x, \eta\} : \eta = \ln(y + \Delta),$$

где $y = R - r$, Δ — параметр преобразования, обеспечивает попадание необходимого числа точек разностной сетки в область вязкого подслоя.

Расчет поля давления осуществлялся на основе подхода [6], обобщенного в работе [7], на случай неустановившегося течения сжимаемой среды. Начальные распределения характеристик находятся из решения стационарной системы исходных уравнений методом установления.

На рис. 1 представлены зависимости чисел Nu по длине от безразмерной координаты x/d в случае, когда отсутствует тепловая нестационарность ($K\dot{T}_0 = 0$), $T_w = 1500$ К, $T_e = 4000 \div 4500$ К. Из рисунка видно, что процесс рекомбинации значительно интенсифицирует теплоотдачу к стенке (кривые *2, 4*) в сравнении со случаем течения химически инертной смеси (кривые *1, 3*). Надо сказать, что снижение уровня пульсаций температур за счет химических реакций становится заметным лишь при высоких T_e и ведет к снижению теплоотдачи в сравнении со случаем неучета этого эффекта (пунктирная кривая *2, 4*). Характер распределения коэффициента сопротивления трения ζ от x/d можно уяснить из рис. 2. Так, рост температуры потока ведет к увеличению степени диссоциации в ядре потока, что выражается в большей заполненности профиля $\zeta(x/d)$ (кривые *2, 4*), и достижению сравнительно быстрой стабилизации по трению. Пунктирная

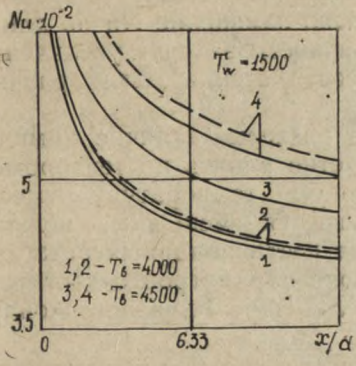


Рис. 1. Распределение числа Нуссельта по длине при разных температурах входа

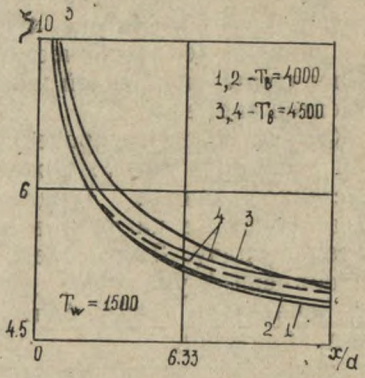


Рис. 2. Распределение коэффициента сопротивления трения по длине при разных температурах входа

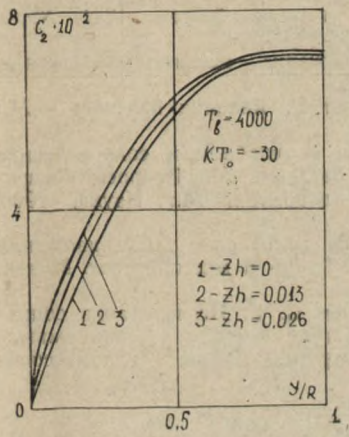


Рис. 3. Зависимости концентраций атомарной компоненты по сечению для разных моментов времени

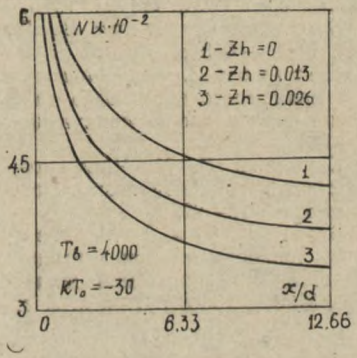


Рис. 4. Распределение числа Нуссельта по длине при наличии тепловой нестационарности

кривая показывает распределение ζ без учета влияния химических реакций на поле T'. На рис. 3 представлены зависимости концентраций атомарной компоненты c_2 от относитель-

ной поперечной координаты для разных моментов времени при $KT_0 = -30$. На рис. 4 показано изменение Nu по длине при наличии тепловой нестационарности за счет увеличения температуры внутренней поверхности стенки для разных моментов времени.

Как показывают проведенные расчеты, наличие химической реакции в потоке может заметно влиять на теплообмен со стенкой канала, среднемассовую температуру смеси. Воздействие же на трение оказывается меньшим, нежели на теплоотдачу. Для исследования нестационарных режимов теплообмена в указанном диапазоне параметров с достаточной точностью может быть использовано квазистационарное приближение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Компаниец В. З., Овсянников А. А., Полак А. С. Химические реакции в турбулентных потоках газа и плазмы. — М.: Наука, 1979. — 242 с.
2. Васильев О. Ф., Квон В. И. Неустановившееся турбулентное течение в трубе. — Журнал прикл. мех. и техн. физика, 1971, № 6, с. 132—140.
3. Иевлев В. М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. — М.: Наука, 1975. — 256 с.
4. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. — М.: Химия, 1974. — 688 с.
5. Петухов Б. С., Шишков В. К. Теплообмен и сопротивление при течении диссоциирующего газа в трубах. — В кн.: Вопросы конвективного и радиационно-кондуктивного теплообмена. М.: Наука, 1980, с. 77—143.
6. Симуни Л. М. Численное решение некоторых задач движения жидкости с переменной вязкостью.—В кн.: Тепло- и массоперенос. Минск, 1963, т. 5, с. 216—222.
7. Бубенчиков А. М., Иванушкин С. Г. Исследование сопряженного теплообмена при нестационарном турбулентном течении сжимаемого газа и несжимаемой жидкости в трубе. — В кн.: Тепломассообмен-VI. Минск, 1980, т. 1, ч. 3, с. 38—42.

СТРУЙНОЕ ОБТЕКАНИЕ КЛИНА РАВНОМЕРНО ЗАВИХРЕННЫМ ПОТОКОМ В ПРОДОЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

А. В. Буров

При теоретическом исследовании струйного обтекания тел наиболее широко используется схема идеальной несжимаемой жидкости с условием отсутствия в потоке вихрей. В реальных условиях наличие вязкости приводит к необходимости учитывать вихревой характер течения. С теоретической точки зрения одним из наиболее простых случаев вихревого течения является течение идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью, которое можно рассматривать как предельное для ламинарного течения вязкой жидкости в предположении, что вязкость стремится к нулю [1].

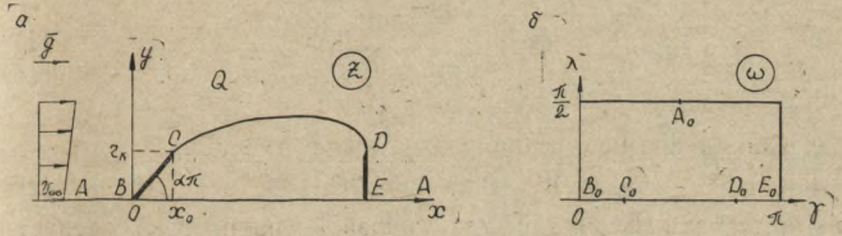


Рис. 1. Область течения в физической плоскости z и плоскости ω

В линейной постановке задача о кавитационном обтекании клина равномерно завихренным потоком невесомой жидкости рассматривалась в работах [2—4]. Полученные в [2—4] решения имеют ограниченную область применения вследствие необходимости выполнения условий, определяющих возможность использования теории тонкого тела. В данной работе в нелинейной постановке рассматривается задача струйного обтекания клина по схеме Рябушинского равномерно завихренным симметричным потоком. Предла-

гаемый численный метод решения основан на использовании теории конформных отображений и позволяет учитывать влияние продольного поля силы тяжести. Приведены результаты расчетов форм каверн для различных значений параметров потока.

Рассмотрим установившееся струйное обтекание клина с углом раствора $2\alpha\pi$ симметричным потоком равномерно завихренной идеальной несжимаемой жидкости (рис. 1, *а*). В силу симметрии течения относительно оси абсцисс рассмотрим только верхнюю полуплоскость $y \geqslant 0$. Для замыкания каверны будем использовать обобщенную схему Рябушинского с фиктивным замыкателем *DE*. Профиль скорости набегающего потока на бесконечности имеет вид $v_x = v_\infty(1+\varepsilon y)$. Перейдем к безразмерным переменным, приняв за характерную скорость $v_\infty(1+\varepsilon)$, а за характерный размер — полуширину клина $r_к$.

Введем функцию тока $\Psi(x, y)$ рассматриваемого вихревого течения

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

удовлетворяющую во всей области течения Q уравнению Пуассона

$$\Delta\psi = \varepsilon,$$

где

$$\varepsilon = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}. \tag{1}$$

Кинематическое граничное условие имеет вид

$$\Psi = 0 \text{ на } ABCDEA, \tag{2}$$

из интеграла Бернулли для нулевой линии тока следует динамическое граничное условие

$$(\nabla\psi)^2 = 1 + \sigma + \frac{x - x_0}{\mathrm{Fr}^2} + \frac{x_0 - x_\infty}{\mathrm{Fr}^2} \text{ на } CD, \tag{3}$$

где

$$\sigma = \frac{2(p_\infty - p_к)}{\rho v_\infty^2 (1+\varepsilon)^2}, \quad \mathrm{Fr} = \frac{v_\infty(1+\varepsilon)}{\sqrt{2gr_к}}.$$

В (3) x_∞ — это координата точки на нулевой линии тока, в которой течение можно считать невозмущенным, поэтому последний член в динамическом граничном условии характеризует влияние гидростатического давления в точке

торможения на кавитаторе. В бесконечно удаленной точке должно выполняться условие невозмущенности потока

$$\psi(x, y) \to y + \varepsilon \frac{y^2}{2}, \quad z \to \infty. \tag{4}$$

Граничные условия (2), (3) должны выполняться на неизвестной заранее линии CD, которую требуется определить в процессе решения задачи.

Будем искать решение краевой задачи (1)—(4) в виде

$$\psi = \psi_1 + y + \varepsilon \frac{y^2}{2}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (1)—(4), для определения Ψ_1 получим следующую краевую задачу:

$$\triangle \Psi_1 = 0 \quad \text{в } Q; \tag{6}$$

$$\psi_1 = -y\left(1 + \varepsilon \frac{y}{2}\right) \text{ на } ABCDEA; \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + 1 + \varepsilon y\right)^2 = 1 + \sigma + \frac{x - x_0}{\mathrm{Fr}^2} + \frac{x_0 - x_\infty}{\mathrm{Fr}^2} \text{ на } CD; \tag{8}$$

$$\Psi_1 \to 0, \quad z \to \infty. \tag{9}$$

Так как область течения заранее неизвестна, то удобно перейти к некоторой канонической области. Конформно отобразим область течения Q в физической плоскости $z = x + iy$ на внутренность прямоугольника Q_0 в плоскости переменной $\omega = \gamma + i\lambda$ (рис. 1, *б*). Соответствующие точки в плоскостях z и ω обозначены одинаковыми буквами. Обратное отображение Q_0 на Q можно осуществить с помощью следующей последовательности конформных отображений:

$$z_1 = sn\left[\frac{2K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\pi}\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\right]; \tag{10}$$

$$z_2 = \frac{L}{z_1(D_0)}\left[z_1 + \sqrt{z_1^2 - z_1^2(D_0)}\right], \tag{11}$$

$$z_3 = z_2 + L\sum_{n=1}^{\infty} R_n \left(\frac{L}{z_2}\right)^n; \tag{12}$$

$$z_4 = \sqrt{(b_1 + b)(b_1 - b)} + \sqrt{(z_3 - b_2 - b)(z_3 - b_2 + b)}; \tag{13}$$

$$z = (z_4 + c)^{1-\alpha}\left(z_4 - c\,\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\alpha}, \qquad (14)$$

где

$$b = z_3(E_0) - z_3(D_0),\ b_1 = z_3(D_0) - z_3(c_0),\ b_2 = z_3(D_0),\ c = \frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}}{\sin \tau\pi},$$

а функции (11), (12) содержат неизвестные вещественные коэффициенты L, R_1, R_2, ..., определяющие геометрию обтекаемого тела.

В прямоугольнике Q_0 краевая задача (6), (7), (9) примет следующий вид:

$$\Psi_1 \to 0,\quad \omega \to A_0. \qquad (18)$$

$$\psi_1 = -y(\gamma, \lambda)\left[1 + \varepsilon\frac{y(\gamma, \lambda)}{2}\right] \text{ на } B_0E_0; \qquad (16)$$

$$\Psi_1 = 0 \text{ на } B_0A_0 \wedge E_0A_0; \qquad (17)$$

$$\Psi_1 \to 0,\ \omega \to A_0 \qquad (18)$$

В (16) функция $y(\gamma, \lambda)$ определяется последовательностью конформных отображений (10)—(14) и, следовательно, зависит от L, R_1, R_2, ... Пока не требуем выполнения динамического граничного условия (8), а считаем, что коэффициенты L, R_1, R_2, ... заданы.

Будем искать решение краевой задачи (15)—(18) в виде

$$\psi_1(\gamma, \lambda) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} B_\kappa \frac{\operatorname{sh}\left(\lambda - \frac{\pi}{2}\right)\kappa}{\operatorname{sh}\frac{\kappa\pi}{2}} \sin \kappa\gamma. \qquad (19)$$

Функция (19) удовлетворяет (15), (17), (18) при произвольных значениях вещественных коэффициентов B_κ, а из (16) получаем условие для их численного определения [ограничиваясь в (19) конечным числом N_1 членов ряда]

$$y(\gamma, 0)\left[1 + \varepsilon\frac{y(\gamma, 0)}{2}\right] = \sum_{\kappa=1}^{N_1} B_\kappa \sin \kappa\gamma.$$

Зная B_κ, нетрудно вычислить значения составляющих скорости в физической плоскости:

$$v_x - iv_y = \frac{\dfrac{\partial \psi_1}{\partial \lambda} + i\dfrac{\partial \psi_1}{\partial \gamma}}{\dfrac{dz_1}{d\omega}\cdot\dfrac{dz_2}{dz_1}\cdot\dfrac{dz_3}{dz_2}\cdot\dfrac{dz_4}{dz_3}\cdot\dfrac{dz}{dz_4}} + 1 + \varepsilon y. \qquad (20)$$

Таким образом, при заданных значениях вещественных коэффициентов L, R_1, R_2, ... для любой точки из Q_0 по (10)—(14) можно вычислить ее координаты в плоскости z, а по (20) — значение скорости в этой точке.

Ограничимся в (12) конечным числом членов N. Для определения L, R_1, R_2, ... воспользуемся динамическими граничными условиями (3). Распределим равномерно по C_0D_0 N_2 точек. Составим целевую функцию

$$R(L, R_1, \ldots, R_N) = \max_{1 \leqslant l \leqslant N_2} \left| [\nabla \psi^{(l)}]^2 - 1 - \sigma - \frac{x^{(l)} - x_0}{\mathrm{Fr}^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{x_0 - x_\infty}{\mathrm{Fr}^2} \right|,$$

минимизируя которую с заданной точностью градиентным методом, определим численные значения L, R_1, ..., R_N.

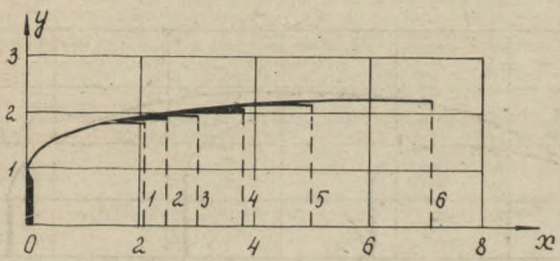


Рис. 2. Формы каверн за пластинкой в невесомой жидкости

Предложенный алгоритм реализован в виде программы для ЭВМ БЭСМ-6. В качестве тестовой рассмотрена задача обтекания цилиндра единичного радиуса безвихревым потоком невесомой жидкости, которая имеет точное решение. В этом случае отображение внутренности прямоугольника на физическую плоскость осуществляется с помощью формул (10), (11). Результаты расчетов показали, что распределение модуля скорости по поверхности цилиндра, вычисленное

с помощью предлагаемого алгоритма, совпадает с аналитическим решением с точностью трех цифр. Отличные от нуля коэффициенты B_k из (19) при $N_1 = 20$ имеют следующие численные значения: $B_1 = 0{,}8401$; $B_3 = -0{,}137$; $B_5 = 0{,}0197$; $B_7 = -0{,}0028$; $B_9 = 0{,}0004$; $B_{11} = -0{,}0001$.

Результаты расчетов форм каверн за диском для невесомой жидкости при $\sigma = 1{,}05$ представлены на рис. 2. Кривая *1* соответствует $\varepsilon = -0{,}15$; кривая *2* — $\varepsilon = -0{,}1$; кривая *3* — $\varepsilon = -0{,}05$; кривая *4* — $\varepsilon = 0$; кривая *5* — $\varepsilon = 0{,}05$; кривая *6* — $\varepsilon = 0{,}1$. При безвихревом обтекании ($\varepsilon = 0$) полученные результаты совпадают с известным точным решением (см., например, [5]) с точностью 2%. Коэффициент лобового сопротивления C_x для рассмотренных значений ε почти не отличается от C_x в случае безвихревого потока ($C_x = 1{,}778$), что, вероятно, объясняется постоянством формы головного участка каверны. Следует отметить, что при отсутствии вихрей решение задач струйного обтекания по предлагаемому алгоритму может быть существенно упрощено, т. к. плоскость z_1 совпадает с плоскостью изменения комплексного потенциала, а также возможно его обобщение на осесимметричный случай [6].

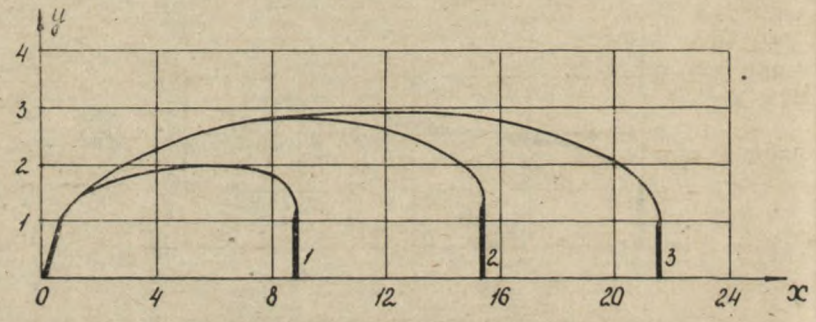


Рис. 3. Формы каверн за клином в продольном поле силы тяжести

Результаты расчетов форм каверн в продольном поле силы тяжести для $\sigma = 0{,}45$, $\alpha = 1/3$ представлены на рис. 3. При решении последней член в правой части граничного условия (3) был опущен, т. к. он равен константе и может быть учтен с помощью числа кавитации. Кривая *1* соответствует $\varepsilon = -0{,}1$, $\mathrm{Fr} = 10$; кривая *2* — $\varepsilon = 0$, $\mathrm{Fr} = 5$; кривая *3* — $\varepsilon = 0$, $\mathrm{Fr} = 10$.

Таким образом, равномерная завихренность потока может оказывать существенное влияние на форму каверны, причем наиболее значительно изменяется ее длина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1977. — 408 с.

2. Котляр Л. М., Лазарев В. А. Кавитационное обтекание клина завихренным потоком. — Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 8. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1971, с. 119—128.

3. Васильев В. Н., Галанин А. В. Влияние завихренности потока на геометрические и гидродинамические характеристики кавитирующего клина. — В кн.: Струйные и кавитационные течения и современные вопросы теории управления. Чебоксары, 1978, с. 3—18.

4. Street L. R. A linearized theory for rotational supercavitating flow. — J. of Fluid Mech., 1963, v. 17, part 4, pp. 513—545.

5. Гузевский Л. Г. Численный анализ кавитационных течений. — Новосибирск, 1979. — 36 с. (Препринт/Ин-т теплофиз. СО АН СССР: № 40—79).

6. Буров А. В., Либин Э. Е. Исследование потенциальных течений идеальной жидкости со свободной поверхностью на основе метода конформных отображений. — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1984, с. 95—99.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ В СОПЛАХ ЛАВАЛЯ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

А. А. Глазунов, А. С. Ткаченко, В. А. Иванов

В настоящее время во многих газодинамических установках находят применение сопла Лаваля самых разнообразных конфигураций. Можно отметить сопла со значительными углами поджатия ($\Theta > 60°$), с цилиндрическим участком, малым радиусом скругления в области минимального сечения, сопла с утопленной дозвуковой частью и т. д. При этом возникает необходимость определения локальных и интегральных характеристик таких сопел, а также построения всей газодинамической картины течения. В советской и зарубежной литературе имеется целый ряд работ [1—3], посвященных численному исследованию течений газа в соплах сложной геометрии. Отличительной особенностью течений в указанных соплах является наличие областей с большими градиентами параметров. Прямое использование обычных конечно-разностных методов не всегда возможно, что выражается либо в уменьшении точности результатов, либо вообще в невозможности проведения расчетов. Одним из способов решения задач в областях со сложной геометрией является использование алгоритмов, адаптирующихся к картине течения [4]. В настоящей работе на основе метода установления проведено исследование течений газа в соплах с цилиндрическим участком и резким изменением сечения на входе минимального сечения. Расчеты проводились на криволинейных сетках, специально рассчитанных для этих областей на основе решения уравнения Лапласа.

Идея построения сетки [5] заключается в том, что два семейства линий в расчетной области отыскиваются как линии уровня функций $\eta(x, y)$, $\xi(x, y)$, удовлетворяющих уравнениям Лапласа.

$$\Delta^2 \xi = 0;$$
$$\Delta^2 \eta = 0. \qquad (1)$$

Кроме того, предполагаем, что ξ и η — сопряженная гармоническая пара, следствием чего является ортогональность контуров в области ξ, η, если в области x, y ортогональны их образы. Условием этого являются соотношения Коши—Римана

$$\xi_x = \eta_y; \qquad \xi_y = -\eta_x. \tag{2}$$

Для того чтобы иметь возможность сжимать линии сетки в нужных подобластях, вводятся переменные χ и φ как монотонные функции ξ и η ($\xi = f(\chi)$, $\eta = g(\varphi)$ соответственно). Поскольку ищется отображение прямоугольника с равномерной прямоугольной сеткой в плоскости ξ, η на данную область течения в физической плоскости x, y, удобно поменять в (1) местами зависимые и независимые переменные. Уравнения (1) преобразуются в следующие:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial \chi^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} - F\frac{\partial x}{\partial \chi} - \delta^2 G \frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0; \\ &\frac{\partial^2 y}{\partial \chi^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} - F\frac{\partial y}{\partial \chi} - \delta^2 G \frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\delta(\chi, \varphi) = f'/g'$, $F = f''/f'$, $G = g''/g'$.

Решения x и y неявно зависят друг от друга. Кроме того, эти решения связаны через граничные условия. На левой и правой границах на решение для x выставляется условие Дирихле, на нижней и верхней — условие Неймана, в качестве которого используется условие Коши—Римана. Для второго уравнения (функция y) на тех сегментах границы, где для первого уравнения задавалось условие Дирихле, задается условие Неймана, и наоборот, на сегментах, где задавалось условие Неймана для первого уравнения, задается условие Дирихле. Это обеспечивает взаимосвязь между x и y решениями и ортогональность сетки к границе.

Система эллиптических уравнений (3) решается численно. Выбирается итерационный метод. К стационарным уравнениям добавляются нестационарные части $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$. Стационарное решение получается как асимптотический по времени предел решения нестационарных уравнений при стационарных граничных условиях. Для численного интегриро-

вания используется разностный метод либмановского типа. Распишем разностную схему для первого уравнения:

$$\frac{x_{i,j}^{\kappa+1}-x_{i,j}^{\kappa}}{\Delta t}=\frac{x_{i+1,j}^{\kappa}-x_{i,j}^{\kappa}-x_{i,j}^{\kappa+1}+x_{i-1,j}^{\kappa+1}}{\Delta\chi^2}+$$

$$+\delta^2\frac{x_{i,j+1}^{\kappa}-x_{i,j}^{\kappa}-x_{i,j}^{\kappa+1}+x_{i,j-1}^{\kappa+1}}{\Delta\varphi^2}-F\frac{x_{i+1\,j}^{\kappa}-x_{i-1,j}^{\kappa}}{2\Delta\chi}-$$

$$-\delta^2 G\frac{x_{i,j+1}^{\kappa}-x_{i,j-1}^{\kappa}}{2\Delta\varphi}.$$

Разрешая относительно x_{ij}^{k+1} и учитывая, что $\Delta\chi=\Delta\varphi=1$, а также выбирая из условия устойчивости $\Delta t=1/2\delta^2$, получим

$$x_{i,j}^{\kappa+1}=\left((\delta^2-1)\,x_{i,j}^{\kappa}+\left(1-\frac{F}{2}\right)x_{i+1,j}^{\kappa}+x_{i-1,j}^{\kappa+1}+\right.$$

$$+\frac{F}{2}x_{i-1,j}^{\kappa}+\delta^2\left(1+\frac{G}{2}\right)x_{i,j+1}^{\kappa}+\delta^2 x_{i,j-1}^{\kappa+1}+$$

$$\left.+\delta^2\frac{G}{2}x_{i,j-1}^{\kappa}\right)/(3\delta^2+1).$$

Для улучшения сходимости расчет проводится на последовательности сеток с удвоением числа узлов как по χ, так и по φ.

Уравнения газовой динамики интегрируются на ортогональной сетке в плоскости χ, φ с применением процесса установления. В преобразованных координатах χ, φ уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial r\rho J}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\chi}(r\rho\,(ur_{\varphi}-vx_{\varphi}))+\frac{\partial}{\partial\varphi}r\rho\,(vx_{\chi}-ur_{\chi})=0;$$

$$\frac{\partial r\rho uJ}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\chi}(r\,((\rho u^2+P)\,r_{\varphi}-\rho uvx_{\varphi}))+\frac{\partial}{\partial\varphi}r\,(\rho uvx_{\chi}-$$

$$-(\rho u^2+P)\,r_{\chi})=0;$$

$$\frac{\partial r\rho vJ}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\chi}r\,(\rho uvr_{\varphi}-(\rho v^2+P)\,x_{\varphi})+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\varphi}r\,((\rho v^2+P)\,x_{\chi}-\rho uvr_{\chi})=0; \qquad (4)$$

$$\frac{\partial r\ (\rho H_0 - P)\, J}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \chi} r\rho H_0 (u r_\varphi - v x_\varphi) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \varphi} r\rho H_0 (v x_\chi - u r_\chi) = 0.$$

Здесь J — якобиан преобразования.

Для численного интегрирования (4) с замыкающим уравнением состояния $P = \frac{k-1}{k} \rho \left(H_0 - \frac{u^2+v^2}{2} \right)$ используется двухшаговая нецентральная разностная схема Мак-Кормака, имеющая второй порядок точности.

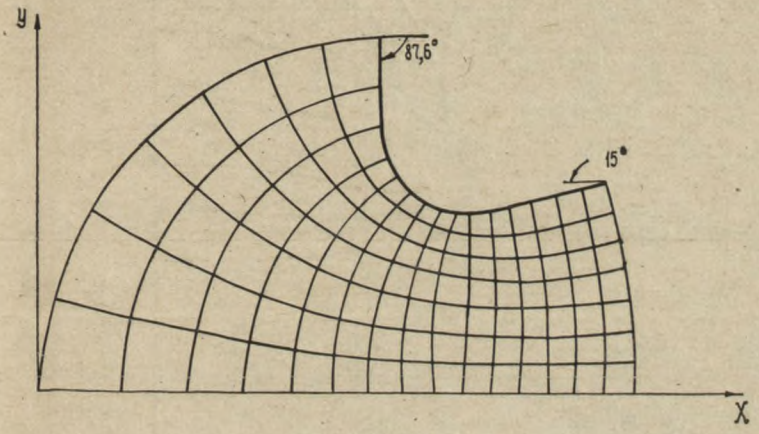


Рис. 1

На входе в сопло задаются три граничных условия, в качестве которых выбираются энтальпия торможения, энтропия и направление вектора скорости. На контуре сопла задается условие непротекания. Правая граница находится в сверхзвукой области течения, и граничные условия на ней не задаются. Начальное поле параметров течения определяется по одномерной теории.

С целью определения эффективности метода были проведены расчеты течения в сопле, входной участок которого образован почти вертикальной стенкой (угол входа 87,6°), как это показано на рис. 1, где приведена также связанная с границами области течения криволинейная сетка. Для

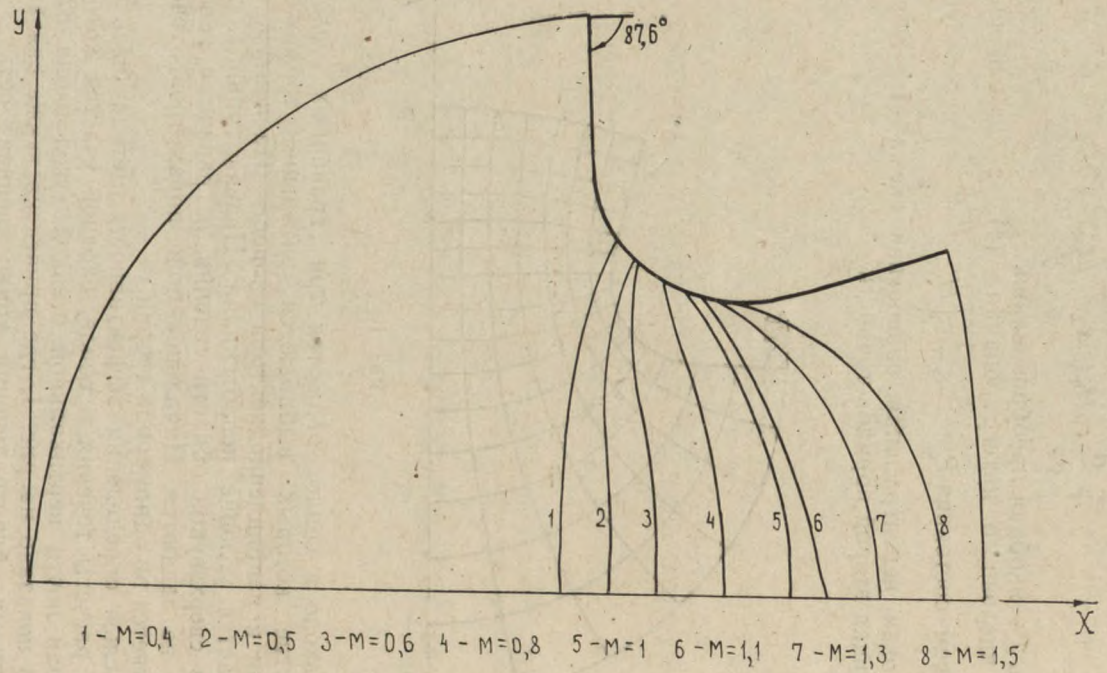


Рис. 2

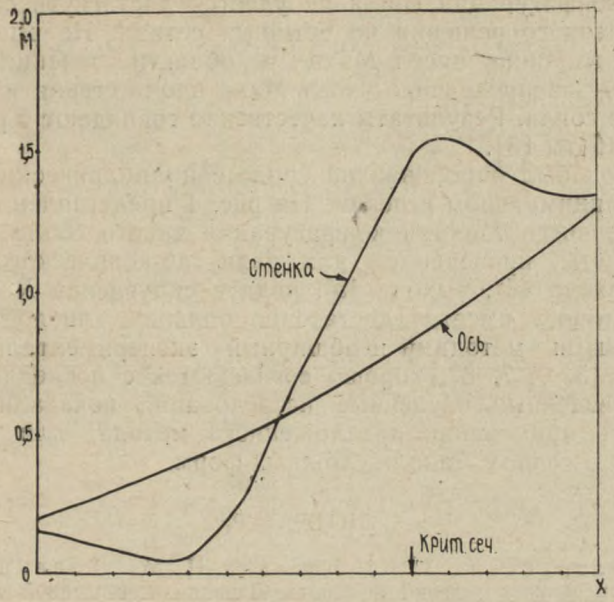

2,0
M
1,5
1,0
0,5
0
Стенка
Ось
Крит. сеч.
X

Рис. 3

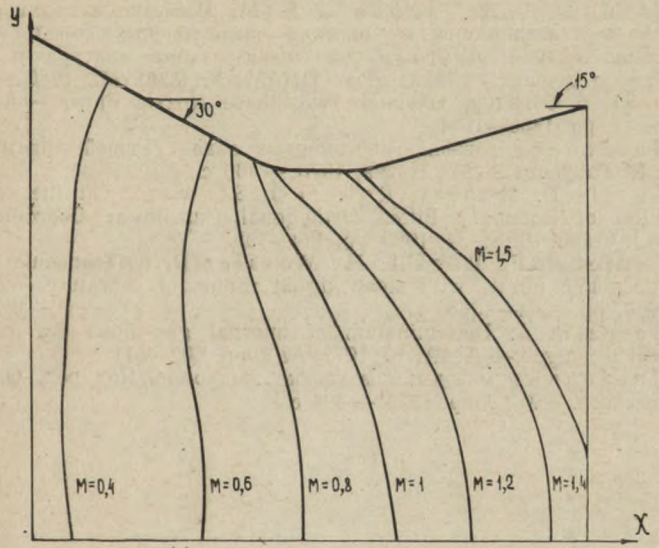

y
30°
15°
M=1,5
M=0,4
M=0,6
M=0,8
M=1
M=1,2
M=1,4
X

Рис. 4

такой конфигурации сопла не удается достигнуть сходимости численного решения на обычных сетках. На рис. 2 приведены изолинии чисел Маха в области течения, а на рис. 3 — распределение чисел Маха вдоль стенки и оси для данного сопла. Результаты качественно совпадают с результатами работы [3].

Метод был опробован на сопле с цилиндрическим участком в минимальном сечении. На рис. 4 представлено распределение чисел Маха и конфигурация такого сопла.

Расчеты, проведенные для радиусно-конического сопла (угол входа 45°, выхода 15°, радиус скругления $R=0{,}6252$), для которого имеется достаточно большое число расчетов различными методами и обширный экспериментальный материал [3, 6, 7, 8], хорошо согласуются с последними.

Проведенные численные исследования показали эффективность применения предложенного метода для расчета течения в соплах Лаваля сложных форм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтрукевич Т. В., Васенин И. М., Глазунов А. А. Расчет смешанных течений в соплах Лаваля с утопленной дозвуковой частью. — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1981, с. 20—28.

2. Тагиров Р. К., Чефанов В. М. Расчетно-экспериментальное исследование газодинамически плоских симметричных сопел, имеющих участок постоянной высоты и две точки излома контура в области критического сечения. — Техн. отчет ЦИАМ, № 9290. М., 1980. — 60 с.

3. J-Shih Chang. One-and Two Phase Nozzle Flows. — AIAA, 18, 1980, № 12, pp. 1455—1661.

4. Численное решение многомерных задач газовой динамики/Под ред. С. К. Годунова. — М.: Наука, 1976. — 400 с.

5. Curtis D. Mobley, Robert J. Stewart. On the Numerical Generation of Boundary Fitted Orthogonal Curvilinear Coordinate Systems. — J. Comp. Phys., 34, 1980, pp. 124—135.

6. Cuffel R. F., Back L. H., Massier P. F. Transonic flowfield in a supersanic nozzle with small throat radius of curvature. — AIAA, 7, 1969, № 7, pp. 1364—1366.

7. Serra R. A. Determination of internal gas flows by a transien numerical technigue. — AIAA, 10, 1972, № 5, pp. 603—611.

8. Численные методы в механике жидкостей/Под ред. О. М. Белоцерковского. — М.: Мир, 1973. — 304 с.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА В ТРУБЕ ГАЗОМ СО СЛОЖНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

Л. И. Дубровская

Интерес к изучению процессов обтекания тел в цилиндрических каналах возникает во многих областях [1]. При этом, естественно, на первом месте стоят вопросы зависимости аэродинамических характеристик обтекаемых тел в зависимости от размеров тела, формы, а также от более тонких эффектов, связанных, например, с проявлением влияния молекулярного строения газа, хотя они и относительно малы [2].

В этой работе рассматривается взаимодействие газового потока со сложным уравнением состояния [3] с круговым цилиндром (рис. 1), имеющим общую ось симметрии с трубой. Задача решается численно в цилиндрической системе координат z, r, φ; ось z направлена вдоль оси симметрии канала. Начало системы координат совмещено с левым концом трубы. Исходная система дифференциальных уравнений, описывающих нестационарное осесимметричное течение невязкого нетеплопроводного газа, записывается в виде

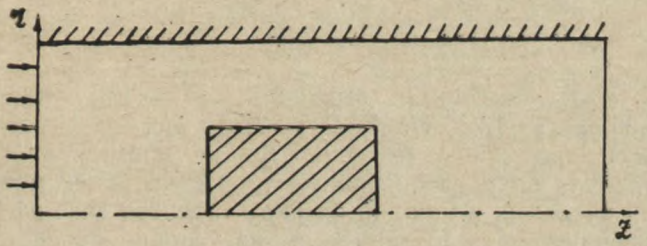


Рис. 1

$$\frac{\partial \rho r}{\partial t} + \frac{\partial \rho u r}{\partial z} + \frac{\partial \rho v r}{\partial r} = 0;$$

$$\frac{\partial \rho u r}{\partial t} + \frac{\partial r\,(p + \rho u^2)}{\partial z} + \frac{\partial \rho u v r}{\partial r} = 0;$$

$$\frac{\partial \rho v r}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v r}{\partial z} + \frac{\partial r\,(p + \rho v^2)}{\partial r} = p;$$

$$\frac{\partial \rho r\,[e + (u^2 + v^2)/2]}{\partial t} + \frac{\partial \rho u r\,[e + p/\rho + (u^2 + v^2)/2]}{\partial z} +$$

$$+ \frac{\partial \rho v r\,[e + p/\rho + (u^2 + v^2)/2]}{\partial r} = 0;$$

$$e = \frac{p - \varphi(\rho)}{[\gamma(\rho) - 1]\,\rho}.$$

Здесь p, ρ, u, v, e — соответственно давление, плотность, компоненты скорости, внутренняя энергия единицы массы газа, а $\gamma(\rho)$ и $\varphi(\rho)$ — известные функциональные зависимости [3].

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_\infty & \text{при } x > 1; \\ \gamma_0 + (\gamma_\infty - \gamma_0)\,x\,(3 - 3x + x^2) & \text{при } x \leqslant 1; \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \rho_{0к} D_к^2 A\,(\delta - \delta_*)^m & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \leqslant 1, \end{cases}$$

где $x = \delta/\delta_*$, $A = 0{,}1533$, $m = 2{,}284$, $\gamma_\infty = 1{,}67$, $\gamma_0 = 1{,}375$, $\delta_* = 0{,}35$, $\rho_{0к} = 1{,}735$ г/см^3, $D_к = 7{,}83$ км/с.

При использовании метода распада произвольного разрыва [4] для определения параметров на границе между соседними ячейками в каждой ячейке вводится свое эффективное значение $\gamma_{эф}$, подсчитываемое из условия равенства скоростей звука для совершенного газа $a = \sqrt{\gamma_{эф} \cdot p/\rho}$ и рассматриваемого выше

$$a = \sqrt{\frac{p}{\rho}\left(\gamma + \frac{\rho\gamma'(p - \varphi)}{p(\gamma - 1)} + \frac{\rho\varphi' - \varphi}{p}\right)},$$

где

$$\gamma' = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 1; \\ (\gamma_\infty - \gamma_0)\,(3 - 6x + 3x^2)/(\rho_{0к} \cdot \delta_{*к}) & \text{при } x \leqslant 1; \end{cases}$$

$$\varphi' = \begin{cases} D_к^2 A m\,(\delta - \delta_*)^{m-1} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \leqslant 1. \end{cases}$$

На стенках трубы, поверхности обтекаемого тела и на оси симметрии выполняется условие непротекания, на левой границе задается стационарный поток с определенным числом Маха, на правой границе — условие отсутствия градиента в направлении оси z. Задача решается в размерных переменных на сетке 50×20. Увеличение шага интегрирования вдвое в направлении r приводит к изменению c_x от 3—10% для моделей с достаточно большим коэффициентом загроможденности β ($\beta = R^2/R_т^2$, R — радиус цилиндра, $R_т$ — радиус трубы), когда на лобовую поверхность модели приходится 4 и больше расчетные ячейки, до 20% для моделей с маленькой лобовой поверхностью в 1—2 расчетные ячейки. Удлинение модели $h/D = 1$, где D — диаметр цилиндра, h — высота. Время счета до установления течения зависит от числа Маха набегающего потока, от коэффициента загроможденности канала и остается в пределах 3 часов на БЭСМ-6. Система определяющих параметров для c_x в данном случае состоит из 7 размерных величин

$$p_\infty, \rho_\infty, u_\infty, R, R_т, \rho_{0к}, D_к.$$

Согласно π-теореме теории размерностей и подобия [5] из этой системы можно образовать четыре безразмерных комплекса

$$M_\infty = \frac{u_\infty}{a_\infty}, \frac{R}{R_т}, \frac{p_\infty}{\rho_{0к} D_к^2}, \frac{\rho_\infty}{\rho_{0к}},$$

где a_∞ — скорость звука. Таким образом, c_x будет зависеть от четырех безразмерных величин — числа Маха набегающего потока, коэффициента загроможденности канала и двух коэффициентов, характеризующих природу газа. В данной работе варьировались первые два коэффициента, а третий и четвертый — константы, равные соответственно 0,01377 и 0,15735.

Результаты определения коэффициента c_x цилиндра при обтекании газом с использованным уравнением состояния при больших числах Маха ($M = 2, 3, 5$) показали нарушение тенденции к уменьшению величины c_x с ростом M. На рис. 2 приводится кривая изменения c_x в зависимости от M в пределах значений $R/R_т$, соответствующих режиму обтекания с отошедшей ударной волной, т. е. при таких размерах тела, когда влияние стенок не приводит к переходу на дозвуковой режим. При больших коэффициентах загроможденности, как известно [1], отраженная ударная волна отхо-

дит на бесконечность, вследствие чего на левой границе рассчитываемой области устанавливается течение, вообще говоря, с другим числом Маха. Исследование на точное определение критического коэффициента загроможденности канала

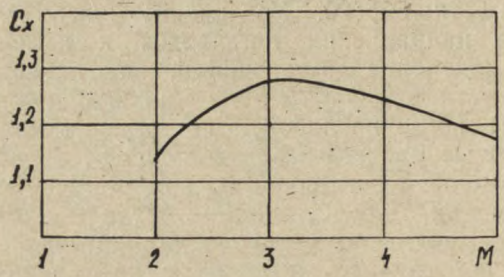


Рис. 2

для больших чисел Маха не проводилось. При больших числах M течение устанавливается существенно быстрее (рис. 3), чем при $M = 2$.

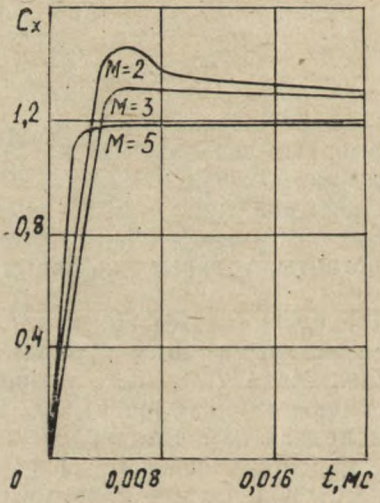


Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровская Л. И., Комаровский Л. В. Осесимметричное нестационарное обтекание преград в цилиндрической трубе. — Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1978, № 4, с. 81—86.

2. Бедин А. П., Мелешко В. П., Мишин Г. И., Чистякова М. В. Влияние отношения удельных теплоемкостей среды на аэродинамические характеристики затупленных тел. — В кн.: Физико-газодинамические баллистические исследования. Л., 1980, с. 25—33.

3. Куропатенко В. Ф. Уравнение состояния продуктов детонации конденсированных ВВ. — Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1977, т. 8, № 6, с. 68—71.

4. Численное решение многомерных задач газовой динамики/ С. К. Годунов и др. — М.: Наука, 1976. — 400 с.

5. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1981. — 448 с.

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ С РЕЗКИМ ИЗМЕНЕНИЕМ СЕЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА

С. Г. Иванушкин, Г. Д. Кадиева

Проблема перемещения, подачи и отвода различных жидкостей и газов по трубам и каналам — одна из важнейших научных и технических проблем. Она возникает при проектировании, постройке и эксплуатации самых разнообразных устройств и сооружений [1]. Трубы и каналы, по которым происходит перемещение жидкостей и газов, могут состоять как из прямых участков постоянного сечения, так и из различного рода сложных фасонных частей. Определение гидравлического сопротивления каналов переменного сечения по полуэмпирическим зависимостям [1] или экспериментально требует больших материальных затрат и не позволяет исследовать многие гидродинамические аспекты, в частности, влияние числа Рейнольдса и величины сужения (расширения) канала на картину течения, наличие отрывных зон и их протяженность. Правильно оценить величину гидравлического сопротивления в трубах можно, зная поля скоростей и давления. Поэтому исследование картины течения в канале с резким изменением сечения (сужением или расширением) является актуальной задачей.

Теоретическое изучение течения вязких жидкостей в каналах со скачком сечения должно основываться на интегрировании полных уравнений Навье—Стокса. Исследования данного класса задач начались в конце 60-х годов в связи с появлением мощных ЭВМ и развитием численных методов решения уравнений Навье—Стокса. Стационарные решения для течения в плоском канале со скачком сечения находились явными конечно-разностными методами в переменных «функция тока, вихрь» (ψ, ω) [2].

Большие затраты машинного времени, связанные с итеративным процессом для ω на твердой границе, а также неудовлетворительная точность определения скоростей и давления способствовали развитию численных методов решения

в естественных переменных. Апробировались явные схемы расщепления [3, 4] и различные модификации явно-неявной аппроксимации системы уравнений Навье—Стокса [5]. При нахождении решения численным методом в естественных переменных наличие большого перепада давления в окрестности угловой точки может приводить к искажению физической картины в этой области либо к вычислительной неустойчивости. Использование итеративного сращивания аналитического решения в окрестности выпуклого угла с численным решением уравнений Навье—Стокса вне этой окрестности [4, 6, 7] дает хорошее согласование с экспериментальными данными для малых чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1 \div 30$. Следует отметить, что нахождение аналитического решения и сращивание его с численным связано с определенными трудностями. Использование консервативной неявной разностной схемы [8] для расчета стационарного течения жидкости в канале прямоугольного сечения с выступом на нижней плоскости канала позволило проводить вычисления в области выступа без специального выделения этой зоны.

В данной работе исследуется течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрическом канале, имеющем особенность типа скачка сечения, с помощью метода расщепления и неявных разностных схем.

Уравнения, описывающие осесимметричное ламинарное движение жидкости, в цилиндрической системе координат имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + u\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right); \quad (2)$$

$$D \equiv \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0. \quad (3)$$

Обозначения общепринятые.

При численном решении задачи вместо уравнения (3) использовалось уравнение для давления, полученное из (1), (2) с учетом (3),

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \rho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + 2\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + \right.$$

$$+2\cdot\frac{v^2}{r^2}+S_p+S_{p1}\Big]=0; \qquad (4)$$

$$S_p=\frac{\partial D}{\partial t}+u\frac{\partial D}{\partial z}+v\frac{\partial D}{\partial r};\quad S_{p1}=\nu\left(\frac{\partial^2 D}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 D}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial D}{\partial r}\right). \qquad (5)$$

В уравнении (4) для устойчивости счета сохранены члены $D\equiv \mathrm{div}U$. Искусственная параболизация (4) путем введения в правую часть члена вида $\varepsilon\cdot\frac{\partial p}{\partial t}$ позволила применить при расчетах единообразный численный алгоритм решения уравнений (1), (2), (4).

Граничные условия для давления определялись из уравнения движения в проекциях на нормаль к граничной поверхности. На оси канала использованы условия симметрии для всех величин. На стенках для компонент скорости — условия прилипания. На входе — профиль Пуазейля для осевой скорости, $v=0$ и градиент давления — постоянный. На выходе — мягкие граничные условия для всех величин.

Стационарное решение задачи определялось интегрированием системы уравнений (1), (2), (4) методом установления. Использовался метод переменных направлений, неявная разностная схема Писмана—Рэкфорда [9]. Аппроксимация уравнений проводилась на неравномерной сетке.

Исследования гидродинамики в канале со скачком сечения были выполнены при различных числах $\mathrm{Re}=10\div150$ $\left(\mathrm{Re}=\frac{U_0\cdot 2\cdot R_1}{\nu}\right.$, U_0 — средняя скорость жидкости в узкой части канала с радиусом R_1 $\left.\right)$ и высоте уступа $h=0{,}04\ R$—$0{,}6\ R$ (R — радиус широкой части канала). Точность расчетов повышается, а время, необходимое для получения стационарного решения, сокращается в несколько раз, если в качестве начального приближения использовать значения распределений компонент скорости, полученные для более низких чисел Re. Так, например, максимальный дисбаланс расхода жидкости, движущейся в расширяющемся канале с величиной уступа $h=0{,}132\ R$ при числе $\mathrm{Re}=55$, составляет 5% (время счета 3 часа). Если в качестве начального приближения для компонент скоростей взять решение, полученное при течении жидкости в таком же канале при $\mathrm{Re}=10$, то максимальное значение дисбаланса расхода жидкости — 1,4%, время счета — 40 минут.

Таким же образом проводились расчеты при изменении высоты уступа и фиксированном числе Рейнольдса. В этом случае распределение скоростей в узкой части канала берется параболическим, а в широкой используется распределение осевой скорости, полученное при меньшей высоте уступа. Однако существенного отличия от прямого расчета по экономичности вычислений не наблюдается.

Следует также отметить, что на время счета и погрешность определения параметров течения значительно влияет расположение выходной границы потока. Как показали проведенные вычисления, длина участка канала за уступом l, где можно использовать мягкие граничные условия, должна быть не менее $l = h \cdot \sqrt{\mathrm{Re}}$. Деформации профилей скорости и давления имеют место не только в области за скачком сечения, но и на некотором участке канала, расположенном выше по течению от плоскости скачка. При расчетах течения в расширяющемся канале минимальная длина предвключенного участка должна составлять 1/4 l. На рис. 1 пред-

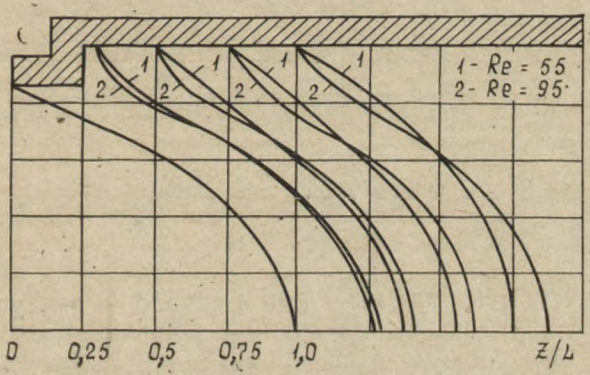


Рис. 1. Эпюры продольной составляющей скорости в расширяющемся канале для различных чисел Рейнольдса ($h = 0{,}13\ R$)

ставлены эпюры осевых скоростей при течении в канале с уступом $h = 0{,}13\ R$, для различных чисел Рейнольдса (1 — $\mathrm{Re} = 55$; 2 — $\mathrm{Re} = 95$). Из рис. 1 видно, что в случае $\mathrm{Re} = 55$ на длине $L = R$ наблюдается стабилизация течения, для $\mathrm{Re} = 95$ на той же длине еще ощущается влияние уступа.

На рис. 2 представлены эпюры скоростей для течения жидкости в канале с уступом $h=0{,}31\ R$ при $\mathrm{Re}=95$. В этом случае наблюдается зона возвратного течения за уступом и более сильная деформация профилей осевых скоростей, расположенных ниже по течению. При расчетах гидродинамики в расширяющемся канале получено, что даже при малых числах Re ($\mathrm{Re}=10$) для $h=0{,}31\ R$ за уступом возникает отрыв пограничного слоя, у поверхности образуется область возвратного течения. При $h=0{,}13$ R наличие зон циркуляции при $R = 10 \div 150$ выявлено не было.

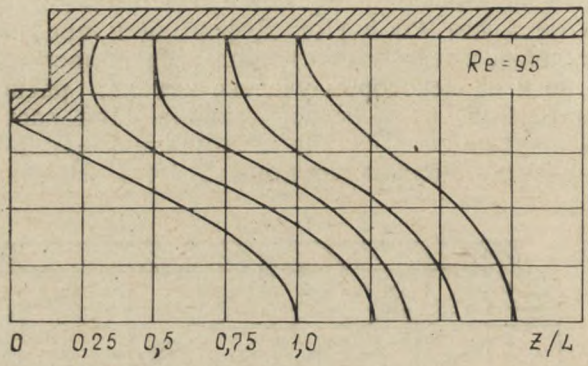


Рис. 2. Эпюры продольной составляющей скорости в расширяющемся канале ($h = 0{,}31\ R$, $\mathrm{Re} = 95$)

В случае течения жидкости в канале с выступом длина участка трубы перед выступом l должна быть порядка $l=h\cdot\sqrt{\mathrm{Re}}$, а длина узкой части канала — не менее 1/4 l. Этот вывод хорошо иллюстрирует рис. 3, где представлены распределения коэффициента сопротивления трения $\xi = \dfrac{4\tau_w}{\rho U_0^2/2}$, $\tau_w = -\mu\dfrac{\partial u}{\partial r}$ — напряжение трения на стенке для различных чисел Рейнольдса и высоты выступа $h = 0{,}07\ R$ при течении в сужающемся канале.

При решении задачи о течении жидкости в канале с диафрагмой необходимо выбирать общую расчетную длину

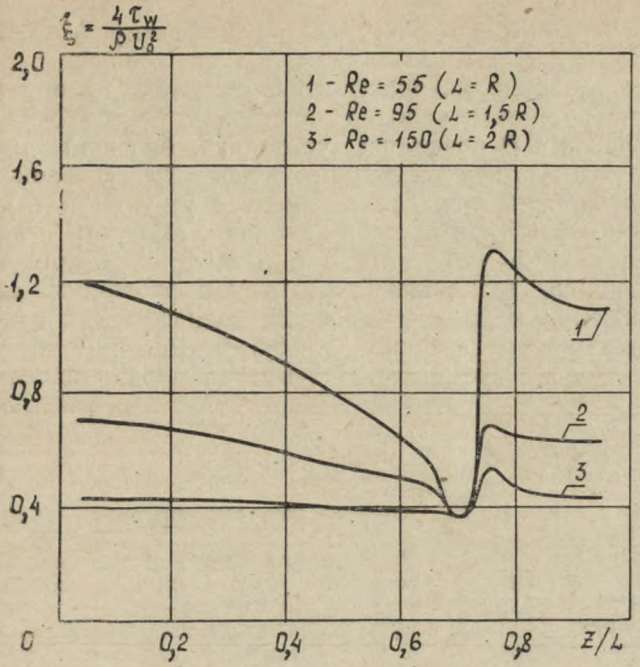


Рис. 3. Распределение коэффициента трения по длине сужающегося канала для различных чисел Рейнольдса

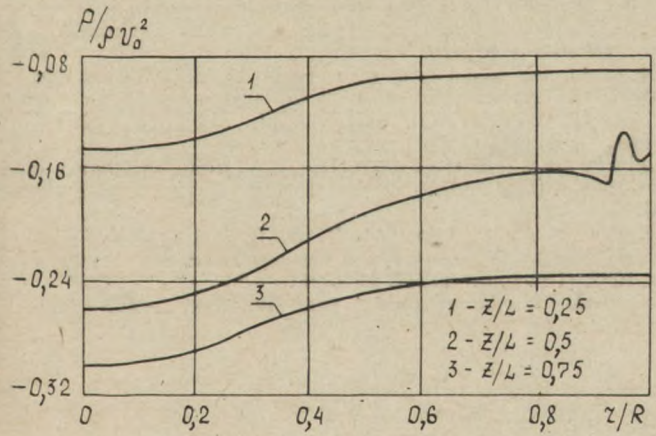


Рис. 4. Распределение давления в радиальном направлении в различных сечениях канала с диафрагмой

канала $L=2h\sqrt{\mathrm{Re}}$ и располагать диафрагму в центре канала.

Использование метода фиктивных точек [9] при аппроксимации граничных условий на стенке для давления и учет в (4) членов с D позволяет устранить большой дисбаланс расхода и неустойчивость счета в области угловой точки. При нахождении решения в канале с уступом в (4) достаточно включать член S_p, для каналов с выступом и диафрагмой необходимо учитывать и S_{p1}. На рис. 4 представлено распределение давления по радиусу в различных сечениях при движении жидкости в канале с диафрагмой $h=0{,}05\ R$, расположенной в сечении $z=0{,}5\ L$ ($\mathrm{Re}=55$). В области скачка сечения наблюдается заметная неоднородность давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Идельчик И. Е. Гидравлические сопротивления. — М.: Госэнергоиздат, 1954. — 315 с.

2. Sigli D., Monnet P. Some new aspects of the slow flow of a viscous fluid through an axisymmetric duct expansion or contraction. 1. Numerical part. — Appl. Sci. Res., 1982, № 3, p. 215—232.

3. Тейлор Т. Д., Ндефо Э. Расчет течения вязкой жидкости в канале при помощи метода расщепления. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. М., 1973, с. 218—229.

4. Ladevéze J. et Peyret R. Calcul numerique d'une solution avec singularité das 'equations de Navier-Stokes : 'ecoulement daus un canal avec variation brusque desection. — Journal de Me'canique, 1974, vol. 13, № 3, p. 367—396.

5. Горовая Е. Н., Ривкинд В. Я. О расчете некоторых плоских и пространственных течений для уравнений Навье — Стокса. — Учен. зап. ЛГУ, 1975, № 384, с. 15—16.

6. Monnet P., Menard C., Sigli D. Some new aspects of the slow flow of a viscous fluid through an axisymmetric duct expansion or contraction. II Experimental part. — Appl. Sci. Res., 1982, 39, № 3, p. 233—248.

7. Holstein and Paddon D. J. A finite difference strategi for re-entrant corner flow. — In: Numerical Methods for Fluid Dinamies, 1982, p. 341—357.

8. Леончук М. П., Сивак З. В. Неявный метод решения трехмерного уравнения Навье — Стокса для вязкой несжимаемой жидкости.— Обнинск, 1982 (Препринт/ФЭИ: № 1325). — 20 с.

9. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980. — 616 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА ТЕПЛА К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕСТАЦИОНАРНОГО СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ПУЛЬСИРУЮЩЕМ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

С. Г. Иванушкин, А. В. Старченко

В последнее время в связи с потребностями сокращения затрат энергии и материалов большое внимание уделяется изучению методов интенсификации теплоотдачи и повышения энергетической эффективности теплообменных аппаратов [1]. Цель таких исследований обычно заключается либо в увеличении тепловой производительности существующих теплообменников, либо в уменьшении их габаритов. Кроме того, повышая скорость теплопереноса, можно избежать нежелательных последствий, связанных с перегревом или даже разрушением конструкции, окружающей поток.

Одним из перспективных путей интенсификации процессов переноса тепла является создание вынужденных колебаний жидкости в каналах [2]. Исследованию этого способа воздействия на теплоотдачу при турбулентном течении было посвящено большое количество экспериментальных работ, результаты которых, однако, зачастую оказывались противоречивыми. Кроме того, не было проведено удовлетворительного теоретического анализа этой проблемы. Это было связано, по-видимому, с трудностями моделирования турбулентного переноса тепла и количества движения при неустановившемся турбулентном движении жидкости. В настоящее время получили развитие полуэмпирические теории турбулентности, основанные на уравнениях переноса для пульсационных характеристик, способные адекватно описывать турбулентную структуру потока и ее взаимодействие с осредненными величинами.

Целью данной работы является теоретическое исследование влияния синусоидальных колебаний расхода жидкости на турбулентную структуру переноса тепла и интенсивность теплоотдачи на базе современных моделей турбулентности.

Рассматривается нестационарный сопряженный теплообмен при турбулентном стабилизированном течении вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе. Теплофизические свойства принимаются постоянными, внутренние источники тепла отсутствуют. Турбулентное движение жидкости и теплоперенос считаются осесимметричными в среднем. Нестационарность процесса обусловлена скачкообразным изменением температуры среды в начальный момент времени и синусоидальными колебаниями расхода. Система уравнений в безразмерной форме запишется следующим образом:

$$\frac{1}{Zh}\frac{\partial U}{\partial \tau}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left[R(1+\varepsilon_\tau)\frac{\partial U}{\partial R}\right]-\frac{\partial P}{\partial Z},\quad 2\int_0^1 URdR=1+\alpha\sin 2\pi\tau; \tag{1}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Fo}}\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau}+\mathrm{Pr}\,U\frac{\partial\theta_1}{\partial Z}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\theta_1}{\partial R}\right)-\frac{\mathrm{PrRe}}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\overline{v'\theta'})+$$
$$+\mathrm{Br}\,(1+\varepsilon_\tau)\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)^2,\quad 0\leqslant R\leqslant 1; \tag{2}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Fo}}\frac{\partial\theta_2}{\partial\tau}=K_a\left[\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\theta_2}{\partial R}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}^2}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial Z^2}\right],\quad 1\leqslant R\leqslant 1+K_R; \tag{3}$$

$$R=0:\frac{\partial U}{\partial R}=\frac{\partial\theta_1}{\partial R}=0;\quad R=1+K_R:\theta_2=1; \tag{4}$$

$$R=1:U=0,\quad \theta_1=\theta_2,\quad K_\lambda\frac{\partial\theta_1}{\partial R}=\frac{\partial\theta_2}{\partial R};\quad Z=0:\theta_1=\theta_2=0; \tag{5}$$

$$Z=Z_к:\frac{\partial^2\theta_2}{\partial Z^2}=0;\quad \tau=0:\theta_1=\theta_2=0,\quad U=U_0(R). \tag{6}$$

Здесь $\mathrm{Zh}=\nu\tau_0/r_1^2$, $\mathrm{Pr}=\nu/a_1$, $\mathrm{Re}=u_{ср}r_1/\nu$, $\mathrm{Fo}=\mathrm{Zh}/\mathrm{Pr}$. $\mathrm{Br}=\dfrac{\rho\nu u_{ср}^2}{\lambda_1(T_c-T_{10})}$ — критерии Жуковского, Прандтля, Рейнольдса, Фурье, Бринкмана; $K_\lambda=\lambda_1/\lambda_2$; $K_a=a_2/a_1$; $K_R=(r_2-r_1)/r_1$; $U=u/u_{ср}$; $\theta_{1,2}=\dfrac{T_{1,2}-T_{10}}{T_c-T_{10}}$; $Z=\dfrac{x}{\mathrm{Re}\cdot r_1}$; $R=\dfrac{r}{r_1}$; $\varepsilon_\tau=\dfrac{\nu_т}{\nu}$;

$$P = \frac{p}{\rho u_{ср}^2}; \quad \overline{u'v'} = \overline{(u'v')}_{разм}/u_{ср}^2; \quad \overline{v'\theta'} = \frac{\overline{(v'\theta')}_{разм}}{u_{ср}(T_c - T_{10})};$$

$u_{ср}$ — средняя скорость стационарного течения; $\tau_0 = 2\pi/\omega$ — период колебаний; ν, a, λ, ρ — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности, теплопроводности, плотность; α, ω — безразмерная амплитуда и частота колебаний расхода. Индексы 1 и 2 соответствуют жидкости и твердому телу (стенке). При условиях, рассматриваемых в данной задаче, $Br \simeq 10^{-5}$.

Для определения коэффициента турбулентной вязкости ε_τ в данной работе используется однопараметрическая модель турбулентности Васильева-Квона [3], которая хорошо себя зарекомендовала при исследовании пульсирующих с умеренными частотами течений в круглой трубе [3, 4],

$$\frac{1}{Zh}\frac{\partial E}{\partial \tau} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left[R(1 + \varkappa\varepsilon_\tau)\frac{\partial E}{\partial R}\right] + \varepsilon_\tau\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)^2 - \frac{c_1(1+\varkappa\varepsilon_\tau)E}{L^2}; \tag{7}$$

$$L = 0{,}37 - 0{,}24R^3 - 0{,}13R^4, \quad \varkappa = 0{,}4, \quad c_1 = 3{,}93; \tag{8}$$

$$\varepsilon_\tau = 0{,}2\,Re_\tau[1 - \exp(-\sigma_2 Re_\tau^2) + \sigma_3\sqrt{Re_\tau}\exp(-\sigma_1 Re_\tau^2)]; \tag{9}$$

$$Re_\tau = Re\sqrt{E}L, \quad \sigma_1 = 0{,}0004, \quad \sigma_2 = 0{,}00021, \quad \sigma_3 = 0{,}02; \tag{10}$$

$$R = 0 : \frac{\partial E}{\partial R} = 0; \quad R = 1 : E = 0; \quad \tau = 0 : E = E_0(R). \tag{11}$$

Здесь E, L — энергия и масштаб турбулентности.

Для замыкания уравнения энергии (2) в настоящее время используются разнообразные подходы, различающиеся по уровню сложности и степени входа эмпирической информации. Одним из популярных способов является выбор соотношения $-\overline{v'\theta'} = \frac{\varepsilon_\tau}{RePr_\tau}\frac{\partial\theta_1}{\partial R}$ и задание турбулентного числа Прандтля Pr_τ по какой-либо эмпирической или теоретической формуле. Однако этот подход малоинформативен и может привести к неудовлетворительным результатам при расчетах сложных типов теплопереноса [5]. В связи с этим в данной работе для замыкания уравнения энергии используется дифференциальное уравнение для плотности турбу-

лентного теплового потока, полученное на основании замыкающих соотношений, предложенных Б. А. Коловандиным [6] и развитых затем в работах П. Л. Максина, Б. С. Петухова, А. Ф. Полякова (например, [7]):

$$\frac{1}{\mathrm{Zh}}\frac{\partial\overline{v'\theta'}}{\partial\tau}+U\frac{\partial\overline{v'\theta'}}{\partial Z}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left[R\left(\frac{1+\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}}+c_2\varepsilon_\tau\right)\frac{\partial\overline{v'\theta'}}{\partial R}\right]+$$

$$+\frac{\varepsilon_\tau}{\mathrm{Re}}\frac{\partial U}{\partial R}\frac{\partial\theta_1}{\partial Z}-\mathrm{Re}\,\overline{v'^2}\frac{\partial\theta_1}{\partial R}-c_3\mathrm{Rr}\,\frac{\overline{v'\theta'}\sqrt{E}}{L}-$$

$$-\frac{\overline{v'\theta'}}{R^2}-c_4\frac{1+\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}}\frac{\overline{v'\theta'}}{L_{v\theta}^2}\ ; \qquad (12)$$

$$\tau=0:\overline{v'\theta'}=(\overline{v'\theta'})_0;\ Z=0:\overline{v'\theta'}=(\overline{v'\theta'})_{\mathrm{вх}};$$

$$R=0:\overline{v'\theta'}=0;\ R=1:\overline{v'\theta'}=0. \qquad (13)$$

$$L_{v\theta}=L\,(1+0{,}871/\sqrt{\mathrm{Pr}}),\ c_2=0,\ c_3=1{,}5,\ c_4=10{,}0. \qquad (14)$$

Константы c_2, c_3, c_4 подбирались на основе соображений, рассмотренных в [7]. Для определения v'^2 использовалось следующее уравнение:

$$\frac{1}{Zh}\frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial\tau}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left[R\,(1+\varkappa\varepsilon_\tau)\frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial R}\right]+\mathrm{Re}\,c_5\frac{E^{3/2}}{L}-$$

$$-\mathrm{Re}\,c_6\frac{\sqrt{E}}{L}\overline{v'^2}-c_7\frac{v''^2}{L^2}\ ; \qquad (15)$$

$$\varkappa=0{,}4;\ R=0:\frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial R}=0;\ R=1:\overline{v'^2}=0;$$

$$\tau=0:\overline{v'^2}=(\overline{v'^2})_0(R); \qquad (16)$$

$c_5=0{,}7$, $c_6=1{,}4$, $c_7=140{,}0$.

Система уравнений (1)—(16) решалась численно методом конечных разностей с использованием двухслойных неявных схем. Метод решения уравнения движения и модельных уравнений подробно изложен в [8]. Для уравнения теплопроводности (3), описывающего распределение температуры в стенке, использовался метод расщепления [9].

Большинство расчетов было проведено на сетке 10×20, сгущающейся вблизи твердой поверхности. Сгущение узловых точек задавалось аналитически с помощью преобразования координат

$$\{Z,\ R\}\to\{Z,\ \eta\}:\eta=\ln(1-R+\delta), \qquad (17)$$

где δ — параметр преобразования, который выбирался таким образом, чтобы в вязком подслое находилось не менее 5—7 узловых точек. Различие между числами Нуссельта, полученными на сетках с разной плотностью узлов 10×20 и 10×50, не превышало 1%.

Для тестирования рассмотренной выше модели турбулентности были проведены расчеты стационарного стабилизированного теплообмена в круглой трубе ($Pr=0{,}71$; $Re_d=3{,}25\cdot10^4$; $2{,}6\cdot10^5$). На рис. 1 представлены распределения турбулентного числа Прандтля и плотности турбулентного

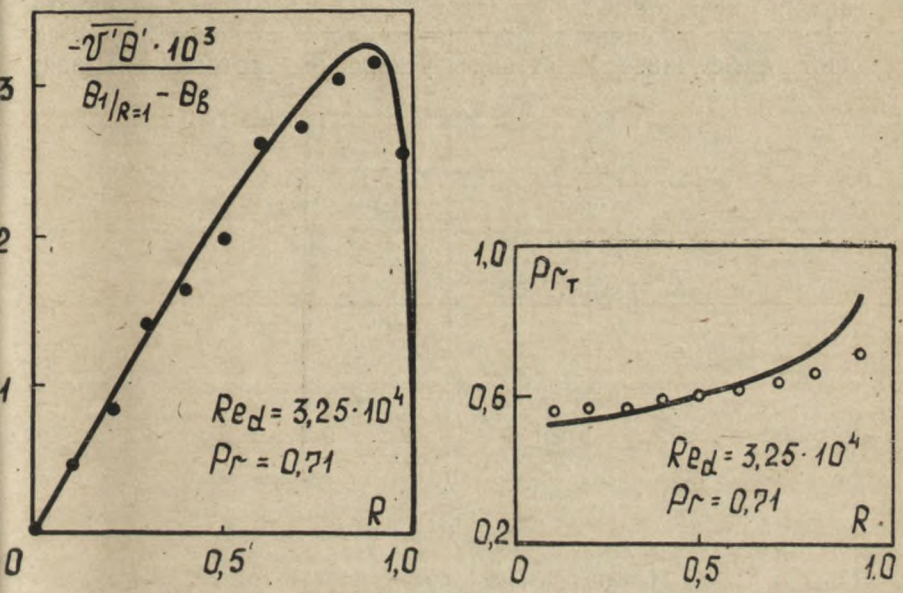


Рис. 1. Сравнение рассчитанных значений турбулентного числа Прандтля и плотности турбулентного теплового потока с данными [10]

теплового потока, полученные из расчетов, и экспериментальные данные [10]. Имеет место хорошее согласование. При сравнении рассчитанных чисел Nu и вычисленных из эмпирической зависимости $Nu=0{,}021\,Re_d^{0,8}\,Pr^{0,4}$ в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса и Прандтля относительная погрешность не превышала 5%.

Эти результаты позволили провести расчеты нестационарного сопряженного теплообмена при турбулентном пульсирующем течении в круглой трубе на основе рассмотренной выше модели турбулентного переноса тепла. Основные результаты были получены для чисел Рейнольдса $Re_d = 1{,}5 \cdot 10^4 \div 3{,}2 \cdot 10^4$ и чисел Прандтля $Pr = 0{,}7 \div 15$ на начальном термическом участке при $x/d < 20$.

На рис. 2 представлено изменение плотности турбулентного теплового потока от R для различных значений фазового угла колебаний расхода $\varphi = 2\pi\tau$ ($\varphi = 0°$, 90°, 180°, 270°). При ускорении движения потока ($\varphi = 90°$) происходит снижение интенсивности турбулентности в ядре течения, приводящее к уменьшению доли турбулентного переноса тепла за счет диффузии. У стенки ускорение потока вызывает

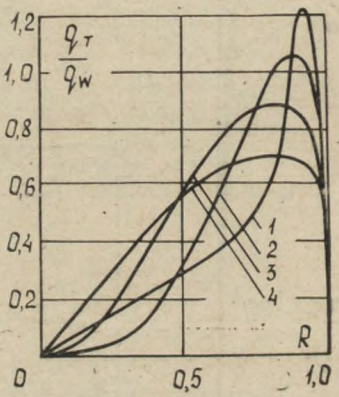


Рис. 2. Распределение плотности турбулентного теплового потока для различных значений фазового угла колебаний ($Re_d = 1{,}5 \cdot 10^4$; $Pr = 4{,}68$; $\alpha = 0{,}5$; $Zh = 0{,}0067$; $x/d = 14$, $K_R = 0{,}1$; $K\lambda = 0{,}01$; $K_a = 75{,}0$; *1*—$\varphi = 0°$; *2*—$\varphi = 90°$; *3*—$\varphi = 180°$; *4*—$\varphi = 270°$)

уменьшение толщины вязкого подслоя, которое, в свою очередь, приводит к росту вклада турбулентной диффузии тепла в уравнении баланса энергии в этой области. При замедлении течения наблюдается противоположная картина. Локальные числа Нуссельта существенным образом зависят от фазового угла, значительно превышая (при ускорении) свои стационарные значения. Распределение температур в стенке все время остается нестационарным и определяет-

ся условиями протекающего в жидкости теплообмена. При совместном действии скачка температуры среды и пульсаций расхода в начальные моменты времени наблюдается сложная картина изменения турбулентных характеристик теплообмена. В этом случае турбулентное число Прандтля, вычисляемое по дифференциальной модели, существенно зависит от времени как в пристеночной области, так и вдали от стенки.

При исследовании влияния амплитуды и частоты колебаний расхода на интенсивность теплоотдачи расчеты выявили повышение теплопереноса с ростом амплитуды колебаний (рис. 3), что согласуется с выводами эксперименталь-

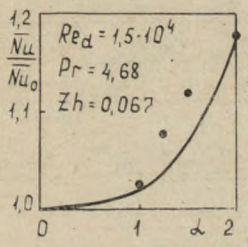


Рис. 3. Влияние амплитуды колебаний на теплообмен

ной работы [11]. Изменение числа Жуковского ($10^{-3} < Zh < 10^2$) также оказывает влияние на среднюю теплоотдачу. При уменьшении Zh наблюдается интенсификация теплоотдачи до 20—25% (рис. 4).

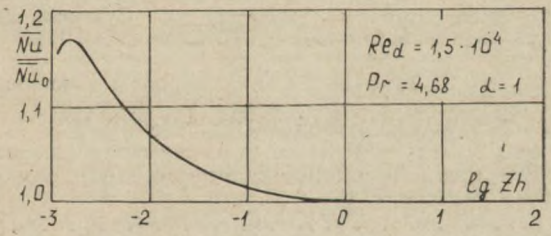


Рис. 4. Влияние частоты колебаний на среднюю теплоотдачу

В данной работе выявлялось наличие каких-либо ограничений, связанных с использованием формул для турбулент-

ного числа Прандтля [12, 13] при изучении рассматриваемого класса задач нестационарного сопряженного теплообмена. Получено, что те формулы, которые дают хорошие результаты при расчетах стационарного теплообмена, правильно описывают и нестационарный сопряженный теплообмен при пульсирующем течении жидкости в трубе. Наиболее удачной для исследования теплоотдачи в пристенных течениях в выбранном диапазоне чисел Прандтля является формула П. И. Гешева [12]

$$\mathrm{Pr}_т = \mathrm{Pr}\,\frac{1 + y_+^2/2\Delta - \exp(-y_+/\sqrt{\Delta})}{1 + \mathrm{Pr}\,y_+^2/2\Delta - \dfrac{\Lambda}{1+\Lambda}\exp(-y_+\sqrt{\mathrm{Pr}/\Delta})}, \quad \Delta = 20, \tag{18}$$

$$y_+ = \mathrm{Re}\sqrt{\frac{c_f}{2}}(1-R), \quad \Lambda = \frac{1}{K_\lambda\sqrt{K_a}} = \sqrt{\lambda_2\rho_2 c_2/\lambda_1\rho_1 c_{p_1}},$$

которая учитывает влияние материала стенки на теплоперенос.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берглс А. Интенсификация теплообмена. — В кн.: Теплообмен. Достижения. Проблемы. Перспективы. М.: Мир, 1983, с. 145—192.
2. Федоткин И. М. Интенсификация технологических процессов. — Киев: Выща школа, 1979. — 344 с.
3. Васильев О. Ф., Квон В. И. Неустановившееся турбулентное течение в трубе. — Журн. прикл. мех. техн. физ., 1971, № 6, с. 132—140.
4. Букреев В. И., Шахин В. М. Статистически нестационарное течение в трубе. — Новосибирск, 1981. — 77 с. — Рукопись представлена Институтом гидродинамики СО АН СССР. Деп. в ВИНИТИ 16 февраля 1981, № 866—81 Деп.
5. Петухов Б. С. Турбулентность в теории теплообмена. — В кн.: Тепломассообмен-VI: Проблемные доклады VI Всесоюзной конференции по тепломассообмену. Минск: ИТМО, 1981, ч. 1, с. 21—51.
6. Колобандин Б. А. К расчету основных характеристик теплообмена в турбулентных течениях со сдвигом. — В кн.: Тепломассоперенос. Т. 1. М.: Энергия, 1968, с. 154—165.
7. Максин П. Л., Петухов Б. С., Поляков А. Ф. Расчет турбулентного переноса тепла при стабилизированном течении в трубах. — В кн.: Тепломассообмен-V. Минск: ИТМО, 1976, т. 1, ч. 1, с. 14—24.
8. Старченко А. В. Расчет неустановившегося течения в круглой трубе на основе двухпараметрических моделей турбулентности. — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1984, с. 29—37.
9. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 592 с.

10. Ибрагимов М. Х., Субботин В. И., Таранов Г. С. Пульсации скорости, температуры и их корреляционные связи при турбулентном течении воздуха в трубе. — ИФЖ, 1970, т. 19, № 6, с. 1060—1069.

11. Федоткин И. М., Заец А. С. Обобщение опытных данных по теплоотдаче к пульсирующему потоку жидкости в горизонтальной трубе. — Изв. вузов. Энергетика, 1968, № 11, с. 72—76.

12. Гешев П. И. Линейная модель пристенного турбулентного переноса. — Новосибирск, 1981. — 40 с. Препринт/ИТФ СО АН СССР: № 73—81.

13. Reynolds A. J. Ihe prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers. — Int. J. Heat Mass Transfer, 1975, v. 18, № 9, pp. 1055—1070.

УНИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ ДИРЕКТИВ

О. П. Кадиев, В. А. Лосев

Увеличение объема и сложности задач газовой динамики обусловило переход от разработки отдельных программ к разработке пакетов прикладных программ (ППП). Важной характеристикой ППП является степень совершенства предоставляемого им сервисного обеспечения. Под таковым обычно понимаются средства, обеспечивающие удобство работы с пакетом, хорошую диагностику, защиту от сбоев и т. п.

Возрастающее значение в подобных системах приобретают диалоговые средства. Причем наиболее актуальным становится создание такого программного обеспечения, которое предоставило бы рядовому пользователю возможности для модификации языка, предложенного разработчиками.

Ниже предлагается алгоритм, не ориентированный ни на какое предварительно фиксированное подмножество директив, напротив он рассчитан на их накопление в процессе эксплуатации. Последнее обеспечивается специальной директивой, единственной закладываемой в систему на момент ее формирования.

Другой особенностью алгоритма является широкая свобода выбора имен, присваиваемых объектам системы. (Под объектами здесь и далее понимаются всевозможные таблицы, документы, служебные слова, подпрограммы и т. п.— все то, чье имя «известно» системе и обрабатывается ею.) К числу основных правил формирования имен относятся следующие:

— имя может состоять из нескольких слов;
— два имени могут иметь общие слова, входящие как в одно, так и в другое;
— нет двух имен, полностью совпадающих, по крайней мере одно из них должно содержать слова, отсутствующие в другом;

— два имени, отличающиеся лишь разделителями, считаются совпадающими;
— имя не может начинаться числом (за исключением самого числа), не может начинаться и заканчиваться разделителем. В алгоритме четко прослеживается 3 последовательных этапа.

1. Разборка. Суть первого из них состоит в разбиении текста поступившей от пользователя директивы на последовательность элементов (слова, числа, разделители)

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_\kappa, \qquad (1)$$

которые в соответствии с порядком, заданным (1), заносятся в массив разборки.

2. Формальная трансляция. Выполняется в два приема, первый из которых состоит в определении наименований всех объектов, какие только могут быть сформированы на базе последовательности (1) без изменения заданного ею порядка.

На практике реализуется путем сравнения последовательностей:

$$\{S_i\}, \{S_i, S_{i+1}\}, \ldots, \{S_i, S_{i+1}, \ldots, S_\kappa\}.$$

$$(i = \overline{1, \kappa})$$

с набором имен, «известных» машине. Результат сравнения удобно представить в виде матрицы (назовем ее матрицей имен *MI*) с заполненной верхней частью, где на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит код соответствующего имени, если последовательность $S_i, S_{i+1}, \ldots, S_j$ таковым является.

Однако формирование матрицы на этом не заканчивается. Ведь каждое имя было найдено и занесено сюда вне связи с другими, тогда как ясно,что если (1) заменить последовательностью имен, то между парой соседних могут быть только разделители:

$$R_0, J_1, R_1, J_2, R_2, \ldots, J_n, R_n, \qquad (2)$$

где J_j — имя, R_j — разделитель. Следовательно, если за именем J следует слово, не являющееся начальным ни для какого другого, то такое имя подлежит исключению из матрицы.

В итоге получено минимально возможное (при формальном подходе) подмножество имен, из которого предстоит выбрать логически осмысленную цепочку (2). Это уже задача третьего этапа. Но в силу того что исходное множество имен, «подозрительных» на принадлежность директиве, све-

лось в общем-то к небольшому своему подмножеству, решение ее упростилось. В этом собственно и состоит назначение первых двух этапов.

3. Логическая трансляция. Термин «логическая» в наименовании третьего этапа указывает лишь на то, что среди (2) ищется последовательность, поддающаяся логическому осмыслению, но отнюдь не на логический характер действий машины, которые шаблонны.

Алгоритм строится в расчете на информационную осведомленность машины и на соблюдении договоренностей (пользователь не может задать информацию в форме, сведения о структуре которой машине не были предварительно сообщены).

Исходным пунктом рассуждений является то, что ЭВМ может выполнять только те действия, которым ее «научили» — ввели соответствующие подпрограммы. Для инициации любой из них машине достаточно сообщить лишь набор начальных данных (НД):

<НД>::=<имя подпрограммы> (<список фактических параметров>) (3)

Данная форма обращения принята в алгоритмических языках. Взаимосвязь между параметрами здесь носит формальный характер и однозначно определяется их порядком в правой части, который известен и соблюдается как пользователем, так и подпрограммой-исполнителем. Реально же взаимосвязи учтены алгоритмами подпрограмм.

Что касается вопроса установления логической совместимости элементов последовательности (3), то он заменен обычным сравнением поступившего списка с «известным» подпрограмме. Если налицо совпадение, то с логикой все в порядке. В противном случае выдается сообщение об ошибке.

Аналогичный подход применяется в предлагаемом алгоритме с тем отличием, что он не ограничивает множество форм представления начальных данных: даже для одной и той же подпрограммы их может быть несколько.

Однако это сказывается лишь на некотором усложнении процесса сравнения имен директивы, накопленных в *MJ*, с эталонными формами, не требуя принципиально новых решений.

Иными словами, третий этап сводится к задаче на сравнение, которая гораздо проще первоначально сформулиро-

ванной, хотя и достаточно нетривиальна. Получение ее решения сопряжено с организацией в машине хранения:

— множества допустимых форм представления начальных данных, записанных в виде формул Бэкуса и содержащих ссылку на соответствующую процедуру обработки;

— сведений о принадлежности объектов системы к тому или иному классу.

По второму типу информации необходимо дать некоторые пояснения. Дело в том, что фактическими параметрами подпрограмм являются объекты системы. В то же время формальный параметр описывает некоторый класс объектов, обладающих определенным набором свойств, используемых подпрограммой. Задание соответствия между именем объекта и принадлежностью его тому или иному классу обеспечивает переход от (2) к

$$R_0,\ F_1,\ R_1,\ F_2,\ R_2,\ \ldots,\ F_n,\ R_n, \qquad (4)$$

где F_i — формальный параметр. Именно так выглядит запись формулы Бэкуса в общем виде. То есть имеются все основания сравнить (4) с «известным» машине множеством допустимых форм представления начальных данных. Если результат положительный и решение единственно, то по ссылке устанавливается имя соответствующей подпрограммы, которой и передается управление. В противном случае выдается сообщение об ошибке.

На схеме принцип действия алгоритма показан на основе его информационных потоков.

$$\{S_i\} \rightarrow \begin{bmatrix} R1_0,\ I1_1,\ldots,\ R1_{l1} \\ R2_0,\ I2_2,\ldots,\ R2_{l2} \\ \cdots \\ RM_0,\ IM_1,\ldots,RM_{lm} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R1_0,\ F1_1,\ldots,\ R1_{l1} \\ R2_0,\ F2_1,\ldots,\ R2_{l2} \\ \cdots \\ RM_0,\ FM_1,\ldots,\ RM_{lm} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{matrix} PR1,\ B1_1 \\ PR1,\ B1_{k1} \end{matrix}\right\} \\ \left\{\begin{matrix} PR2,\ B2_1 \\ PR2,\ B2_{k2} \end{matrix}\right\} \\ \cdots \\ \left\{\begin{matrix} PRN,\ BN_1 \\ PRN,\ BN_{kn} \end{matrix}\right\} \end{array}\right] \longleftrightarrow \begin{bmatrix} HD1 \\ HD2 \\ \cdots \\ HDN \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} PR1 \\ PR2 \\ \cdots \\ PRN \end{bmatrix}.$$

Здесь *PRJ* — имя подпрограммы, реализующей ту или иную операцию; *HDJ* — отвечающий ей набор начальных данных; $<PRJ, BJ_к>$ — одна из конкретных форм представления *HDJ: PRJ* — имя подпрограммы, $BJ_к$ — формула Бэкуса. Стрелками показаны направления, в которых установлены связи между элементами схемы.

ИНВАРИАНТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРУППА ГАЛИЛЕЯ

В. А. Коробицын

Инвариантность уравнений механики относительно группы Галилея является одной из основных аксиом механики Ньютона. Поэтому математические модели, описывающие общие физические закономерности движения сплошной среды в рамках ньютоновской механики, допускают группу Галилея [1]. Один из основных критериев, предъявляемый к конечно-разностным моделям сплошной среды — наличие законов сохранения, носит инвариантный характер. Поэтому разностные схемы, в основу аппроксимации которых положены физически инвариантные законы сохранения, также должны быть инвариантны относительно группы Галилея.

Как отмечается в [2—3], для разностных схем один из главных источников неточностей расчета связан с отсутствием инвариантности разностной схемы относительно группы Галилея. Из-за трудностей группового анализа разностных схем в [3] предложено изучать инвариантность разностных схем с позиций дифференциальных приближений.

Цель настоящей работы заключается в построении разностных и дифференциально-разностных схем газовой динамики в переменных Лагранжа, инвариантных относительно группы Галилея в классическом смысле. Установлена связь инвариантности дифференциально-разностных схем с законами сохранения массы, импульса, энергии, момента импульса и движения центра масс.

1. В евклидовом пространстве $R^2(x, y) \equiv Q$ с декартовой системой координат $x^1 = x$, $x^2 = y$, $r = ix + jy$, i, j — орты координатных осей, введем множество дискретных точек, образующее регулярную согласованную сетку ω_h ячеистой структуры [4], по структуре эквивалентную прямоугольной сетке ω_h^0 $G \equiv R^2(\alpha, \beta)$ с системой прямоугольных координат α, β. Шаги сетки ω_h^0 обозначим $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$. Каждый узел $\omega \in \omega_h$ и соответствующий узел ω^0 в G для индексации свя-

жем с точкой целочисленной решетки $z^2(i, j)$. Через Ω_h обозначим множество центров ячеек в Q: $\Omega_h = \{\Omega_{ij} \in Q\}$. Ячейке с центром Ω_{ij} соответствует объем $\tilde{V}_{ij}$ (площадь ячейки), а каждому узлу ω_{ij} припишем приузловой объем V_{ij}, как некоторое усреднение объемов окружающих ячеек. Под Ω_h^0 будем понимать множество центров ячеек Ω_{ij}^0 в G.

Пусть ζ — элемент одной из сеток ω_h или Ω_h (ω_h^0 или Ω_h^0). Обозначим через H_ζ множество сеточных функций, заданных на сетке ζ_h, а через $H_\zeta^0 \subset H_\zeta$ — множество функций с компактным носителем на ζ_h. Для элементов этих пространств применяем безындексные обозначения $\varphi_{ij} = \varphi_\omega = \varphi$, $\varphi_{ij} \in H_\omega$, $\psi_{ij} = \psi_\Omega = \psi$, $\psi_{ij} \in H_\Omega$.

Пусть заданы два типа разностных производных по x^κ ($\kappa = 1,2$) с операторами $\nabla_{\omega\kappa}: H_\Omega \to H_\omega$, $\nabla_{\Omega\kappa}: H_\omega \to H_\Omega$, которые сопряжены по Лагранжу, то есть для функций $\varphi \in H_\omega^0$, $\psi \in H_\Omega^0$ выполняются тождества

$$\sum_{\omega_h} \tilde{V}\varphi\nabla_{\omega\kappa}\psi + \sum_{\Omega_h} V\psi\nabla_{\Omega\kappa}\varphi = 0, \quad \kappa = 1,2. \tag{1}$$

Определим разностные операторы $\nabla_\omega = i\nabla_{\omega 1} + j\nabla_{\omega 2}$, $\nabla_\Omega = i\nabla_{\Omega 1} + j\nabla_{\Omega 2}$ как формальные векторы. Действие этих операторов на скалярные векторные и тензорные функции из H адекватно некоммутативной операции умножения векторов ∇_ω, на соответствующие функции и порождает класс L разностных операторов векторного анализа, например,

$$\nabla_\omega\psi \equiv \mathrm{GRAD}\varphi = i\nabla_{\omega 1}\psi + j\nabla_{\eta 2}\psi, \quad H_\Omega \to H_\omega;$$

$$\nabla_\Omega \cdot W \equiv \mathrm{DIV}\, W = \nabla_{\Omega 1}u + \nabla_{\Omega 2}v, \quad H_\omega \to H_\Omega, \quad W = iu + jv;$$

$$\nabla_\Omega \times W \equiv \mathrm{ROT}\, W = \kappa(\nabla_{\Omega 1}v - \Delta_{\Omega 2}u), \quad H_\omega \to H_\Omega \text{ и т. д.} \tag{2}$$

3. Для использования операторов $\nabla_{\omega\kappa}$, $\nabla_{\Omega\kappa}$ необходимо один определяющий задать, а ему сопряженный найти из условия (1). Опишем класс определяющих операторов, исходя из множества операторов разностных производных на ортогональных сетках.

Пусть на сетках ω_h^0 и Ω_h^0 заданы сопряженные операторы разностных производных $\nabla_{\omega\kappa}^0$, $\nabla_{\Omega\kappa}^0$ ($\kappa = 1,2$) по переменным α, β, причем $\nabla_{\omega 2}^0\nabla_{\Omega 1}^0 = \nabla_{\omega 1}^0\nabla_{\Omega 2}^0$. Не ограничивая общности, будем строить определяющий оператор на сетке Ω_h. В плоскости (x, y) рассмотрим некоторую функцию $\varphi \in H_\omega^0$. Учитывая взаимно однозначное соответствие между сетками ω_h

и ω_h^0, определим эту функцию на сетке ω_h^0. Потребуем, чтобы разностные производные $\nabla_{\Omega\kappa}\varphi$, $\nabla^0_{\Omega\kappa}\varphi$ $(\kappa = 1, 2)$ были связаны уравнениями

$$\nabla^0_{\Omega 1}\varphi = \nabla_{\Omega 1}\varphi\nabla^0_{\Omega 1}x + \nabla_{\Omega 2}\varphi\nabla^0_{\Omega 1}y;$$
$$\nabla^0_{\Omega 2}\varphi = \nabla_{\Omega 1}\varphi\nabla^0_{\Omega 2}x + \nabla_{\Omega 2}\varphi\nabla^0_{\Omega 2}y, \tag{3}$$

которые разрешим относительно искомых $\Delta_{\Omega\kappa}\varphi$, если определитель этой системы

$$J_\Omega = \frac{\nabla_\Omega(x, y)}{\nabla_\Omega(\alpha, \beta)} \equiv \nabla^0_{\Omega 1}x\nabla^0_{\Omega 2}y - \nabla^0_{\Omega 2}x\nabla^0_{\Omega 1}y$$

отличен от нуля в ω_h^0. Разностный якобиан I_Ω является отношением объема V ячейки в Q к объему $V^\circ = \Delta\alpha\Delta\beta$ ячейки в G, $I_\Omega = V/V^\circ$. Примем последнее соотношение за определение объема ячейки V_{ij}. Система (3) определяет разностные производные на неортогональной сетке [8]

$$\nabla_{\Omega 1}\varphi = \frac{\nabla_\Omega(\varphi, y)}{\nabla_\Omega(\alpha, \beta)} J_\Omega^{-1}, \quad \nabla_{\Omega 2}\varphi \equiv \frac{\nabla_\Omega(x, \varphi)}{\nabla_\Omega(\alpha, \beta)} J_\Omega^{-1}. \tag{4}$$

Аппроксимация разностной схемы следует из (3), (4). Зная оператор $\nabla_{\Omega\kappa}$ (4), сопряженный ему $\nabla_{\omega\kappa}$ находится из условия (1). Запишем их в виде

$$\nabla_{\omega 1}\psi = [\nabla^0_{\omega 1}(\psi\nabla^0_{\Omega 2}y) - \nabla^0_{\omega 2}(\psi\nabla^0_{\Omega 1}y)]\tilde{J}^{-1};$$
$$\nabla_{\omega 2}\psi = [\nabla^0_{\omega 2}(\psi\nabla^0_{\Omega 1}x) - \nabla^0_{\omega 1}(\psi\nabla^0_{\Omega 2}x)]\tilde{J}^{-1}, \tag{5}$$

где $\tilde{I} = \tilde{V}/V^\circ$.

4. Известно, что взаимосвязь законов сохранений в классической механике определяется структурой группы Галилея (сдвиг времени $t' = t + a$ и координат $x^{i'} = x^i + a^i$, вращения $x^{1'} = x^1\cos a - x^2\sin a$, $x^{2'} = x^1\sin a + x^2\cos a$, переход в равномерно движущуюся систему координат $x^{i'} = x^i + a^i t$). Характерной особенностью дифференциальных операций векторного анализа является их инвариантность относительно преобразований Галилея. Естественно при построении разностных операций векторного анализа требовать сохранения этого свойства.

На плоскости (x', y'), полученной преобразованием $x \to x$, $y \to y'$, операторы, определяемые формулами (4), (5), обозначим через $\nabla_{\zeta\kappa}$, где ζ_h — одна из сеток ω_h или Ω_h.

Будем говорить, что разностный оператор $L_\zeta(\nabla\zeta)\in L$ инвариантен, или допускает группу Галилея, если для любого преобразования этой группы $x_i\to x_i'$ выполнено равенство

$$L_\zeta(\nabla'_\zeta) = L_\zeta(\nabla_\zeta).$$

Поскольку разностные операторы (2) построены, необходимо проверить их инвариантность. Непосредственная проверка показывает, что разностный якобиан J_Ω является инвариантом группы Галилея, так как $J'_\Omega \equiv \nabla^0_{\Omega 1}x'\nabla^0_{\Omega 2}y' - \nabla^0_{\Omega 2}x'\nabla^0_{\Omega 1}y' = J_\Omega$. Далее легко устанавливается справедливость равенств

$$\nabla'_\omega\psi \equiv i'\nabla'_{\omega 1}\psi + j'\nabla'_{\omega 2}\psi = i\nabla_{\omega 1}\psi + j\nabla_{\omega 2}\psi = \nabla_\omega\psi;$$

$$\nabla'_\Omega \cdot W \equiv \nabla'_{\Omega 1}u' + \nabla'_{\Omega 2}v = \nabla_{\Omega 1}u + \nabla_{\Omega 2}v = \nabla_\Omega \cdot W;$$

$$\nabla'_\Omega \times W \equiv \kappa(\nabla'_{\Omega 1}v' - \nabla'_{\Omega 2}u') = \kappa(\nabla_{\Omega 1}v - \nabla_{\eta 2}u) = \nabla_\Omega \times W,$$

которые доказывают инвариантность операторов (2).

Будем называть представление операторов разностных производных в виде (4), (5) инвариантной формой разностного оператора.

Отметим, что при определенной ориентации ортогональной сетки относительно осей координат происходит вырождение шаблона разностного оператора вследствие уменьшения числа точек сетки, необходимых для определения этого оператора. Инвариантная форма разностного оператора требует сохранить эти исчезающие точки шаблона.

5. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений газовой динамики в плоском случае

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,W = 0;$$

$$\rho\frac{dW}{dt} + \mathrm{grad}\,p = 0;$$

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} + p\,\mathrm{div}\,W = 0,$$

где ρ — плотность газа; p — давление; W — вектор скорости; ε — удельная внутренняя энергия. После замены дифференциальных операторов grad, div на соответствующие разностные операторы (2) в инвариантной форме получим диффе-

ренциально-разностную систему уравнений газовой динамики:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla_\Omega \cdot W = 0;$$

$$\tilde{\rho}\frac{dW}{dt} + \nabla_\omega p = 0; \qquad (6)$$

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} + p\nabla_\Omega \cdot W = 0;$$

$\tilde{\rho} \in H_\omega$ — приузловая плотность. Очевидно, что эта система уравнений инвариантна относительно группы Галилея. Учитывая возможность вариационной формулировки уравнений (6), законы сохранения для этих уравнений можно получить на основе допускаемой ими группы [5]. Эта возможность отмечается в [6]. Легко показать, что этими законами являются законы сохранения массы, импульса, энергии, момента импульса и движения центра масс [9].

Дискретизация времени в уравнениях (6), то есть замена лагранжевых производных $\frac{df}{dt}$ на разностные соотношения $f_t \equiv (f^{n+1} - f^n)/\tau$, n — номер временного слоя, τ — шаг по времени, не влияет на инвариантность уравнений, но при этом некоторые законы сохранения не выполняются. Выход здесь в соответствующем временном взвешивании разностных операторов и сеточных функций относительно двух слоев по времени. Система инвариантных разностных уравнений примет вид

$$\tilde{\rho}\tilde{V}W_t + (\tilde{V}\nabla_\omega)^{(0,5)}p^{(\gamma)} = 0;$$

$$V^{(0,5)}\rho_t + \rho^{(0,5)}(V\nabla_\Omega)^{(0,5)} \cdot W^{(0,5)} = 0;$$

$$\rho V\varepsilon_t + p^{(\gamma)}(V\nabla_\omega)^{(0,5)} \cdot W^{(0,5)} = 0,$$

где $f^{(\gamma)} = \gamma f^{n+1} + (1-\gamma) f^n$, $(V_\zeta\nabla_\zeta)^{(0,5)} = (0,5)\,(V_\zeta^{n+1}\nabla_\zeta^{n+1} + V^{\zeta n}\nabla_\zeta^n)$;

$$V^{(0,5)} = V^0\frac{\nabla_\Omega(x^{(0,5)},\ y^{(0,5)})}{\nabla_\Omega(\alpha,\ \beta)}.$$

Отметим, что ранее преобразования разностных уравнений и групповая структура этих преобразований рассматривалась в [10—11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

2. Харлоу Ф. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики. — В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967, с. 316—342.

3. Шокин Ю. И. Метод дифференциального приближения. — Новосибирск: Наука, 1979. — 222 с.

4. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. — Новосибирск: Наука, 1981. — 304 с.

5. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

6. Самарский А. А. Некоторые результаты теории разностных методов. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 7, с. 1155—1171.

7. Головизнин В. М. и др. Об аппроксимации дифференциальных операторов на нерегулярных косоугольных сетках. — М.: 1980. — 33 с. (Препринт/ИПМ АН СССР, № 157).

8. Коробицын В. А., Хе А. И. Дискретные модели несжимаемой вязкой жидкости со свободной поверхностью. — В кн.: Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1984, с. 64—71.

9. Коробицын В. А. Преобразования разностных операторов. — ДАН, 1980, т. 253, № 2, с. 284—287.

10. Коробицын В. А. Преобразования двухслойных разностных операторов. — Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 3, с. 533—536.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОГО СПОСОБА ВЫТЕСНЕНИЯ ВЫСОКОВЯЗКОЙ НЕФТИ

М. П. Костомаров, В. Н. Панков

Применение заводнения при вытеснении нефти из продуктивных пластов дает тем меньший эффект, чем больше отношение подвижностей воды и нефти, т. к. при большом отношении подвижностей вода быстро прорывается в эксплуатационные скважины и обводняет их, а коэффициент нефтеотдачи пластов остается низким. Один из способов увеличения нефтеотдачи при заводнении пластов высоковязкой нефти — введение в воду вяжущих добавок, снижающих ее подвижность и ведущих к увеличению коэффициента охвата пласта заводнением.

В этой работе проводится численное исследование еще одного способа повышения нефтеотдачи пластов, который можно назвать методом «нефтяных оторочек». Суть этого метода заключается в том, что в нагнетательную скважину попеременно закачивается либо вода, либо жидкость, которая по своим свойствам близка к вытесняемой нефти: обладает высокой вязкостью и хорошо смешивается с последней. Предполагается, что создаваемые таким образом оторочки будут способствовать более полному извлечению нефти по сравнению с обычным заводнением.

При математическом моделировании этого способа вытеснения высоковязкой нефти в общем случае следует рассматривать уравнения трехфазной фильтрации. Однако здесь предполагается, что по своим свойствам закачиваемая попеременно с водой высоковязкая жидкость и вытесняемая нефть идентичны и их можно объединить одним термином «высоковязкая нефть», а при решении задачи рассматривать двухфазное течение: вода — «высоковязкая нефть». Упрощая задачу, это допущение имеет один недостаток: при извлечении нефти из эксплуатационной скважины нельзя ответить на вопрос, извлекается ли это пластовая нефть либо

«нефтяная оторочка». После еще целого ряда допущений задача сводится к решению уравнений Баклея-Леверетта

$$\vec{w}_в = -\frac{k}{\mu_в} f_в(s)\operatorname{grad} p,\quad \vec{w}_н = -\frac{k}{\mu_н} f_н(s)\operatorname{grad} p;$$

$$\operatorname{div}(\vec{w}_н + \vec{w}_в) = 0$$

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{w}_в) = 0,$$

где s — водонасыщенность; p — давление; k — проницаемость; $\mu_в$ — вязкость воды; $\mu_н$ — вязкость нефти; $f_в$, $f_н$ — фазовые проницаемости воды и нефти соответственно.

Теоретическая оценка эффективности изложенного метода «нефтяных оторочек» была проведена при решении трех задач. В каждой задаче исследовалось влияние одного из следующих факторов, которые могут привести к повышению нефтеотдачи: гидродинамическое перераспределение насыщенности в пласте вследствие ее изменения на входе, пространственность течения, неоднородность пласта. Все задачи были решены разностно-итерационным методом. Уравнение для насыщенности решено по явной схеме «уголок», ориентированной против потока, а уравнение для давления на каждом слое—методом последовательной верхней релаксации по линиям. При решении задач были приняты следующие условия: проницаемость пласта $k=794{,}5$ мД; вязкость нефти $\mu_н=100$ сП; вязкость воды $\mu_в=1$ сП, фазовые проницаемости для воды и нефти

$$f_в(s) = \left(\frac{s-0{,}12}{0{,}72}\right)^3,\quad f_н(s) = \left(\frac{0{,}72-s}{0{,}6}\right)^3.$$

1. Влияние гидродинамического перераспределения насыщенности на вытеснение высоковязкой нефти исследовано на одномерной задаче Баклея—Леверетта для модели линейного участка пласта (длиной 200 м), между входом и выходом из которого поддерживается постоянный перепад давления, равный 10 атм. Рассмотрено несколько вариантов заводнения, которые сравнивались с обычным заводнением. Результаты расчетов представлены на рис. 1, где в зависимости от времени (время в годах отложено по горизонтальной оси) показаны основные параметры вытеснения. Кривые *1—1′* на этом и последующих рисунках обозначают объем извлеченной нефти вместе с объемом оторочек (в долях объема пор);

кривые *2—2′* — объем вытесненной нефти (объем извлеченной нефти без объема оторочек); кривые *3—3′* — объем извлеченной из пласта воды; кривые *4—4′* — долю воды в потоке жидкости на выходе из пласта. Масштабы всех названных величин отложены по вертикальной оси слева, лишь для объема извлеченной воды масштаб отложен справа. Кривые *1—4* на рисунке характеризуют обычное заводнение; кривые *1′—4′* — заводнение с непрерывной оторочкой, когда водонасыщенность на входе в пласт в течение первых восьми лет изменяется по линейному закону от $s_* = 0{,}12$ до

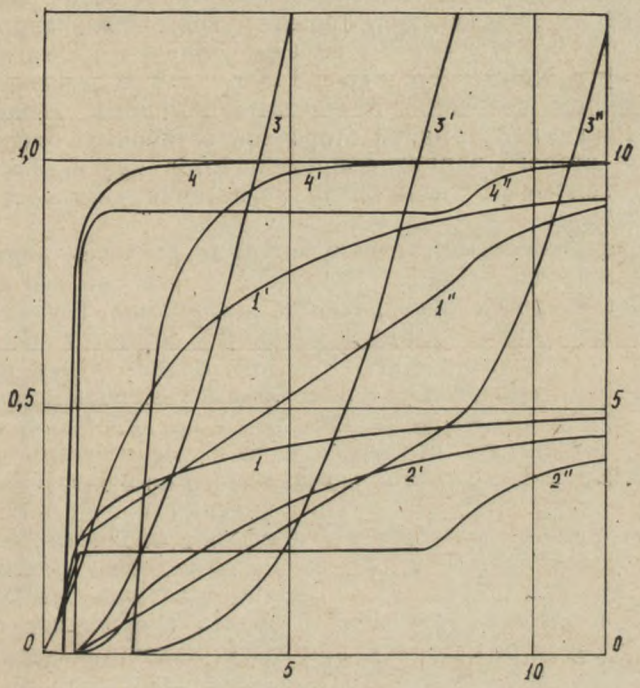


Рис. 1

$s^* = 0{,}72$. Кривые *1″—4″* характеризуют вариант заводнения с нагнетанием в течение первых восьми лет оторочек «нефти» через равные промежутки времени. Интервалы нагнетания «нефти» и воды для этого варианта соответственно равны 0,01 и 0,09 годам, так что общее время цикла равно 0,1 году.

Из рисунка следует, что обычное заводнение приводит к быстрому росту обводненности потока на выходе из пласта и медленному увеличению объема извлеченной нефти после прорыва воды. Для рассматриваемого приема объем извлеченной нефти к пяти годам равен 0,42. При этом объем извлеченной воды достиг 12,9 поровых объема, а обводненность на выходе равна 0,99.

Заводнение с непрерывными оторочками увеличило время безводной эксплуатации пласта от 0,4 до 1,8 года с последующим более плавным ростом обводненности на выходе. Увеличился и объем извлеченной нефти. К пяти годам он достиг 0,78 поровых объема, при этом воды извлечено всего 2,35 объема пор. Однако без объема оторочек объем извлеченной нефти уменьшается до 0,3, что на 0,12 меньше, чем при обычном заводнении. Результаты обычного заводнения и заводнения с непрерывной оторочкой становятся близкими, когда для второго варианта прекращается нагнетание оторочки. Объем оторочки к концу нагнетания достигает 0,48 поровых объема.

Аналогичный результат получен при расчете варианта с циклическим нагнетанием оторочек. Здесь во все время нагнетания оторочек обводненность на выходе (кривая *4'*) и объем вытесненной нефти (кривая *2'*) остаются неизменными, последний равен 0,21. При этом общий объем извлекаемой нефти (кривая *1'*), как и объем извлекаемой воды (кривая *3'*), со временем увеличивается по линейному закону. Следует отметить, что увеличение времени цикла в два раза не повлияло (с точностью до одного процента) на описываемые результаты. После прекращения нагнетания оторочек все кривые приобретают профили, характерные для обычного заводнения, и к 11,5 годам результаты становятся теми же, что для обычного заводнения к пяти годам.

Таким образом, применение оторочек сдерживает и замедляет процесс обводнения, при этом общий объем извлекаемой нефти, по сравнению с обычным заводнением, увеличивается. Однако если из общего объема нефти вычесть объем оторочек, то объем вытесненной нефти оказывается существенно заниженным по сравнению с обычным заводнением. Т. е. применение «нефтяных оторочек» не позволяет превысить нефтеотдачу, которая достигается при обычном заводнении. Увеличить ее можно лишь при условии, что нагнетаемые в пласт оторочки полностью или частично останутся неизвлеченными.

2. Влияние неоднородности на процесс вытеснения нефти с помощью «нефтяных оторочек» исследовано в плоской задаче заводнения пласта, разделенного по ширине на два прослоя разной проницаемости. На боковых гранях пласта выполняются условия непротекания, между разнопроницаемыми участками допускается свободный переток. Между входом и выходом из пласта поддерживается постоянный перепад давления, который, как и для предыдущей задачи, равен 10 атм. Длина пласта 200 м, общая ширина 80 м, ширина разнопроницаемых участков 60 и 20 м. Для более широкого прослоя проницаемость равна 794,5 мД, для более узкого прослоя она увеличена в десять раз.

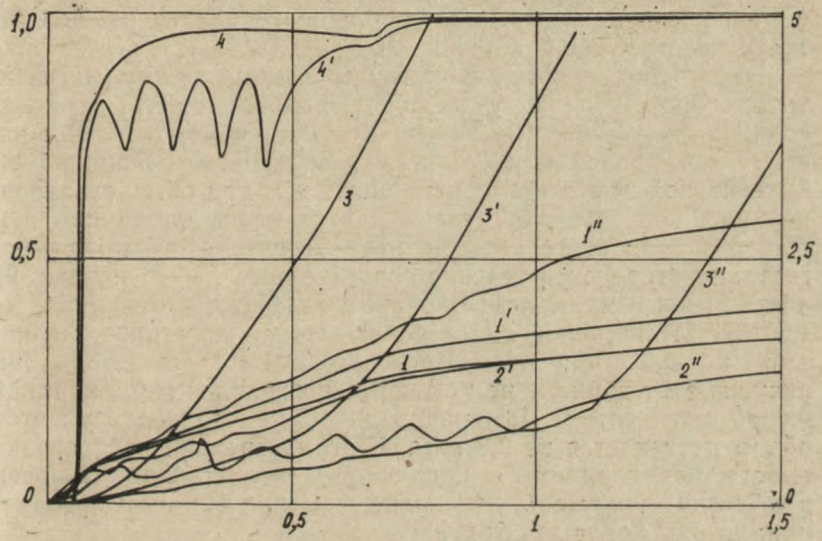


Рис. 2

Для двухслойного пласта было рассмотрено три варианта вытеснения: обычное заводнение и заводнение с циклическим нагнетанием оторочек при различном времени цикла. Результаты расчетов представлены на рис. 2, где обозначения кривых совпадают с обозначениями рис. 1. На рис. 2 кривые *1—4* относятся к обычному заводнению. Кривые *1'—4'* соответствуют циклическому нагнетанию оторочек нефти в течение 0,5 года с интервалами нагнетания «нефти»

и воды, равными 0,01 и 0,09 года, и общим объемом оторочек, равным 0,06 объема пор. Линии *1′—4′* отвечают циклическому нагнетанию оторочек «нефти» в течение одного года с интервалами нагнетания 0,05 года для «нефти» и 0,1 года для воды. Общий объем оторочек для этого примера равен 0,31 объема пор.

Результаты расчетов показывают, что представление пласта в виде двух прослоев, один из которых обладает повыстан в виде двух прослоев, один из которых обладает повышенной проницаемостью, приводит к более быстрому развитию процесса вытеснения. Однако нефтеотдача пласта по сравнению с однородным уменьшается. Так, для обычного заводнения после прокачки пяти поровых объема воды объем извлеченной нефти для двухслойного пласта равен 0,27, тогда как в случае однородного он равен 0,38.

Вытеснение нефти заводнением с циклическим нагнетанием оторочек так же, как для одородного пласта, замедляет процесс вытеснения, повышая общий объем извлекаемой нефти по сравнению с обычным заводнением, однако объем вытесненной нефти становится ниже, чем при обычном заводнении. Снижение нефтеотдачи пласта наблюдается при любых размерах оторочек и времени нагнетания. Так, при нагнетании оторочек в течение года (кривые *1″—4″* на рис. 2) объем извлеченной нефти, равный 0,28, достигнут лишь за 1,5 года. Постоянное циклическое нагнетание оторочек с интервалом 0,01 года для «нефти» и 0,09 года для воды (на рисунке этот вариант не показан) позволило извлечь такой же объем нефти за 1,3 года. При обычном заводнении этот объем извлекается за 0,8 года. К этому времени нефтеотдача пласта для варианта с циклическим нагнетанием оторочек в 0,5 года (кривые *1′—4′*) ниже, чем при обычном заводнеиии, на 0,02 поровых объема.

Так что характер вытеснения высоковязкой нефти с помощью «нефтяных оторочек» из неоднородного пласта остается тем же, что для однородного, и послойные перетоки между разнопроницаемыми прослоями не позволяют превысить нефтеотдачу, достигаемую при обычном заводнении.

3. Для исследования влияния пространственности течения на процесс вытеснения с помощью «нефтяных оторочек» решена плоская задача. Рассматривалась область, являющаяся элементом девятиточечной схемы с условиями непротекания на границах и заданными постоянными давлениями на скважинах. При расчетах принята квадратная сетка разбу-

ривания с расстоянием между скважинами, равным 200 м. Перепад давления между нагнетательной и эксплуатационными скважинами одинаков и равен 100 атм.

Для этой задачи было рассмотрено три варианта вытеснения, результаты расчетов которых представлены на рис. 3. Первый вариант (кривые *1—3*) — обычное заводнение. Второй (кривые *1′—3′*) — непрерывное нагнетание «нефтяной»

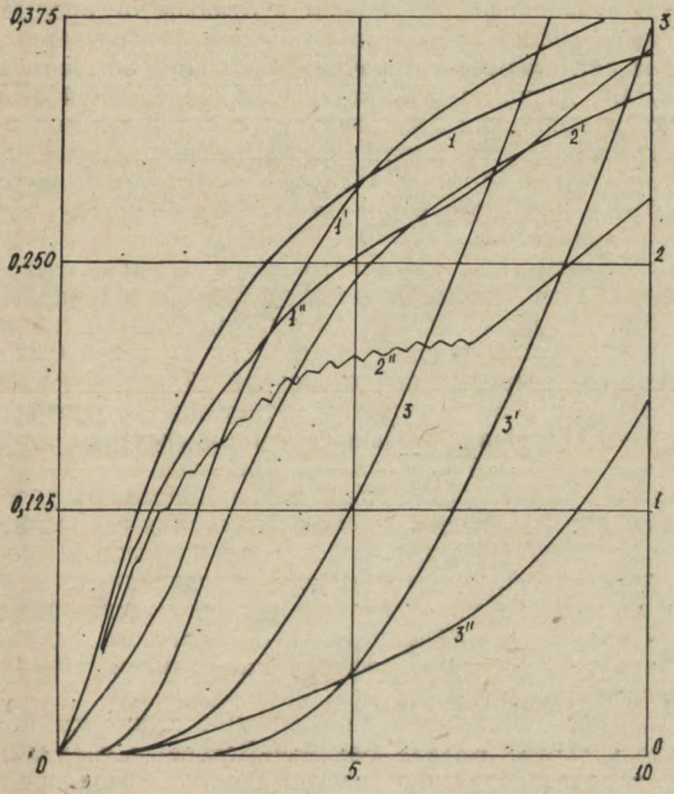


Рис. 3

оторочки в течение пяти лет, когда водонасыщенность в нагнетательной скважине возрастает по линейному закону от $s_* = 0{,}12$ до $s^* = 0{,}72$, а затем нагнетается только вода. Объем оторочки равен 0,045. Третий вариант (кривые *1″—3″*) —

циклическое нагнетание оторочек равного объема (в течение семи лет) с постоянным отношением объема оторочки к объему закачиваемой затем порции воды, равным 1 : 10. Объем каждой оторочки составляет 0,00483 порового объема (50 м²), общий объем оторочек равен 0,078.

Результаты расчетов показывают, что нагнетание нефтяных оторочек снова снижает темп вытеснения. При этом уменьшается и объем извлеченной нефти по сравнению с обычным заводнением. Причем в отличие от предыдущих задач здесь общий объем извлеченной нефти остается меньше (пока нагнетаются оторочки), чем при обычном заводнении. Для варианта с нагнетанием непрерывной оторочки этот объем выше, чем для варианта с циклическим нагнетанием оторочек, и через пять лет превышает объем нефти, вытесненной при обычном заводнении. Но объем вытесненной нефти и для этого варианта остается ниже, чем при обычном заводнении.

Следует отметить, что снижение в темпах вытеснения с помощью оторочек достигает значительных размеров. Так, через семь лет после начала вытеснения объем извлеченной нефти при обычном заводнении (кривая *1*) равен 0,325, при заводнении с непрерывной оторочкой (кривая *1′*) — 0,287 и для заводнения с циклическим нагнетанием оторочек (кривая *1″*)—0,21. Положительным при нагнетании оторочек является снижение объема извлекаемой воды.

Общим в характере вытеснения с помощью оторочек является то, что после прекращения нагнетания оторочек и последующим нагнетанием в пласт воды процесс вытеснения повторяет закономерности обычного заводнения, но с запозданием по времени, определяемым временем нагнетания оторочек. Однако превзойти результаты обычного заводнения (по объему вытесненной нефти) нагнетанием «нефтяных оторочек» не удается.

Таким образом, расчет приведенных примеров показывает, что в рамках модели Баклея—Леверетта гидродинамическое перераспределение насыщенности, неоднородность пласта и пространственность течения не позволяют обнаружить преимуществ вытеснения высоковязкой нефти с помощью «нефтяных оторочек» по сравнению с обычным заводнением. О преимуществах такого способа вытеснения можно говорить лишь в том случае, когда нагнетаемые в пласт «нефтяные оторочки» можно полностью или частично оставить неизвлеченными.

БЫСТРОСХОДЯЩИЙСЯ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ, НЕ ТРЕБУЮЩИЙ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

В. Н. Крутиков

1. При решении задач проектирования газодинамических конструкций нередко возникают задачи оптимального выбора их параметров (см., например, [1]). Это, как правило, приводит к решению задач нелинейного программирования с целевой функцией, заданной алгоритмически. В настоящей работе для решения подобных задач предлагается метод минимизации, основанный на спуске вдоль n линейно независимых векторов и преобразовании их в сопряженные. Здесь и далее n — размерность пространства. При минимизации квадратичной формы новый метод сходится за конечное число итераций. В случае минимизации сильно выпуклой функции он сходится со скоростью геометрической прогрессии, а в области экстремума обладает $2n$ шаговой скоростью сходимости порядка $n+1$.

Результаты вычислительного эксперимента устанавливают, что он сходится заметно быстрее известных методов Пауэлла [2], Брента [3] и Бродли [4] при минимизации плохо обусловленных и большеразмерных задач.

2. Схема A-ортогонализации (САО) Грама-Шмидта [5] векторов $p_i \in R^n$ $(i=1, 2, ..., n)$ имеет вид

$$r_1 = p_1, \quad r_i = p_i - \sum_{j=1}^{i-1} (p_i^{\mathrm{T}} A r_j / r_j^{\mathrm{T}} A r_j)\, r_j, \quad i = 2, ..., n, \qquad (1)$$

где $r_i \in R^n$ — A-ортогональные (АО) (или сопряженные) векторы, т. е. $r_i^{\mathrm{T}} A r_j = 0$ при $i \neq j$, A — симметричная и положительно определенная матрица размерности $(n \times n)$; т — знак транспонирования. Здесь и далее все векторы без знака т — вектор-столбцы.

Рассмотрим модифицированную САО, некоторый k-й шаг которой выглядит так:

$$p_{i,\kappa+1} = p_{i\kappa} - \omega_{i\kappa}(p_{i\kappa}^{\mathrm{T}} A p_{j\kappa} / p_{j\kappa}^{\mathrm{T}}) p_{j\kappa},\ i > j,\ i,\ j \in N,$$

$$p_{l,\kappa+1} = p_{1,\kappa},\ l = 1, \ldots,\ i-1,\ i+1, \ldots,\ N = \{1, \ldots,\ N\}, \qquad (2)$$

где $p_{i\kappa},\ p_{i+1,\kappa} \in R_n,\ i = 1,\ \ldots,\ n$. Свойство A-ортогональности векторов, полученных процессом (1), обусловлено тем, что некоторый вектор p_i A-ортогонализуется к вектору r_j лишь тогда, когда вектор r_j A-ортогонален ко всем векторам $r_1, \ldots, r_{j-1}$. Более того, A-ортогонализация вектора p_i может быть проведена к A-ортогональным векторам $r_1, \ldots, r_j$ в произвольном порядке, а полученный в результате вектор будет A-ортогонален к векторам $r_1, \ldots, r_j$. Обозначим L_p некоторую последовательность всех различных пар индексов i_κ, j_κ, удовлетворяющих условию

$$i_\kappa > j_\kappa,\ i_\kappa,\ j_\kappa \in N. \qquad (3)$$

Учитывая сказанное выше, мы можем сформулировать следующий результат.

Лемма 1. За цикл итераций процесса (2) при $\omega_{i\kappa} = 1$ для пар индексов i_κ, j_κ из L_p, удовлетворяющих (3) и условию

$$\{[j_\kappa,\ 1], \ldots,\ [j_\kappa,\ j_{\kappa-1}]\} \in \{[i_1,\ j_1], \ldots,\ [i_\kappa,\ j_\kappa]\}, \qquad (4)$$

из первоначально линейно независимых векторов будут получены сопряженные векторы.

Рассмотрим последовательность пар индексов, удобную для получения алгоритма минимизации вдоль векторов с одновременным их преобразованием процессом (2) в сопряженные. Введем последовательности чисел $E_1 = (1, \ldots, n)$, $E_l = (l,\ l+1, \ldots, n, 1, \ldots, l-1),\ l = 2, \ldots, n$.

Элементы t_{il} последовательности $t_l = (l,\ l-1,\ l+1,\ l-2,\ l+2, \ldots)$ получим поочередным выбиранием первого и последнего элементов из E_l. Последовательность пар $\tilde{\Pi}_l = ([l,\ l-1],\ [l-1,\ l+1],\ [l+1,\ l-2], \ldots)$ получим соответствующей расстановкой скобок в t_l. Перестановкой индексов в парах из $\tilde{\Pi}_l$ получим последовательность Π_l, для пар индексов которой справедливо (3).

Лемма 2. Матрица P_m, $m = (n-1)\,n$, столбцы которой получены из столбцов матрицы P_0, $\det(P_0) \neq 0$ в результате итераций процесса (2) для последовательности пар $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ при $\omega_{i\kappa} = 1$, состоит из сопряженных вектор-столбцов.

Доказательство. Каждая из Π_l состоит из двух подпоследовательностей Q_l и Π_l, $l = 1, \ldots, n$. Для $n = 7$ эти последовательности изображены на рис. 1, 2. Последовательность

$\pi = \pi_1, \ldots, \pi_n$, где π_1 — пустое множество, есть некоторая L_p, которая удовлетворяет условиям (3), (4). В силу леммы 1 процесс (2) для пар из π приводит к построению АО векторов. Сходимость процесса (2) не нарушается, если вместо последовательности π взять $Q_1\pi_1\ Q_2\pi_2\ \ldots\ Q_n\pi_n$, поскольку

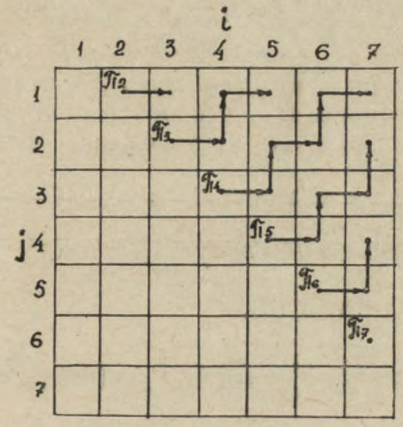


Рис. 1

преобразования для пар из $Q = Q_1Q_2\ \ldots\ Q_n$ хотя и изменяют векторы, но не влияют на процесс АО для пар из π. Подробнее доказательство можно разобрать, исходя из рис. 1, 2.

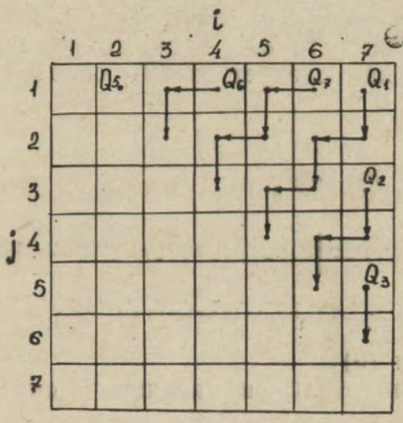


Рис. 2

Обозначим

$$D(A,\ P) = |\det(p_1 (p_1^{\mathrm{T}} A P_1)^{-0,5}, \ldots, p_n (p_n^{\mathrm{T}} A p_n)^{-0,5})|. \qquad (5)$$

Лемма 3. При произвольном выборе пары i, j в (2) для матриц P_κ справедливо неравенство

$$D(A,\ P_\kappa) \leqslant D(A,\ P_{\kappa+1}) \leqslant [\det(A)]^{-0,5}. \qquad (6)$$

Доказательство. Обозначим $Z_\kappa \| R^{-1} P_\kappa$, где столбцы матрицы R получены из столбцов P_κ в результате процесса (1) и нормированы так, что $R^{\mathrm{T}} A R = I$. В силу способа получения векторов r_i справедливо разложение $p_i = \sum_{j=1}^{i} d_{ij} r_j$. Поэтому матрица Z верхняя треугольная. Из определения матрицы R следует $(R^{-1})^{\mathrm{T}} R^{-1} = A$, $|\det(R^{-1})| = [\det(A)]^{0,5}$.

Поэтому, с учетом (5),

$$D(I,\ Z_\kappa) = \left| \prod_{i=1}^{n} z_{i i\kappa} / \| t_{i\kappa} \| \right| = D(A,\ P_\kappa) \cdot (\det(A))^{0,5}. \qquad (7)$$

Здесь и далее $\|z\| = \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2 \right)^{0,5}$. Столбец $z_{i\kappa}$ в результате (2) преобразуется по закону

$$z_{i,\kappa+1} = (I - \omega_{i\kappa} z_{j\kappa} z_{j\kappa}^{\mathrm{T}} / \| z_{j\kappa} \|^2)\, z_{i\kappa}, \qquad (8)$$

а остальные столбцы не меняются. Поскольку матрица Z_κ верхняя треугольная, то $Z_{\kappa+1}$ будет также верхней треугольной. При этом, как следует из (8), справедливы соотношения

$$z_{i,i,\kappa+1} = z_{i i\kappa},\ \| z_{i\kappa} \| \geqslant \| z_{i,\kappa+1} \|. \qquad (9)$$

С учетом (7), (9) получим

$$D(I,\ Z_{\kappa+1}) = \left| \prod_{i=1}^{n} z_{i,i,\kappa+1} / \| z_{i,\kappa+1} \| \right| = D(A,\ P_{\kappa+1}) \times$$

$$\times [\det(A)]^{0,5} \geqslant D(I,\ Z_\kappa),$$

что и доказывает (6).

Лемма 4. Для столбцов матрицы P справедливо неравенство

$$a_{ij}^2 = (p_i^{\mathrm{T}} A p_j)^2 / (p_j^{\mathrm{T}} A p_j p_i^{\mathrm{T}} A p_i) \leqslant 1 - D^2(A,\ P) \cdot \det(A). \qquad (10)$$

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 3, образуем матрицу $Z=R^{-1}P$. Предположим, что $i>j$. С учетом того, что матрица Z — верхняя треугольная, имеем

$$a_{ij}^2=(z_i^{\mathrm{T}}z_j)^2/\|z_i\|^2\|z_j\|^2=\Big(\sum_{l=1}^{j}z_{lj}z_{li}\Big)^2/\|z_i\|^2\|z_j\|^2\leqslant\sum_{l=1}^{j}z_{lj}^2/\|z_l\|^2\leqslant$$

$$\leqslant 1-z_{ii}/\|z_i\|^2\leqslant 1-D(I,\ Z)^2=1-[D(A,\ P)]^2\cdot\det(A).$$

Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть величина a_{ij}, определенная в (10) для матрицы P при $i>j$, удовлетворяет неравенству

$$1-a_{ij}^2\leqslant\delta<1, \tag{11}$$

а матрица P_1 получена в результате (2) из P при

$$\omega_{ij}=1-(a_{ij}^2-1+\delta)^{0{,}5}/|a_{ij}|, \tag{12}$$

тогда

$$D(A,\ P_1)=D(A,\ P)/\delta. \tag{13}$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 3, образуем матрицу $Z=R^{-1}P$. В результате (2), с учетом (8), (11), (12), имеем

$$\|z_{i1}\|^2=\|z_i\|^2\cdot(1-a_{ij}^2(2\omega_i-\omega_i^2))=\|z_i\|^2\delta.$$

Отсюда и из представления (7) следует (13).

3. Всюду далее будем полагать, что функция $f(x)$, $x\in R^n$ дважды непрерывно дифференцируема, а ее матрица вторых производных $f''(x)$ удовлетворяет условиям

$$\mu\|z\|^2\leqslant z^{\mathrm{T}}f''(x)\,z\leqslant M\|z\|^2,\ \mu>0; \tag{14}$$

$$\|f''(x)-f''(y)\|\leqslant L\|x-y\|,\ L>0 \tag{15}$$

при всех x, y, $z\in R^n$. Обозначим x_* — точку минимума функции; $f_*=f''(x_*)$, $f'(x)$ — градиент функции.

Алгоритм. Задать $x_0\in R^n$, $P_0=I$, $g_0=0$, $\varepsilon=0{,}1$, $\delta=0{,}1$, $N_0=0$, $h_0>0$. Если x_κ, h_κ, P_κ, q_κ, DO_κ уже получены, то следующее приближение находится по формулам:

П 1. $l=\kappa-[\kappa/n]\cdot n+1$, где $[\cdot]$ целая часть числа; $D_{0\kappa}=1$; $x_{0\kappa}=x_\kappa$; $P_{1\kappa}=P_\kappa$; получить t_{il} $(i=1,\ 2,\ldots,\ n)$ — элементы последовательности t_l (см. определение леммы 2).

Для $m=1,\ 2,\ldots,\ n$ выполнить действия П2 — П6.

П2. $i=t_{m,l}$; $x_{m\kappa}=x_{m-1,\kappa}+\alpha_{i\kappa}\tilde{P}$, где $\alpha_{i\kappa}$ доставляет минимум по α функции $f(x_{m-1,\kappa}+\alpha\tilde{p})$; взять $f_j=f(x_{m-1,\kappa}+\alpha_j\tilde{p})$, $j=1,\ 2,\ 3$, где $\alpha_1=0$, величина $\alpha_2=\alpha_{i\kappa}$ при $\alpha_{i\kappa}\neq 0$, причем

$$\alpha_q \neq d_t \text{ при } q \neq t_1 \quad |\alpha_j| \leqslant \gamma \max\{|\alpha_{ik}|,\ h_k\},\ \gamma > 0; \tag{16}$$

$$a_{imk} = 2\left[(f_2 - f_1)/(\alpha_2 - \alpha_1) - (f_3 - f_1)/(\alpha_3 - \alpha_1)\right]/(\alpha_2 - \alpha_3); \tag{17}$$

$$b_{imk} = 2\left[(f_2 - f_1)/(\alpha_2 - \alpha_1) - a_{imk}(\alpha_2 - \alpha_1)/2\right] \cdot a_{imk}^{0,5}; \tag{18}$$

$$\beta_{imk} = \alpha_{ik} \cdot a_{imk}^{0,5}; \tag{19}$$

$$z_{imk} = \tilde{p}/a_{imk}^{0,5}; \tag{20}$$

$$D_{mk} = D_{m-1,k} \cdot z_{ilmk}, \tag{21}$$

где z_{ilmk} — i-й элемент вектора z_{imk}. Здесь в П2 везде $\tilde{p} = p_{imk}/\|p_{imk}\|$, а p_{imk} — i-й столбец матрицы P_{mk}.

П3. Если $m=1$, то перейти на П4, иначе перейти на П5.

П4. Получить матрицу $P_{m+1,k}$, заменив в P_{mk} столбец p_{imk} на z_{imk}; $b_{i,m+1,k} = b_{imk} + \beta_{imk}$; $z_{i,m+1,k} = z_{i,m,k}$; перейти на П2 для выполнения П2— П6 при $m = 2$.

П5.

$$i = t_{ml};\ j = t_{m-1,l};\ i_1 = \max\{i,\ j\};\ j_1 = \min\{i,\ j\};$$

$$a_{ijk} = [f(x_{m-1,k} + h_k(z_{imk} + z_{jmk})) - h_k^2 - \cdot$$

$$- h_k(b_{imk} + b_{jmk}) - f(x_{m-1,k})]\, h_k^{-2}; \tag{22}$$

если $1 - a_{ijk}^2 < \delta$, то $\omega_{i1,k} = 1 - (a_{ijk}^2 - 1 + \delta)^{0,5}/|a_{ijk}|$; иначе

$$\omega_{i1,k} = 1; \tag{23}$$

$$v_1 = [1 + (\omega_{i_1,k}^2 - 2\omega_{i_1,k})\, a_{ijk}^2]^{-0,5};\ v_2 = -\omega_{i_1,k}\, a_{ijk} v_1; \tag{24}$$

$$\tilde{b_i} = b_{imk} + \beta_{imk};\ \tilde{b_j} = b_{jmk} + \beta_{imk} \cdot a_{ijk}; \tag{25}$$

$$z_{j1,m+1,k} = z_{i1,m,k};\ z_{i1,m+1,k} = v_1 z_{i1,m,k} + v_2 z_{j1,m,k}; \tag{26}$$

$$b_{j1,m+1,k} = \tilde{b}_{j1};\ b_{i1,m+1,k} = v_1 \tilde{b}_{i1} + v_2 \tilde{b}_{j1} \tag{27}$$

П6. Получить матрицу $P_{m+1,k}$ из P_{mk}, заменив столбцы p_{imk}, p_{jmk} соответственно на $z_{i,m+1,k}$, $z_{j,m+1,k}$.

П7. Если $q_k = 0$, тогда $D0_{k+1} = D_{nk}$, $q_{k+1} = 1$ и перейти на П9, иначе перейти на П8.

П8. Если $|D_{nk}| \leqslant \varepsilon |D0_k|$, то $P_{k+1} = I$, $q_{k+1} = 0$, иначе положить $D0_{k+1} = D0_k$, $P_{k+1} = P_{n+1,k}$, $q_{k+1} = 1$.

П9. $x_{k+1} = x_{nk}$; $h_{k+1} = \|x_{k+1} - x_k\|$.

Для преобразования векторов в сопряженные в алгоритме используется процесс (2) для циклически повторяющейся последовательности пар индексов $\Pi_1\Pi_2 \ldots \Pi_n$. Необходимые

скалярные произведения для процесса (2) вычисляются численно.

На примере минимизации квадратичной формы

$$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax/2+b^{\mathrm{T}}x+c \qquad (28)$$

рассмотрим назначение формул алгоритма. Здесь и далее буквой c обозначены константы. Там, где это не приводит к недоразумению, будем опускать индексы справа налево. В (17) вычисляется величина a, как коэффициент одномерной функции $f(x_{m-1}+\alpha\bar{p})=a\alpha^2/2+b\alpha+f(x_{m-1})$. В (20) находится вектор z, для которого справедливо $z^{\mathrm{T}}Az=1$. Поэтому выполняется равенство $f(x_{m-1}+\alpha z)=\alpha^2/2+b\alpha+f(x_{m-1})$, где коэффициент b вычисляется по формуле (18). В П4 вычисляется $b_{i,\,m+1}$ такой, что справедливо равенство $f(x_m+\alpha z_i)=\alpha^2/2+b_{i,\,m+1}\alpha+f(x_m)$. В П5 при $m=2$ поступают полученные ранее в П2 и П4 коэффициенты функции

$$f(x_{m-1}+\alpha_i z_i+\alpha_j z_j)=(\alpha_i^2+\alpha_j^2)/2+b_i\alpha_i+ \\ +b_j\alpha_j+f(x_{m-1})+a_{ij}\alpha_i\alpha_j. \qquad (29)$$

Недостающий коэффициент $a_{ij}=z_iAz_j/(z_i^{\mathrm{T}}Az_iz_j^{\mathrm{T}}Az_j)^{0,5}$ находится в (22). В (25) находятся коэффициенты b функции $f(x_m+\alpha_i z_i+\alpha_j z_j)$, где по сравнению с (29) начало координат смещено в точку x_m. В (26) осуществляется преобразование, подобное (2). Нормирующий множитель V_1 в (24) подобран так, что для вновь полученных векторов z и соответствующих им коэффициентов b, полученных по формулам (26), (27), выполняется равенство $f(x_m+\alpha z)=\alpha^2/2+b\alpha+f(x_m)$. Поэтому вновь полученные векторы z и коэффициенты b могут быть использованы на следующей итерации в П5. С учетом того, что матрицы P_κ ($\kappa=0,\ 1,\ \ldots$) верхние треугольные, оценка величины (5) осуществляется по формуле (21). В случае минимизации функции вида (28) эта величина в силу (6) не убывает. Для функций общего вида считается допустимой некоторая степень уменьшения величины $D_{n\kappa}$ (см. П8).

Лемма 6. Величины a_i, вычисляемые в (17), удовлетворяют неравенству

$$\mu\leqslant a_i\leqslant M. \qquad (30)$$

Доказательство. Значения $f_i=f(x+\alpha\bar{p})$ из П2 представим в виде

$$f_i=f_1+p^{\mathrm{T}}f'(x)(\alpha_i-\alpha_1)+\int_{\alpha^1}^{\alpha_i}\int_{\alpha_1}^{\alpha}p^{\mathrm{T}}f''(x+\beta\bar{p})p\,d\beta\,d\alpha. \qquad (31)$$

Подставляя (31) в (17), с учетом (14) получим (30).

Обозначим $DD(P) = |\det[p_1/\|p_1\|, \ldots, p_n/\|p_n\|]|$.

Лемма 7. Матрицы P_κ ($\kappa=0, 1, \ldots$) удовлетворяют неравенству

$$DD(P_\kappa) \geqslant \varepsilon(\mu/M)^{5n/4}/8^{n/2}. \qquad (32)$$

Доказательство. Неравенство (32) для $P_{\kappa+1}$ выполняется в случае обновления в П 8, поскольку $P_{\kappa+1}=I$. Если обновление в П 8 не происходит, то из (21), с учетом (20) и (30), получим

$$DD(P_\kappa) = D_{n\kappa}\cdot\left(\prod_{i=1}^{n} a_{i\kappa}\right)^{0,5} \geqslant \varepsilon D0_\kappa \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i\kappa}\right)^{0,5} \geqslant \varepsilon(\mu/M)^{n/2}. \qquad (33)$$

В силу способов выбора пар индексов i, j и $i1$, $j1$ в П 5 вектор с номером $i1$ подвергается преобразованию (26) не более двух раз (для $n=7$ см. рис. *1, 2*). При первом преобразовании вектора с номером $i1$ оба участвующие в преобразовании (26) векторы получены в (20). Поэтому из (30) имеем

$$\mu^{-0,5} \geqslant \|z\| \geqslant M^{-0,5}. \qquad (34)$$

В результате (26), с учетом формул преобразования определителей при замене столбцов, имеем

$$DD(P_{m+1}) = DD(P_m)\,q,\quad q = v_1\|z_{i1,m}\|/\|z_{i1,m+1}\|.$$

Принимая во внимание (34) и неравенство $|\omega_{i1}a_{ij}| \leqslant 1$ получим

$$q \geqslant \|z_{i,m}\|/(\|z\,q_{i,m}\| + |\omega_{i1}a_{ij}|\cdot\|z_{j1,m}\|) \geqslant (\mu/M)^{0,5}/2. \qquad (35)$$

После повторного преобразования вектора с номером $i1$, учитывая (35) и (34) для вектора z_{j1}, имеем

$$DD(P_{m+2}) = DD(P_{m+1})\cdot v_1\cdot\|z_{i1,m+1}\|/\|z_{i1,m+2}\| \geqslant DD(P_{m+1}) \times$$
$$\times\|z_{i1,m}\|\cdot q/(q\|z_{i1,m}\| + \|z_{j1,m+1}\|) \geqslant DD(P_m)\cdot(\mu/M)^{3/2}/8. \qquad (36)$$

Один раз за весь цикл по m, когда преобразование (26) проводится для векторов с индексами из последней пары Q_l и первой пары в π_l (см. рис. 1, 2), вектор с номером $i1$ вначале преобразуется, и на следующем шаге выступает в качестве преобразующего. В этом случае также справедлива оценка (36). В результате цикла по m преобразование (26) осуществляется раз. Поэтому с учетом (36) и (33) получим (32). Лемма доказана.

Теорема 1. Для оценки скорости сходимости последовательности x_κ, $\kappa=0, 1, \ldots$, к точке x_* имеет место неравенство

$$\| x_\kappa - x_* \| \leqslant c_1 \| x_0 - x_* \| q^\kappa, \; q < 1, \; c_1 > 0. \tag{37}$$

Доказательство. Для метода минимизации вдоль векторов p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ при условии $DD(P) \geqslant c_2 > 0$, оценка скорости сходимости, подобная (37), получена в работе [6]. Отсюда, принимая во внимание (32), получим (37).

Лемма 8. В достаточно малой окрестности x_*, при некотором κ, векторы z в (20), (22), (26), коэффициенты b в (18), П4, (22), (25), (27) и коэффициент a_{ij} из (22) удовлетворяют неравенствам

$$| 1 - z^\mathrm{T} f''_* z | \leqslant c_3 \| x_{\kappa-1} - x_* \|; \tag{38}$$

$$| b_{im} - z_{im}^\mathrm{T} f' (x_{m-1}) | \leqslant c_4 \| x_{\kappa-1} - x_* \|^2; \tag{39}$$

$$| a_{ij} - z_i^\mathrm{T} f''_* z_j / (z_i^\mathrm{T} f''_* z_i z_j^\mathrm{T} f''_* z_j)^{0,5} | \leqslant c_5 \| x_{\kappa-1} - x_* \|. \tag{40}$$

Доказательство. Из теоремы 2 работы [7] для метода минимизации вдоль векторов p_i, $\|p_i\| = 1$ определитель матрицы которых ограничен $|\det (P)| \geqslant c_6 > 0$, следует

$$c_7 \| x_{\kappa-1} - x_* \| \leqslant \| x_\kappa - x_{\kappa-1} \| \leqslant c_8 \| x_{\kappa-1} - x_* \|, \; c_7, \; c_8 \geqslant 0, \tag{41}$$

где точка x_κ получена из $x_{\kappa-1}$ в результате минимизации вдоль векторов p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, а константы c_7, c_8 зависят от p_i и величин μ и M из (14). Исходя из (41), оценки (32) и способа получения величины h_κ в П 9, получим

$$c_7 \| x_{\kappa-1} - x_x \| \leqslant h_\kappa \leqslant c_8 \| x_{\kappa-1} - x_7 \|. \tag{42}$$

Подставляя значения f_i в виде (31) в формулу (17), учитывая (15), ограничения (16) и оценку (42), несложно получить оценку $| \tilde{p}^\mathrm{T} \tilde{f''_*} \tilde{p} - a_{im\kappa} | \leqslant c_9 \| x_{\kappa-1} - x_* \|$, откуда в силу (30) следует оценка (38) для векторов z, полученных по формуле (20). Неравенство (39) доказывается подстановкой значений f_i в виде (31) в формулу (18) с последующим использованием ограничений (16) и неравенств (42) и (38).

Градиент функции в точке $x+\alpha p$ представим в виде

$$f' (x + \alpha z) = f' (x) + \int_0^\alpha f'' (x + \beta z) z \, d\beta. \tag{43}$$

Отсюда, с учетом (38) для z_{im}, получим для коэффициента $b_{i, m+1}$, получаемого в П 4, неравенство, аналогичное (39),

где вместо m следует взять $m+1$. Из предыдущего следует, что при $m=2$ векторы z и коэффициенты b в (22) удовлетворяют (38) и (39). Значение функции $f(x+h(z_i+z_j))$ из (22) представим в виде (31), взяв $p=z_i+z_j$. Учитывая при этом (38), (39), получим доказательство (40) при $m=2$.

Справедливость (38) для векторов $z_{i1,m+1}$ из (26) установим с учетом неравенства (38) для векторов $z_{i1,m}$, $z_{j1,m}$, обозначив их соответственно z_1 и z_2

$$1-z_{i,m+1}^{\mathrm{T}} f''_* z_{i1,m+1} | = | v_1^2 z_1^{\mathrm{T}} f''_* z_1 + v_2^2 z_2^{\mathrm{T}} f''_* z_2 + 2v_1 v_2 z_1 f''_* z_2 - 1 | \leqslant$$

$$\leqslant | v_1^2 (1+\omega_i^2 a_{ij}^2 - 2\omega_i a_{ij}^2) - 1 | + c_{10} \| x_{\kappa-1} - x_* \| = c_{10} \| x_{\kappa-1} - x_* \|$$

В силу спреведливости неравенства (38)—(40) для величин b из (25), с учетом разложения (43), для величин $\tilde{b}$, вычисляемых в (25), имеем

$$|\tilde{b}_q - z_{qm}^{\mathrm{T}} f'(x_m)| \leqslant c_{11} \| x_{\kappa-1} - x_* \|^2, \quad q = i;\ j.$$

Отсюда, используя (43) и неравенства (38), (40), исходя из формул (27), получим справедливость неравенства (39) для векторов $z_{q,m+1}$ и коэффициентов $b_{q,m+1}$ для $q=i,\ j$. Следовательно, при значении $m=3$ векторы z и коэффициенты b, поступающие в П 5 из П 2 и П 5, будут также удовлетворять неравенствам (38), (39). Продолжая процесс доказательства для $m=3,\ \ldots,\ n$, получим утверждение леммы.

Обозначим P_κ^N ($\kappa = N,\ N+1,\ldots$) матрицы, которые будем вычислять вместе с матрицами P_κ по аналогичным формулам, полагая $P_N^N = P_N$ и исключая вычисление соответствующих величин b^N, β^N. Коэффициенты a_i^N в П2 и a_{ij}^N в П5 будем вычисля ь по формулам

$$a_i^N = (\tilde{p}_i^N)^{\mathrm{T}} f''_* \tilde{p}_i^N, \quad a_{ij} = (z_i^N)^{\mathrm{T}} f''_* z_j^N / [(z_i^N)^{\mathrm{T}} f''_* z_i^N (z_j^N)^{\mathrm{T}} f''_* z_j^N]^{0,5}.$$

Величины ω_{i1}^N будем полагать равными ω_{i1}, а обновление матриц P_κ^N будем производить одновременно с обновлением матриц P_κ. Таким образом, процесс получения матриц P_κ^N эквивалентен процессу (2) с точностью до нормировки столбцов матрицы.

Лемма 9. В достаточно малой окрестности точки x_* выполняются неравенства

$$\| P_\kappa - P_\kappa^N \| \leqslant c_{12} \| x_{N-1} - x_* \|, \quad \kappa = N,\ N+1,\ldots,\ N+2n, \tag{44}$$

$$\| D_{n\kappa}| - D\,(f'',\ P_\kappa^N)| \leqslant c_{13} \| x_{N-1} - x_* \|,\ \kappa = N,\ldots,\ N + 2n. \tag{45}$$

Здесь и далее $\| P \| = \left(\sum_{i=1}^{n} \| p_i \|^2 \right)^{0,5}$.

Доказательство. Из (23), (24) для всех κ следуют неравенства

$$v_1 \leqslant \delta^{-0,5},\ |\omega_{i1} a_{ij}| \leqslant 1. \tag{46}$$

Исходя из равенства $P_N^N = P_N$, неравенств (38), (40), ограничений (46), (14) и определения способа получения матриц P_κ^N, получим при $\kappa = N$ последовательно для $m = 1, 2,\ldots,$ n оценки

$$\| z_{l,m,\kappa} - z_{lm\kappa}^N \| \leqslant c_{14} \| x_{N-1} - x_* \|,\ |v_l - v_i^N| \leqslant c_{15} \| x_{n-1} - x_* \|,$$
$$i = 1,\ 2,$$

из которых следует справедливость (44) для $\kappa = N+1$. Исходя из справедливости (44) для $\kappa = N+2$ и продолжая этот процесс для следующих значений κ, получим справедливость неравенства (44).

Отметим, что в силу способа получения матриц P_κ^N справедливо равенство

$$D_{n\kappa}^N = D\,(f_*',\ P_\kappa^N). \tag{47}$$

Из неравенств (30) и (32) следует для всех κ неравенство

$$0 < c_{16} \leqslant |z_{iim\kappa}| \leqslant c_{17} < \infty. \tag{48}$$

Исходя из (47), (48), (44) и способов получения величин D_{nk}^N и $D_{n\kappa}$, получим доказательство неравенств (45).

Лемма доказана.

Теорема 2. В достаточно малой окрестности точки x_* и достаточно больших значениях ξ справедлива оценка

$$\| x_{(\xi+2)\cdot n} - x_* \| \leqslant c_{16} \| x_{\xi \cdot n} - x_* \|^{n+1}. \tag{49}$$

Доказательство. Предположим, что в некоторой достаточно малой окрестности x_* процесс получения матриц P_κ протекает без обновления, а все значения ω, вычисляемые по формуле (23), равны 1. В этом случае процесс получения матриц P_κ^N, $N = \xi \cdot n + 1$, в силу способа вычисления значений l в П1, эквивалентен процессу (2) при $\omega_{i\kappa} = 1$ и $A = f_*'$ для пар индексов $\Pi_2,\ldots,$ $\Pi_n\ldots$ (см. обозначения

леммы 2). Учитывая результат леммы 2 и равенство $\Pi = Q_1\pi_1,\ldots, Q_n\pi_n$, где π_1 — пустое множество, получим, что матрицы P_κ^N, $\kappa = \xi \cdot n$, $\xi \cdot n + 1$, $\xi \cdot n + 2$ состоят из сопряженных столбцов относительно матрицы f_*''. Отсюда и неравенства (44), применяя результаты теоремы 6 и следствия 2 из работы [7] для метода минимизации вдоль векторов, степень близости которых к сопряженным задается неравенством (44), получим оценку

$$\| x_{(\xi+1)n+1} - x_* \| \leqslant c_{19} \| x_{(\xi+1)n} - x_* \| \cdot \| x_{\xi \cdot n} - x_* \| \leqslant c_{20} \| x_{\xi n} - x_* \|^2.$$

Поскольку неравенство (44) выполняется и на последующих $n-1$ итерациях, то, продолжая аналогично и далее, получим доказательство (49).

Докажем, что если при некотором $\kappa = N-1$ произошло обновление в достаточно малой окрестности точки x_*, т. е. $P_N = I$, то обновление уже не произойдет вовсе.

В силу (48) справедливо неравенство при всех

$$c_{21} \leqslant D_{n\kappa} \leqslant c_{22}. \tag{50}$$

Предположим, что при всех κ ω_i из (23) равны 1. В этом случае в силу (6) величина $D(f_*'', P_\kappa^N)$ монотонно возрастает и по крайней мере через $2n$ итераций достигнет своего максимального значения $[\det(f_*'')]^{-0,5}$, поскольку $2n$ итераций включают в себя последовательность пар $\Pi_2 \ldots \Pi_n$, что гарантирует сопряженность векторов столбцов матрицы P_{N+2n}^N. В силу сказанного и неравенств (45) при достаточно малых значениях $\| x_\kappa - x_* \|$ имеем для $\kappa = N,\ N+1,\ldots,\ N+2n$

$$D_{n\kappa} \geqslant D(f_*'', P_\kappa^N) - c_{23} \| x_{N-1} - x_* \| \geqslant \varepsilon^{0,5} D_{nN};$$

$$D_{n,N+2n} \geqslant [\det(f_*'')]^{-0,5} - c_{23} \| x_{N-1} - x_* \| \geqslant \varepsilon^{0,5} D_{nN}. \tag{51}$$

Поэтому обновление в П8 в течение этих итераций не произойдет. Поскольку левое из неравенств (51) справедливо для возрастающих значений N, а $\|x_{N-1} - x_*\| \to 0$ при $N \to \infty$, то в силу (51) обновление не произойдет никогда. Доказательство теоремы для этого случая рассмотрено выше.

Если в течение $2n$ итераций имеется значение $\omega_i \neq 1$, то в силу способа получения значений ω_i в (23), неравенств (45) и результатов леммы 5 будет справедливо

$$D_{N,N+2n} \geqslant D(f_*'', P_N^N)/\delta - c_{24} \| x_{N-1} - x_* \|,$$

и в случае малых $\|x_{N-1}-x_*\|$ приводит к возрастанию величины $D_{N,\,N+2n}$. Отсюда в силу (10) следует, что значения a_{ij} в (23) строго убывают и через конечное число итераций уменьшатся настолько, что все значения ω_i, получаемые в (23), будут равны 1. Доказательство теоремы для этого случая приведено выше.

Теорема доказана.

4. Экспериментальное исследование алгоритма осуществлялось на следующих функциях:

$$f_1 = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$$

$$x_0 = (-3,\ -1,\ 0,\ 1);$$

$$f_2 = (x_2 - x_1^2)^2 \cdot 100 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 - x_3^2)^2 + (1 - x_3)^2 + 10.1((x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2) + 19{,}8(x_2 - 1)(x_4 - 1),$$

$$x_0 = (-3,\ -1,\ -3,\ -1);$$

$$f_3 = \sum_{i=1}^{n} [\Delta_i(x)]^2,\ \Delta_i(x) = \int_0^1 T_i(y)\,dy - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} T_i(x_j),\ x_{i0} = i/(n+1),$$

где $T_i(y)$ — смещенные многочлены Чебышева.

$$\int_0^1 T_{2\kappa+1} = 0,\ \int_0^1 T_{2\kappa} = -1/(4\kappa_2 - 1);$$

$$f_4 = \sum_{i=1}^{30}\left[\frac{dP(t_i)}{dt} - 1 - P^2(t_i)\right]^2 + x_1^2,\ t_i = (i-1)/29,$$

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1},\ x_{1,0} = 0;$$

$$f_5 = \sum_{i=1}^{n}\left[E_i - \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\sin x_j + b_{ij}\cos x_j)\right]^2,$$

где a_{ij}, b_{ij} равномерно распределены на $[-100,\ 100]$, величины $E_i = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\sin x_j^* + b_{ij}\cos x_j^*)$, а компоненты x_j^* равномерно распределены на $[-\pi,\ \pi]$, $x_i^0 = x_i^* + \delta_i/10$, δ_i — равномерно распределены на $[-\pi,\ \pi]$. Функции f_1, f_2, f_5 можно

найти в работе [8], а f_3 и f_4 — в работах [9 и 10] соответственно. В табл. 1 приведено количество вычислений функции, требуемое для минимизации вышеприведенных функций различными методами до выполнения критерия $f(x) - f_* \leqslant 10^{-10}$. Результаты расчета для других методов взяты в работе [7].

Таблица 1

Функция	Размерность	Новый алгоритм	Метод Пауэлла	Метод Бродли	Метод Брента
f_1	4	172	265	178	234
f_2	4	423	744	721	452
f_3	4	92	84	91	74
f_3	6	317	208	273	223
f_3	8	377	516	378	326
f_4	6	245	387	352	316
f_4	9	580	1502	716	1184
Σ		2206	3706	2709	2809
f_5	5	169	207	183	
f_5	5	184	233	164	
f_5	10	440	548	528	
f_5	10	628	526	519	
f_5	15	1115	1040	1294	
f_5	15	1067	1219	1118	
f_5	20	1640	2549	3132	
f_5	20	1974	2779	3500	
f_5	20	1852	2372	2188	

В табл. 2 приведено количество вычислений функции, требуемое для минимизации функций f_6 и f_7 ($n=50$), до значений функции, указанных в этой же таблице, новым алгоритмом и алгоритмами работы [11]. Функции f_6 и f_7 имеются в работе [11] и обозначены там f_1 и f_2 соответственно. Знаком Σ обозначено суммарное количество вычислений функции.

Таблица 2

Функция	Новый алгоритм	Алгоритм 1 [11]	Алгоритм 2 [11]
f_6	13675	12874	19195
$n=50$	$f=2{,}904788055$	$f=2{,}904788055$	$f=2{,}904788055$
f_7	20003	25723	20751
$n=50$	$f=8\cdot10^{-16}$	$f=6{,}41\cdot10^{-17}$	$f=3{,}5\cdot10^{-15}$
Σ	33678	38597	39946

ЛИТЕРАТУРА

1. Погорелов Е. И. Об одном комбинированном поисковом алгоритме решения оптимальных задач внутренней газовой динамики. — В кн.: Аэрогазодинамика быстропротекающих процессов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982, с. 107—114.

2. Powell M. J. D. An eficient method of finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. — Comput. J., 1964, v. 7, p. 155—162.

3. Brent R. P. Algorithms for minimization without derivatives. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1973.

4. Brodlie K. W. A new direction set method for unconctrained minimization without evaluting derivatives. — J. Inst. Math. and Applic., 1975, v. 15, p. 385—396.

5. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.: Физматгиз, 1960. — 316 с.

6. Крутиков В. Н. О скорости сходимости метода минимизации вдоль векторов заданной системы направлений. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, т. 23, № 1, с. 218—220.

7. Пшеничный Б. Н. Метод минимизации функций без вычисления производных. — Докл. АН СССР, 1977, т. 235, № 5, с. 1026—1029.

8. Химмельблау. Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1976. — 250 с.

9. Flether R. Function minimization without evaluting derivatives-a reviev. — Comput. J., 1965, v. 8, p. 33—41.

10. Dixon L. C. W. Conjugate directions without linear searches. — J. Inst. Math. and Applic., 1973, v. 11, p. 317—328.

11. Пшеничный Б. Н., Редковский Н. Н. Некоторые методы безусловной минимизации. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 5, с. 1127—1133.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СЛОЯ СМЕШЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

Е. Г. Орлова, С. В. Пейгин

Рассматривается течение однородного сжимаемого газа в пространственном ламинарном слое смешения при наличии градиента давления. Уравнения слоя смешения, записанные в переменных Дородницына, решаются методом последовательных приближений аналогично работе [1], в которой данный метод был разработан для слоя смешения в несжимаемой жидкости. В рамках данного метода в приближении локальной автомодельности получено общее решение исходной задачи, а также аналитическое решение в первом приближении для профилей скоростей и температуры поперек слоя смешения. Сравнение данного аналитического решения с точным численным решением показывает удовлетворительную точность первого.

Ранее плоская и осесимметричная задача о смешении двух однородных потоков в линейной постановке с нулевым градиентом давления рассматривалась в [2, 3]; случай несжимаемой жидкости с нулевым градиентом давления рассматривался в [4]. В нелинейной постановке с учетом градиента давления для несжимаемой жидкости и сжимаемого газа эта задача соответственно решалась в [1 и 5]; численное решение уравнений пространственного многокомпонентного слоя было получено в [6].

Уравнения пространственного слоя смешения в системе координат (ξ, η, ζ), нормально связанной с поверхностью контактного разрыва, в обычных предположениях пограничного слоя в переменных Дородницына имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(l\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) = Du + \beta_1(u^2 - \theta) + \beta_2(uw - \theta) + \beta_3(w^2 - \theta); \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(l\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) = Dw + \beta_4(w^2 - \theta) + \beta_5(uw - \theta) + \beta_6(u^2 - \theta); \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{l}{\sigma}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\right)=D\theta-\alpha_5 l\{(\vec{u}_e')^2+(\vec{w}_e')^2+2\cos\psi\, u_e' w_e' u_e w_e\};\tag{3}$$

$$D\equiv\alpha_1\left(u\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial f_1}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)+\alpha_2\left(w\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial f_2}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)-$$

$$-(\alpha_3 f_1+\alpha_4 f_2)\frac{\partial}{\partial\zeta},\quad l=\frac{\mu\rho}{\mu_e\rho_e},\quad\frac{\mu}{\mu_e}=\theta^{\omega}.$$

Здесь ξ, η выбраны некоторым образом на поверхности контактного разрыва; ζ — по нормали к нему; uu_e, ww_e, ΘT_e, $\rho\rho_e$, $\mu\mu_e$ — проекции вектора скорости на оси ξ и η, температура, плотность и коэффициент вязкости соответственно; $\sigma=\text{const}$ — число Прандтля; ω — степенной показатель в зависимости вязкости от температуры (в конкретных расчетах полагалось, что $\omega=1$); коэффициенты $\alpha_i(i=1\div5)$, $\beta_j(j=1\div6)$ — известные функции (ξ, η) и приведены, например, в [7]; ψ — угол между координатными линиями. Остальные обозначения общепринятые.

Граничные условия, определяющие структуру слоя смешения, обычные.

$$\zeta\to\infty:\quad u=w=\theta=1;\tag{4}$$

$$\zeta\to-\infty:\quad u=u_w,\quad w=w_w,\quad\theta=\theta_w.\tag{5}$$

Положение слоя смешения определяют при этом из условия

$$\alpha_1 f_{1\xi}'+\alpha_3 f_1+\alpha_2 f_{2\eta}'+\alpha_4 f_2=0\ \text{при}\ \zeta=0.\tag{6}$$

В дальнейшем рассмотрим важный частный случай течения, когда слой смешения образуется при пространственном обтекании затупленных тел различной формы, с поверхности которых производится интенсивный вдув газа. Далее будем предполагать, что производными по ξ и η в системе уравнений и граничных условий (1)—(3), (6) можно пренебречь, т. е. рассмотрим решение задачи в локально-автомодельном приближении.

Отметим, что такой подход к решению представляется достаточно оправданным, поскольку, как показывают численные расчеты [6], профили искомых величин поперек слоя смешения, возникающего при сильном вдуве, близки к автомодельным.

Проинтегрировав исходную систему уравнений от ζ до ∞ и от $-\infty$ до ζ и использовав граничные условия (4), (5),

получим следующую систему интегродифференциальных уравнений:

$$a_i(g_i^* - g_{iw}^*) = \int_{-\infty}^{\zeta}\int_{\xi}^{\infty} [(\alpha_3 f_1 + \alpha_4 f_2)\, g_{i\zeta}^{*\prime} - G_i(g_i^*)]\, d\zeta d\zeta; \qquad (7)$$

$$g_1^* \equiv u,\ g_2^* \equiv w,\ g_3^* \equiv \theta;$$

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_3 = \sigma^{-1},$$

$$G_1 = \beta_1(u^2 - \theta) + \beta_2(uw - \theta) + \beta_3(w^2 - \theta);$$

$$G_2 = \beta_4(u^2 - \theta) + \beta_5(uw - \theta) + \beta_6(w^2 - \theta);$$

$$G_3 = -\alpha_5[(u_\zeta' u_e)^2 + (w_\zeta' w_e)^2 + 2\cos\psi u_\zeta' w_\zeta' u_e w_e].$$

Здесь и в дальнейшем нижний индекс $i = 1, 2, 3$ будет соответствовать уравнениям для u, w и θ соответственно.

Систему (7) будем решать методом последовательных приближений. При этом при построении итерационного процесса, выражающего каждое последующее приближение для искомых функций через предыдущее, необходимо предусмотреть, чтобы несобственные интегралы в правой части (7) были сходящимися, а при $\zeta \to \infty$ каждое приближение удовлетворяло граничному условию (4). Для этого на каждом шаге итерационного процесса вводятся дополнительные управляющие функции $\delta_i^{(m)}(\xi, \eta)$, $\zeta_i^{(m)}(\xi, \eta)$ и производится переход к новым независимым и зависимым переменным по формулам:

$$n_i^{(m-1)} = \frac{\zeta}{\delta_i^{(m)}} + \zeta_i^{(m)}; \qquad (8)$$

$$g_i^* = b_i + c_i g_i,\ b_i = \frac{1 + g_{iw}^*}{2}, \qquad (9)$$

$$c_i = \frac{1 - g_{iw}^*}{2},$$

где $\delta_i^{(m)}$ и $\zeta_i^{(m)}$ находятся из $(m-1)$-го приближения с использованием граничного условия (4) и небходимого условия сходимости несобственных интегралов. Итерационный процесс будем строить следующим образом. Пусть известно $(m-1)$-е приближение $u^{(m-1)}(\xi, \eta, \zeta)$, $w^{(m-1)}(\xi, \eta, \zeta)$, $\theta^{(m-1)}(\xi, \eta, \zeta)$. В правую часть i-го уравнения системы (7) подставим $u^{(m-1)}(\xi, \eta, n_i^{(m-1)})$, $w^{(m-1)}(\xi, \eta, n_i^{(m-1)})$, $\theta^{(m-1)}(\xi, \eta, n_i^{(m-1)})$, где $n_i^{(m-1)}$ определяется из (8). Переходя в (7) к новым переменным (8), (9), получим (индекс m здесь и далее опускаем)

$$a_i(1+g_i)=\int_{\infty}^{n_i}\int_{n_i}^{\infty}\delta_i^2\Big\{[\alpha_3(b_1n_i+c_1\varphi_{i1})+\alpha_4(b_2n_i+c_2\varphi_{i2})+$$

$$+K_i]\frac{\partial g_i}{\partial n_i}-c_i^{-1}G_i(n_i)\Big\}\,dn_i dn_i;$$

$$K_i=\int_{\zeta_i}^{0}[\alpha_3 u(\xi,\ \eta,\ n_i)+\alpha_4 w(\xi,\ \eta,\ n_i)]\,dn_i,\quad \varphi_{ij}=\int_0^{n_i}g_j dn_i\ (j=1,2). \tag{10}$$

Отметим, что если величины K_i известны, то функции $\zeta_i(\xi,\ \eta)$ можно найти из решения системы уравнений (10). Если предположить, что $\zeta_i(\xi,\ \eta)$ достаточно малы, то, разложив u и w в ряд и ограничившись двумя членами, получим

$$\zeta_i=[-q+\sqrt{q^2-2K_ip}]/p, \tag{11}$$

$$q=\alpha_3 u(\xi,\ \eta,\ 0)+\alpha_4 w(\xi,\ \eta,\ 0),\ p=\alpha_3\frac{\partial u}{\partial n_i}(\xi,\ \eta,\ 0)+\alpha_4\times$$

$$\times\frac{\partial w}{\partial n_i}(\xi,\ \eta,\ 0).$$

Знак «плюс» перед радикалом выбирается при этом в связи с тем, что при $K_i=0$, $\zeta_i=0$.

Введем обозначения.

$$A_i=\frac{\partial g_i}{\partial n_i}[\alpha_3(b_1n_i+c_1\varphi_{i1})+\alpha_4(b_2n_i+c_2\varphi_{i2})]-\frac{r_i}{c_i}G_i(n_i); \tag{12}$$

$$B_i=-\frac{(1-r_i)}{c_i}G_i(n_i);$$

$$M_{1i}=\int_{n_i}^{\infty}A_i\,\mathrm{d}\,n_i;\ M_{2i}=\delta_i^2\int_{n_i}^{\infty}B_i\,\mathrm{d}\,n_i;$$

$$r_1=r_2=1,\ r_3=0. \tag{13}$$

Получим

$$a_i(1+g_i)=\int_{-\infty}^{n_i}\{\delta_i^2[M_{1i}(\xi,\eta,n_i)+K_i(1-g_i)]+M_{2i}(\xi,\eta,n_i)\}\,\mathrm{d}\,n_i.$$

Используя необходимое условие сходимости интегралов в (10) и граничные условия $g_i \to 1$ при $n_i \to \infty$, получим следующие алгебраические уравнения для определения искомых управляющих функций

$$K_i(\xi, \eta) = -0{,}5\,[M_{2i}(\xi, \eta, -\infty)\,\delta_i^{-2} + M_{1i}(\xi, \eta, -\infty)]; \quad (14)$$

$$\delta_i^2(\xi, \eta) = \frac{2a_i - N_{2i}(\xi, \eta, \infty)}{N_{1i}(\xi, \eta, \infty)}; \quad (15)$$

$$N_{ji}(\xi, \eta, n_i) = \int_{-\infty}^{n_i} [M_{ji}(\xi, \eta, n_i) - 0{,}5\,M_{ji}(\xi, \eta, -\infty) \times \times (1 - g_i)]\,\mathrm{d}\,n_i.$$

Далее, после определения δ_i и K_i находятся величины g_i по следующим формулам:

$$g_i = -1 + \frac{[2a_i - N_{2i}(\infty)]\,N_{1i}(\xi, \eta, n_i)}{a_i N_{1i}(\infty)} + a_i^{-1} N_{2i}(\xi, \eta, n_i). \quad (16)$$

Затем определяются величины ζ_i, по формулам (8) происходит переход к переменной ζ, и процесс повторяется.

Получим аналитическое решение данной задачи в первом приближении описанного метода, выбрав в качестве нулевого приближения интеграл вероятности.

$$g_i^0(\xi, \eta, n_i) = \Phi(n_i) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{n_i} e^{-n^2}\,\mathrm{d}\,n; \quad (17)$$

$$\varphi_{1i} = \varphi_{2i} = n_i \Phi + \frac{1}{2}\Phi' - \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Штрих здесь и в дальнейшем означает дифференцирование по n_i. Подставляя (17) в (13), (15), получим

$$M_{1i}(\xi, \eta, -\infty) = \frac{2c_1(\alpha_3 + \alpha_4)}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2} - 1) + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,c_i d_i; \quad (18)$$

$$M_{2i}(-\infty) = 2(1 - r_i) f \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \quad f = \frac{\alpha_5 c_1^2}{c_3}(u_e^2 + w_e^2 + 2\cos\psi\, u_e w_e);$$

$$d_1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3; \quad d_2 = \beta_4 + \beta_5 + \beta_6, \quad d_3 = 0;$$

$$N_{1i} = \frac{1}{2} b_1 (\alpha_3 + \alpha_4)(1 + \Phi) + c_1 (\alpha_3 + \alpha_4) \left\{ \frac{1}{4}(\Phi^2 - 1) + \right.$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[n_i(\Phi-\Phi(\sqrt{2}n_i))+\frac{1}{2}\Phi'-\frac{1}{4}\Phi'(\sqrt{2}n_i)\right]\Big\}+$$

$$+c_id_i\left\{\frac{1}{4}(\Phi^2-1)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[(\Phi-\Phi(\sqrt{2}n_i))\,n_i+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\Phi'\right]-\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\Phi'(\sqrt{2}n_i)-\frac{1}{2}n_i^2(1-\Phi^2)+\frac{1}{2}n_i\Phi\Phi'\right\}; \tag{19}$$

$$N_{2i}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-r_i)f\left\{n_i[\Phi-\Phi(\sqrt{2}n_i)]+\frac{1}{2}\Phi'-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\Phi'(\sqrt{2}n_i)\right\}; \tag{20}$$

$$N_{1i}(\infty)=b_1(\alpha_3+\alpha_4),\quad N_{2i}(\infty)=0. \tag{21}$$

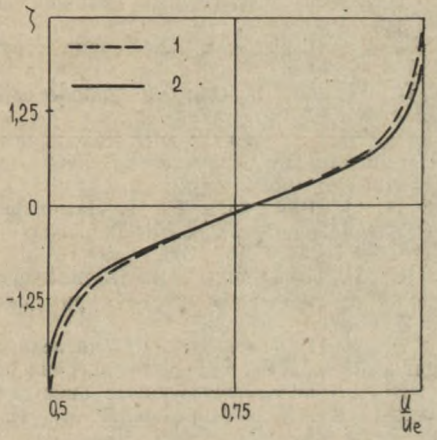


Рис. 1

Подставляя (18), (21) в (14), (15), получим следующие конечные выражения для определения δ_i, K_i, ζ_i:

$$\delta_i=\sqrt{\frac{2a_i}{b_1(\alpha_3+\alpha_4)}}, \tag{22}$$

$$K_i=-\frac{1}{2}\left[2\sqrt{\frac{2}{\pi}}c_id_i+\frac{2c_1(\alpha_3+\alpha_4)}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}-1)+\right.$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{f(1-r_i)\,b_i\,(\alpha_3+\alpha_4)}{a_i}\Bigg]; \qquad (23)$$

$$\zeta_i=\left[-b_1+\sqrt{b_1^2-\frac{4c_1K_i}{\sqrt{\pi}\,(\alpha_3+\alpha_4)}}\right]\frac{\sqrt{\pi}}{2c_1},$$

после чего по формулам (16) определяем значения g_i.

Сравнение расчетов, проведенных по аналитическому решению задачи в первом приближении (линия *1*) с точным численным решением (линия *2*), которое приведено на рис. 1, показывает, что точность полученного аналитического решения вполне удовлетворительна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершбейн Э. А. Ламинарный слой смешения в несжимаемой жидкости с различными на границах константами Бернулли. — В кн.: Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 40—45.

2. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. — М.: Наука, 1965. — 431 с.

3. Chapman D. Laminar muxing of comporessible fluid. — NASA Rept., 1958, № 958.

4. Буковшин В. Т., Таганов Г. И. Ламинарный слой смешения на границе двух потоков при наличии градиента давления. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 1133—1135.

5. Мурзинов И. Н., Шинкин Г. П. Ламинарное смешение однородных потоков при наличии градиента давления. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 2, с. 67—71.

6. Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. О численном решении уравнений пространственного слоя смешения. — Журн. выч. матем. и мат. физ., 1984, № 1, с. 132—139.

7. Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. О численных и асимптотических решениях уравнений пространственного пограничного слоя на проницаемой поверхности. — В кн.: Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 52—71.

К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕАДИАБАТИЧЕСКИМ ТЕЧЕНИЕМ ГАЗА

Е. И. Погорелов

Рассмотрим неадиабатическое течение невязкого нетеплопроводного газа по каналу постоянного сечения, которое описывается следующей системой уравнений в переменных Лагранжа [1, 2]:

$$Z_1 \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \xi} - q = 0; \tag{1}$$

$$Z_2 \equiv \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0;$$

$$Z_3 \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + p\frac{\partial v}{\partial t} - Q = 0,$$

где t — время; ξ — Лагранжева координата; u — скорость; p — давление; v — удельный объем; ε — удельная внутренняя энергия; $q = q(\xi, t)$, $Q = Q(\xi, t)$ — источниковые члены, связанные между собой некоторым соотношением

$$Z_4 \equiv F(Q, q, u, v, p) = 0. \tag{2}$$

Система (1), (2) замыкается уравнением состояния $\varepsilon = \varepsilon(p, v)$. После перехода к безразмерным переменным обычным образом [2] система (1) не меняется. Начальные и граничные условия принимают вид

$$t = 0,\ u(\xi, 0) = 0,\ v(\xi, 0) = 1,\ p(\xi, 0) = p_0(\xi); \tag{3}$$

$$Z_5 \equiv \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) - \sigma p(0, t) = 0; \tag{4}$$

$$Z_6 \equiv \frac{\partial x_n}{\partial t}(t) - u(0, t) = 0, \tag{5}$$

где (4) — условие Лагранжа на подвижном поршне; σ — отношение массы газа к массе поршня; $x_п$ — эйлерова координата поршня, $x_п(0)=0$. Считается, что канал имеет достаточно большие размеры и возмущение от неподвижной стенки не успевает догнать поршень в заданном сечении x_a. Область течения газа в переменных ξ, t имеет вид $G:\{-\xi_c \leqslant \xi \leqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant t_a\}$ и показана на рис. 1, где OC — характеристика второго семейства; ca — замыкающая характеристика первого семейства.

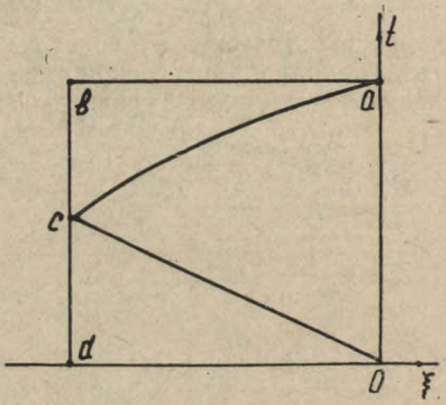


Рис. 1

Управляющими функциями в задаче являются источниковые члены $q(\xi, t)$ и $Q(\xi, t)$ в уравнениях движения и энергии, которые выбираются из класса непрерывно дифференцируемых функций. Предполагается, что функции q и Q таковы, что в неустановившемся движении газа ударных волн не возникает, а в области ocd q, Q не варьируются $\delta q = \delta Q = 0$. Требуется минимизировать функционал

$$J_0[Q, q] = \int_0^{t_a} [p(0, t) - p_1(t)]^2 dt, \qquad (6)$$

выражающий среднеквадратичное отклонение давления на поршне от заданного $p_1(t)$ при условии, что параметры течения удовлетворяют дифференциальным и конечным связям (1)—(5), в области G выполняется изопериметрическое ограничение

$$Z_7 = \iint\limits_G Q(\xi,\ t)\, d\xi dt - E_0 = 0, \tag{7}$$

(здесь E_0 — заданная константа) и ограничения вида

$$0 \leqslant Q(\xi, t) \leqslant Q_1(\xi, t);$$

$$0 \leqslant q(\xi, t) \leqslant q_1(\xi, t),$$

которые с помощью дополнительных переменных $\beta_1(\xi, t)$ и $\beta_2(\xi, t)$ можно переписать в виде равенства

$$Z_8 \equiv (Q_1 - Q)\, Q - \beta_1^2 = 0; \tag{8}$$

$$Z_9 \equiv (q_1 - q)\, q - \beta_2^2 = 0, \tag{9}$$

где Q_1, q_1 — заданные функции.

Сформулированная задача (1)—(9) относится к задачам оптимального управления системами с распределенными параметрами, которые в последние годы получили интенсивное развитие и приложение в различных областях. Так, в механике сплошных сред традиционными стали задачи об оптимальном выборе формы тел, взаимодействующих с какой-либо средой; задачи оптимизации форм и структуры упругих тел, решаемых в рамках моделей теории упругости и пластичности; задачи оптимального управления пограничным слоем, образующимся вблизи обтекаемого тела [3, 4]. Практически важными являются задачи управления процессами, в которых движение носит колебательный характер. Эти задачи связаны с проблемами гашения пульсаций потоков газа (жидкости) в длинных трубопроводах и волноводах; оптимальным управлением компрессорными и насосными станциями по перекачке газо- и нефтепродуктов; оптимизацией процессов нагружения прямолинейных стержней, совершающих продольные и крутильные колебания [3, 5]. Обычно эти процессы описываются системами линейных уравнений гиперболического типа и для них достаточно хорошо разработаны теория и методы решения оптимизационных задач. При использовании квазилинейных систем уравнений ситуация значительно усложняется и наиболее распространенный подход связан с применением метода множителей Лагранжа. Наиболее полно этот метод развит в задачах оптимизации в сверхзвуковой газовой динамике, в задачах по оптимизации форм упругих тел, а также при оптимизации режимов работы гидроэнергетических установок [4—7], при этом управлениями служат либо форма тела, либо режим работы насосной станции (граничное управление). При ре-

шении задачи методом множителей Лагранжа можно выделить следующие основные этапы: формулировка вариационной задачи, вывод необходимых условий оптимальности, построение численных алгоритмов решения основной и сопряженной задач, построение итерационного процесса поиска оптимальных управлений. В данной работе приводится постановка задачи и осуществляется вывод необходимых условий оптимальности, служащих основой при построении численных алгоритмов решения.

Согласно общепринятому формализму вариационного исчисления составим вспомогательный функционал Лагранжа I, в который наряду с I_0 включим все уравнения, граничные условия и ограничения с соответствующими множителями Лагранжа:

$$I = I_0 + I_1 + I_2 + I_3; \tag{10}$$

$$I_1 = \int_0^{t_a} [\lambda_1(t) Z_5 + \lambda_2(t) Z_0]\, dt;$$

$$I_2 = \iint_G [\mu_0 Z_7 + \mu_2(\xi, t) Z_8 + \mu_3(\xi, t) Z_9]\, d\xi dt;$$

$$I_3 = \iint_G [\eta_1(\xi, t) Z_1 + \eta_2(\xi, t) Z_2 + \eta_3(\xi, t) Z_3 + \mu_1(\xi, t) Z_4]\, d\xi dt,$$

где λ_1, λ_2, μ_0, μ_1, μ_2 μ_3, η_1, η_2, η_3—произвольные множители Лагранжа. Построение вариации функционала I начнем с варьирования последнего слагаемого в (10), при этом под вариацией параметров течения δ_u, δ_p, δ_v в области G понимается разность исходной и изменившейся функции при фиксированных ξ и t, а

$$\delta\varepsilon = \varepsilon_p \delta_p + \varepsilon_v \delta v,$$

где $\varepsilon_p = \partial\varepsilon/dp$, $\varepsilon_v = \partial\varepsilon/\partial v$. Предполагая множители Лагранжа непрерывными функциями и применяя правила техники варьирования, получим следующее выражение для вариации δI_3:

$$\delta J_3 = \iint_G \left[\left(-\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_p \eta_3) + \eta_3 \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} + \eta_3 \frac{\partial v}{\partial t} + \mu_1 F_p \right) \delta p + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \mu_1 F_u \right) \delta u + \right.$$

$$+\left(-\frac{\partial}{\partial t}\eta_3\varepsilon_v+\eta_3 p+\eta_2)+\eta_3\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t}+\mu_1 F_v\right)\delta v+ \tag{11}$$

$$+(\mu_1 F_q-\eta_1)\,\delta q+(\mu_1 F_Q-\eta_3)\,\delta Q\Big]\,d\xi dt+$$

$$+\oint(\eta_1 dt-\eta_3\varepsilon_p d\xi)\,\delta p+(-\eta_2 dt-\eta_1 d\xi)\,\delta u+$$

$$+(-\eta_3\varepsilon_v-\eta_3 p-\eta_2)\,d\xi\delta v.$$

Используя произвол в выборе η_1, η_2 и η_3, приравняем нулю выражения в скобках перед вариациями δp, δu, δv в поверхностном интеграле. После некоторых преобразований получим следующую систему линейных уравнений гиперболического типа для множителей Лагранжа:

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial t}-\frac{\partial\eta_2}{\partial\xi}-\mu_1 F_u=0; \tag{12}$$

$$\frac{\partial\eta_3}{dt}+\frac{1}{\varepsilon_p}\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi}-\frac{\eta_3}{\varepsilon_p}\frac{\partial v}{dt}-\frac{\mu_1 F_p}{\varepsilon_p}=0;$$

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial t}+(\varepsilon_v+p)\frac{\partial\eta_3}{\partial t}-\eta_3\frac{\partial p}{\partial t}-\mu_1 F_v=0.$$

Система (12), как и система (1), имеет следующие характеристики:

$$c^0\colon\frac{d\xi}{dt}=0;\quad c^+\colon\frac{d\xi}{dt}=\sqrt{\frac{\varepsilon_v+p}{\varepsilon_p}};\quad c^-\colon\frac{d\xi}{dt}=-\sqrt{\frac{\varepsilon_v+p}{\varepsilon_p}}, \tag{13}$$

вдоль которых выполняются характеристические соотношения:

$$c^0\colon\frac{d\eta_2}{dt}+(\varepsilon_v+p)\frac{d\eta_3}{dt}+\eta_3\frac{dp}{dt}-\mu_1 F_v=0; \tag{14}$$

$$c^+\colon\sqrt{\frac{\varepsilon_v+p}{\varepsilon_p}}\frac{d\eta_1}{dt}-\frac{d\eta_2}{dt}-\frac{\eta_3 Q}{\varepsilon_p}+\mu_1\left(F_v-\sqrt{\frac{\varepsilon_v+p}{\varepsilon_p}}F_u-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon_v+p}{\varepsilon_p}F_p\right)=0;$$

$$c^-\colon\sqrt{\frac{\varepsilon_v+p}{\varepsilon_p}}\frac{d\eta_1}{dt}+\frac{d\eta_2}{dt}+\frac{\eta_3 Q}{\varepsilon_p}-\mu_1\left(F_v-\sqrt{\frac{\varepsilon_v+p}{\varepsilon_p}}F_u-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon_v+p}{\varepsilon_p}F_p\right)=0.$$

Варьируя I_1 в (10) с учетом, что полное приращение $\Delta x(0,\ t_a)=0$, а связь между полным приращением произвольной функции $\varphi(t)$ и ее вариацией $\delta\varphi$ в конечный момент времени задается формулой $\Delta\varphi=\delta\varphi+(d\varphi/dt)\Delta t_a$, и объединяя полученные выражения при вариациях δu, δp и δv со слагаемыми из контурного интеграла (11), получим конечные и граничные условия для системы (12):

$$t=t_a,\ \eta_1(\xi,\ t_a)=\eta_2(\xi,\ t_a)=\eta_3(\xi,\ t_a)=0; \tag{15}$$

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial t}(0,\ t)=-\sigma\eta_2(0,\ t)+2\frac{\partial}{\partial t}(p(0,\ t)-p_1(t))+$$

$$+\sigma\frac{(p(0,\ t)-p_1(t))^2}{u(0,\ t)}; \tag{16}$$

$$\eta_1(0,\ t_a)=2(p(0,\ t_a)-p_1(t)); \tag{17}$$

$$\eta_1(\xi_d,\ t)=0. \tag{18}$$

С учетом проделанных преобразований окончательное выражение для вариации вспомогательного функционала имеет вид

$$\delta I=\iint\limits_{\sigma}[(\mu_0+\mu_1F_Q+\mu_2(Q_1-2Q)-\eta_3)\delta Q+(\mu_1F_q+$$

$$+\mu_3(q_1-2q)-\eta_1)\delta q-2\mu_2\beta_1\delta\beta_1-2\mu_3\beta_2\delta\beta_2]\,d\xi\,dt.$$

Необходимое условие оптимальности целевого функционала $\delta I_0=\delta I=0$ будет выполняться, если выражения перед вариациями δQ, δq, $\delta\beta_1$, $\delta\beta_2$ равны нулю, т. е.

$$\mu_0+\mu_1F_Q+\mu_2(Q_1-2Q)-\eta_3=0,\ \mu_1F_q+\mu_3(q_1-2q)-\eta_1=0; \tag{19}$$

$$\mu_2\beta_1=0,\ \mu_3\beta_2=0.$$

Два последние выражения в (19) эквивалентны уравнениям дополняющей нежесткости, при этом множитель μ_2, μ_3, соответствующий ограничению, пассивному в точках оптимального решения, равен нулю, и наоборот, если множитель Лагранжа отличен от нуля, то соответствующее ограничение (8), (9) активно, т. е. выполняется в виде равенства. Следовательно, необходимое условие внутреннего экстремума функционала записывается в виде

$$\mu_0+\mu_1F_Q-\eta_3=0,\ \mu_1F_q-\eta_1=0,$$

или, исключая μ_1,

$$\mu_0 + \frac{F_Q}{F_q}\eta_1 - \eta_3 = 0, \tag{20}$$

при этом для определения μ_0 используется (7). Если реализуется краевой экстремум $\beta_1 = 0$ или $\beta_2 = 0$, то

$$Q = Q_1,\ Q = 0; \qquad q = q_1,\ q = 0, \tag{21}$$

а μ_2, μ_3 в этом случае определяются из (19).

Таким образом, оптимальные управления должны удовлетворять условиям (20) или (21), определяемым на решениях новой краевой задачи для системы (12) с конечными (15) и граничными (16)—(18) условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович Н. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. — М.: Наука, 1971. — 856 с.
2. Комаровский Л. В., Шабловский О. Н. Аналитическое исследование некоторых внутренних задач нестационарной газовой динамики переноса тепла. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1981. — 208 с.
3. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975. — 568 с.
4. Сиразетдинов Г. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1977. — 480 с.
5. Троицкий В. А., Петухов Л. В. Оптимизация формы упругих тел. — М.: Наука, 1982. — 432 с.
6. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики. — М.: Наука, 1979. — 448 с.
7. Атанов Г. А., Воронин С. Г. Оптимизация режимов работы гидроэнергетических установок. — Киев—Донецк, 1985. — 71 с.

8. Заказ 4428.

ОБ УДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

И. Т. Скородинский

В основе большинства математических моделей турбулентности лежит, как известно, идея Буссинеска о представлении касательных напряжений в осредненных уравнениях импульсов в виде произведений эффективного коэффициента вязкости и градиентов средних скоростей [1]. Эта идея во многом «навеяна» работами Стокса по феноменологическому построению теории вязкой жидкости, ключевым моментом которой является линейное представление зависимости тензора напряжений от тензора скоростей деформаций. Все многообразие моделей турбулентности в рамках данного подхода обусловлено тем или иным представлением коэффициентов турбулентной вязкости.

Вместе с тем в теории вязкой жидкости модель Стокса рассматривается как линейное приближение общей функциональной зависимости между тензорами напряжений и скоростей деформаций. Исследование последней проводилось в работах Райнера, Ривлина, Труселла [2]. Естественно ожидать, что их использование в теории турбулентности (разумеется, с учетом ее специфики) может привести к более точному описанию турбулентных течений.

В статье проводится анализ общей функциональной зависимости тензора турбулентных напряжений от осредненного тензора скоростей деформаций с целью выявления зависимости удельной энергии турбулентности от характеристик осредненного движения. Значимость удельной энергии как важнейшей характеристики пульсационного движения определяется также и тем, что она является неотъемлемой компонентой моделей турбулентности, основанных на дополнительных уравнениях переноса [3].

Рассматриваются стационарные осредненные течения несжимаемой жидкости. Теоретические расчеты сравниваются

с экспериментальными данными для низкоскоростных газовых потоков.

Результаты работы могут быть обобщены на случай турбулентного течения сжимаемой жидкости.

1. Обозначим через T и D соответственно тензоры рейнольдсовых напряжений и скоростей деформаций

$$T_{ij} = \rho\overline{u_i u_j}, \quad D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right).$$

Здесь U_i — составляющая средней скорости; u_i — составляющая пульсационной скорости; ρ — плотность; x_i — декартова координата в физическом пространстве.

Очевидно, $\mathrm{tr}T = \rho\overline{u_i u_i} = 2\rho b$, где b — удельная энергия турбулентности.

Как известно, основными характеристиками турбулентности являются удельная энергия и масштаб (характеристика размерности длины, пропорциональная как средним размерам турбулентных образований, так и пути перемешивания). В общем случае турбулентность обладает разными масштабами в различных направлениях; т. е. последние не обязаны быть равноправными. Поэтому в каждой точке течения можно определить тензор масштабов L, несферичность которого является мерой анизотропии турбулентного течения.

Рассмотрим вначале более простой случай, когда тензор L является сферичным, т. е. $L = lI$, где l — скаляр; I — единичный тензор. Данная гипотеза тем точнее, чем меньше градиенты осредненной скорости. Суть ее состоит в том, что при незначительных отклонениях от изотропности в первом приближении вполне допустима линеаризация уравнений относительно основного изотропного течения.

По аналогии с основным постулатом Стокса примем следующую гипотезу: тензор T является непрерывной функцией тензора D, инвариантной относительно любых ортогональных преобразований системы пространственных координат.

В отличие от постулатов Стокса однородность по пространственным переменным в общем случае не предполагаем. Это означает, что тензор T может явно зависеть от положения точки p в пространстве. Кроме этого, в общем случае естественно считать T зависящим от l, а также от совокупности термодинамических параметров κ; т. е.

$$T = f(D, p, l, \kappa). \qquad (1)$$

Следствием инвариантности f относительно ортогональных преобразований системы координат является то, что любое ортогональное преобразование, приводящее D к диагональному виду, приводит T также к диагональному виду. В результате, интересуясь только зависимостью T от D и следуя [2], приходим к следующей формуле для T:

$$T=\alpha I+\beta D+\gamma D^2, \tag{2}$$

где α, β, γ — некоторые (в общем случае неизвестные) скалярные функции, при прочих равных условиях зависящие от собственных чисел λ_i матрицы D, $i=\overline{1,3}$. Причем α, β, γ являются симметричными функциями λ_i, $i=\overline{1,3}$.

Отметим, что в (2) $\gamma=0$, если два собственных числа одинаковы.

Поскольку (2) означает, по существу, принятие гипотезы о равновесии между осредненным движением и турбулентностью, в случае $D=0$ в некоторой области пространства внутри ее будет отсутствовать какое-либо направляющее влияние на пульсационное движение (осредненное движение имеет характер движения всей жидкости в целом как твердого тела); т. е. последнее взаимодействует с самим собой, приближаясь к изотропному течению и затем к его вырождению.

Однако подобные процессы являются существенно неустановившимися, т. е. осредненные характеристики турбулентности в данной точке пространства меняются со временем [1]. Поэтому для установившихся течений в рамках гипотезы (1) необходимо следует $f(0, p, l, \kappa)=0$, т. е. в (2)

$$\alpha|_{D=0}=0. \tag{3}$$

В дальнейшем будем исследовать случай, когда собственные числа D различны. При расчете нетрудно убедиться, что это условие выполняется для внутренних областей плоских и осесимметричных течений в следах, струях, пограничных слоях, трубах, исключая, может быть, точки пространства, лежащие на оси симметрии. Учитывая, что $\mathrm{tr}D=\mathrm{div}V=0$ ($V=\{U_1, U_2, U_3\}$ — вектор скорости), из (2) следует

$$\rho b=3\alpha+\gamma\mathrm{tr}D^2. \tag{4}$$

Формула (4) является неконструктивной, поскольку α и γ — неизвестные функции. Однако, основываясь на (4), можно получить более конкретное представление для b, дополнительно предполагая, что α и γ как функции λ_i, $i=\overline{1,3}$,

можно представить в виде отрезка ряда Тейлора в окрестности $\lambda_i = 0$. Подобное представление, помимо требований, налагаемых на аналитические свойства α и γ, предполагает условие $|\lambda_i| < 1$, $i = \overline{1, 3}$.

Применительно к рассматриваемым в литературе плоским и осесимметричным течениям, для которых получены экспериментальные значения b, это условие выполняется. Поэтому в дальнейшем примем указанные допущения.

Учитывая тот факт, что α и γ — симметричные функции относительно λ_i, $i = \overline{1,3}$, и удерживая в разложении квадратичные члены, приходим к следующим приближенным представлениям:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\approx \alpha_0 + \alpha_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \alpha_2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3); \\ \gamma &\approx \gamma_0 + \gamma_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \gamma_2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

В силу (3) $\alpha_0 = 0$. Далее учтем, что $E_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \operatorname{div} V = 0$, $E_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$ — соответственно линейный, квадратичный главные инварианты D. Учитывая, что

$$E_2 = -\frac{1}{2} D_{ik} D_{ik} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} D^2,$$

поскольку (см. [4]) $2E_2 = -\operatorname{tr} D^2 + E_1^2$, получаем $\alpha = \nu_2 \operatorname{tr} D^2$, $\gamma = \nu_3 \operatorname{tr} D^2$, где ν_2, ν_3 в общем случае являются функциями p, l, κ.

Таким образом, из (4), (5) следует

$$b = \nu_1(p, l, \kappa) \operatorname{tr} D^2 + O(\|\lambda\|^2), \quad \lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}. \quad (6)$$

Здесь функция ν_1 имеет размерность квадрата длины. Отметим, что

$$2 \operatorname{tr} D^2 = \Phi = 2\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2}\right)^2. \quad (7)$$

Последнее выражение с точностью до размерного множителя совпадает с диссипативной функцией, представляющей то количество механической энергии осредненного движения жидкости, которое преобразуется в теплоту.

2. Рассмотрим более общий случай, когда тензор масштабов является несферичным, т. е. турбулентность обладает разными масштабами в различных направлениях. В таком

случае T будет зависеть от L. Поскольку T является симметричным тензором, естественно считать его зависящим от комбинации тензоров L и D, образующих симметричный тензор второго ранга. При этом в частном случае $L=ll$ следствием общей зависимости $T=f(D, L, p, \kappa)$ должна быть рассмотренная выше функция $T=f(D, l, p, \kappa)$. Простейшей связью L и D, удовлетворяющей данным требованиям, является выражение

$$M = LD+DL, \tag{8}$$

представляющее симметричный тензор второго ранга (подобное представление для анизотропных течений впервые было предложено Мониным в [5], который рассматривал линейную зависимость T от M). Тогда в качестве обобщения предыдущего анализа естественно принять следующую гипотезу: тензор T является непрерывной функцией тензора M, инвариантной относительно всех ортогональных преобразований координат.

Следствием данной гипотезы является следующее представление:

$$T=\alpha_1 I+\beta_1 M+\gamma_1 M^2, \tag{9}$$

где α_1, β_1, γ_1 — симметричные функции собственных чисел матрицы M, координат точек пространства p, а также совокупности термодинамических параметров κ. Этот результат, как и (2), легко получить по той же схеме, которая используется в [2] для вывода общей зависимости тензора напряжений от тензора скоростей деформаций.

Примем те же допущения относительно собственных чисел матрицы M, которые были приняты в предыдущем пункте для собственных чисел матрицы D. Тогда, представляя α_1, β_1, γ_1 отрезками ряда Тейлора в окрестности $y_i=0$, $i=\overline{1,3}$ (y_i — собственное число M), с учетом симметричности этих функций относительно y_i, $i=\overline{1,3}$, и условия $f(0, L, p, \kappa)=0$, на основании (9) приходим к следующей формуле для удельной энергии:

$$\begin{gathered} b = a(y_1+y_2+y_3)+O(\|y\|) = \\ =a\operatorname{tr}M+O(\|y\|),\ y=\{y_1, y_2, y_3\}, \end{gathered} \tag{10}$$

где a — функция p и κ.

Замечание. В работе [5] при рассмотрении линейной зависимости T от M вводилось дополнительное условие $\operatorname{tr}M=0$, обусловленное специальным видом линейной зависимо-

сти. Однако это условие привело к дополнительным ограничениям на квадраты трех компонент пульсаций скорости, не выполняющихся в реальных плоскопараллельных турбулентных потоках [6].

Для дальнейшей конкретизации (10) рассмотрим тензор M в системе координат, приводящей D к диагональному виду. Это приводит к представлению

$$\mathrm{tr}M = z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2 + z_3\lambda_3, \qquad (11)$$

где, как и ранее, λ_i — собственное число матрицы D, z_i — линейная комбинация компонент матрицы L, имеющая размерность длины. [На основании (8) легко убедиться, что в общем случае $z_1 \neq z_2 \neq z_3$, т. е. $\mathrm{tr}M \neq 0$; условие $z_1 = z_2 = z_3$ имеет место, если для выбранной системы координат элементы главной диагонали L равны между собой.]

Как и ранее, будем рассматривать случай, когда собственные числа матрицы D различны. Тогда из (10), (11) нетрудно получить следующую формулу:

$$b = \nu\Phi^{1/2} + O(\|\lambda\|) + O(\|y\|), \qquad (12)$$

где $\Phi = 2\,\mathrm{tr}\,D^2$ — функция, определяемая формулой (7); ν является в общем случае функцией координат точки пространства p и термодинамических параметров κ, размерность которой равна произведению размерностей скорости и длины.

Действительно, λ_i является корнем характеристического уравнения

$$\lambda^3 - \lambda^2 E_1 + \lambda E_2 - E_3 = 0,$$

где E_i — линейный ($i = 1$), квадратичный ($i = 2$) и кубичный ($i = 3$) инварианты тензора D. Причем $E_1 = \mathrm{tr}D = 0$, $E_2 = -\Phi$, $E_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det D$.

Поскольку собственные числа D различны и вещественны, по формулам Кардано получаем

$$\lambda_1 = 2(\tau/3)^{1/2}\cos(\alpha/3),\ \lambda_{2,3} = -2(\tau/3)^{1/2}\cos(\alpha/3 \pm \pi/3),$$

где $\tau = -E_2$, $\cos\alpha = E_3[2(\tau/3)^{3/2}]$.

Ограничиваясь нулевым приближением в разложении $\cos(\alpha/3)$, $\cos(\alpha/3 \pm \pi/3)$ как функцией λ_i в окрестности $\lambda_i = 0$, $i = 1,3$, на основании (10), (11) приходим к (12).

Таким образом, в случае сферического тензора L удельная энергия определяется формулой (6) (изотропная составляющая удельной энергии b), для несферичного тензо-

ра L — соотношением (12) (анизотропная составляющая b); т. е. общее представление для b имеет вид

$$b \approx \nu(p,\ \kappa)\Phi^{1/2} + \nu_1(p,\ \kappa)\Phi, \qquad (13)$$

причем при стремлении L к сферическому тензору ν стремится к нулю.

3. Обратимся теперь к экспериментальным результатам. Об изотропии или анизотропии тензора L можно судить по соотношениям между компонентами b (квадратами трех компонент пульсаций скорости). При сравнительно незначительном отклонении их друг от друга, что имеет место в турбулентных струях [7, 8], тензор L близок к изотропному. В меньшей степени это проявляется в турбулентных следах [1, 9]. Наиболее значительное отклонение друг от друга компонент b имеет место почти во всей внутренней части пограничного слоя [1, 6].

Применительно к рассмотренным ниже течениям для изотропного L из соображений размерности и на основании (6) естественно положить $b = \mathrm{d}r^2\Phi$, где $d = \mathrm{const}$, r — характерный поперечный размер плоского или осесимметричного течения, пропорциональный масштабу турбулентности (толщина следа, струи, пограничного слоя). Для анизотропного L из тех же соображений и на основании (12) полагаем $b = d_1 r u^* \Phi^{1/2}$, где $d_1 = \mathrm{const}$, u^*—характерная скорость (для следа и струи — скорость на оси, для пограничного слоя — динамическая скорость $u^* = (\tau/\rho)^{1/2}$, τ — напряжение трения на стенке).

Сравнение экспериментальных и расчетных результатов проведем для относительной удельной энергии $\varkappa = b/b_{\max}$, $b_{\max}$ — максимальное значение b в поперечном сечении; т. е. для изотропного тензора масштабов $\varkappa = \Phi/\Phi_{\max}$, в противном случае $\varkappa = (\Phi/\Phi_{\max})^{1/2}$, $\Phi_{\max}$ — максимальное значение Φ в поперечном сечении.

На рис. 1, *а* приведены расчетные и экспериментальные данные для свободной осесимметричной струи. Последние заимствованы из [10, с. 55—56] и получены при следующих условиях: $\mathrm{Re} = 39{,}3^3 \cdot 10^3 \div 59 \cdot 10^3$, $x = 7{,}5 \div 10$ (Re — число Рейнольдса, x — продольная координата в калибрах). Расчеты проводились для автомодельного профиля продольной скорости, хорошо зарекомендовавшего себя в расчетах струй и следов [7]:

$$U = u^*(x)\ (1 + 3\eta)\ (1-\eta)^3, \qquad (14)$$

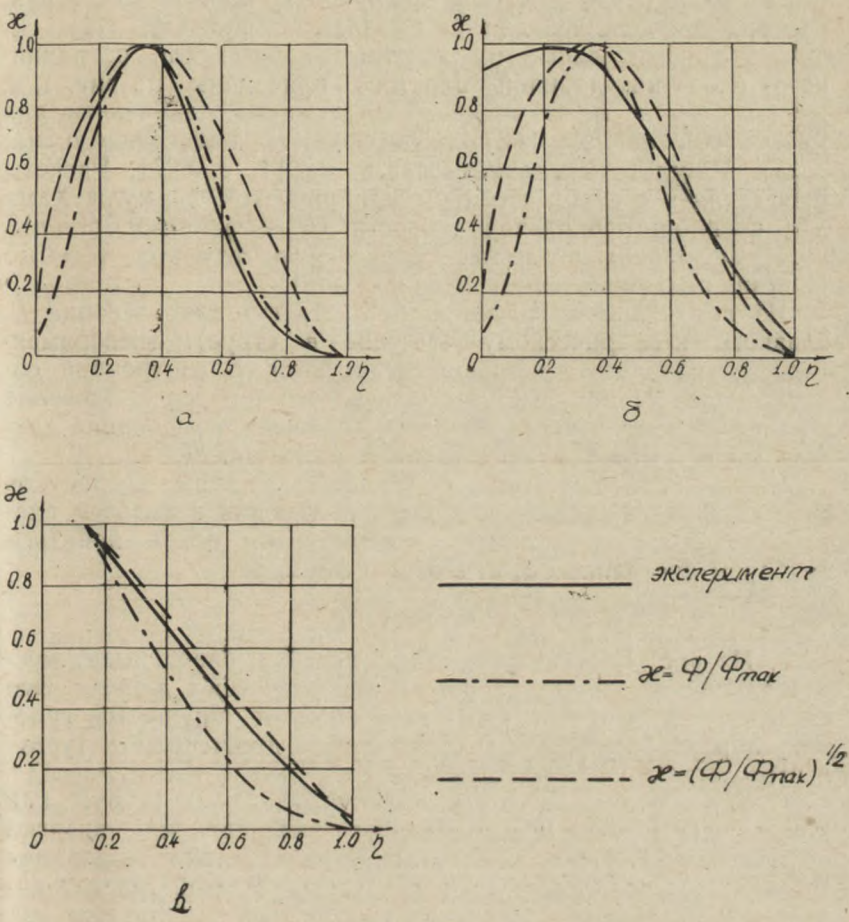


Рис. 1. Зависимость относительной удельной энергии турбулентности от поперечной координаты

где $\eta = y/r$, y — поперечная координата. Поперечная составляющая скорости определялась на основе (14) и уравнения неразрывности.

На рис. 1, *б* представлены экспериментальные данные Таунсенда для плоского следа за цилиндром по данным [1, с. 462] ($\mathrm{Re} = 1360$, $x = 500 \div 950$). Как и для струи, расчеты проводились для автомодельной функции (14).

Экспериментальные и расчетные кривые для пограничного слоя на длинной пластине приведены на рис. 1, *в*. Использовались опытные данные Клебанова, полученные для $\mathrm{Re} = 8 \cdot 10^4$, $u^*/U_0 = 0{,}037$ (U_0 — скорость набегающего потока). Результаты заимствованы из [1, с. 567]. Расчеты проводились с использованием эмпирической формулы Хама для профиля продольной скорости $(U_0 - U)/u^* = 9{,}6(1-\eta)^2$, которая хорошо согласуется с экспериментом при $\eta \geqslant 0{,}15$ [1] (вне пределов ламинарного подслоя).

Из приведенных графиков следует, что для тензора L, близкого к сферическому (течение в струе), экспериментальные результаты хорошо согласуются с изотропной составляющей b; для явно несферического тензора L (течение в пограничном слое) имеет место хорошее согласование данных эксперимента с анизотропной составляющей b.

В значительно меньшей мере опытные данные согласуются с каждой из составляющих b для течения в дальнем следе. Лучшего соответствия с экспериментом можно добиться подбором постоянных d, d_1 в общей формуле

$$b = dr^2\Phi + d_1 r u^{*1/2}.$$

4. Из рис. 1, *б* следует, что вблизи оси следа имеет место большое расхождение опытных и расчетных данных. Это свидетельствует о том, что в этой области нарушается гипотеза о равновесии между осредненным движением и турбулентностью.

Следует отметить, что и для турбулентных струй, как правило, при $x > 10$ происходит выравнивание энергии вблизи оси [1, 8]; т. е. на таких расстояниях «провала» энергии в этой области не наблюдается. В этой связи в качестве дальнейшего обобщения полученных результатов может служить следующее.

Следствием функциональной зависимости между T и D является то, что в каждой точке p

$$b(p) = \varphi(\lambda(p)), \quad \lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}; \tag{15}$$

т. е. в рамках чисто дифференциального подхода в точке p значение $b(p)$ определяется спектром $D(p)$ [заметим, что (15) является менее жестким предположением, нежели (1), поскольку из (15), вообще говоря, зависимость (1) не следует]. В более общем случае естественно предположить, что удельная энергия $b(p)$ зависит от спектра $D(x_1, x_2, x_3)$ для всех точек пространства, принадлежащих некоторой конечной области, размеры которой в каждом из направлений пропорциональны соответствующим масштабам турбулентности; т. е. в рамках интегрального подхода обобщением (15) является представление $b(p)$ в виде функционала

$$b(p) = \frac{1}{|Q(p)|} \iiint_{Q(p)} \varphi(\lambda(x_1, x_2, x_3))\, dx_1\, dx_2\, dx_3, \qquad (16)$$

где $Q(p)$ — объем, ограниченный поверхностью эллипсоида. центр которого находится в точке p, а главные оси совпадают с главными осями тензора L; $|Q(p)|$ — величина объема $Q(p)$.

Для областей $Q(p)$, в которых изменение φ незначительно, (15) следует из (16). В тех же случаях, когда в пределах $Q(p)$ изменение φ значительно (что имеет место вблизи оси следа или струи для масштабов турбулентности на оси порядка среднего масштаба по сечению), соотношение (16) приводит к выравниванию энергии в области $Q(p)$.

Формула (16) качественно отражает наличие «провала» энергии на оси струи, наблюдаемое в развитых турбулентных струях [8] (подобное явление обнаружено также и в ближнем следе [11]). Действительно, этот факт имеет место при измерениях вблизи границы, разделяющей ядро струи и развитую турбулентность. Поскольку граница представляет собой поверхность конуса с вершиной на оси струи, для примыкающей области развитой турбулентности в поперечном сечении порядок масштаба турбулентности неодинаков: на оси струи он еще достаточно мал и возрастает с увеличением поперечной координаты. С ростом x порядок масштаба выравнивается по сечению. В точках оси, где этот порядок сравнительно мал, (16) сводится, практически, к формуле (15), которая дает резкое падение энергии на оси и вблизи нее (за счет обращения в ноль на оси поперечного градиента средней продольной скорости).

В заключение отметим, что полученные выше результаты легко обобщить на случай сжимаемой жидкости, если допол-

нительно предположить (по аналогии с известным результатом из теории ламинарных течений вязкой сжимаемой жидкости [2]), что генерации турбулентной энергии за счет осредненного движения не происходит в случае, когда при деформации жидкого элемента осредненного потока сохраняются углы. В этом случае предыдущие результаты полностью переносятся на случай сжимаемой жидкости путем замены тензора D на тензор $D-(\mathrm{tr}\,D/3)I$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хинце И. О. Турбулентность. — М.: Физматгиз, 1963. — 680 с.
2. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. — М.: ИЛ, 1963. — 256 с.
3. Турбулентность. Принципы и применения/Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. — М.: Мир, 1980. — 535 с.
4. Борисенко А. И., Тарапов И. Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. — М.: Высшая школа, 1963. — 262 с.
5. Монин А. С. О характеристиках анизотропной турбулентности. — ДАН, 1950, т. 75, № 5, с. 621—624.
6. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Часть 1. — М.: Наука, 1965. — 639 с.
7. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. — М.: Машиностроение, 1969. — 400 с.
8. Желязны С., Моргенталлер И., Херендин Д. Модели для расчета напряжений трения и интенсивности турбулентных пульсаций для осесимметричных спутных струй. — Ракетная техника и космонавтика, 1973, т. 11, № 8, с. 137—146.
9. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. — М.: ИЛ, 1959. — 399 с.
10. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. — М.: Физматгиз, 1960. — 715 с.
11. Яненко Н. Н., Бардаханов П. С., Козлов В. В. Образование когерентных структур в турбулентном следе при акустическом воздействии. — ДАН, 1984, т. 274, № 1, с. 50—53.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ОСНОВЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В. Т. Сарычев

Для исследования структуры фронта плоской ударной волны предлагается система моментных уравнений. Составление замкнутой системы производится на основе уравнения. Больцмана при специальном выборе вида функции распределения. Рассматриваются как бимодальные, так и одномодовые функции распределения. Существенным отличием от ранее используемых аппроксимаций функции распределения является учет возможной их асимметрии. Приводятся результаты численного решения полученной системы уравнений для одноатомного газа при различных числах Маха.

Использованы обозначения: n_0, u_0, T_0 и n^*, u^*, T^* — концентрация, средняя скорость и температура газа перед и за фронтом ударной волны соответственно; ν_0, λ_0 — частота столкновений и длина свободного пробега перед фронтом ударной волны; v, w — продольная и поперечная компоненты скорости; M — число Маха; t, z — безразмерные временная и пространственная координаты.

1. Получение моментных уравнений

Традиционный метод моментов основан на разложении функции распределения по полиномам Эрмита [1]. Однако для ударной волны такая аппроксимация непригодна из-за возможности нарушения положительной определенности функции распределения [2]. Первоначально зависимость от пространственной координаты предполагалась лишь у амплитуд мод. Затем и другие параметры, такие, как температура, средняя скорость, стали считаться функциями координат. Более того, допускалась анизотропия температур [3].

Вместе с тем результаты исследования структуры фронта ударной волны на основе численного моделирования указывают на возникновение асимметрии у одной из мод функ-

ции распределения по продольной компоненте скорости [4].

Цель данной работы: получить и решить моментные уравнения с учетом указанной асимметрии. В общем случае предполагается, что функция распределения на фронте ударной волны представляется суммой двух мод f_1 и f_2

$$f_1 = n_1 (\pi T_1)^{-3/2} \exp\left(-\frac{(v-u_1)^2 + w^2}{T_1}\right);$$

$$f_2 = 2n_2\pi^{-3/2} (T_+ (\sqrt{T_+} + \sqrt{T_-}))^{-1} \exp\left(-\frac{w^2}{T_\perp}\right) \times$$

$$\times \left(\theta(-x)\exp\left(-\frac{x^2}{T_-}\right) + \theta(x)\exp\left(-\frac{x^2}{T_+}\right)\right); \quad (1)$$

$$x = v - u_2 + \bar{x},\ \bar{x} = (\sqrt{T_+} - \sqrt{T_-})/\sqrt{\pi}.$$

$\Theta(x)$ — функция включения Хэвисайда.

Все восемь параметров n_1, u_1, T_1, n_2, u_2, T_+, T_-, T_+ зависят от координаты z. Все параметры вычисляются в безразмерных величинах: концентрация относительно n_0, температура относительно T_0, за единицу скорости берется величина $\sqrt{2kT_0/m}$, единицей пространственного масштаба является длина свободного пробега λ_0, время измеряется в величинах ν_0^{-1}.

Для вычисления параметров составляется система 8 моментных уравнений. Моменты определяются не для полной функции распределения, а для каждой из мод в отдельности; три для f_1: $M_1 = n_1$, $M_2 = \langle n_1 v\rangle$, $M_3 = \langle n_1 (v^2+w^2)\rangle$, пять для f_2: $M_4 = n_2$, $M_5 = \langle n_2 v\rangle$, $M_6 = \langle n_2 v^2\rangle$, $M_7 = \langle n_2 v^3\rangle$, $M_8 = \langle n_2 w^2\rangle$. Угловые скобки означают усреднение по соответствующей моде.

Постулируется, что в результате столкновений частицы, соответствующие f_1, переходят в распределение f_2, так что кинетическое уравнение Больцмана распадается на систему двух кинетических уравнений:

$$\partial_t f_1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} v \partial_z f_1 = -J(f_1, f_2);$$

$$\partial_t f_2 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} v \partial_z f_2 = J(f_1, f_2) + J(f_2, f_2). \quad (2)$$

Отсюда легко получить уравнения для моментов в следующем виде:

$$\partial_t M_i + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\partial_z N_i = L_i; \tag{3}$$

где N_i — поток момента M_i; L_i — скорость изменения соответствующего момента за счет столкновений. $\sqrt{\pi}/2$ появляется вследствие зависимости $\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2kT_0}{m}}\Big/\nu_0$.

2. Определение параметров функции распределения

Для нахождения потоков и интегралов столкновений необходимо параметры функции распределения выразить через моменты. Используя определение моментов и функциональный вид мод (1), можно получить

$$n_1 = M_1,\ u_1 = M_2/n_1,\ T_1 = \frac{2}{3}(M_3/n_1 - u_1^2),$$

$$n_2 = M_4,\ u_2 = M_5/n_2,\ T_\perp = M_8/n_2. \tag{4}$$

Температуры T_+ и T_- находятся в результате решения алгебраических уравнений:

$$\overline{x^3} + (\overline{v^2}\overline{x} - \overline{v^3})/(3-\pi) = 0;$$
$$y = 2\overline{v^2} - (\pi - 2)\overline{x^2},\ y = -\sqrt{T_+ T_-}; \tag{5}$$
$$\overline{v^2} = M_6/n_2 - u_2^2,\ \overline{v^3} = M_7/n_2 - u_2^3 - 3u_2\overline{v^2}.$$

Действительные значения температур T^+ и T^- получаются при выполнении условия

$$(\overline{v^3})^2 < \frac{4}{27(\pi - 3)}(\overline{v^3})^2 \tag{6}$$

В этом случае

$$\overline{x} = 2\cos\left(\frac{2\pi - \alpha}{3}\right)\sqrt{\overline{v^2}/3(\pi - 3)},$$

где $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\overline{v^3}\sqrt{27(\pi - 3)/\overline{v^2}^3}$.

Далее, согласно (5) вычисляется y, а затем T_- и T_+ на основании выражений

$$\sqrt{T_-} = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\bar{x} + \sqrt{\pi\bar{x}^2/4 + y};$$
$$\sqrt{T_+} = y/\sqrt{T_-}. \tag{7}$$

3. Вычисление потоков

При известных параметрах функции распределения вычисление потоков N_j не представляет особого труда. Однако при практической реализации алгоритма имеется дискретный набор значений параметров, усредненных по объему ячеек. Потоки же необходимо считать через границы ячеек. В настоящей работе предлагается значения параметров функции распределения считать постоянными в пределах каждой ячейки, подобно тому, как это принимается в задаче о распаде разрыва. Таким образом, функция распределения будет претерпевать разрывы на границах ячеек, в связи с этим потоки моментов $N_{j,i}$ через левую границу i-й ячейки вычисляются по формуле

$$N_{j,i} = \int_{-\infty}^{0} vp_j f_i dv + \int_{0}^{\infty} vp_j f_{i-1} dv, \tag{8}$$

где p_j — соответствующий моменту M_j полином скорости.

Интегрируя уравнение (3) по z в пределах каждой ячейки, можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\partial_t M_{j,i} = (N_{j,i} - N_{j,i+1})/H_i + L_{j,i}. \tag{9}$$

Здесь H_i — размер i-й ячейки.

4. Вычисление интегралов столкновений

В общем случае вычисление L_j представляется довольно сложной процедурой. Однако для некоторых законов столкновений L_j выражается точно в явном виде через моменты. Так, если сечение столкновения обратно пропорционально относительной скорости частиц (максвелловские молекулы), а скорости частиц после столкновения распределены изотропно в системе центра масс, то на основе интеграла столкновений можно получить следующие выражения для L_j:

$$L_1 = -M_1M_4;\ L_2 = -M_2M_4;\ L_3 = -M_3M_4;\ L_4 = -L_1;\ L_5 = -L_2;$$

$$L_6 = \frac{M_1}{3}\left(M_4\left(\frac{3}{2}T_1 + 2u_1^2\right) + 2u_1M_5 - M_6 + M_8/2\right) + \\ + \frac{M_4}{3}\left(\frac{M_8}{2} - M_6\right) + \frac{M_5^2}{3}; \qquad (10)$$

$$L_7 = \frac{M_1}{2}\left(M_4u_1(u_1^2 + 2T_1) + M_5(u_1^2 + T_1) + u_1M_6 - M_7 + \right.$$

$$\left. + (u_1 + u_2)\frac{M_8}{2}\right) + \frac{M_5}{2}(M_8 + M_6) - \frac{M_4}{2}M_7;$$

$$L_8 = \frac{M_1}{3}\left(M_4(u_1^2 + 3T_1) - 2u_1M_5 + M_6 - \frac{M_8}{2}\right) - \frac{M_4}{3}\left(\frac{M_8}{2} - M_6\right).$$

Согласно исследованиям Берда [5], определяющим в структуре фронта ударной волны является характер зависимости сечения столкновения от относительной скорости молекул, а не индикатриса рассеяния. В связи с этим можно допустить, что выражения (10) соответствуют интегралу столкновений максвелловских молекул.

5. Задание начальных и граничных условий

Следуя Черемисину [6], начальные условия можно задать следующим образом. В левой половине расчетного участка положить $f_1 = f_0$, $f_2 = 0$, а в правой половине $f_1 = 0$, $f_2 = f^*$. Здесь f_0 и f^* — асимптотические значения функции распределения вдали от фронта ударной волны слева и справа соответственно. Предварительные расчеты, однако, показали, что для скорейшей сходимости результатов начальные условия удобно определять на основе линейной интерполяции асимптотических значений моментов.

Граничные условия следует выбирать таким образом, чтобы избежать по возможности отраженных от границ возмущений и в то же время обеспечить справедливость соотношений Гюгонио в установившемся решении. В предлагаемой работе это осуществляется следующим образом. При вычислении потоков через крайнюю правую границу в качестве подынтегральной функции распределения в первом интеграле выражения (8) берется асимптотическая функция f^*, второй же интеграл вычисляется на основе текущих зна-

чений моментов граничной ячейки. При таком способе задания граничных условий «избытки» значений интегралов движения, возникшие при задании начальных профилей, могут вытечь из расчетного участка.

6. Обсуждение результатов расчета

Расчеты проводились для максвелловских молекул в диапазоне чисел Маха от 1,1 до 8. Шаг Hz по пространственной координате брался от 0,2 до 1. Шаг Ht по времени подбирался эмпирически. Оказалось, что схема устойчива, когда отношение шагов удовлетворяет обычному условию Куранта с заменой скорости звука скоростью набегающего потока.

На рис. 1 приведены результаты расчета обратной ширины фронта ударной волны (x — расчет автора). Для сравнения приводятся данные из работы [7]; приняты следую-

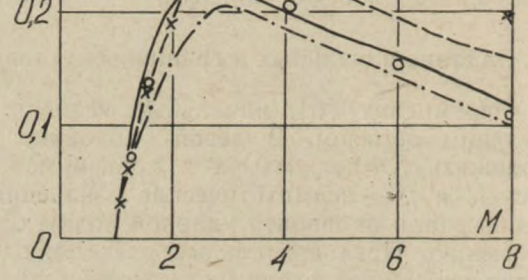


Рис. 1

щие обозначения: 0 — расчет методом Нордсика; сплошная, штриховая и штрихпунктирные линии — расчеты на основе метода Мотт—Смита для моментов (vw_2), v_2 и v^3 соответственно. Согласно рис. 1 для $M \leqslant 2{,}5$ все результаты расчетов (исключая штрихпунктирную линию) хорошо согласуются друг с другом. Расхождение результатов при больших значениях чисел Маха указывает, что бимодальная аппроксимация с симметричными модами не соответствует реальной функции распределения.

В расчетах с учетом асимметрии также возникли внутренние противоречия при $M \geqslant 3$. Максимально допустимый коэффициент асимметрии у распределения f_2 [выражение (1)] равен $4\sqrt{27}/(\pi-3)$. Однако при $M \geqslant 3$ в окрестности передней кромки фронта ударной волны этот коэффициент становится больше указанной величины. Для избежания мнимостей при определении температур величине v^3 присваивается в этой области максимально возможное значение. Для корректного устранения противоречия, аппроксимирующие функцию распределения выражения, должны допускать большие значения коэффициента асимметрии.

В диапазоне чисел Маха $M \leqslant 2{,}5$ было обнаружено «слияние» значений параметров функции f_2 с параметрами f_1 на передней кромке ударной волны. Это обстоятельство позволило сократить число моментов с 8 до 5, аппроксимируя функцию распределения лишь одной модой f_2. Причем профили параметров одномодового решения оказались более гладкими, чем бимодального, а само решение выходило на

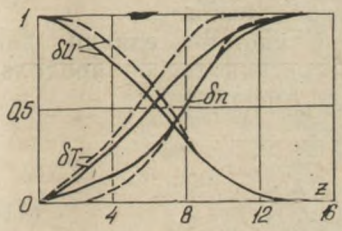


Рис. 2

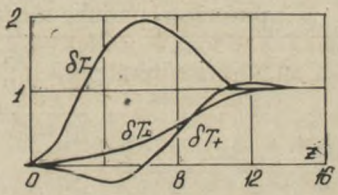


Рис. 3

стационарный режим значительно скорее. Дополнительным аргументом в пользу одномодового асимметричного распределения являются результаты решения Больцмана методом Нордсика [7]. На приведенных в указанной работе рельефах функции распределения для максвелловских молекул наблюдается лишь один максимум для всех сечений фронта ударной волны.

На рис. 2 для $M=2$ приводятся профили концентрации $\delta n = (n-n_0)/(n^*-n_0)$, температуры $\delta T = (T-T_0)/(T^*-T_0)$ и скорости $\delta u = (u-u^*)/(u_0-u^*)$; штриховыми линиями представлены соответствующие профили бимодальной модели [8]. Контроль точности осуществлялся по максимальному

отклонению потоков числа частиц, импульса и энергии от однородных стационарных значений. При времени счета $t=10$ (обратных частот столкновений) отклонения потока числа частиц не превышали 5%, потоки других интегралов движения были меньше. При $t=20$ это отклонение составляло лишь 2%. Счет прекращался при $t=260$, при этом отклонения потока числа частиц составляли всего 0,01%.

Вид функции распределения f_2 определяется значением температур T_+, T_- и T_1; на рис. 3 приведены профили величин $\delta T_+ = (T_+ - T_0)/(T^* - T_0)$, $\delta T_- = (T_- - T_0)/(T^* - T_0)$, $\delta T = (T_\perp - T_0)/(T^* - T_0)$. Большие значения δT_- означают наличие «хвоста» у функции распределения, вытянутого в направлении распространения ударной волны. Характер анизотропии продольной и поперечной температур подобен расчетам Берда [4]: профиль продольной температуры имеет четко выраженный экстремум и расположен выше профиля поперечной температуры.

Представляет интерес сопоставить тензор вязких напряжений и поток тепла, вычисленные согласно выражениям Навье—Стокса с соответствующими величинами, определенными через параметры функции распределения.

В принятой работе безразмерной системе единиц для максвелловских молекул навье-стоксовский тензор продольных вязких напряжений и поток тепла имеют вид

$$\tilde{p}_{zz} = -\frac{5}{12}\sqrt{\pi}T\frac{\partial u}{\partial z}; \qquad \tilde{q}_z = -\frac{75}{128}\sqrt{\pi}T\frac{\partial T}{\partial z}. \tag{11}$$

(Чтобы не загромождать запись, в этих выражениях опущен молекулярный вес.)

Непосредственно определенные через параметры функции f^2, эти величины имеют вид

$$p_{zz} = \frac{n}{3}(2\overline{v^2} - T_1); \qquad q_z = \frac{n}{2}\overline{v^3}. \tag{12}$$

Значения $\overline{v^2}$ и $\overline{v^3}$ вычисляются согласно (5).

На рис. 4 приведены профили указанных величин. Амплитуда p_{zz} в 2 раза больше амплитуды $\tilde{p}_{zz}$, это означает, что навье-стоксовское приближение дает меньшие отклонения функций распределения от равновесных значений. Поток тепла q_z на несколько длин пробега раньше приблизится к нулю, чем $\tilde{q}_z$. Происходит это вследствие того, что симметризация функции распределения по продольной компоненте скорости осуществляется раньше, чем наступает равновесие между продольной и поперечной температурами.

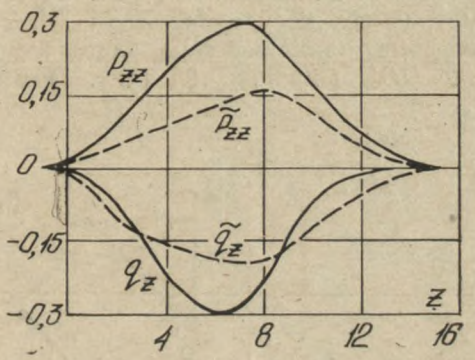


Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. — М.: Наука, 1967. — 440 с.

2. Тамм И. Е. О ширине ударной волны большой интенсивности. Собрание научных трудов. Т. 1. — М.: Наука, 1975. — 424 с.

3. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. — М.: Мир, 1978. — 495 с.

4. Берд Дж. А. Функция распределения скоростей в ударной волне. — В кн.: Вычислительные методы в динамике разреженных газов. — М.: Мир, 1969, с. 40—45.

5. Берд Г. Молекулярная газовая динамика.—М.: Мир, 1981.—319 с.

6. Аристов В. В., Черемисин Ф. Г. Структура ударной волны в одноатомном газе при степенных потенциалах взаимодействия. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 6, с. 179—183.

7. Yen S.-M. Shock-wave structure and intermolecular collision laws. J. Fluid Mech., 1974, v. 65, № 1, p. 127—144.

8. Muckenfuss C. Same aspects of shock structure according to the bimodal model. Phys. Fluids, 1962, v. 5, № 11, p. 1325—1336.

ИСТЕЧЕНИЕ СТРУИ ГАЗА ИЗ СИММЕТРИЧНОГО СОСУДА, СОСТАВЛЕННОГО ТРЕМЯ ОДИНАКОВЫМИ КАНАЛАМИ

Е. Д. Томилов

1. Истечение газовой струи. Пусть из бесконечного симметричного сосуда $DCBAB'C'D'$, составленного тремя одинаковыми каналами с параллельными стенками, через отверстие DD' шириной $2h$ (рис. 1) вытекает струя

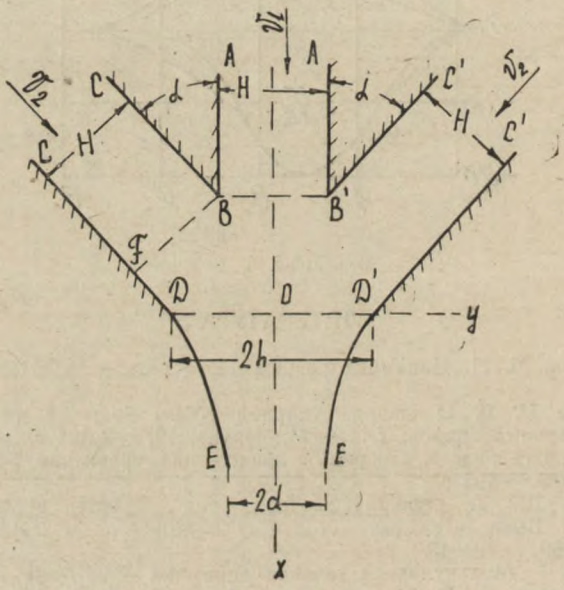


Рис. 1

невязкого газа. Обозначим ширину каждого канала через H, и пусть в среднем канале скорость v на бесконечности имеет значение v_1, а в боковых каналах значение $v_2 \leqslant v_1$.

Ширину струи на бесконечности вниз по потоку обозначим через $2d$, а скорость на ее свободных границах и на бесконечности — через v_0.

Примем за ось x ось симметрии потока, беря начало координат O в центре отверстия истечения. Обозначим через α угол, составляемый с осью x стенками боковых каналов.

Плоскости течения сопоставим плоскость годографа скорости, беря в ней в качестве координат угол θ наклона скорости к оси x и зависящую от модуля скорости переменную

$$\sigma = \int_{\tau}^{\tau_0} \frac{\rho}{\rho^0} \frac{d\tau}{2\tau}, \tag{1.1}$$

где $\tau = v^2/v^2_{max}$; v_{max} — предельная скорость в газе; τ_0 — значение τ, отвечающее наибольшей скорости v_0 в потоке; ρ — плотность газа; ρ^0 — плотность торможения. Рассматри-

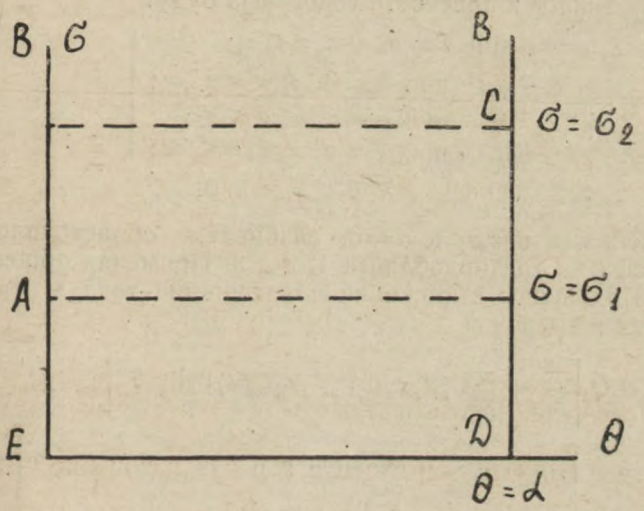


Рис. 2

вая в силу симметрии лишь левую половину течения, видим, что отвечающая этой половине область плоскости годографа представляется полуполосой $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$, $0 \leqslant \sigma \leqslant \infty$ (рис. 2). Соответственные точки обозначены теми же буквами.

Пусть $2Q_1$ есть расход газа в среднем канале; Q_2 — расход в каждом из боковых каналов. Тогда общий расход в половине течения будет $Q=Q_1+Q_2$, и мы будем иметь

$$Q_1 = \frac{1}{2} H \frac{\rho_1}{\rho^0} v_1;\quad Q_2 = H \frac{\rho_2}{\rho^0} v_2;\quad Q = H \frac{\rho_1 v_1 + 2\rho_2 v_2}{2\rho^0} =$$

$$= d \frac{\rho_0}{\rho^0} v_0. \tag{1.2}$$

Здесь ρ_i — плотность, отвечающая скорости v_i $(i=0, 1, 2)$. Вводя относительные величины, имеем

$$q_1 = \frac{Q_1}{Q} = \frac{\rho_1 v_1}{\rho_1 v_1 + 2\rho_2 v_2};\quad q_2 = \frac{Q_2}{Q} = \frac{2\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + 2\rho_2 v_2};$$

$$q_1 + q_2 = 1. \tag{1.3}$$

Обозначим через σ_1 и σ_2 значения σ, отвечающие скоростям v_1 и v_2 соответственно. Тогда граничные условия для функции тока ψ в плоскости годографа будут

$$\left.\begin{aligned} &\psi = 0 \text{ при } \theta = 0,\ 0 < \sigma < \sigma_1; \\ &\psi = -q_1 Q \text{ при } \theta = 0,\ \sigma_1 < \sigma \leqslant \infty; \\ &\psi = -Q \text{ при } \theta = \alpha,\ 0 < \sigma < \sigma_2, \\ &\psi = -q_1 Q \text{ при } \theta = \alpha,\ \sigma_2 < \sigma \leqslant \infty; \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

$$\psi \equiv -Q \text{ при } 0 < \theta \leqslant \alpha,\ \sigma = 0. \tag{1.5}$$

Сечениями $\sigma=\sigma_1$ и $\sigma=\sigma_2$ разбиваем область плоскости годографа на три подобласти 1, 2 и 3. Применяя общеизвестный метод, ищем выражения для функции тока в этих подобластях в виде

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= -Q\left[\frac{\theta}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n z_\nu(\sigma) + B_n \zeta_\nu(\sigma)\} \sin \nu\theta\right]; \\ \psi_2 &= -Q\left[q_1 + q_2 \frac{\theta}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \{C_n z_\nu(\sigma) + D_n \zeta_\nu(\sigma)\} \sin \nu\theta\right]; \\ \psi_3 &= -q_1 Q\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n z_\nu(\sigma) \sin \nu\theta\right],\quad \nu = \frac{n\pi}{\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

где $z_\nu(\sigma)$ и $\zeta_\nu(\sigma)$ — соответственно интегралы Чаплыгина и Черри, введенные автором в книге [1] и удовлетворяющие условиям

$$z_\nu(0)=1,\ z_\nu'(0)=b_\nu=-\nu\frac{\rho^0}{\rho_0}x_{\nu/2}(\tau_0),\ z_\nu(\infty)=0,$$
$$\zeta_\nu(0)=0,\ \zeta_\nu'(0)=1,\ \zeta_\nu(\infty)=\infty, \tag{1.7}$$

$x_{\nu/2}(\tau)$ — функция, введенная Чаплыгиным, причем

$$x_{\nu/2}(0)=1. \tag{1.8}$$

Видим, что функции (1.6) удовлетворяют условиям (1.4). Коэффициенты A_n, ..., E_n найдутся из (1.5) и условий аналитического продолжения

$$\psi_i=\psi_{i+1},\ \frac{\partial\psi_i}{\partial\sigma}=\frac{\partial\psi_{i+1}}{\partial\sigma}\ \text{при}\ \sigma=\sigma_i\ (i=1,2).$$

В результате придем к окончательным выражениям для функций тока

$$\psi_1=-Q\left[\frac{\theta}{\alpha}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\{z_\nu(\sigma)+\right.$$
$$\left.+[-q_1z_\nu'(\sigma_1)+(-1)^{n-1}q_2z_\nu'(\sigma_2)]\zeta_\nu(\sigma)\}\sin\nu\theta\right];$$
$$\psi_2=-Q\left[q_1+q_2\frac{\theta}{\alpha}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\{[1-q_1\zeta_\nu'(\sigma_1)]z_\nu(\sigma)+\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}q_2z_\nu'(\sigma_2)\zeta_\nu(\sigma)\}\sin\nu\theta\right]; \tag{1.9}$$
$$\psi_3=-Q\left[q_1+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\{1-q_1\zeta_\nu'(\sigma_1)+\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}q_2\zeta_\nu'(\sigma_2)\}z_\nu(\sigma)\sin\nu\theta\right].$$

Из двух выражений Q по (1.2) имеем для коэффициента k сжатия струи

$$\kappa=\frac{d}{h}=\frac{1}{2}\frac{H}{h}\frac{\rho_1v_1+2\rho_2v_2}{\rho_0v_0}, \tag{1.10}$$

Возьмем поперечное сечение BF левого канала (см. рис. 1) и обозначим через a длину отрезка DF стенки. Тогда

$$h=\frac{1}{2}H(1+2\cos\alpha)-a\sin\alpha.$$

Выражая отсюда значение отношения H/h и подставляя его в (1.10), находим

$$\kappa = \frac{d}{h} = \frac{1 + \frac{a}{h}\sin\alpha}{1 + 2\cos\alpha} \frac{\rho_1 v_1 + 2\rho_2 v_2}{\rho_0 v_0}. \tag{1.11}$$

Можно, однако, получить другое выражение этого коэффициента. Именно, согласно [1], на свободной границе DE имеем

$$dy = -\frac{\sin\theta}{v_0}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=0} d\theta. \tag{1.12}$$

К отображению DE этой границы на рис. 2 прилегает подобласть 1, поэтому в (1.12) $\psi=\psi_1$. В силу условий (1.7) из (1.9) имеем

$$\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=0} = -\frac{2}{\pi} Q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{b_\nu - q_1 z_\nu'(\sigma_1) + \\ + (-1)^{n-1} q_2 z_\nu'(\sigma_2)\} \sin\nu\theta.$$

Подставляем это выражение в (1.12) и производим интегрирование от $\theta=\alpha$ до $\theta=0$ с учетом того, что при $\theta=0$ $y=-d$. Заменяя еще Q его вторым значением из (1.2), найдем

$$d = h + 2d\frac{\rho_0}{\rho^0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\nu^2 - 1} \{b_\nu - q_1 z_\nu'(\sigma_1) + \\ + (-1)^{n-1} q_2 z_\nu'(\sigma_2)\},$$

откуда для обратной величины коэффициента сжатия получаем

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{h}{d} = 1 - 2\frac{\rho_0}{\rho^0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 - 1} \{(-1)^{n-1} [b_\nu - \\ - q_1 z_\nu'(\sigma_1)] + q_2 z_\nu'(\sigma_2)\}. \tag{1.13}$$

При заданной геометрии сосуда, то есть при известных α, h и a, а также при известных условиях вне сосуда (известны v_0 и ρ_0), равенства (1.11) и (1.13) связывают три неизвестных параметра κ, v_1 и v_2. Таким образом, оказалось, что если, например, задать скорость v_1 в среднем канале, то данное течение будет возможно только при определенном значении скорости v_2 в боковых каналах.

Рассмотрим еще другой случай, когда меньшая скорость v_2 имеет место в среднем канале на бесконечности, а в боковых каналах имеется бóльшая скорость v_1. Тогда область плоскости годографа представится рис. 3. Граничные условия (1.4) заменятся условиями

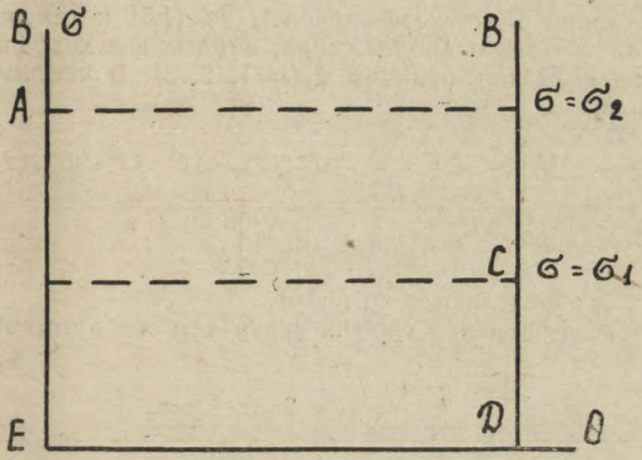


Рис. 3

$$\left.\begin{aligned}
&\psi=0 \text{ при } \theta=0,\ 0<\sigma<\sigma_2;\\
&\psi=-q_1Q \text{ при } \theta=0,\ \sigma_2<\sigma\leqslant\infty;\\
&\psi=-Q \text{ при } \theta=\alpha,\ 0<\sigma<\sigma_1;\\
&\psi=-q_1Q \text{ при } \theta=\alpha,\ \sigma_1<\sigma\leqslant\infty.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.14)$$

При этом теперь вместо (1.2) и (1.3) будем иметь равенства

$$\left.\begin{aligned}
&Q_1=\frac{1}{2}H\frac{\rho_0}{\rho^0}v_2,\quad Q_2=H\frac{\rho_1}{\rho^0}v_1,\quad Q=H\frac{2\rho_1v_1+\rho_2v_2}{2\rho^0}=\\
&\qquad=d\frac{\rho_0}{\rho^0}v_0,\\
&q_1=\frac{Q_1}{Q}=\frac{\rho_2v_2}{2\rho_1v_1+\rho_2v_2},\quad q_2=\frac{Q_2}{Q}=\\
&\qquad-\frac{2\rho_1v_1}{2\rho_1v_1+\rho_2v_2},\quad q_1+q_2=1.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.15)$$

Ищем выражения для функций тока в той же форме (1.6) с той разницей, что теперь, вследствие изменения граничных условий,

$$\psi_2 = -Q\left[q_1\frac{\theta}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\{C_n z_\nu(\sigma) + D_n\zeta_\nu(\sigma)\}\sin\nu\theta\right].$$

Определяя опять коэффициенты из (1.5) и тех же условий аналитического продолжения, найдем все коэффициенты в выражениях для функций $\psi_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$. В частности, будем иметь

$$\psi_1 = -Q\left[\frac{\theta}{\alpha} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\{z_\nu(\sigma) + [(-1)^{n-1}q_1 z_\nu'(\sigma_2) - q_2 z_\nu'(\sigma_1)]\zeta_\nu(\sigma)\}\sin\nu\theta\right], \tag{1.16}$$

где q_1 и q_2 определяются по (1.15).

Для коэффициента сжатия струи тем же путем получим

$$\kappa = \frac{d}{h} = \frac{1+\dfrac{a}{h}\sin\alpha}{1+2\cos\alpha}\cdot\frac{2\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}{\rho_0 v_0}, \tag{1.17}$$

а в силу (1.16) формула (1.13) заменится формулой

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{h}{d} = 1 - 2\frac{\rho_0}{\rho^0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2-1}\{(-1)^{n-1}[b_\nu - q_1 z_\nu'(\sigma_2)] + q_2 z_\nu'(\sigma_1)\}. \tag{1.18}$$

О вычислении параметров κ, v_1 и v_2 следуют те же выводы, что и в предыдущем случае.

2. Истечение струи несжимаемой жидкости. В этом случае в полученных формулах нужно положить $\rho = \text{const}$, а также по [1] взять $b_\nu = -\nu$, $z_\nu(\sigma) = -\nu t^\nu$, где $t = v/v_c$. Полагаем также $\pi/\alpha = m$, $\nu = mn$, $t_1 = v_1/v_0$, $t_2 = v_2/v_0$, $t_2 \leqslant t_1$.

Тогда для первого из рассмотренных случаев (v_1 — в среднем канале) формулы (1.3) можно взять в виде

$$q_1 = \frac{t_1}{t_1 + 2t_2},\quad q_2 = \frac{2t_2}{t_1 + 2t_2}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим истечение струи при $a = 0$, то есть для случая, когда боковые каналы оканчиваются сечениями, пер-

пендикулярными к стенкам (например, сечением BF для левого канала). Тогда, используя также (2.1), равенства (1.11) и (1.13) можно представить в виде

$$\kappa = \frac{d}{h} = \frac{t_1 + 2t_2}{1 + 2\cos\alpha}; \tag{2.2}$$

$$A(t_1) + B(t_2) = 1 + 2\cos\alpha, \tag{2.3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A(t_1) &= t_1\left[1 + 2m\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{m^2n^2-1}(1 - t_1^{mn}\right); \\ B(t_2) &= 2t_2\left[1 + 2m\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{m^2n^2-1} + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{m^2n^2-1}t_2^{mn}\right\}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Входящие сюда суммы легко вычисляются. Именно можно показать, что

$$\left.\begin{aligned} 2m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{m^2n^2-1}t^{mn} &= 1 + tJ_{11} - \frac{1}{t}J_{12}; \\ 2m\sum_{n-1}^{\infty}\frac{n}{m^2n^2-1}t^{mn} &= tJ_{21} + \frac{1}{t}J_{22} - 1, \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} J_{11} &= \int_0^t \frac{t^{m-2}}{1+t^m}\,dt,\quad J_{12} = \int_0^t \frac{dt}{1+t^m}; \\ J_{21} &= \int_0^t \frac{t^{m-2}}{1-t^m}\,dt,\quad J_{22} = \int_0^t \frac{dt}{1-t^m}. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Что же касается суммы

$$2m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{m^2n^2-1},$$

то она найдется по первой формуле (2.5) при $t=1$.

$\alpha=\pi/2$	t_1	0,20217	0,3	0,5
	t_2	0,20217	0,16012	0,08480
$m=2$	κ	0,60652	0,62024	0,66961
$\alpha=\pi/3$	t_1	0,45450	0,5	0,6
	t_2	0,45450	0,43833	0,40554
$m=3$	κ	0,68175	0,68833	0,70554
$\alpha=\pi/4$	t_1		0,59076	0,6
	t_2		0,59076	0,58779
$m=4$	κ		0,73410	0,73547
$\alpha=\pi/6$	t_1			
	t_2			
$m=6$	k			

Был произведен расчет для некоторых значений угла α. Задаваясь t_1, искали корень t_2 уравнения (2.3) для диапазона $t_1 \geqslant t_2 \geqslant 0$, а затем по (2.2) отыскивался коэффициент κ. Результаты можно представить в табл. 1.

Из табл. 1 видно, что с ростом относительной скорости t_1 скорость t_2 убывает, а коэффициент сжатия k растет. Для одного и того же значения t_1 с уменьшением угла α скорость t_2 возрастает, а если исключить случай $\alpha=\pi/2$, то и коэффициент k тоже растет. При малых значениях t_1 течение данного типа не существует.

Во втором случае (v_1 — в боковых каналах) для несжимаемой жидкости из (1.15) будем иметь

$$q_1 = \frac{t_2}{2t_1 + t_2}, \quad q_2 = \frac{2t_1}{2t_1 + t_2}. \tag{2.7}$$

При $a=0$ уравнение (1.17) с помощью (2.7) можно представить в виде

$$\kappa = \frac{d}{h} = \frac{2t_1 + t_2}{1 + 2\cos\alpha}, \tag{2.8}$$

а уравнение (1.18) примет тот же вид (2.3), где

$$\left.\begin{aligned} A(t_1) &= 2t_1\left[1 + 2m\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{m^2n^2-1} + \right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{m^2n^2-1}\,t_1^{mn}\right\}\right]; \\ B(t_2) &= t_2\left[1 + 2m\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{m^2n^2-1}\,(1 - t_2^{mn})\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Таблица 1

0,7	0,8	0,9	1
0,03106	0,01386	0,00347	0
0,76212	0,82771	0,90694	1
0,7	0,8	0,9	1
0,37803	0,35734	0,34453	0,34020
0,72803	0,75734	0,79453	0,84020
0,7	0,8	0,9	1
0,55813	0,53471	0,51974	0,51461
0,75232	0,77434	0,80336	0,84053
0,72911	0,8	0,9	1
0,72911	0,71048	0,69164	0,68489
0,80062	0,81293	0,83574	0,86740

Как видим, формулы (2.8) и (2.9) получаются из формул (2.2) и (2.4) перестановкой параметров t_1 и t_2, а также перестановкой обозначений функций $A(t)$ и $B(t)$. Суммы находятся по тем же формулам (2.5) и (2.6).

Расчет для тех же углов α и в том же диапазоне возможных значений t_2 показал, что во всех случаях t_2 достигает нуля при значениях $t_1 < 1$. Это сужает область возможных течений для данного случая по сравнению с предыдущим. Результаты расчета даются табл. 2.

Таблица 2

$\alpha=\pi/2$	t_1	0,20217	0,25	0,29211	
	t_2	0,20217	0,09483	0	
$m=2$	κ	0,60652	0,59483	0,58423	
$\alpha=\pi/3$	t_1	0,45450	0,5	0,6	0,62030
	t_2	0,45450	0,33238	0,06012	0
$m=3$	κ	0,68175	0,66619	0,63006	0,62030
$\alpha=\pi/4$	t_1	0,59076	0,6	0,7	0,77664
	t_2	0,59076	0,56246	0,26621	0
$m=4$	κ	0,73410	0,73004	0,69017	0,64339
$\alpha=\pi/6$	t_1	0,72911	0,8	0,9	0,90991
	t_2	0,729	0,49600	0,06216	0
$m=6$	κ	0,80062	0,76719	0,68160	0,66610

Как видим, в отличие от первого случая, с ростом t_1 коэффициент сжатия струи κ убывает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Томилов Е. Д. Струйные дозвуковые плоские движения газа. — Новосибирск: Наука, 1980. — 248 с.

СИММЕТРИЧНОЕ СОУДАРЕНИЕ СВОБОДНОЙ ГАЗОВОЙ СТРУИ СО СТРУЕЙ, ВЫХОДЯЩЕЙ ИЗ КАНАЛА

Е. Д. Томилов

Для рассматриваемой задачи получен вид функций тока в плоскости годографа, дано определение характерных параметров, а также установлены уравнения свободных границ течения и найдено положение точки остановки.

Рассмотрен частный случай несжимаемой жидкости.

Картина течения в физической плоскости представлена на рис. 1. Введем обозначения: $2H$ — ширина канала; $2d$ — ширина свободной струи на бесконечности; d_1 — ширина на

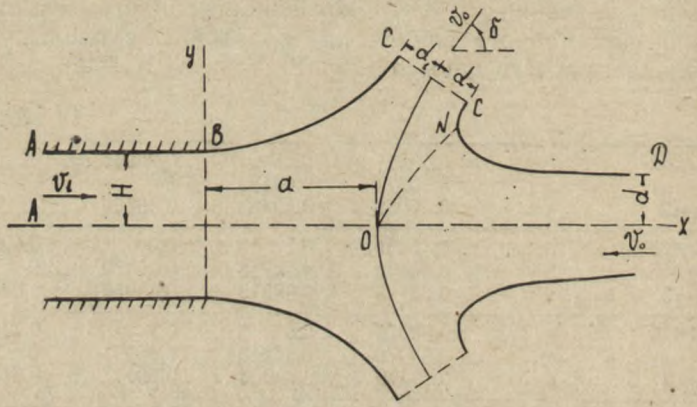


Рис. 1

бесконечности вниз по потоку той части струи, которая выходит из одной (верхней) половины канала; a — расстояние точки остановки от выходного сечения канала, v_1 — скорость газа в канале на бесконечности; v_0 — скорость газа в струе на бесконечности, а также на свободных границах струй. Ось x направляем по оси симметрии течения, беря начало координат в выходном сечении канала.

В силу симметрии рассматриваем лишь верхнюю половину течения. Для полурасходов в канале Q_1 и в струе Q_2, а также для суммарного полурасхода Q будем иметь

$$Q_1 = H\frac{\rho_1}{\rho^0}v_1 = d_1\frac{\rho_0}{\rho^0}v_0;\ Q_2 = d\frac{\rho_0}{\rho^0}v_0;\ Q = Q_1 +$$

$$+ Q_2 = (d_1 + d)\frac{\rho_0}{\rho^0}v_0. \qquad (1)$$

Здесь ρ_1 и ρ_0 — плотность, отвечающая соответственно скоростям v_1 и v_0; ρ^0 — плотность торможения.

Из первой формулы (1) следует

$$d_1 = H\frac{\rho_1 v_1}{\rho_0 v_0}. \qquad (2)$$

Отвечающую течению область плоскости годографа возьмем в переменных θ, σ, где θ — угол наклона скорости к оси x, а переменная σ есть

$$\sigma = \int_{\tau}^{\tau_0} \frac{\rho}{\rho^0}\frac{d\tau}{2\tau}. \qquad (3)$$

Здесь $\tau = v^2/v^2_{\max}$; $v_{\max}$ — предельная скорость в газе; τ_0 — значение τ, отвечающее скорости v_0. Тогда область

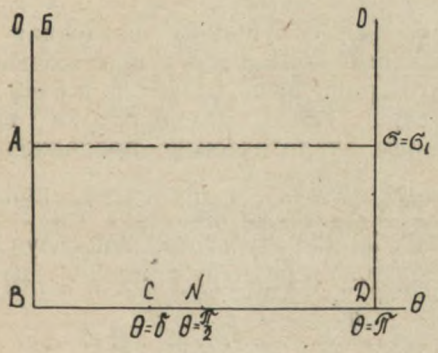


Рис. 2

плоскости годографа будет полуполосой $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \sigma \leqslant \infty$ (рис. 2). Соответственные точки обозначены теми же буквами, что и на рис. 1, $\theta = \delta$ есть угол, образуемый струей с осью x на бесконечности вниз по потоку.

Краевая задача в плоскости годографа будет

$$\left.\begin{gathered}\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}+K(\sigma)\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0;\\ \psi=Q_1,\ \theta=0,\ 0\leqslant\sigma<\sigma_1;\ \psi=0,\ \theta=0,\ \sigma_1<\sigma\leqslant\infty;\\ \psi=0,\ \theta=\pi,\ 0\leqslant\sigma\leqslant\infty;\ \psi=Q_1,\ 0\leqslant\theta<\delta,\ \sigma=0;\\ \psi=-Q_2,\ \delta<\theta<\pi,\ \sigma=0.\end{gathered}\right\} \tag{4}$$

Здесь $K(\sigma)$ — известная функция Чаплыгина (см. [1]); σ_1 — значение σ, отвечающее скорости v_1; ψ — функция тока.

Сечением $\sigma=\sigma_1$ разделяем область на подобласти 1 и 2 и ищем решение в этих подобластях в виде

$$\left.\begin{gathered}\psi_1=Q_1\left[1-\frac{\theta}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\{A_n z_n(\sigma)+B_n\zeta_n(\sigma)\}\sin n\theta\right];\\ \psi_2=Q_1\sum_{n=1}^{\infty}C_n z_n(\sigma)\sin n\theta,\end{gathered}\right\} \tag{5}$$

где $z_n(\sigma)$ и $\zeta_n(\sigma)$ — функции, удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{gathered}z_n(0)=1;\ \zeta_n(0)=0;\ z_n(\infty)=0;\ \zeta_n(\infty)=\infty;\\ z_n'(0)=b_n=-n\frac{\rho^0}{\rho_0}x_{n/2}(\tau_0),\ \zeta_n'(0)=1.\end{gathered}\right\} \tag{6}$$

При этом $x_{n/2}(\tau_0)$ — функция, введенная Чаплыгиным (см. [1]); штрихами обозначены производные от z_n и ζ_n по σ. Видим, что граничные условия при $\theta=0$ и $\theta=\pi$ выполнены. Удовлетворяя далее условиям на границе $\sigma=0$, а также условиям аналитического продолжения через прямую $\sigma=\sigma_1$ $\psi_1=\psi_2$, $\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}=\frac{\partial\psi_2}{\partial\sigma}$ при $\sigma=\sigma_1$, найдем все постоянные A_n, B_n и C_n. В результате, используя равенства (1) и относя функции тока к размеру d, получим из (5)

$$\left.\begin{gathered}\psi_1=\frac{\rho_0 v_0}{\rho^0}\left[\frac{d_1}{d}\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)+\frac{2}{\pi}\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{-\left[(-1)^{n-1}+\right.\right.\right.\\ \left.+\left(\frac{d_1}{d}+1\right)\cos n\delta\right]z_n(\sigma)+\\ \left.\left.+\frac{d_1}{d}z_n'(\sigma_1)\zeta_n(\sigma)\right\}\sin n\theta\right];\end{gathered}\right\} \tag{7}$$

$$\psi_2 = \frac{2}{\pi}\frac{\rho_0 v_0}{\rho^0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{-\left[(-1)^{n-1}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{d_1}{d}+1\right)\cos n\delta\right]+\frac{d_1}{d}\zeta_n'(\sigma_1)\right\} z_n(\sigma)\sin n\theta.$$

Перейдем к определению характерных параметров течения. С этой целью найдем сначала уравнения свободных границ BC и DC (см. рис. 1).

На свободной границе, как известно (см. [1]), справедливы равенства

$$dx = -\frac{\cos\theta}{v_0}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=0} d\theta;\quad dy = -\frac{\sin\theta}{v_0}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=0} d\theta. \tag{8}$$

На рис. 2 к границе $\sigma=0$ примыкает область 1, поэтому в (8) $\psi=\psi_1$. Подставляя значение производной по σ от этой функции в (8) и выполняя интегрирование по θ, найдем, что параметрические уравнения свободных границ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\pi}\frac{\rho_0}{\rho^0}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n}J_n(\theta) - a_1\sin^2\theta\right] + c_1;\\ y &= \frac{1}{\pi}\frac{\rho_0}{\rho^0}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n}H_n^*(\theta) - a_1\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right] + c_2. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Координаты отнесены к размеру d. При этом, как и в [1],

$$\left.\begin{aligned} J_n(\theta) &= \frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1},\\ H_n^*(\theta) &= \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} - \frac{\sin(n-1)\theta}{n-1}; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

a_n определяется формулой

$$a_n = -\left[(-1)^{n-1}+\left(\frac{d_1}{d}+1\right)\cos n\delta\right] b_n + \frac{d_1}{d}z_n'(\sigma_1), \tag{11}$$

так что

$$a_1 = -\left[1+\left(\frac{d_1}{d}+1\right)\cos\delta\right] b_1 + \frac{d_1}{d}z_1'(\sigma_1). \tag{12}$$

На границе BC постоянные находятся из условий

при $\theta=0$, $x=0$, $y=\dfrac{H}{d}$,

что дает

$$c_1 = -\frac{2}{\pi}\frac{\rho_0}{\rho^0}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^2-1},\quad c_2 = \frac{H}{d}.$$

Рассматривая случай, когда $\delta<\pi/2$, видим, что на границе DC будет существовать точка N, в которой $\theta=\pi/2$. Обозначим координату x этой точки через x_0. Тогда на границе DC можно взять условия:

$$\text{при } \theta = \frac{\pi}{2},\ x = x_0,\ \text{при } \theta = \pi,\ y = 1,$$

$$c_1 = x_0 + \frac{1}{\pi}\frac{\rho_0}{\rho^0}\left[a_1 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n}J_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right];\ c_2 = 1 + \frac{\rho_0}{\rho^0}a_1.$$

Таким образом, по (9) уравнения свободной границы BC будут

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\pi}\frac{\rho_0}{\rho^0}\left[\sum_{n=2}^{\infty}a_n\left\{\frac{1}{n}J_n(\theta) - \frac{2}{n^2-1}\right\} - a_1\sin^2\theta\right];\\ y_1 &= \frac{1}{\pi}\frac{\rho_0}{\rho^0}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n}H_n^*(\theta) - a_1\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right] + \frac{H}{d}, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

а свободной границы DC

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_0 + \frac{1}{\pi}\frac{\rho_0}{\rho^0}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n}\left\{J_n(\theta) - J_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} + a_1\cos^2\theta\right];\\ y_2 &= 1 + \frac{1}{\pi}\frac{\rho_0}{\rho^0}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n}H_n^*(\theta) + a_1\left(\pi - \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

В уравнениях (13) и (14) присутствуют два неизвестных параметра x_0 и δ (через a_n). Найдем их из условий, выполняющихся в бесконечности вниз по потоку

$$\lim_{\theta\to\delta}(x_2 - x_1) = \left(\frac{d_1}{d} + 1\right)\sin\delta,\ \lim_{\theta\to\delta}(y_1 - y_2) = \left(\frac{d_1}{d} + 1\right)\cos\delta. \qquad (15)$$

Второе условие (15) дает

$$\cos\delta = \frac{\frac{H}{d} - 1 + \frac{\rho_0}{\rho^0}\left\{b_1 - \frac{d_1}{d} z_1'(\sigma_1)\right\}}{\left(\frac{d_1}{d} + 1\right)\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho^0} b_1\right)}. \tag{16}$$

Удобней представить (16) с помощью значений τ. По (6) имеем

$$\frac{\rho_0}{\rho^0} b_1 = -x_{1/2}(\tau_0).$$

Возьмем еще установленные в [1] равенства:

$$\left.\begin{aligned} z_1'(\sigma) = \frac{dz_1}{d\tau}\frac{d\tau}{d\sigma} = -\sqrt{\frac{\tau_0}{\tau}}\,\frac{1 + (2\beta+1) - \frac{\rho^0}{\rho}}{1 - \frac{\rho_0}{\rho^0}(1-\tau_0)}, \\ x_{1/2}(\tau) = \frac{2(\beta+1)\tau}{1 - \frac{\rho}{\rho_0}(1-\tau)}\frac{\rho}{\rho^0} - 1, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где $\beta = 1/(\varkappa - 1)$, $\varkappa$ — показатель адиабаты.

Кроме того, воспользуемся формулой (2). В итоге получим

$$\cos\delta = \frac{1}{\frac{d_1}{d} + 1}\left[\frac{d_1}{d}\sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_1}}\,\frac{1 + (2\beta+1) \pm \tau_1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}(1-\tau_0)}{2(\beta+1)\tau_0} - 1\right]. \tag{18}$$

Согласно (10)

$$J_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } n = 2\kappa; \\ \dfrac{(-1)^{\kappa-1}}{2\kappa(\kappa-1)} \text{ при } n = 2\kappa - 1 \quad (\kappa = 2,\ 3,\ 4, \ldots). \end{cases}$$

Тогда из первого условия (15) находим

$$x_0 = \left(\frac{d_1}{d} + 1\right)\sin\delta - \frac{1}{\pi}\frac{\rho_0}{\rho^0}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2a_n}{n^2-1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{\kappa-2}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa-1}a_{2\kappa-1}}{2\kappa(\kappa-1)(2\kappa-1)} + a_1\right]. \tag{19}$$

Найдем еще координату $x=a$ точки остановки O как точки пересечения оси x с линией $\theta=\pi/2$, исходящей из точки N. Из общих формул перехода к плоскости течения следует, что вдоль этой линии

$$dx = -\frac{\rho^0}{\rho v} d\psi \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\rho^0}{\rho v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} d\sigma.$$

Поэтому значение x на этой линии в подобласти 2 будет

$$x = x_0 - \int_0^{\sigma_1} \frac{\rho^0}{\rho v}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \sigma}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} d\sigma - \int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{\rho^0}{\rho v}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} d\sigma,$$

что с помощью (7) представится в виде

$$x = x_0 - \frac{2\rho_0 v_0}{\pi \rho^0} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa-1}}{2\kappa-1} \left[-\left\{1 + \left(\frac{d_1}{d} + 1\right) \times \right.\right.$$

$$\times \cos(2\kappa-1)\delta \Big\} \int_0^{\sigma_1} \frac{\rho^0}{\rho v} z'_{2\kappa-1}(\sigma)\, d\sigma +$$

$$+ \frac{d_1}{d} z'_{2\kappa-1}(\sigma_1) \int_0^{\sigma_1} \frac{\rho^0}{\rho v} \zeta'_{2\kappa-1}(\sigma)\, d\sigma - \left\{1 + \left(\frac{d_1}{d} + 1\right)\cos(2\kappa-1)\delta - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{d_1}{d} \zeta'_{2\kappa-1}(\sigma_1) \right\} \int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{\rho^0}{\rho v} z'_{2\kappa-1}(\sigma)\, d\sigma \right]. \qquad (20)$$

Пользуясь установленным в [1] выражением

$$\zeta_1(\sigma) = \frac{1}{2(\beta+1)\sqrt{\tau_0 \tau}} \left[\frac{\rho}{\rho^0}(1-\tau) - \frac{\rho_0}{\rho^0}(1-\tau_0) \right],$$

убеждаемся, что в силу (18) коэффициент при интеграле в последнем члене (20) для $\kappa=1$ равен нулю. Следовательно, суммирование в этом последнем члене необходимо вести от $\kappa=2$. Тогда все интегралы при $\kappa \geqslant 2$ вычисляются по формулам, установленным в [1], а значение интегралов в первых двух членах при $\kappa=1$ можно вычислить, задаваясь значением β (например, при $\varkappa=1{,}4$ $\beta=2{,}5$). Значение a найдется как предел выражения (20) при $\sigma=\infty$.

Так как было принято, что $\delta<\pi/2$, то согласно (16) течение данного типа получается лишь при

$$\frac{H}{d}+\frac{\rho_0}{\rho^0}\left\{b_1-\frac{d_1}{d}z_1'(\sigma_1)\right\}>1, \tag{21}$$

имея в виду, что всегда $b_1<0$ и знаменатель в (16) всегда больше нуля.

Для построения течения при $\delta>\pi/2$ берем точку N при $\theta=\pi/2$ на границе BC. Тогда x_0 найдется как $x_0=x_1(\pi/2)$ и, повторяя те же рассуждения, найдем $x=a$. Первое же условие (15) позволит найти постоянную c_1 для x_2. Формула (21) заменится неравенством противоположного знака.

Перейдем далее к течению несжимаемой жидкости. В этом случае во всех полученных формулах надо положить $\rho=\text{const}$, $\beta=0$, $b_n=-n$. Если ввести переменную $t=v/v_0$, то, как установлено в [1], необходимо для несжимаемой жидкости положить

$$z_n(\sigma)=t^n,\ z_n'(\sigma)=-nt^n,\ \zeta_n(\sigma)=\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{t^n}-t^n\right),$$

$$\zeta_a'(\sigma)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^n}+t^n\right). \tag{22}$$

Тогда (11) и (12) дадут

$$\left.\begin{aligned} a_n&=n\left[(-1)^{n-1}+\left(\frac{d_1}{d}+1\right)\cos n\delta-\frac{d_1}{d}t_1^n\right];\\ a_1&=1+\left(\frac{d_1}{d}+1\right)\cos\delta-\frac{d_1}{d}t_1;\\ t_1&=\frac{v_1}{v_0}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Подставляя эти значения в (13) и (14) и выполняя суммирование, найдем уравнения свободной границы BC в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{1}{\pi}\left[\ln\frac{2}{1+\cos\theta}-\left(\frac{d_1}{d}+1\right)\cos\delta\ln\frac{\cos\theta-\cos\delta}{1-\cos\delta}+\right.\\ &\left.+\frac{1}{2}\frac{d_1}{d}\left(\frac{1}{t_1}+t_1\right)\ln\frac{1-2t_1\cos\theta+t_1^2}{(1-t_1)^2}\right];\\ y_1&=\frac{H}{d}+\frac{1}{\pi}F(\theta), \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

и уравнения границы DC—

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_0 + \frac{1}{\pi}\left[-\ln(1+\cos\theta) + \left(\frac{d_1}{d}+1\right)\times\right.\\ &\times\cos\delta\ln\frac{\cos\delta}{\cos\delta-\cos\theta} + \\ &\left.+\frac{1}{2}\frac{d_1}{d}\left(\frac{1}{t_1}+t_1\right)\ln\frac{1-2t_1\cos\theta+t_1^2}{1+t_1^2}\right];\\ y_2 &= 1+a_1+\frac{1}{\pi}F(\theta), \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

где

$$F(\theta) = -a_1\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{d_1}{d}+1\right)\sin\delta\ln\frac{1-\cos(\delta+\theta)}{1-\cos(\delta-\theta)} - \\ -\frac{d_1}{d}\left(\frac{1}{t_1}-t_1\right)\operatorname{arctg}\frac{t_1\sin\theta}{1-t_1\cos\theta}. \tag{26}$$

При этом согласно (18) будем иметь

$$\cos\delta = \frac{1}{\frac{d_1}{d}+1}\left[\frac{1}{2}\frac{d_1}{d}\left(\frac{1}{t_1}+t_1\right)-1\right], \tag{27}$$

а (19) даст значение x_0 в виде

$$x_0 = \frac{1}{\pi}\left[\ln 2 + \left(\frac{d_1}{d}+1\right)\left(\pi\sin\delta - \cos\delta\ln\frac{\cos\delta}{1-\cos\delta}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\frac{d_1}{d}\left(\frac{1}{t_1}+t_1\right)\ln\frac{1+t_1^2}{(1-t_1)^2}\right]. \tag{28}$$

При вычислении $x=a$ из (20) мы должны перейти к пределу $t\to 0$, что отвечает $\sigma\to\infty$. Таким путем получим

$$a = x_0 - \frac{1}{\pi}\left[-\ln 2 + \left(\frac{d_1}{d}+1\right)\{\delta\sin\delta - \cos\delta\ln(2\cos\delta)\} + \right. \\ \left. + \frac{d_1}{d}\left\{-\frac{1}{t_1}\ln t_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_1}+t_1\right)\ln(1+t_1^2)\right\}\right],$$

что после подстановки x_0 из (28) дает

$$a = \frac{1}{\pi}\left[\ln 4 + \left(\frac{d_1}{d}+1\right)\{(\pi-\delta)\sin\delta + \cos\delta\ln[2(1-\cos\delta)]\} -\right.$$

$$-\frac{d_1}{d}\left\{\left(\frac{1}{t_1}+t_1\right)\ln(1-t_1)-\frac{1}{t_1}\ln t_1\right\}\Bigg]. \qquad (29)$$

Соотношение (2) принимает теперь вид

$$d_1 = Ht_1. \qquad (30)$$

Неравенство (21) сводится в данном случае к формуле

$$\frac{H}{d} > \frac{2}{1+t_1^2}. \qquad (31)$$

Только при выполнении этого неравенства будет существовать данное течение. Так как всегда t_1 есть правильная дробь, то из (31) следует также, что ширина канала будет больше ширины свободной струи на бесконечности.

В случае $\delta > \pi/2$ неравенство (31) получает противоположный знак.

Заметим еще, что в случае несжимаемой жидкости можно вычислить и все суммы, входящие в равенства (7), в результате чего функции тока окажутся выраженными через арктангенсы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Томилов Е. Д. Струйные дозвуковые плоские движения газа. — Новосибирск: Наука, 1980. — 248 с.

КВАЗИОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ КРОВИ В ВЕНАХ

А. М. Бубенчиков, И. Ф. Гареев, С. Г. Иванушкин

Проблема математического моделирования гидродинамических явлений применительно к системе кровообращения приобрела большое значение в связи с широким распространением сердечно-сосудистых заболеваний, с потребностью в понимании закономерностей работы данной системы, основ заболеваний, их диагностикой и лечением. Вместе с тем большинство из существующих моделей воспроизводят артериальную часть системы кровообращения и в меньшей степени отражают механику движения крови в венах. Малая изученность венозного русла определяется относительно низким уровнем давления в данной части сердечно-сосудистой системы и, как следствие, значительной чувствительностью процессов, протекающих в венах, к возмущениям различного рода. Отсюда сложности в измерении гидродинамических характеристик и т. д. В связи с этим становится важным теоретическое исследование механики венозного русла.

В этой работе строится математическая модель движения крови на прямолинейном участке средней или крупной вены (диаметром 0,0012÷0,012 м). Предполагается, что кровь является однородной, несжимаемой ньютоновской жидкостью с постоянной вязкостью. Это предположение оправдано, поскольку размер эритроцитов ($d = 8\times10^{-6}$ м) и других форменных элементов пренебрежимо мал в сравнении с радиусом вены. Упругие свойства стенки учитываются однозначной функциональной связью между трансмуральным давлением ($P_{тм}$) и площадью поперечного сечения трубки (A). В данном случае функция $A = f(P_{тм})$ выбиралась посредством аппроксимации известных экспериментальных данных по деформации статически нагруженных отрезков вены [1]. Результат аппроксимации приведен на рис. 1. Здесь сплошная кривая отвечает зависимости

$$(A-A_0)/A_0 = c_0(P_{тм}-a_0)^{1/3} + b_0, \qquad (1)$$

где $c_0 = 0{,}1497$ м²/кН; $a_0 = 0{,}5$ кН/м²; $в_0 = 1$; A_0 — площадь поперечного сечения трубки при $P_{тм} = 0$. Как видно из рисунка, аналитическая кривая достаточно точно аппроксимирует экспериментальные данные.

Пусть $A\ (x,\ t)$, $P = P_{тм}\ (x,\ t)$, $V\ (x,\ t)$ есть площадь поперечного сечения, трансмуральное давление и скорость

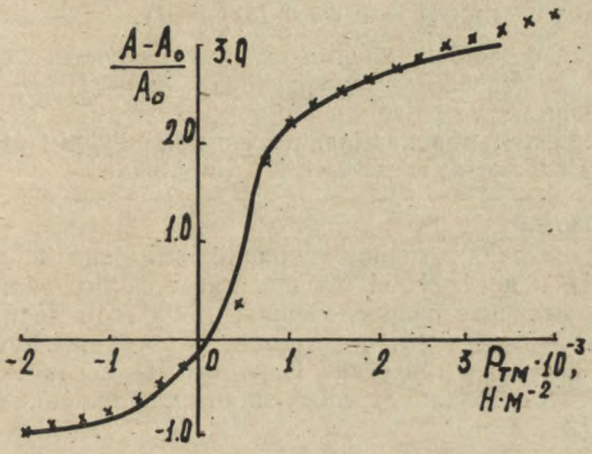


Рис. 1

движения крови в сосуде. Тогда уравнения гемодинамики запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (VA)}{\partial x} = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \beta V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - R(A)\, V; \tag{3}$$

$$A = f(p). \tag{4}$$

Здесь ρ — плотность жидкости; β — корректирующий множитель (в расчетах принималось $\beta = 1{,}2$).

Краевые условия:

$$P(x,\ 0) = P_0,\ V(x,\ 0) = V_0; \tag{5}$$

$$P(0,\ t) = P_1(t),\ P(L,\ t) = P_2(t). \tag{6}$$

Здесь L — длина отрезка вены; индексы *1*, *2* относятся соответственно к левому и правому концу сосуда; О — к начальному моменту времени.

Последнее слагаемое в (3) учитывает потери импульса на трение. Если принять предположение о квазистационарности и квазипараллельности поля скоростей, этот член линейно зависит от скорости течения. Считаем далее, что при деформации сосуда его сечение имеет либо круговую, либо эллиптическую форму, тогда (A) определяется формулой

$$R(A) = 4\nu(a^2 + b^2)/(a^2b^2), \qquad (7)$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости. Соотношение (7) замыкает систему уравнений (2)—(4), если известны значения полуосей эллипса a и $в$.

Эксперименты показывают, что при $P_{тм} > 1$ кН/м² сечение сосуда является круговым. В этом случае

$$a = b = \sqrt{A/\pi}. \qquad (8)$$

При значениях трансмурального давления в интервале от 0,1 кН/м² до 1 кН/м² сечение имеет форму эллипса. Вычисления велись в предположении, что в этом диапазоне изменения трансмурального давления деформация сосуда происходит изопериметрически. Периметр $П$ связан со значениями полуосей эллипса следующим приближенным соотношением [3]:

$$П - 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2 - \left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\varepsilon^6/5 - \left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\varepsilon^4/3\right] = 0. \qquad (9)$$

Здесь $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ — эксцентриситет эллипса.

Из соотношения (9) по известному значению $П$ (при заданной величине площади поперечного сечения A) могут быть рассчитаны размеры полуосей a и $в$. Применение итерационной схемы Ньютона дает

$$a_n = a_{n-1} - f_1(a_{n-1})/f_1'(a_{n-1}), \qquad (10)$$

где f_1 — левая часть соотношения (9), n — номер итерации. Тогда

$$в = A/(\pi a). \qquad (11)$$

Решение задачи, определяемой системой (2)—(4), строилось с использованием конечно-разностных схем: явной с центральной аппроксимацией производных, Лелевье [4], двухшаговой схемы Лакса—Вендроффа [5]. Как показывают вычисления, явная схема с центральными разностями абсолютно неустойчива. Результаты, полученные по схемам Лелевье и Лакса—Вендроффа, хорошо согласуются между собой.

Конкретные расчеты проводились при следующих значениях исходных параметров:

$$\rho = 1056 \text{ кг/м}^3,\ \nu = 0{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с},\ L = 0{,}2 \text{ м},$$

диаметр $d = 0{,}0012 \div 0{,}012$ *м*. Методом установления были получены стационарные распределения характеристик потока при значениях давления на концах сосуда соответственно 2000 Н/м² и 1995 Н/м². На рис. 2 представлена кривая изменения скорости, иллюстрирующая переход из состояния покоя к установившемуся режиму движения крови в сосуде.

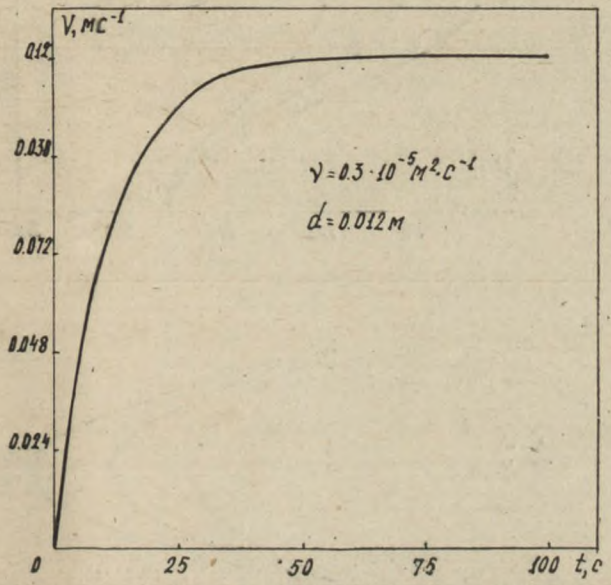


Рис. 2

Расчеты по определению гидродинамических характеристик потока при нестационарном течении крови получены при следующих значениях граничных функций (6):

$$P_1(t) = P_0 + \alpha \sin \omega t, \quad P_2(t) = P_0. \tag{12}$$

На рис. 3,4 показаны распределения давления и скорости со временем в середине сосуда для случая $P_0 = 200$ Н/м², $\omega = 2\pi$ 1/*с*, $\alpha = 50, 75, 100$ Н/м². Рис. 5 иллюстрирует измене-

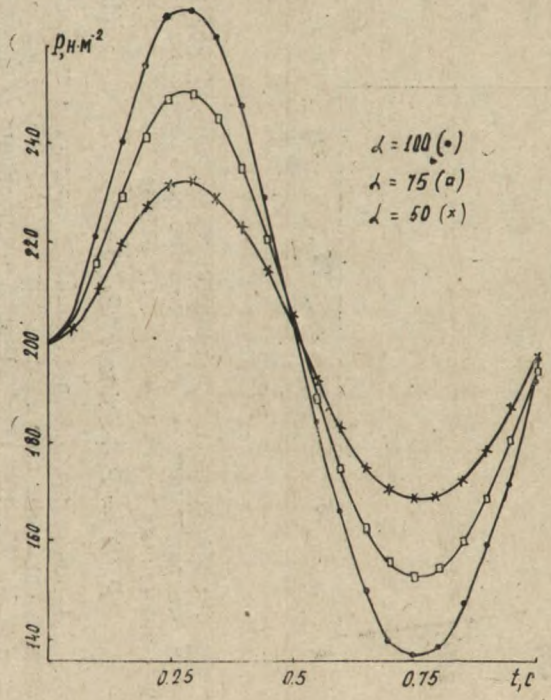

P,Н·м⁻²
240
220
200
180
160
140
0.25
0.5
0.75
t,c
d = 100 (•)
d = 75 (□)
d = 50 (×)

Рис. 3

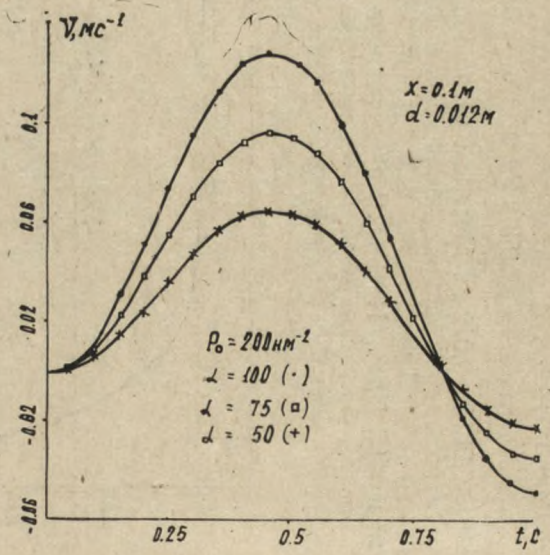

V,мс⁻¹
0.1
0.06
0.02
-0.02
-0.06
0.25
0.5
0.75
t,c
x = 0.1м
d = 0.012м
P₀ = 200нм⁻²
d = 100 (·)
d = 75 (□)
d = 50 (+)

Рис. 4

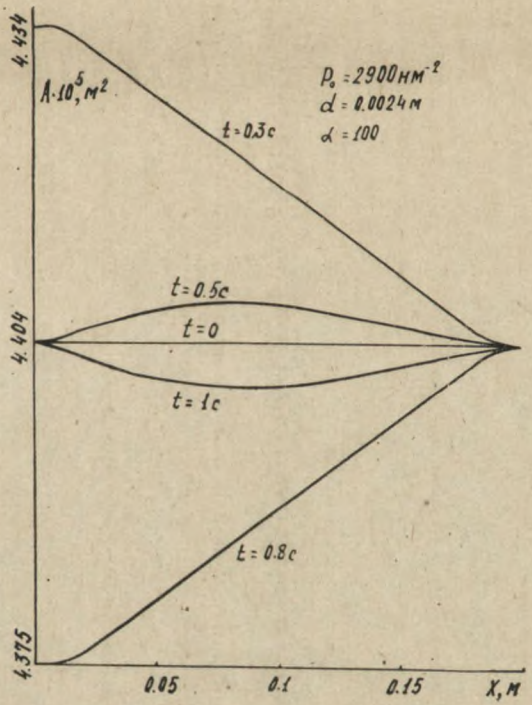

4.434
4.404
4.375
A·10^5, м^2
P₀ = 2900 нм^-2
d = 0.0024 м
α = 100
t = 0.3 с
t = 0.5 с
t = 0
t = 1 с
t = 0.8 с
0.05
0.1
0.15
X, м

Рис. 5

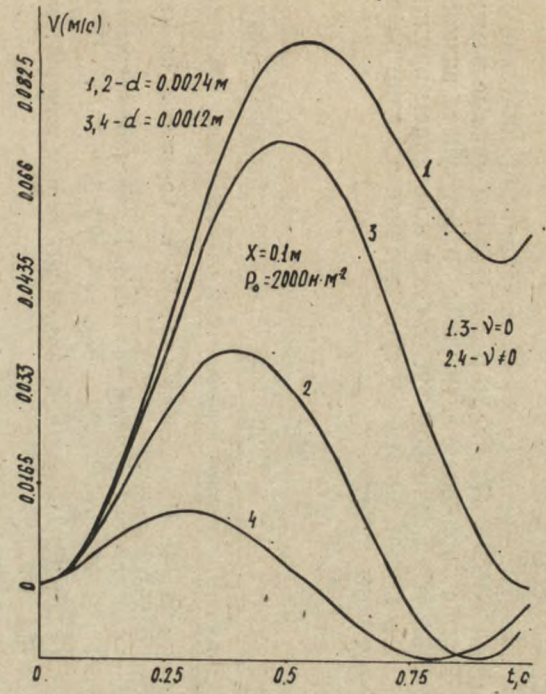

V(м/с)
0.0825
0.066
0.0435
0.033
0.0165
0
1,2 - d = 0.0024 м
3,4 - d = 0.0012 м
X = 0.1 м
P₀ = 2000 н·м^-2
1.3 - ν = 0
2.4 - ν ≠ 0
1
2
3
4
0.25
0.5
0.75
t, с

Рис. 6

ние площади поперечного сечения сосуда по длине в различные моменты времени.

Исследовано влияние вязкости на гидродинамические характеристики потока. На рис. 6 представлены кривые изменения скорости со временем при учете и без учета вязкости крови. Видно, что в венозном русле (за исключением крупных вен) вязкость может оказывать существенное влияние на параметры течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. — М.: Мир, 1981. — 624 с.

2. Лайтфут Э. Явления переноса в живых системах. — М.: Мир, 1977. — 520 с.

3. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. — М.: Наука, 1965. — 608 с.

4. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978. — 480 с.

5. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 418 с.

ПЛОСКОЕ АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

О. Н. Шабловский

Математическая модель теплопереноса в неподвижных средах при отсутствии источников тепла содержит нелинейности, обусловленные зависимостью от температуры как теплофизических свойств среды, так и граничного теплового потока.

В данной работе для параболического уравнения теплопроводности в плоском двухмерном случае осуществляется такое преобразование независимых переменных, что вместо температуры T искомой становится функция $f(T)$, которая берется на основе одной из указанных нелинейностей, имеющихся в задаче. Требования к $f(T)$ — непрерывность, монотонность и постоянство знака в заданном температурном интервале — удовлетворяются для многих реальных тепловых процессов. Применение новой независимой переменной (аналога переменной А. А. Дородницына), однозначно связанной с параметрами теплового поля, эффективнее по сравнению с декартовыми координатами в том отношении, что позволяет рассматривать области резких пространственных и временных изменений температуры и теплового потока.

Для нелинейной среды, коэффициент теплопроводности которой содержит малый параметр, построено в виде разложений по этому параметру плоское автомодельное решение, формально содержащее четыре произвольные функции одного аргумента. С помощью этого решения рассмотрена обратная задача теплопроводности в области с подвижными границами, когда на некоторых участках границы заданы одновременно температура и тепловой поток и нужно найти условия первого рода на остальных участках границы.

Современное состояние исследований обратных задач теплообмена численными и аналитическими методами и библиография даны в [1—3].

1. Преобразование независимых переменных. Возьмем параболическое уравнение теплопереноса

$$e_t = q_{1x} + q_{2y},\ q_1 = \lambda T_x,\ q_2 = \lambda T_y,\ c = \frac{de}{dT} \tag{1}$$

и представим составляющие вектора теплового потока в виде

$$q_i = \varkappa_i f(T),\ i = 1,\ 2, \tag{2}$$

где $\varkappa_i(x,\ y,\ t)$ — неизвестные функции; $f(T)$ — заданная функция температуры. Здесь $x,\ y$ — декартовы координаты; t — время; c — удельная объемная теплоемкость; λ — коэффициент теплопроводности. Применение независимой переменной в роли нижнего индекса означает частное дифференцирование.

Функцию $f(T)$ можно, в частности, выбирать на основе заранее известной зависимости от температуры теплового потока на границе изучаемой области либо на основе зависимости теплофизических параметров среды от температуры.

Уравнению (1), в котором произведена замена (2), можно удовлетворить посредством функции $\psi(x,\ y,\ t)$

$$\varkappa_1 f = \psi_y,\ \varkappa_2 f - E_t = -\psi_x,\ e = E_y. \tag{3}$$

Теперь можно ввести новый аргумент η такой, что

$$y = y_0(x,\ t) + \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta/f,\ f \neq 0,\ y_{0x} = -\frac{A_0}{f_0},\ y_{0t} = -\frac{B_0}{f_0}, \tag{4}$$

$$\eta_0 \equiv \text{const},$$

и от переменных $x,\ y,\ t$ перейти к независимым $x,\ \eta,\ t$:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} + A\frac{\partial}{\partial \eta},\ \frac{\partial}{\partial y} = f\frac{\partial}{\partial \eta},\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + B\frac{\partial}{\partial \eta},\ x = x',\ t = t',$$

$$e(T) = e_1(f),\ \dot{f} = df/dT,\ \nu(f) = \lambda/\dot{f},\ T \in [T',\ T''],$$

$$A \equiv \eta_x = \frac{-1}{f_\eta}\left(f_x - \frac{f}{\nu}\psi_\eta\right),\ B \equiv \eta_t = \frac{f}{e_1}(\psi_x + A\psi_\eta - E_t + \nu f f_\eta).$$

Предполагаем, что в рассматриваемом температурном интервале функция $f(T)$ сохраняет неизменным свой знак и обратима: $T = T(f)$.

Следовательно, соотношения (2) для теплового потока принимают вид

$$\varkappa_1 = \psi_\eta,\ \varkappa_2 = f\eta, \tag{5}$$

а вместо уравнения теплопроводности посредством (3) получаем систему уравнений для функций f, ψ, E аргументов x, η, t:

$$\nu A_\eta - \psi_\eta = 0; \tag{6}$$

$$f_t + Bf_\eta = fB_\eta, \quad fE_\eta = e_1. \tag{7}$$

В случае $\nu \equiv \text{const}$ уравнение (6) имеет первый интеграл

$$-\nu f_x + t\psi_\eta = (\psi + h) f_\eta, \tag{8}$$

где $h(x, t)$ — произвольная функция, аддитивно входящая в $\psi(x, \eta, t)$; в дальнейшем берем $h \equiv 0$.

При $e_1/f = E_1 \equiv \text{const}$ имеем из второго уравнения в (7) $E = \eta E_1 + E_0$, $E_0(x, t)$ — произвольная функция.

Объединение условий $\nu = \text{const}$ и $E_1 = \text{const}$ ведет к линейному уравнению теплопроводности. Здесь случай $E_1 \equiv \equiv \text{const}$ не анализируется.

Отметим, что в математическом отношении переменную η можно рассматривать как аналог переменной Дородницына, хорошо известной в теории сжимаемого пограничного слоя [4, 5]. Аналогия обусловлена тем, что после замены (2) запись уравнения (1) близка по форме к записи уравнения неразрывности для сжимаемого газа.

Постановку граничных условий для уравнений (6), (7) следует связать с законом теплообмена, принятым на отдельных участках границы плоской двухмерной области Ω. Пусть на участках $\partial\Omega_s$ кусочно-гладкой границы $\partial\Omega$ закон теплообмена характеризуется такими значениями составляющих вектора теплового потока $q_{is} = K_i(T_s, x, t) f(T_s)$, где $T_s = T_s(x, t)$ — температура на $\partial\Omega_s$, $K_i(T_s, x, t)$, $i = 1, 2$ — известные аналитические функции своих аргументов, причем, в общем случае, $K_1 \neq K_2$. Тогда граничный тепловой поток по любому направлению l дается формулой $q_{ls} = [K_1 \cos(l, x) + K_2 \cos(l, y)] f(T_s)$, где $\cos(l, x)$, $\cos(l, y)$ — направляющие косинусы для направления l; зависимость $f(T_s)$ одинакова для всех l.

Считаем также, что наряду с q_{is} задано значение искомой функции f на $\partial\Omega_s$: $f_s(x, t) = f(T_s)$.

Тогда имеем граничные условия: $\varkappa_{is}(x, t) = K_i(T_s, x, t) \equiv \equiv L_i(f_s, x, t)$, $i = 1, 2$. Отметим, что они являются линейными относительно f_s, если

$$q_{is} = [L_i(x, t) + M_i(x, t) f_s] f_s.$$

Таким образом, получаем возможность решения на основе (5)—(7) класса граничных обратных задач теплопро-

водности [1—3], для которых на $\partial\Omega_s$ заданы температура и тепловой поток (предлагается, что число известных граничных условий обеспечивает единственность решения) и требуется определить тепловой режим во всей области и на остальных участках границы.

2. Автомодельный вариант. Введем формальным образом автомодельные переменные

$$\alpha = \frac{x}{t^{1/2}}, \quad \beta = \frac{\eta}{t^{1/2}}$$

и, принимая $\nu \equiv \text{const}$, запишем систему уравнений (7), (8) для функций ψ, g, H аргументов α, β:

$$-\nu g_\alpha = (g\psi)_\beta, \quad H_\beta = e_2 g; \tag{9}$$

$$\frac{\nu}{2}(\alpha g_\alpha + \beta g_\beta)) = \left\{\left[-\nu^2 g_\beta g^{-3} + \nu\left(\psi_\alpha + \frac{\alpha H_\alpha + \beta H_\beta - H}{2}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \psi\psi_\beta\right) e_2^{-1}\right\}_\beta. \tag{10}$$

$$fg = 1, \quad E = Ht^{1/2}, \quad e(T) = e_1(f) = e_2(g).$$

Для теплофизических параметров среды имеем здесь: $\lambda(T) = \nu f(T)$, $c = c(T)$, т. е. выбор $f(T)$ сделан на основе температурной зависимости теплопроводности.

Формула (4) в автомодельном случае принимает вид

$$\gamma \equiv y/t^{1/2} = \int_{\beta_w}^{\beta} g\,d\beta + \gamma_w(\alpha), \quad \frac{d\gamma_w}{d\alpha} = -(A/f)\Big|_{\gamma_w}, \quad 0 < |g| < \infty. \tag{11}$$

Будем считать, что $|\lambda(T)/f(T)| = |\nu|$ является малым параметром задачи и представим решение системы (9), (10) в виде разложений:

$$g = \sum_{\delta=0}^{\infty} g_\delta(\alpha, \beta)\nu^\delta, \quad \psi = \sum_{\delta=0}^{\infty} \psi_\delta(\alpha, \beta)\nu^\delta, \quad H = \sum_{\delta=0}^{\infty} H_\delta(\alpha, \beta)\nu^\delta. \tag{12}$$

С целью наглядности и упрощения записи формул возьмем частный случай $e_2 = c_0 g$ и приведем результаты вычислений для среды с такими теплофизическими свойствами:

$$c = c_0 g(T), \quad \lambda = \nu f(T), \quad \nu \equiv \text{const}, \quad \nu < 0, \quad T \in [T', T''],$$

причем имеется в виду тепловой процесс, для которого $f(T)<0$. При $f(T)>0$, а также для случая произвольной зависимости $e_2(g)$ принципиальных отличий в схеме расчета нет. Для коэффициентов разложений (12) получаются рекуррентные линейные дифференциальные уравнения, содержащие производные от искомых функций только по β; α входит как параметр. После интегрирования имеем в нулевом приближении

$$g_0\psi_0 = h_0,\ \psi_0^3 = 3(\chi_0 - c_0\varkappa_0 h_0^3),\ H_0 = c_0\int_{\beta_w}^{\beta} g_0^2 d\beta + s_0,\ \psi_0 \neq 0, \tag{13}$$

где $h_0(\alpha)$, $\chi_0(\alpha)$, $\varkappa_0(\alpha)$, $s_0(\alpha)$ — произвольные функции.

В $(\kappa-1)$-м приближении $(\kappa \geqslant 2)$

$$\psi_{\kappa-1} = \left(\frac{\psi_{0w}}{\psi_0}\right)^2 \left\{\left[\chi_{\kappa-1} + P\varkappa_{\kappa-1} + Qh_{\kappa-1} + R(\alpha s_{\kappa-2} - s_{\kappa-2}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{\beta_w}^{\beta}\left(\frac{\psi_0}{\psi_{0w}}\right)^2 F_{\kappa-1}d\beta\right]\right. ; \tag{14}$$

$$\psi_0 g_{\kappa-1} = -\int_{\beta_w}^{\beta} g_{\kappa-2,\alpha}\,d\beta - g_0\psi_{\kappa-1} + h_{\kappa-1} - \sum_{i=1}^{\kappa-2}\psi_i g_{\kappa-i-1};$$

$$H_{\kappa-1} = c_0\int_{\beta_w}^{\beta} l_{\kappa-1}d\beta + s_{\kappa-1}; \tag{15}$$

$$P = h_0\int_{\beta_w}^{\beta}\psi_{0\beta}^{-2}d\beta;\ Qh_0 = \int_{\beta_w}^{\beta}\psi_0^2\psi_{0\beta}^{-1}d\beta;\ 2R = \int_{\beta_w}^{\beta}\psi_0\psi_{0\beta}^{-2}d\beta;$$

$$H_{\kappa-1} - s_{\kappa-1} = H'_{\kappa-1};$$

$$\psi_0 F_1 = \psi_{0\alpha} + \frac{1}{2}(\alpha H'_{0\alpha} + \beta H'_{0\beta} - H'_0) + \psi_{0\beta}g_0^{-1}\int_{\beta_w}^{\beta} g_{0\alpha}d\beta -$$

$$-\frac{c_0 g_0}{2}\int_{\beta_w}^{\beta}(\alpha g_{0\alpha} + \beta g_{0\beta})\,d\beta;$$

$$\psi_0 F_\kappa = \psi_{\kappa-1,\alpha} + \psi_{0\beta}\left[\left(\sum_{i=1}^{\kappa-1}\psi_i g_{\kappa-i} + \int_{\beta_w}^{\beta} g_{\kappa-1,\alpha}\,d\beta\right) g_0^{-1} - \sum_{i=1}^{\kappa-1} n_i g_{\kappa-i}\right] +$$

$$+ g_0 \sum_{i=1}^{\kappa-1} n_i \psi_{\kappa-1,\beta} + \frac{1}{2}\left(\alpha H'_{\kappa-1,\alpha} + \beta H'_{\kappa-1,\beta} - H'_{\kappa-1} - m_0 g_{\kappa-1} -\right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{\kappa-2} m_i g_{\kappa-i-1}\right) - g_0^{-3}\left(g_{\kappa-2,\beta} - g_{0\beta} p_{\kappa-2} g_0^{-4} - \sum_{i=1}^{\kappa-3} a_i p_{\kappa-i-3}\right) -$$

$$- n'_0 g_{\kappa-1} - \sum_{i=1}^{\kappa-2} n'_i g_{\kappa-i-1} - \frac{c_0 g_0}{2} \int_{\beta_w}^{\beta} (\alpha g_{\kappa-1,\alpha} + \beta g_{\kappa-1,\beta})\,d\beta;$$

$$l_r = \sum_{i=0}^{r} g_i g_{r-1};\quad p_r = \sum_{i=0}^{r} l_i l_{r-i};\quad p_0 = 0;\quad g_0 m_0 = \alpha H'_{0\alpha} + \beta H'_{0\beta} - H'_0;$$

$$g_0 n_r = \psi_r - \psi_0 g_r g_0^{-1} - \sum_{i=1}^{r-1} n_i g_{r-1};\quad g_0 m_r = \alpha H'_{r,\alpha} + \beta H'_{r,\beta} - H'_r -$$

$$- m_0 g_r - \sum_{i=1}^{r-1} m_i g_{r-1};$$

$$n_0 g_0 = \psi_0;\quad a_0 g_0^4 = g_{0\beta};\quad n'_0 g_0 = \psi_{r\beta};$$

$$g_0^4 a_r = g_{r\beta} - a_0 p_r - \sum_{i=1}^{r-1} a_i p_{r-i};$$

$$g_0 n'_r = \psi_{r,\alpha} - n'_0 g_r - \sum_{i=1}^{r-1} n'_i g_{r-1}.$$

Здесь те суммы, в обозначениях которых верхний индекс суммирования меньше нижнего, полагаются нулевыми. Функции $h_{\kappa-1}(\alpha)$, $\chi_{\kappa-1}(\alpha)$, $\varkappa_{\kappa-1}(\alpha)$, $s_{\kappa-2}(\alpha)$, $\kappa \geqslant 2$, содержащиеся в коэффициентах разложений (12), произвольны.

Таким образом, построено решение уравнения теплопроводности, формально содержащее четыре произвольные функции аргумента α.

3. Пример интерпретации решения. Возьмем в плоскости (α, β) четырехугольную область $[0, \alpha_1;\ 0, \beta_b(\alpha)]$, которой по формуле (11) в плоскости α, γ соответствует область $[0, \alpha_1;\ \gamma_w(\alpha), \gamma_b(\alpha)]$, где

$$\gamma_w(\alpha) = -\int_0^{\alpha} (Ag)_{\beta=0}\, d\alpha,\ \gamma_b(\alpha) = \gamma_w(\alpha) + \int_0^{\beta_b(\alpha)} g\, d\beta,\ \beta_w = 0.$$

Поставим граничные условия:

$$\beta = 0 : f(T) = f_w(\alpha),\ q_n t^{1/2} = V(\alpha,\ f_w); \tag{16}$$

$$\beta = \beta_b(\alpha) : f(T) = f_b(\alpha),\ q_n t^{1/2} = U(\alpha,\ f_b), \tag{17}$$

считая, что f_w, f_b, U, V — известные аналитические функции своих аргументов. Предполагается тем самым, что на двух противоположных сторонах области известны значения температуры и теплового потока в направлении нормали к граничным линиям:

$$\gamma = \gamma_s(\alpha) : q_n t^{1/2} = -(1 + \dot{\gamma}_s^2)^{-1/2} [\dot{\gamma}_s \psi_\beta g^{-1} - \lambda g_\beta (g\dot{g})^{-1}],\ \dot{\gamma}_s = \frac{d\gamma_s}{d\alpha},$$

здесь под $\gamma_s(\alpha) \not\equiv \text{const}$ понимается $\gamma_w(\alpha)$ либо $\gamma_b(\alpha)$.

Если же, например, $\dot{\gamma}_w = 0$, то на этой границе в рамках данного решения надо принять условие теплоизоляции $g_{\beta w} = 0$ либо считать, что $q_{nw} \sim \nu$. Эти случаи здесь не анализируются.

Условия (16), (17) будут удовлетворены, если в нулевом и (к—1)-м приближениях обеспечить, распоряжаясь имеющимися произвольными функциями, выполнение следующих равенств:

$$\beta = 0 : g_0 = g_w,\ g_0\psi_{\kappa-1} + \sum_{i=1}^{\kappa-2} \psi_i g_{\kappa-i-1} = h_{\kappa-1},\ \kappa \geqslant 2; \tag{18}$$

$$\dot{\gamma}_w \varepsilon_w \psi_{0\beta} = -g_w V_w,\ g^2 \psi_{\kappa-1,\beta} \dot{\gamma}_w = -g_{\kappa-2,\beta},\ \nu_w (1 + \dot{\gamma}_w^2)^{1/2} = 1; \tag{19}$$

$$\beta = \beta_b(\alpha) : g_0 = g_b,\ g_0\psi_{\kappa-1} + \sum_{i=1}^{\kappa-2} \psi_i g_{\kappa-i-1} = L_{\kappa-1} - \int_0^{\beta_b} g_{\kappa-2,\alpha} d\beta; \tag{20}$$

$$\dot{\gamma}_b \varepsilon_b \psi_{0\beta} = -g_b U(\alpha,\ g_b),\ g^2 \psi_{\kappa-1,\beta} \dot{\gamma}_b = -g_{\kappa-2,\beta},\ \varepsilon_b (1 + \dot{\gamma}_b^2)^{1/2} = 1. \tag{21}$$

Отсюда заключаем, что на линии $\beta = \beta_b(\alpha)$ граничные функции не являются независимыми и связаны между собой

первым соотношением из (21). Это ограничение есть следствие того, что в рекуррентной процедуре удовлетворение граничным условиям произвольные функции $s_{\kappa-2}(\alpha)$ входят в формулы $(\kappa-1)$-го, $\kappa \geqslant 2$ приближения, тем самым, в $(\kappa-1)$-м приближении коэффициенты разложений (12) содержат по четыре произвольные функции аргумента α, а в нулевом приближении таких функций только три.

Получаем в нулевом приближении

$$h_0 = g_w (3\chi_0)^{1/3} \neq 0,\ c_0 \varkappa_0 \gamma_w \varepsilon_w g_w = U_w \neq 0,\ (3\chi_0)^{2/3} \left[\left(\frac{g_w}{g_b} \right)^2 - 1 \right] =$$

$$= -3 c_0 \varkappa_0 \beta_b g_w \neq 0.$$

В $(\kappa-1)$-м приближении с помощью (18) исключаем $h_{\kappa-1}$ в (19) — (21) и приходим к системе трех линейных неоднородных алгебраических уравнений для величин $\chi_{\kappa-1}$, $\varkappa_{\kappa-1}$, $\alpha s_{\kappa-2} - s_{\kappa-2}$, $\kappa \geqslant 2$. Единственное решение этой системы дается формулами:

$$\chi_{\kappa-1}\Delta = \Delta_1^{(\kappa-1)},\ \varkappa_{\kappa-1}\Delta = \Delta_2^{(\kappa-1)},\ (\alpha s_{\kappa-2} - s_{\kappa-2})\,\Delta = \Delta_3^{(\kappa-2)},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{g_w \psi_{0w}^3}{h_0 \psi_{0\beta b}} - \dfrac{2 g_w}{g_b \omega_b} & \omega_0 h_0 (\psi_{0\beta})_q^{-2} & \omega_0 \omega_b (2\psi_{0\beta})_b^{-1} \\ (g_0 \psi_{0\omega})_w h_0^{-1} - 2\omega_b^{-1} & h_0 (\psi_{0\beta})_w^{-2} & \dfrac{\omega_w}{2} \end{vmatrix} \qquad (22)$$

$$\begin{vmatrix} g_w - g_b \omega_0 (1 + g_w B_b) & -P_b g_b \omega_0 & -R_b g_b \omega_0 \end{vmatrix}$$

Здесь обозначено: $\omega \psi_{0\beta} = \psi_0$, $\omega_0 \psi_{0b}^2 = \chi_{0w}^2$.

Величина Δ не зависит от номера приближения, причем $0 < |\Delta| < \infty$ при $\beta_b(\alpha) \neq 0$, $\gamma_w \neq 0$, $g_w = g_b$. Этим требованиям можно удовлетворить, располагая имеющимся произволом в выборе граничных функций.

Определители, стоящие в соотношениях (22), получаются из Δ заменой столбца с номером 1, 2, 3 на столбец

$$\left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-(g_{\kappa-2,\beta})_b}{\dot{\gamma}_b g_b^2} + \dfrac{2\omega_b}{g_b} \left[\displaystyle\int_0^{\beta_b} g_{\kappa-2,\alpha} d\beta - \left(\sum_{i=1}^{\kappa-2} \psi_i g_{\kappa-i-1} \right)_w^b \right] - \\ - \omega_0 \left[\left(\dfrac{\psi_0 \omega}{h_0} \right)_b \displaystyle\sum_{i=1}^{\kappa-2} (\psi_i g_{\kappa-i-1})_w + \omega_b^2 F_{\kappa-1,b} \right], \ \dot{\gamma}_b \neq 0; \end{array} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-(g_{\kappa-2,\beta})_w}{\gamma_w g_w^2} - (\omega F_{\kappa-1})_w - \left(\dfrac{\psi_0\omega}{h_0}\right)_w \sum\limits_{i=1}^{\kappa-2} (\psi_i g_{\kappa-i-1})_w; \\ \omega_0 \left[Q_b \sum\limits_{i=1}^{\kappa-2} (\psi_i g_{\kappa-i-1})_w + \int\limits_0^{\beta_b} \omega^2 F_{\kappa-1} d\beta \right] + \left(\sum\limits_{i=1}^{\kappa-2} \psi_i g_{\kappa-i-1} \right)_w^b + \\ + \int\limits_0^{\beta_b} g_{\kappa-2,\alpha} d\beta. \end{array} \right\rangle$$

Функции $s_{\kappa-2}$ входят в расчетные формулы для g, ψ только в комплексе $\alpha s_{\kappa-2} - s_{\kappa-2}$, поэтому нет небходимости интегрировать последнее уравнение в (22).

Таким образом, получено решение (11)—(15) уравнения теплопроводности, удовлетворяющее условиям (16), (17) и позволяющее определить тепловой режим в области $[0; \alpha_1; 0, \beta_b]$, включая границы $x=0$, $x=\alpha_1 t^{1/2}$.

Сходимость степенных рядов (12) доказывается методом мажорантных функций Вейердштрасса — Ковалевской [6]. Оказывается, что если $g_0(\alpha, \beta)$, $\psi_0(\alpha, \beta)$ — аналитические функции своих аргументов, а границы исследуемой области и условия на них представляются также аналитическими функциями, то $g(\alpha; \beta, \nu)$, $\psi(\alpha, \beta, \nu)$ — аналитические функции по параметру ν в некоторой достаточно малой окрестности $|\nu| \leqslant \rho < 1$. Алгоритм доказательства аналогичен доказательству классической теоремы Пуанкаре (см., например, [7, с. 283—289]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О. М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1979. — 216 с.
2. Коздоба Л. А., Круковский П. С. Методы решения обратных задач теплообмена. — Киев: Наукова думка, 1982. — 342 с.
3. Коздоба Л. А. Обоснование терминологии и алгоритм решения обратных задач теплопереноса. — ИФЖ, 1983, т. 45, № 5, с. 833—843.
4. Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе. — ПММ, 1942, т. 6, № 6, с. 449—486.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1973. — 848 с.
6. Ковалевская С. В. Научные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1948. — 368 с.
7. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 640 с.

АПРОБАЦИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДИК РАСЧЕТА НА ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ЛАГРАНЖА ДЛЯ МАГНИТОВЯЗКОГО ГАЗА

Л. А. Шалагина

Апробацию методик численного расчета целесообразно проводить на точных решениях задач типа Лагранжа [1, 2], поскольку такие решения учитывают основные особенности исследуемых схем.

В работе проводится проверка двух методик расчета установки с дополнительным электродинамическим ускорением тела в рельсовой газоразрядной камере на точном решении задачи Лагранжа для магнитовязкого газа в области простой волны [3].

1. Постановка задачи. Схема ускорения тела показана на рис. 1. Внутренний объем рельсовой газоразрядной ка-

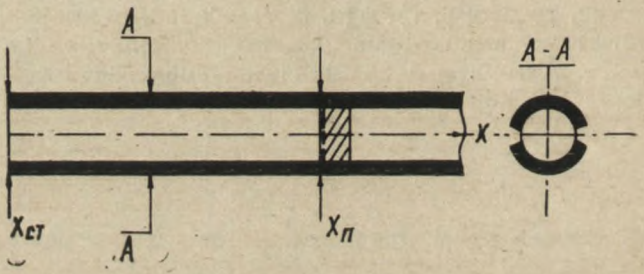


Рис. 1

меры, состоящей из продольных электродов, разделенных изолятором, ограничен неподвижной задней стенкой и поршнем.

Сопротивление движению поршня в положительном направлении оси x равно нулю. Задний торец поршня — идеально проводящий, а сам поршень и стенка не электропроводны. Внешняя электрическая цепь обеспечивает постоянный

ток на токовводах, расположенных у задней стенки камеры.

В начальный момент времени $t=0$ газ и поршень покоятся, а электрический разряд инициируется в газе у поршня.

Течение газа в электроразрядной камере рельсового типа описывается уравнениями:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}=0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\varkappa\frac{h^2}{8\pi}\right)=0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+p\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\varkappa\nu_m v}{4\pi}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2; \tag{3}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+c\frac{\partial e}{\partial x}=0; \tag{4}$$

$$e=\frac{1}{c}\left(uh-\nu_m\frac{\partial h}{\partial x}\right), \tag{5}$$

где через u, v, p и ν_m обозначены соответственно скорость, удельный объем, давление и магнитная вязкость газа; ε — внутренняя энергия единицы массы газа; e и h — напряженности канонических электрического и магнитного полей; c' — скорость света в вакууме; $\varkappa$ — безразмерный параметр, учитывающий влияние поперечной геометрии электродов на средние по сечению значения лоренцевой силы и джоулевой энергии разряда.

В системе (1)—(5) перейдем к безразмерным переменным:

$$\bar{v}=\frac{v}{v_0},\ \bar{p}=\frac{p}{p_0},\ \bar{h}=\frac{h}{\sqrt{p_0}},\ \bar{e}=\frac{e}{\sqrt{p_0}},$$

$$\bar{u}=\frac{u}{\sqrt{p_0v_0}},\ \bar{\nu}_m=\frac{\nu_m}{l_0\sqrt{p_0v_0}},\ \bar{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{p_0v_0}},\ \bar{x}=\frac{x}{l_0},$$

$$\bar{t}=\frac{\sqrt{p_0v_0}}{l_0}t,\ \bar{a}=\frac{a}{\sqrt{p_0v_0}},\ \bar{c}=\frac{c}{\sqrt{p_0v_0}}.$$

В новых переменных исходная система уравнений полностью совпадает по виду с (1)—(5), поэтому в дальнейшем везде опустим черточку сверху, указывающую на безразмерность.

На поршне выполняется условие

$$\frac{du_{\text{п}}}{dt} = \sigma_m (p - p_m), \tag{6}$$

где σ_m — отношение массы газа, заключенного между поршнем и стенкой, к массе поршня; $p_m = \frac{\varkappa h^2}{8\pi}$ — магнитное давление на идеально проводящей торец поршня.

На стенке

$$u(x_{\text{ст}}, t) = 0. \tag{7}$$

Для электромагнитной части задачи граничные условия имеют вид

$$h(x_{\text{ст}}, t) = \frac{2 \cdot i(t)}{c \cdot \sqrt{\pi S}}, \tag{8}$$

где $i(t)$ — ток в цепи, а S — сечение камеры. На поршне напряженность магнитного поля определяется по формуле, полученной в работе [3],

$$h(x_{\text{п}}, t) = h[v_{\text{п}}(t)]. \tag{9}$$

Проведем расчет поставленной задачи с помощью двух численных методик: приближенной газодинамической и магнитогидродинамической и сравним с точным решением, полученным в [3].

2. МГД — методика расчета. Систему уравнений (1)—(5), переписанную в безразмерных лагранжевых координатах, будем решать с помощью полностью консервативной разностной схемы, которая была предложена А. А. Самарским и Ю. П. Поповым [4].

В рассматриваемой области пространства (ξ, t) вводится равномерная сетка $\omega = \{(\xi_\kappa, t^j);\ \kappa = 0, 1, \ldots, N;\ j = 0, 1, \ldots,\}$ с шагами $\Delta\xi$ и τ, где $\xi = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{v}\, dx$ — лагранжева координата.

К узлам сетки (ξ_κ, t^j) относятся величины x_κ^j, u_κ^j, e_κ^j, в полуцелых точках $(\xi_{\kappa+1/2}, t^j)$ определяются величины $\varepsilon_{\kappa+1/2}^j$, $p_{\kappa+1/2}^j$, $v_{\kappa+1/2}^j$, $h_{\kappa+1/2}^j$.

Решение конечно-разностной системы уравнений осуществляем аналогично тому, как это изложено в [6].

Поскольку решение находится по слоям переменной t, то, чтобы получить конечно-разностное решение исходной задачи далее точки $t = t_{\text{А}}$ (рис. 2), мы фиктивно убираем стенку и ставим новые граничные условия. А именно на то-

ковводах $x = x_{ст}$ должны выполняться условия, согласно решениям [3]:

$$i(t) = \begin{cases} i_0, & 0 \leqslant t \leqslant t_A; \\ i(t), & t_A < t \leqslant t_2; \end{cases} \tag{10}$$

$$u(x_{ст}, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant t_A; \\ \alpha_0 (v - v_0), & t_A < t \leqslant t_2. \end{cases} \tag{11}$$

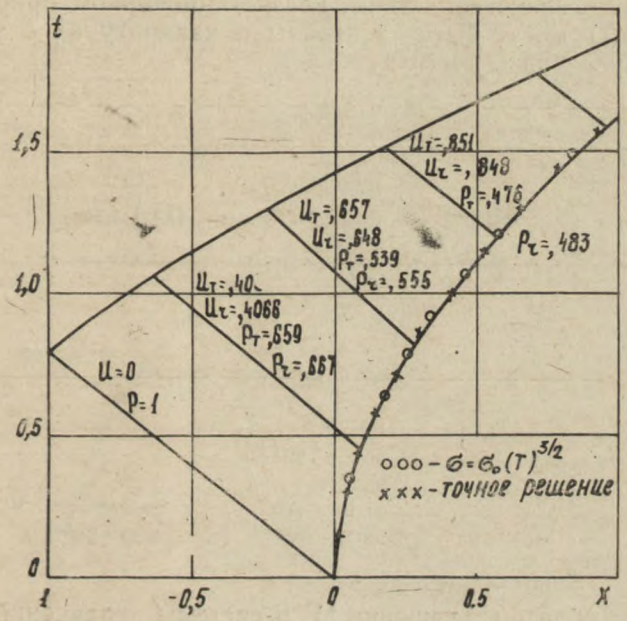


Рис. 2

Из соотношений, полученных в точном решении [3],

$$x_{ст}(v) = -\alpha_0 v_0 t + f(v), \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{v_0 - b}},$$

$$f(v) = x_{ст}(v) + \alpha_0 v_0 t = \frac{l_0}{\sigma_m v_0} \left(v_0 - v + \frac{p_0 + p_m^0 + \alpha_0^2 v}{\alpha_0^2} \times \right.$$

$$\left. \times \ln \frac{p_0 + p_m^0}{p_0 + p_m^0 - \alpha_0 (v - v_0)} \right)$$

определяется $v_{ст}(t)$ при $t > t_A$ и по нему находятся значения $i(t)$ и $u(t)$ на условной границе.

3. Численная газодинамическая методика расчета. Газодинамическая методика расчета основана на аппроксимации МГД-системы уравнений (1)—(5) уравнениями газовой динамики со специальными законами ввода в газ импульса и энергии [5]. В уравнениях (2)—(3) члены, зависящие от электромагнитных характеристик разряда, согласно, решениям [5], в низкоскоростном, квазистационарном приближении $e=e(t)$ могут быть записаны в квадратурах с учетом краевых условий (7)—(9):

$$F = -\frac{\varkappa c}{4\pi\nu_m} veh = -\frac{\varkappa c}{4\pi\nu_m} v \times$$

$$\times \frac{[h_п(t) - h_{ст}(t)]\left[h_п(t)\int\limits_{x_{ст}}^{x_п} \sigma dx + h_{ст}(t)\int\limits_{x_{ст}}^{x_п} \sigma dx\right]}{\left(\int\limits_{x_{ст}}^{x_п} \sigma dx\right)^2}; \qquad (12)$$

$$Q = \frac{\varkappa v}{\sigma} j^2 = \frac{\varkappa v \sigma [h_п(t) - h_{ст}(t)]^2}{\left(\int\limits_{x_{ст}}^{x_п} \sigma dx\right)^2}, \qquad (13)$$

где $\sigma = \dfrac{c^2}{4\pi\nu_m}$ — электропроводность газоразрядного промежутка, а j — плотность тока.

Таким образом, решение МГД-системы уравнений (1)—(5) сводится к решению газодинамической системы уравнений (1)—(3) с вводом в газ импульса и энергии по специальным законам (12)—(13), т. е. мы получаем приближенную математическую модель решения МГД-задачи Лагранжа.

Численную схему расчета этой модели будем строить, используя, как и в предыдущем случае, полностью консервативную разностную схему.

Электропроводность газа рассчитываем по формуле точного решения для магнитовязкого газа, полученной в [3] или по закону $\sigma = \sigma_0 (T)^{3/2}$.

На рис. 2—3 построено решение исходной задачи при следующих значениях величин: $\gamma=1{,}4$, $b=0{,}1$, $v_0=1$, $p_0=P_m^0=1$, $\delta=2{,}7$, $\varkappa=1$, $\sigma_m=0{,}5$.

Сплошная линия соответствует точному аналитическому решению [3], крестиками и кружками помечено численное решение приближенной математической модели, когда электропроводность газа рассчитывалась по точному решению [3] и закону $\sigma=\sigma_0(T)^{3/2}$ соответственно.

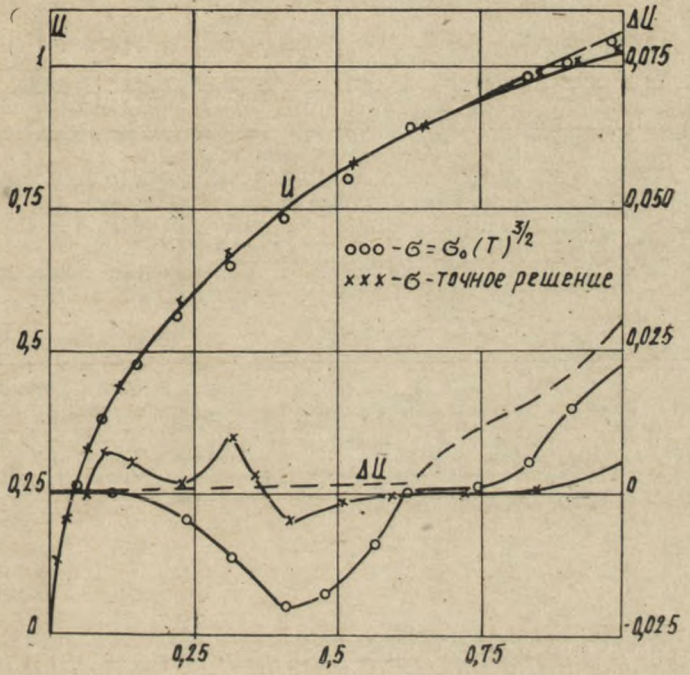


Рис. 3

Пунктиром представлено численное решение МГД-задачи. Результаты расчета хорошо согласуются с точным решением. Например, максимальное отклонение от точного решения по скорости на длине, равной длине камеры, меньше 3% для численной МГД-методики и меньше 2% для приближенной газодинамической.

Из сравнения результатов расчета для различных законов $\sigma=\sigma(T)$ следует вывод, что полученный в точном реше-

нии [3] модельный закон $\sigma=\sigma(T)$ хорошо аппроксимирует реальную зависимость электропроводности от температуры.

Из результатов апробации следует, что предложенные методики обладают хорошей точностью и, следовательно, могут быть использованы при теоретическом анализе ускорения тела в пусковой трубе магнитовязким газом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. — М.: Наука, 1971. — 854 с.

2. Комаровский Л. В. Точное аналитическое решение задачи Лагранжа с вводом энергии для трубы переменного сечения. — Труды I Республиканской конференции по аэрогидромеханике, теплообмену и массообмену. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1969, с. 83—86.

3. Синяев С. В. Об одном классе точных аналитических решений типа простой волны магнитогидродинамических уравнений для газа конечной электропроводности. — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1977, с. 93—102.

4. Попов Ю. П., Самарский А. А. Полностью консервативные разностные схемы уравнений магнитной гидродинамики. — ЖВМ и МФ, 1970, т. 10, № 4, с. 990—998.

5. Комаровский Л. В., Синяев С. В. О моделировании процесса электрогазодинамического ускорения тела уравнениями газовой динамики с вводом импульса и энергии. — В кн.: Аэрогазодинамика быстропротекающих процессов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982, с. 35—39.

6. Синяев С. В., Шалагина Л. А. Ускорение поршня электрическим газовым разрядом в трубе с продольными электродами. — В кн.: Аэрогазодинамика быстропротекающих процессов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1979, с. 79—86.

ОПЫТ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ УСКОРЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ ГАЗОВЫМИ СТРУЯМИ

В. З. Касимов, Ю. П. Хоменко

Экспериментальное исследование процесса ускорения сферических твердых частиц высокоскоростной струей продуктов детонации (ПД) трубчатых зарядов ВВ проводилось в [1—7], а также в других указанных там работах. В работе [8] приводятся результаты численного моделирования течения ПД в окрестности фронта детонации с целью объяснения механизма образования струи.

В данной работе описаны результаты численного расчета указанного течения в осесимметричной и одномерной постановках и предложена экономичная одномерная методика расчета.

1. Течение продуктов детонации описывается уравнениями движения невязкого нетеплопроводного газа в осесимметричном приближении, которые берем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho r)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u r)+\frac{\partial}{\partial r}(\rho v r)=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(p+\rho u^2)+\frac{\partial}{\partial r}(\rho u v)=-\frac{\rho u v}{r};$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u v)+\frac{\partial}{\partial r}(p+\rho v^2)=-\frac{\rho v^2}{r}; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E r)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u r\left(E+\frac{p}{\rho}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial r}\left[\rho v r\left(E+\frac{p}{\rho}\right)\right]=0;$$

$$E=e(p,\rho)+(u^2+v^2)/2,$$

где t — время; x, r — цилиндрические координаты; ρ — плотность; u, v — проекции вектора скорости на оси x и r соответственно; p — давление; e — внутренняя энергия. Как показано в [9], использование уравнений импульсов в такой форме позволяет уменьшить погрешность расчета в окрестности оси симметрии.

Калорическое уравнение состояния выбиралось в виде, предложенном в [10].

Система (1) интегрировалась в области, показанной на рис. 1. На оси симметрии AL и на границах EF, FG с непрореагировавшим BB ставилось условие непротекания. На детонационной волне, считавшейся плоской, использовалось условие Чепмена—Жуге. На внешних границах AB, BC, CD, GH, HK и KL использовалось обобщение алгоритма, предложенного в [11] и заключающегося в следующем.

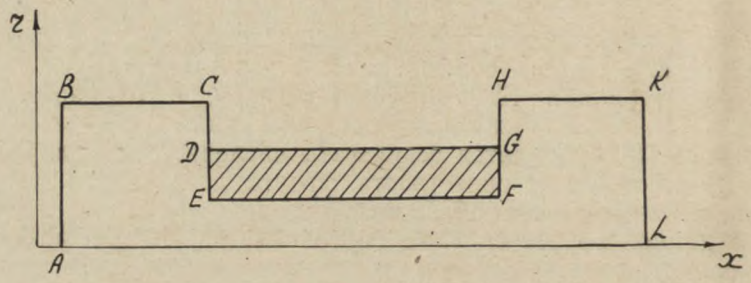


Рис. 1

Расчетная область на этих границах окружалась рядом фиктивных ячеек, давление в которых полагалось равным атмосферному p_0, а значения плотности и нормальной к границе составляющей скорости вычислялись в предположении, что газ из состояния в приграничной ячейке переходит в состояние с давлением p_0 в простой волне. Решение задачи о распаде разрыва между этими состояниями принималось за граничные значения газодинамических параметров. Как показано в [11], при таком граничном условии течение внутри расчетной области не зависит от внешних условий до давлений в приграничных ячейках порядка 2 p_0.

В начальный момент времени расчетная область «заполнялась» покоящимися ПД с $p_0 = 0{,}1$ МПа, $\rho_0 = 1{,}2$ кг/м^3.

Расчет проводился методом С. К. Годунова [12] в подвижной прямоугольной сетке, связанной с детонационной волной DE, являющейся сеточной линией. При проведении тестовых расчетов было показано, что для получения хорошей точности необходимо сгущение сетки в направлении оси x в области, отстоящей влево от фронта детонации на расстояние d_0 (d_0 — внутренний диаметр заряда). В окрест-

ности этой точки на оси симметрии находится зона максимальных давлений, совпадающая с точкой торможения в системе координат, движущейся со скоростью детонации.

На фоне решения газодинамической задачи проводился расчет движения серии метаемых частиц в продположении отсутствия абляции. Предполагалось, что каждая частица движется лишь под действием аэродинамической силы со стороны струи и архимедовой силы поля давления ПД. Такой подход оправдывается тем, что поток продуктов детонации движется с большой сверхзвуковой скоростью, а максимальные размеры частицы не превосходят 0,25 d_0 [3].

Уравнение движения каждой частицы записывалось в виде

$$\delta d_{\text{н}} \frac{d^2\vec{z}}{dt^2} = 0{,}75\, c_d \rho \left(\vec{w} - \frac{d\vec{z}}{dt}\right)\left|\vec{w} - \frac{d\vec{z}}{dt}\right| - d_{\text{н}} \operatorname{grad} p, \qquad (2)$$

где δ — плотность; $d_{\text{н}}$ — диаметр; $\vec{z}$ — радиус-вектор частицы в плоскости (x, r); ρ, $\vec{w}$, p — параметры ПД в точке $\vec{z}$, c_d — коэффициент сопротивления.

Расчеты, проведенные в диапазоне изменения $d = d_1/d_0$ (d_1 — внешний диаметр заряда) от 1,22 до 6 для ВВ ТГ50/50 показали, что картина течения качественно совпадает с описанной в [8], а величины расчетных конечных скоростей частиц для большинства опытов, приведенных в [2, 3, 6], отличаются не более, чем на 250 м/с. Параметры сетки при этом были следующие: min $(h_x) = 0{,}05\ d_0$; max $(h_x) = 0{,}2\ d_0$; $h_r = 0{,}05\ d_0$, сгущение сетки в направлении оси x производилось в обе стороны от центра сгущения на длине примерно 3 d_0.

2. Описанная методика расчета была реализована на БЭСМ-6 с использованием транслятора «АЛГОЛ-ГДР». Расчет одного варианта требует от 10 до 40 часов машинного времени в зависимости от относительной толщины заряда. В процессе расчетов было установлено, что границы BC и HK могут без искажения картины течения выбираться на расстоянии $d_1/2$ от оси симметрии. Оказалось также, что через некоторое время после начала детонации течение в окрестности плоскости, проходящей через фронт детонации, устанавливается. Поэтому при проведении расчетов проводилась проверка на стационарность во входном сечении канала заряда и, когда течение устанавливалось, область ле-

вее плоскости, проходящей через фронт детонации, не рассчитывалась, а ее влияние заменялось постановкой во входном сечении стационарного граничного условия. Все эти приемы позволили уменьшить время расчета одного варианта в 2—3 раза.

Стационарные значения потоков массы M, импульса I и энергии E, отнесенные соответственно к $\delta_0 D$, $\delta_0 D^2$ и $\delta_0 D^3$ (δ_0 — плотность ВВ, D — скорость детонации) через сечение канала, совпадающее с сечением фронта детонации, показаны точками на рис. 2. Удалось подобрать такую масштабную функцию от d, что значения потоков при $d \geqslant 2{,}4$ хорошо аппроксимируются пучком прямых, проходящих через начало системы координат.

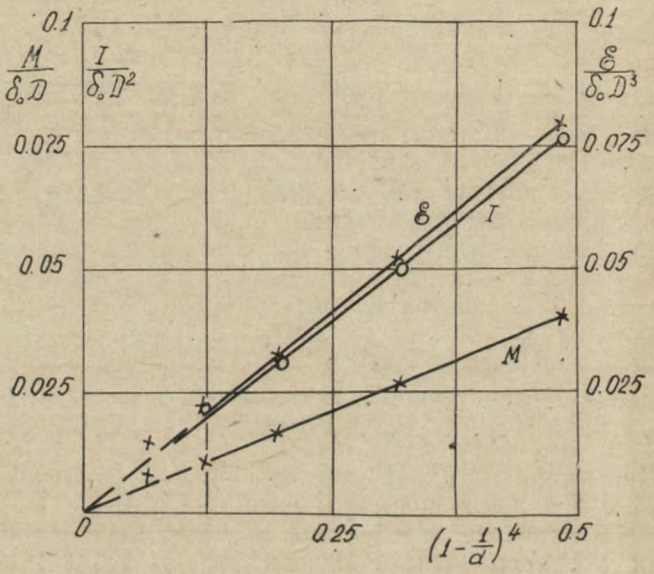


Рис. 2

Рассмотрим движение ПД в полости заряда в рамках одномерной модели движения невязкого нетеплопроводного газа по цилиндрическому каналу. Уравнения движения берем в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(p+\rho u^2)}{\partial x}=0; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial(pu+\rho uE)}{\partial x}=0.$$

Система (3) решается в области

$$0\leqslant t\leqslant t_к,\quad x_1(t)\leqslant x\leqslant x_2(t),$$

где $x=x_1(t)=Dt$ есть сечение фронта детонации, а $x=x_2(t)=$ $=x_0+Dt$ — сечение, достаточно удаленное от фронта, чтобы не вносить возмущений от граничного условия при $x=x_2(t)$ на интересующую нас часть струи. В этом сечении ставится граничное условие типа [11]. Потоки массы, импульса и энергии при $x=x_1(t)$ являются решением уравнения вида

$$\frac{dy}{dt}+\alpha y=\alpha y_*, \qquad (4)$$

где y_* — стационарное значение соответствующего потока, определенное из решения задачи в постановке, описанной в п. 1. Зависимости M, I, E от d показаны на рис. 2 сплошными линиями.

Общее решение уравнения (4) имеет вид [13]

$$y=\exp(-F)\left[y_0+y_*\int_0^t\alpha(t)\exp(F)\,dt\right], \qquad (5)$$

$$F(t)=\int_0^t\alpha(t)\,dt.$$

Если принять $\alpha(t)=\alpha\equiv\text{const}$ при фиксированном d, то α может быть подобрана сопоставлением решения (5) и соответствующей ему зависимости $y(t)$ из решения задачи в осесимметричной постановке. Очевидно, что граничное условие при $x=x_1(t)$ корректно только при $t<t_к$, где $t_к$ — время окончания детонации.

Начальные условия выбирались аналогично п. 1.

Система (3) решалась методом С. К. Годунова [12] в подвижной сетке, движущейся вместе с левой границей. Движение частиц рассчитывалось на фоне решения описанной газодинамической задачи интегрированием проекции уравнения (2) на ось x методом Эйлера при $r=0$.

Отметим, что в рамках одномерной модели течения возможно получение различных одномерных уравнений в зависимости от предположений, делаемых при осреднении действительного потока [14]. Уравнения (3) могут быть получены в предположении, что профили давления и продольной скорости по поперечному сечению канала плоские, радиальная компонента вектора скорости равна нулю и зависимость средней по сечению удельной внутренней энергии от давления и средней по сечению плотности газа совпадает с используемым калорическим уравнением состояния. Эти предположения были сделаны на основании сравнительного анализа результатов расчета задачи в осесимметричной и одномерной постановках.

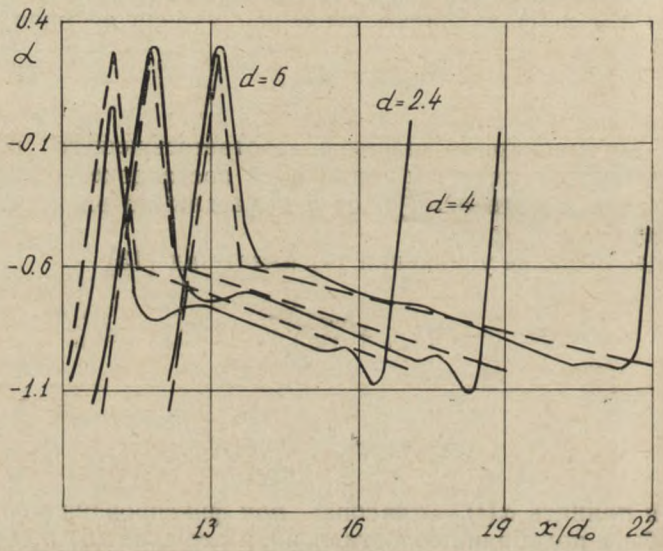


Рис. 3

Реальное распределение плотности по сечению канала аппроксимировалось зависимостью

$$\rho(x, r, t) = \rho^0(x, t)\,[1 + \beta(x, t)\, r/r_0],$$

где r_0 — радиус канала ($r_0 = d_0/2$). Следовательно,

$$<\rho> = \rho^0(x, t)\left(1 + \frac{2}{3}\beta\right),$$

откуда

$$\beta(x,\ t) = \frac{3}{2}(<\rho>/\rho^0 - 1).$$

На рис. 3 показаны типичные распределения параметра β, соответствующие разным t для зарядов с различными d. Сплошными кривыми изображены распределения $\beta(x,\ t)$, полученные из решения в осесимметричной постановке, штриховыми — их возможная аппроксимация тремя линейными зависимостями, использованная при расчетах по упрощенной модели

$$\beta(x,\ t) = \begin{cases} -1{,}2 + 1{,}5(\xi - \tau), & \xi - \tau \leqslant 1; \\ 0{,}3 - 1{,}8(\xi - \tau - 1), & 1 < \xi - \tau \leqslant 1{,}5; \\ -0{,}6 - 0{,}4(\xi - \tau - 1{,}5)/(\xi_3 - 1{,}5), & \xi - \tau > 1{,}5, \end{cases}$$

где $\xi = x/d_0$, $\tau = Dt/d_0$, $\xi_3 = x_3/d_0$, $x = x_3(t) \approx 2Dt$ — траектория «головы» струи. Зная $\beta(x,\ t)$, определяем значение плотности $\rho^0(x,\ t)$ ПД на частице

$$\rho^0(x,\ t) = <\rho>/\left(1 + \frac{2}{3}\beta\right),$$

где $<\rho>(x,\ t)$ находится из решения (2.1), а ρ^0 используется при интегрировании уравнения движения частицы.

На рис. 4 приведено сравнение результатов расчетов, про-

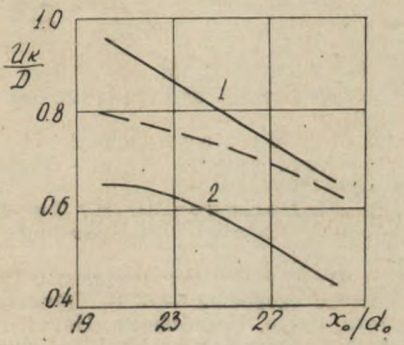


Рис. 4

веденных по одномерной методике (штриховая кривая) и по осесимметричной (сплошные кривые). В плоскости (X_0/d_0, $U_к/D$), (X_0 — начальное положение частицы; $U_к$—ее конечная

скорость) кривая *1* соответствует первоначальному положению частицы на оси симметрии, *2* — отклоненному от нее на расстояние 0,25 d_0. Расчеты проведены при $d = 2{,}4$, $d_н = 0{,}1\ d_0$, $\delta = 7{,}8$ г/см^3, $l = 25\ d_0$, $\alpha = 0{,}1$ (l — длина заряда). Для частиц с другим $d_н$ взаимное расположение кривых такое же. Так как кривая *1* дает предельно возможное значение $U_к$, а в эксперименте можно ожидать $U_к$, находящееся между кривыми *1* и *2* за счет неточности установления частицы на ось симметрии и других причин, то точность расчетов по одномерной методике следует признать, по крайней мере, удовлетворительной. Отметим также, что значения максимальной силы, действующей на частицу, определяются с такой же относительной погрешностью.

Время расчета одного варианта на БЭСМ-6 по упрощенной методике составляет примерно 10 с, поэтому ее целесообразно использовать при проведении параметрических исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Титов В. М., Фадеенко Ю. И., Титова Н. С. Разгон твердых частиц кумулятивным взрывом. — ДАН, 1968, т. 180, № 5, с. 1051—1052.

2. Загуменнов А. С., Титова Н. С., Фадеенко Ю. И., Чистяков В. П. Детонация удлиненных зарядов с полостями. — ПМТФ, 1969, № 2, с. 79—83.

3. Титов В. М., Швецов Г. А. Лабораторные методы высокоскоростного метания твердых тел взрывом. — ФГВ, 1970, т. 6, № 3, с. 401—404.

4. Пряхин Г. В., Титов В. М., Швецов Г. А. Исследование высокоскоростных потоков газа электромагнитным методом. — ПМТФ, 1971, № 3, с. 137—140.

5. Сильвестров В. В., Урушкин В. П. Метод определения плотности высокоскоростных газовых струй. — Динамика сплошной среды ,1971, вып. 7, с. 125—129.

6. Урушкин В. П., Горшков Н. Н., Титов В. М. Методика имитации в лабораторных условиях удара каменных метеоритов. — ФГВ, 1977, т. 13, № 3, с. 439—442.

7. Лаврентьев М. А. и др. Исследование соударений твердых тел в космическом диапазоне скоростей. — В кн.: Фундаментальные исследования. Физ.-мат. и техн. науки. Новосибирск: Наука, 1977, с. 255—258.

8. Лобанов В. Ф., Фадеенко Ю. И. Кумуляция продуктов детонации полого цилиндрического заряда. — ФГВ, 1974, т. 10, № 1, с. 119—124.

9. Шуршалов Л. В. О выборе исходной дивергентной формы уравнений при расчете осесимметричных течений конечно-разностными методами. — ЖВММФ, 1980, т. 20, № 3, с. 793—800.

10. Куропатенко В. Ф. Уравнение состояния продуктов детонации конденсированных ВВ. — В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1977, т. 8, № 6, с. 68—71.
11. Дмитриева С. Л., Хоменко Ю. П. О граничном условии на открытом конце трубы. — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1977, с. 33—35.
12. Годунов С. К. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976. — 400 с.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965. — 704 с.
14. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1972. — 440 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Г. А. Атанов, Б. И. Бешевли. Об особенностях движения струи импульсного водомета 3
Г. П. Анисимов. К расчету времени установления нестационарных турбулентных струй 9
И. В. Бондарь, С. В. Пейгин. Численное решение уравнений нестационарного гиперзвукового вязкого ударного слоя на проницаемой поверхности в окрестности критической точки двоякой кривизны 14
А. М. Бубенчиков, С. Н. Харламов. Установившийся и нестационарный теплообмен при турбулентном течении диссоциирующего теплоносителя во входном участке круглой трубы . . . 25
А. В. Буров. Струйное обтекание клина равномерно завихренным потоком в продольном поле силы тяжести 31
А. А. Глазунов, А. С. Ткаченко, В. А. Иванов. Численное исследование течений в соплах Лаваля сложной формы . . . 38
Л. И. Дубровская. Численное исследование обтекания цилиндрического тела в трубе газом со сложным уравнением состояния . 45
С. Г. Иванушкин, Г. Д. Кадиева. Расчет течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе с резким изменением сечения на основе полных уравнений Навье—Стокса 50
С. Г. Иванушкин, А. В. Старченко. Применение дифференциальной модели турбулентного переноса тепла к исследованию нестационарного сопряженного теплообмена при пульсирующем турбулентном течении в круглой трубе 57
О. П. Кадиев, В. А. Лосев. Унифицированный алгоритм обработки директив 66
В. А. Коробицын. Инвариантные разностные уравнения и группа Галилея 71
М. П. Костомаров, В. Н. Панков. Численное моделирование одного способа вытеснения высоковязкой нефти . . . 77
В. Н. Крутиков. Быстросходящийся метод решения задач безусловной минимизации, не требующий вычисления производных . 85
Е. Г. Орлова, С. В. Пейгин. Применение метода последовательных приближений для решения уравнений пространственного слоя смешения при наличии градиента давления 100
Е. И. Погорелов. К задаче оптимального управления неадиабатическим течением газа 107
И. Т. Скородинский. Об удельной энергии турбулентности . 114
В. Т. Сарычев. Исследование фронта ударной волны на основе специальной аппроксимации функции распределения . . . 125
Е. Д. Томилов. Истечение струи газа из симметричного сосуда, составленного тремя одинаковыми каналами 134
Е. Д. Томилов. Симметричное соударение свободной газовой струи со струей, выходящей из канала 144
А. М. Бубенчиков, И. Ф. Гареев, С. Г. Иванушкин. Квазиодномерная модель движения крови в венах 154
О. Н. Шабловский. Плоское автомодельное решение граничной обратной задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности 161
Л. А. Шалагина. Апробация численных методик расчета на точном решении задачи Лагранжа для магнитовязкого газа . . 170
В. З. Касимов, Ю. П. Хоменко. Опыт численного моделирования ускорения сферических твердых частиц газовыми струями . 177

ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

Редактор **В. Г. Лихачева**
Технический редактор **Р. А. Прошенкина**
Корректор **Л. И. Дюканова**

ИБ 1693

Сдано в набор 10.II.1986 г. Подписано в печать 12.08.87 г. К306267
Формат 60×84 1/16. Бумага типографская № 3. Гарнитура Литературная.
Печать высокая. Печ. л. 12,25. Усл. печ. л. 11,39. Уч.-изд. л. 11,38.
Тираж 500 экз. Заказ 4428. Цена 1 р. 80 к.

Издательство ТГУ, 634057, Томск, ул. Никитина, 4.
Типография изд-ва «Красное знамя», 634050, ГСП, Томск, пр. Фрунзе, 103.

РЕФЕРАТЫ НА ОПУБЛИКОВАННЫЕ СТАТЬИ

УДК 531.57

Атанов Г. А., Бешевли Б. И. **Об особенностях движения струи импульсного водомета.** — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 3—8.

Одним из перспективных методов разрушения горных пород является импульсный гидродинамический, предполагающий использование импульсных струй сверхвысоких скоростей. В этом случае возникает необходимость в определении связи параметров внутренней баллистики импульсного водомета с характеристиками разрушения.

В работе показано, что для связи давления импульсной струи на преграду с давлением в стволе необходимо учитывать характер распространения струи в воздухе, который может быть охарактеризован коэффициентом напора, определяемым как отношение давлений торможения, соответствующих скорости головы струи и максимальной скорости истечения из сопла. Экспериментально исследована зависимость коэффициента напора от расстояния и показано, что с увеличением давления в стволе максимальная скорость головы струи увеличивается, а максимальное значение коэффициента напора уменьшается.

Библ. 3, ил. 3.

УДК 532.517.4

Анисимов Г. П. **К расчету времени установления нестационарных турбулентных струй.**— В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 9—13.

В работе с целью определения времени установления нестационарных спутных турбулентных струй получены характеристики системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Результаты расчета приводятся в сравнении с экспериментальными данными.

Библ. 6, ил. 2.

УДК 533.6.011

Бондарь И. В., Пейгин С. В. **Численное решение уравнений нестационарного гиперзвукового вязкого ударного слоя на проницаемой поверхности в окрестности критической точки двоякой кривизны.**— В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 14—24.

Численным методом повышенной точности аппроксимации в широком диапазоне изменения определяющих параметров задачи исследуется нестационарное течение однородного сжимаемого газа в гиперзвуковом пространственном вязком ударном слое на проницаемой поверхности в окрестности критической точки двоякой кривизны. Подробно рассмотрен случай течения, когда массовый расход газа через поверхность является некоторой, в том числе разрывной, функцией времени. Получено, что относительные значения коэффициентов трения и теплообмена на проницаемой поверхности, отнесенные к своим стационарным значениям, слабо зависят от отношения радиусов главных кривизн в критической точке и практически совпадают со значениями этих параметров, вычисленных для осесимметричного случая.

Библ. 7, ил. 4.

УДК 536.244

Бубенчиков А. М., Харламов С. Н. **Установившийся и нестационарный теплообмен при турбулентном течении диссоциирующего теплоносителя во входном участке круглой трубы.**— В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 25—30.

В работе исследуется влияние диссоциации (рекомбинации) на теплообмен и трение при турбулентном движении кислорода во входном участке круглой трубы. Процессы турбулентного переноса рассмотрены на основе однопараметрической модели, включающей дифференциальное уравнение для кинетической энергии турбулентности. Анализируется влияние нестационарности и химических превращений на интенсивность теплоотдачи и величину сопротивления трения в канале.

Библ. 7, ил. 4.

УДК 532.528

Буров А. В. **Струйное обтекание клина равномерно завихренным потоком в продольном поле силы тяжести.**— В кн.: Газовая динамика. Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 31—37.

В нелинейной постановке рассматривается задача струйного обтекания клина по схеме Рябушинского равномерно завихренным симметричным потоком. Предложен численный метод решения, основанный на использовании теории конформных отображений и позволяющий учитывать влияние силы тяжести. Приведены результаты расчетов форм каверн при различных значениях параметорв набегающего потока.

Библ. 6, ил. 3.

УДК 533,697.011

Глазунов А. А., Ткаченко А. С., Иванов В. А. **Численное исследование течений в соплах Лаваля сложной формы.** — В кн.: Газовая динамика, Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 38—44.

В работе рассматривается осесимметричное течение газа в соплах Лаваля сложной формы. Численная реализация осуществляется на специальной нерегулярной сетке с использованием конечно-разностной схемы Мак-Кормака. Проведено численное исследование течений газа в соплах сложной формы. Показано, что применение ортогональной сетки целесообразно при расчетах таких сопел и позволило выяснить некоторые особенности течения.

Библ. 8, ил. 4.

УДК 533.6.011

Дубровская Л. И. **Численное исследование обтекания цилиндра в трубе газом со сложным уравнением состояния.** — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 45—49.

В работе рассматривается численное решение задачи о нестационарном осесимметричном обтекании коаксиального кругового цилиндра потоком газа с уравнением состояния В. Ф. Куропатенко при больших числах Маха набегающего потока ($M = 2, 3, 5$). Определяется зависимость $c_x(M)$ для интервала значений $R/R_т$ (отношение радиуса цилиндра к радиусу трубы), соответствующих режиму обтекания с отошедшей ударной волной.

Библ. 5, ил. 3.

УДК 532.517.2

Иванушкин С. Г., Кадиева Г. Д. **Расчет течения вязкой несжимаемой жидкости в трубке с резким изменением сечения на основе полных уравнений Навье—Стокса.**— В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 50—56.

В работе проводится исследование течения вязкой несжимаемой жидкости в осесимметричных каналах, имеющих особенность типа уступа, выступа, диафрагмы на основе численного решения уравнений Навье—Стокса в переменных «скорость-давление».

Библ. 9, ил. 4.

УДК 532.517.4:536.24

Иванушкин С. Г., Старченко А. В. **Применение дифференциальной модели турбулентного переноса тепла к исследованию нестационарного сопряженного теплообмена при пульсирующем турбулентном течении в круглой трубе.**— В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 57—65.

В работе рассматривается нестационарный сопряженный теплообмен при пульсирующем турбулентном стабилизированном течении вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе. Для замыкания уравнения энергии используется дифференциальное уравнение для плотности турбулентного теплового потока. Проведенные численные расчеты показали, что при некоторых условиях колебания интенсифицируют теплоперенос. Выявлено отсутствие каких-либо ограничений, связанных с использованием формул для турбулентного числа Прандтля при изучении рассматриваемого класса задач нестационарного сопряженного теплообмена.

Библ. 13, ил. 4.

УДК 65.011.56:658.512.2

Кадиев О. П., Лосев В. А. **Унифицированный алгоритм обработки директив.** — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 66—70.

Описывается алгоритм обработки директив, позволяющий вносить изменения в исходный вариант языка, предложенного разработчиками. Рассматриваются три этапа алгоритма: разборка директив, формальная трансляция, логическая трансляция. Существенным является запись информации о конструкции директив в форме Бэкуса, большая свобода при выборе имен объектов по сравнению с традиционным подходом.

УДК 517.949

Коробицын В. А. **Инвариантные разностные уравнения и группа Галилея.** — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 71—76.

Для случая плоской симметрии рассматривается класс дивергентных разностных операторов векторного анализа на неортогональных сетках. Установлена инвариантность этих операторов относительно преобразований группы Галилея. Построен класс разностных и дифференциально-разностных схем газовой динамики, допускающих группу Галилея.

Библ. 11.

УДК 532.546

Костомаров М. П., Панков В. Н. **Численное моделирование одного способа вытеснения высоковязкой нефти.** — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 77—84.

На основе двухфазной модели Баклея—Леверетта проводится численное исследование одного метода вытеснения высоковязкой нефти, основанного на чередующемся нагнетании в пласт воды и высоковязкой жидкости, хорошо смешивающейся с пластовой нефтью. Проведенные расчеты для различных условий нагнетания показали, что в рамках выбранной модели гидродинамическое перераспределение насыщенности, неоднородность пласта и пространственность течения не позволяют превысить коэффициент нефтеотдачи по сравнению с обычным заводнением.

Ил. 3.

УДК 518:517.948

Крутиков В. Н. **Быстросходящийся метод решения задач безусловной минимизации, не требующий вычисления производных.**— В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 85—99.

В работе предлагается и исследуется алгоритм сопряженных направлений, предназначенный для решения задачи нелинейного программирования с целевой функцией, заданной алгоритмически. Доказано, что в случае минимизации сильновыпуклой функции последовательность точек, генерируемая алгоритмом, сходится со скоростью геометрической прогрессии к точке минимума, а в области экстремума он обладает $2n$ шаговой скоростью сходимости порядка $n+1$. Приведены результаты численной проверки нового метода.

Библ. 11, ил. 2, табл. 2.

УДК 532.526

Орлова Е. Г., Пейгин С. В. **Применение метода последовательных приближений для решения уравнений пространственного слоя смешения при наличии градиента давления.**— В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 100—106.

Методом последовательных приближений исследуется течение однородного сжимаемого газа в ламинарном пространственном слое смешения при наличии градиента давления. В рамках данного метода в приближении локальной автомодельности получено общее решение исходной задачи, а также аналитическое решение в первом приближении для профилей скоростей и температуры поперек слоя смешения. Сравнение аналитического и численного решения показывает удовлетворительную точность первого.

Библ. 7, ил. 1.

УДК 533.6.011

Погорелов Е. И. **К задаче оптимального управления неадиабатическим течением газа.**— В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 107—113.

В работе рассматривается задача отимального управления неадиабатическим течением газа в канале постоянного сечения. Управлениями

служат источниковые члены в уравнениях движения и энергии, целевым функционалом — среднеквадратичное отклонение давления на подвижном поршне от заданного. Получены необходимые условия оптимальности.

Библ. 7, ил. 1.

УДК 532.514.4

Скородинский И. Т. **Об удельной энергии турбулентности.** — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 114—124.

На основе анализа общей функциональной зависимости тензора турбулентных напряжений от тензора скоростей деформаций получены соотношения, определяющие зависимость удельной энергии турбулентности от осредненного движения. Рассмотрены случаи изотропного и анизотропного тензора масштабов. Приводится сравнение экспериментальных и расчетных данных.

Библ. 11, ил. 1.

УДК 533.6.011.72:533.7

Сарычев В. Т. **Исследование фронта ударной волны на основе специальной аппроксимации функции распределения.** — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 125—133.

Для исследования структуры фронта плоской ударной волны предлагается система моментных уравнений. Для получения замкнутой системы моментных уравнений используется бимодальная и одномодовая аппроксимация функции распределения. Существенным отличием от ранее используемых аппроксимаций является учет асимметрии мод. В результате численного решения полученной системы уравнений было установлено, что при числе Маха $M \leqslant 2{,}5$ функция распределения аппроксимируется одной асимметричной модой.

Библ. 8, ил. 4.

УДК 533.6.011

Томилов Е. Д. **Истечение струи газа из симметричного сосуда, составленного тремя одинаковыми каналами.** — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 134—143.

В работе получены выражения для функции тока в плоскости годографа скорости, а также установлены два выражения для коэффициента сжатия струи, из которых следует, что данное течение возможно лишь при определенном значении скорости в одном из каналов на бесконечности. Рассмотрены два случая, в которых наибольшая скорость задается или в среднем канале, или в боковых каналах. Даны формулы для несжимаемой жидкости и приведены результаты расчетов по этим формулам.

Библ. 1, ил. 3, табл. 2.

УДК 533.6.011

Томилов Е. Д. **Симметричное соударение свободной газовой струи со струей, выходящей из канала.** — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 144—153.

Дан вид функций тока в плоскости годографа, найдены уравнения свободных границ в плоскости течения, определены характерные параметры потока, а также установлено положение точки остановки. Рассмотрен частный случай несжимаемой жидкости.

Библ. 1, ил. 2.

УДК 531/534:57

Бубенчиков А. М., Гареев И. Ф., Иванушкин С. Г. **Квазиодномерная модель движения крови в венах.** — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 154—160.

В работе строится математическая модель движения крови на прямолинейном участке средней или крупной вены. Принимается, что кровь является однородной, несжимаемой ньютоновской жидкостью с постоянной вязкостью. Упругие свойства стенки учитываются алгебраической связью между трансмуральным давлением и площадью поперечного сечения, которая определяется на основе аппроксимации известных экспериментальных данных. Дифференциальные уравнения, описывающие движение жидкости в деформируемом канале, интегрируются с использованием метода конечных разностей. Исследовано влияние амплитуды пульсовых волн и вязкости крови на распределения гемодинамических параметров.

Библ. 5, ил. 6.

УДК 536.24

Шабловский О. Н. **Плоское автомодельное решение граничной обратной задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности.**— В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 161—169.

Рассматривается параболическое уравнение теплопроводности в плоской двумерной области для среды с нелинейными теплофизическими свойствами. Осуществляется такое преобразование независимых переменных, что вместо температуры T искомой становится функция $f(T)$, которая берется на основе зависимости граничного теплового потока от температуры. Излагается аналитический подход к решению обратных граничных задач, когда на некоторых участках границы области заданы одновременно температура и нелинейно зависящий от температуры тепловой поток, и нужно найти тепловой режим на остальных участках границы.

Для нелинейной среды, коэффициент теплопроводности которой содержит малый параметр, построено в виде разложения по этому параметру плоское автомодельное решение, формально содержащее четыре произвольные функции одного аргумента. Дана интерпретация этого решения: обратная граничная задача для четырехугольной области с подвижными границами.

Библ. 7.

УДК 533.6.011 : 538.4

Шалагина Л. А. **Апробация численных методик расчета на точном решении задачи Лагранжа для магнитовязкого газа.**— В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 170—176.

Проведено исследование двух методик численного расчета электродинамического ускорения тела в трубе на точном решении задачи Лагранжа для магнитовязкого газа в области простой волны.

Библ. 6, ил. 3.

УДК 533.6.07 + 534.222.2

Касимов В. З., Хоменко Ю. П. **Опыт численного моделирования ускорения сферических твердых частиц газовыми струями.**— В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987, с. 177—185.

Рассматривается осесимметричная и одномерная методики расчета процесса ускорения сферических твердых частиц потоком продуктов детонации трубчатого заряда ВВ. Продукты детонации предполагаются невязким нетеплопроводным газом, расчет производится методом С. К. Годунова. На фоне решения газодинамической задачи по известным полям скорости, плотности и давления интегрируются уравнения движения твердых сферических частиц под действием известных аэродинамических сил, определяемых через градиент давления и скоростной напор.

Предложена одномерная модель течения продуктов детонации в полости заряда, позволяющая существенно сократить объем вычислений при удовлетворительной точности определения конечной скорости частицы и максимальной аэродинамической нагрузки, действующей на нее в процессе ускорения.

Библ. 14, ил. 4.

1 р. 80 к.

1-650938

Томский госуниверситет 1878
Научная библиотека 00350758