Г. Г. ПЕСТОВ

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ТОМСК-1983

Г.Г.Пестов

Дифференцируемые отображения в конечномерных пространствах

Учебное пособие

Издательство Томского университета

Томск-1983

УДК 517.948 + 512.13.

Пестов Г.Г. Дифференцируемые отображения в конечномерных пространствах: Учебное пособие. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983.-4 л. – 15 к. 400 экз. 1702050000.

В книге изложены основные вопросы теории непрерывно дифференцируемых отображений в конечномерных пространствах: свойства дифференциала, матрицы Якоби, теорема о конечных приращениях, формула и ряд Тейлора; теорема об открытом и обратном отображении, о неявной функции; геометрический смысл якобиана, теорема Сарда.

Для студентов механико-математического факультета и слушателей ФПК Томского университета

Рецензент – доц. Н.Н.Круликовский

Редактор – доц. Г.Б.Сибиряков

П $\frac{1702050000}{177(012)-83}$ 65-83

ВВЕДЕНИЕ

В книге изложены основные вопросы теории непрерывно дифференцируемых отображений в конечномерных пространствах. Эта теория интенсивно используется в современной математике (в математическом анализе, дифференциальной геометрии, дифференциальной топологии) и в ее приложениях (в физике и механике).

Для чтения книги необходимо знакомство с основами линейной алгебры и аналитической геометрии, дифференциальным исчислением вещественных функций вещественного аргумента и с элементами теории меры.

Дальнейшие сведения по теории непрерывно дифференцируемых отображений читатель найдет в [1], [2].

Автор считает приятным долгом поблагодарить за помощь в подготовке рукописи Э.Н.Кривякову, В.П.Кузнецову, Ю.К.Кошельского и всех участников семинара кафедры математического анализа ТГУ за обсуждение материала, вошедшего в эту книгу.

§1. Примеры отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$

Пусть A есть подмножество $\mathbb{R}^m$, $f: A \to \mathbb{R}^n$. Отображения такого вида широко используются в математике и ее приложениях. Допуская некоторую вольность речи, такое отображение f будем называть отображением из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим примеры таких отображений.

П р и м е р 1. Декартовы координаты x, y точки плоскости связаны с ее полярными координатами формулами:

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array}\right\}.$$

Эти формулы определяют отображение полуплоскости $A = \{(\rho,\varphi) \mid 0 \le \rho < +\infty, -\infty < \varphi < +\infty)$ в плоскость $\mathbb{R}^2$.

Пример 2. В начале координат $O \in \mathbb{R}^3$ расположена материальная точка с массой μ. Обозначим через $F(x,y,z)$ силу притяжения, действующую со стороны этой точки на единичную массу, помещенную в точку (x,y,z).

По закону тяготения абсолютная величина F выражается формулой $|F(x,y,z)| = \gamma \frac{\mu}{r^2}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Вектор $F(x,y,z)$ направлен от точки (x,y,z) к началу координат.

Поэтому

$$\frac{F(x,y,z)}{|F(x,y,z)|} = \frac{-(xi+yj+zk)}{r} = -\frac{x}{r}i - \frac{y}{r}j - \frac{z}{r}k.$$

Отсюда находим F:

$$F(x,y,z) = -\frac{\gamma\mu x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}i - \frac{\gamma\mu y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}j -$$

$$-\frac{\gamma\mu z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}k.$$

Эта формула определяет отображение множества $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ в $\mathbb{R}^3$.

Пример 3. Дано отображение f отрезка прямой $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$. Обозначим компоненты f через $f_1,\dots,f_n$:

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Если $f_1,\dots,f_n$ есть непрерывно дифференцируемые функции, то отображение f называется параметрическим заданием гладкой кривой в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотренные примеры иллюстрируют некоторые типичные приложения отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$: а) преобразование координат (отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$); б) задание векторного поля (отображение из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$); в) параметрическое задание кривой (отображение из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^n$).

§ 2. Сведения о матрицах

п.1. Предварительные замечания

а. Пусть $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ есть линейное отображение. Тогда существует така матрица A , что для всех $t \in \mathbb{R}^m$ имеет место равенство

$$\mathcal{A}(t) = At.$$

Матрица A имеет m столбцов и n строк.
Вектор $t \in \mathbb{R}^m$ есть вектор-столбец

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} = (t_1, \ldots, t_m)^T.$$

в. Введём во множестве всех ($m \times n$) - матриц две операции: 1) внутреннюю операцию - сложение матриц; 2) внешнюю операцию - умножение матрицы на скаляр (вещественное число).
Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $r \in \mathbb{R}$.
Положим по определению

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \ rA = (r a_{ij}).$$

Теперь множество всех ($m \times n$) матриц становится векторным пространством над полем вещественных чисел.

с. Пусть A есть ($m \times n$) - матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Обозначим столбцы матрицы A через $A_1, \ldots, A_m$.

Будем писать

$$A=(A_1,\dots,A_m).$$

Обозначим строки матрицы A через $B_1,\dots,B_n$. Будем писать

$$A=\begin{pmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_n\end{pmatrix}.$$

Пусть $x\in\mathbb{R}^m$. Имеем

$$Ax=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}=(A_1,\dots,A_m)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}=A_1x_1+\dots+A_mx_m;$$

так же

$$Ax=\begin{pmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_n\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}B_1x\\ \vdots\\ B_nx\end{pmatrix}.$$

Итак

$$Ax=A_1x_1+\dots+A_mx_m=\begin{pmatrix}B_1x\\ \vdots\\ B_nx\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Пусть $e_1,\dots,e_m$ есть единичные координатные векторы в $\mathbb{R}^m$:

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ \dots\ ,\ e_m=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}.$$

Тогда в силу (1)

$$Ae_1=A_1,\ \dots\ ,\ Ae_m=A_m.$$

Поэтому $A=(Ae_1,\dots,Ae_m)$.

п.2. Норма матрицы

В $\mathbb{R}^k$ введем норму $\|x\|=\|(x_1,\dots,x_k)\|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_k^2}$.

Пусть A есть матрица с m столбцами и n строками. Рассмотрим линейное отображение

$$\varphi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = Ax.$$

Введем в линейном пространстве всех (m, n) матриц вещественную функцию

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| .$$

$\|A\|$ есть супремум $\|Ax\|$ на сфере $S_1(0)$ единичного радиуса с центром в точке $x = 0$. Так как отображение $x \to Ax$ непрерывно, а сфера $S_1(0)$ компактна в $\mathbb{R}^m$, то $\|Ax\|$ принимает на $S_1(0)$ наибольшее значение. Поэтому

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|. \tag{1}$$

Для произвольного $x \in \mathbb{R}^m$, $x \neq 0$ имеем

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

Поэтому

$$\left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \|A\|, \quad \frac{\|Ax\|}{\|A\|} \leq \|A\|, \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| .$$

Итак, для каждого $x \in \mathbb{R}^m$ имеет место неравенство

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|. \tag{2}$$

Заметим, что существуют такие $x \in \mathbb{R}^m$, при которых в (2) имеет место равенство.

В самом деле, в силу (1) существует точка $x_0 \in S_1(0)$ такая, что $\|A\| = \|Ax_0\|$. Поэтому

$$\|Ax_0\| = \|A\| = \|A\| \cdot \|x_0\| .$$

Величину $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ можно рассматривать как коэффициент растяжения вектора x при отображении $x \to Ax$, тогда $\|A\|$ есть точная верхняя граница коэффициентов растяжения при отображении $x \to Ax$.

Убедимся, что функция $A \to \|A\|$ есть норма в линейном пространстве ($m \times n$) матриц.

а. $\|A\| \geqslant 0$, $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда A есть нуль-матрица, - очевидно.

в. $$\|A+B\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax + Bx\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|=1} \|Bx\| =$$

$$= \|A\| + \|B\|.$$

Итак, $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.

с. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|=1} \|(\lambda A)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda (Ax)\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| =$$

$$= |\lambda| \cdot \|A\|;$$

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|.$$

п.3. Непрерывность нормы матрицы

Л е м м а 1. Пусть $A(x) = (a_{ij}(x))$ есть матрица с n строками и m столбцами, у которой все элементы есть вещественные функции, определенные на метрическом пространстве X. Если для всех i, j $\lim\limits_{x \to x_0} a_{ij}(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \|Ax\| = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим строки матрицы $A(x)$ через $A_1(x), \dots, A_m(x)$.

Тогда

$$A(x) = \begin{pmatrix} A_1(x) \\ \vdots \\ A_m(x) \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$t \in \mathbb{R}^m, \ \|t\| = 1, \ t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}$$

Тогда

$$A(x)t = \begin{pmatrix} A_1(x)t \\ \vdots \\ A_n(x)t \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\|A(x)t\| = \sqrt{(A_1(x)t)^2 + \ldots + (A_n(x)t)^2} = \sqrt{\sum_i (A_i(x)t)^2}. \qquad (1)$$

Но $\quad A_i(x)t = a_{i1}(x)t_1 + \cdots + a_{im}(x)t_m$.

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского

$$(A_i(x)t)^2 = (\sum_j a_{ij}(x)t_j)^2 \leq \left(\sum_j a_{ij}^2(x)\right)\left(\sum_j t_j^2\right) =$$

$$= \sum_j a_{ij}^2(x).$$

Итак, $(A_i(x)t)^2 \leq \sum_j a_{ij}^2(x)$. $\qquad$ (2)

Из (1) и (2) получаем неравенство

$$\|A(x)t\| \leq \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2(x)} = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2(x)}.$$

Поэтому

$$\|Ax\| = \sup_{\|t\|=1} \|A(x)t\| \leq \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2(x)}.$$

Так как при всех i, j величина $a_{ij}(x) \to 0$ при $x \to x_0$, то заключаем, что $\lim\limits_{x\to x_0} \|A(x)\| \leq 0$.

Итак, $\lim\limits_{x\to x_0} \|A(x)\| = 0$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 2. Если все элементы матрицы $A(x)$ есть непрерывные вещественные функции, то $\|A(x)\|$ есть непрерывная функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть все элементы матрицы $A(x)$ есть непрерывные функции, определенные на метрическом пространстве X. Пусть $x, x_1 \in X$. Оценим разность $\|Ax\|$ и $\|A(x_1)\|$.

Воспользуемся следующим свойством нормы:

$$\big|\|A\| - \|B\|\big| \leq \|A - B\|.$$

Получим

$$\big|\|A(x)\| - \|A(x_1)\|\big| \leq \|A(x) - A(x_1)\|. \qquad (3)$$

При $x \to x_1$ все элементы матрицы $A(x) - A(x_1)$ стремятся к нулю.

Переходя к пределу в (3) при $x \to x_1$, получим неравенство

$$\lim_{x \to x_1} \big|\|A(x)\| - \|A(x_1)\|\big| \leq 0,$$

откуда

$$\lim_{x \to x_1} \big(A(x) - A(x_1)\big) = 0,$$

следовательно

$$\lim_{x \to x_1} \|A(x)\| = \|A(x_1)\|.$$

Это и означает, что $A(x)$ есть непрерывная функция от x.

Глава 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛ И ПРОИЗВОДНАЯ МАТРИЦА

§ 1. Основные понятия дифференциального исчисления

п. 1. Дифференциал функции

Пусть $x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m$, обозначим $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_m^2}$.

Определение. Пусть G есть открытое множество в $\mathbb{R}^m$, $x_0\in G$, $f\colon G\to\mathbb{R}^n$.

Говорят, что функция f дифференцируема в точке x_0, если существует линейное отображение $\mathcal{A}\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ такое, что

$$f(x)-f(x_0)=\mathcal{A}(x-x_0)+\alpha(x-x_0) \text{ для } x\in G, \tag{1}$$

где

$$\frac{\alpha(x-x_0)}{\|x-x_0\|}\xrightarrow[x\to x_0]{}0.$$

Линейное отображение $\mathcal{A}$ называется дифференциалом функции f в точке x_0 (также первым дифференциалом f в точке x_0).

Таким образом, дифференцируемая в точке x_0 функция f аппроксимируется в окрестности точки x_0 линейным отображением $\mathcal{A}$ с точностью до бесконечно малой $\alpha(x-x_0)$ более высокого порядка по сравнению с $\|x-x_0\|$ при $x\to x_0$.

Величину $(x-x_0)$ называют приращением x и часто обозначают через Δx. Если обозначить приращение функции $f(x)-f(x_0)$ через $\Delta f(x_0)$, то равенство (1) примет вид

$$\Delta f(x_0)=\mathcal{A}(\Delta x)+\alpha(\Delta x). \tag{2}$$

Существует такая ($m \times n$) матрица A, что для всех $t \in \mathbb{R}^m$ имеет место равенство

$$A(t) = At.$$

Поэтому равенство (2) можно переписать так:

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x). \tag{3}$$

Если функция f дифференцируема в каждой точке области $\mathcal{D}$, то в равенстве (3) A и α зависят от x_0:

$$\Delta f(x_0) = A(x_0)\Delta x + \alpha(x_0, \Delta x) \tag{4}$$

или

$$f(x) - f(x_0) = A(x_0)(x - x_0) + \alpha(x_0, x - x_0). \tag{5}$$

Иногда бывает удобно представить остаточный член $\alpha(x_0, x - x_0)$ в формуле (5) в другом виде.

Введем величину $\beta(x_0, x - x_0) = \dfrac{\alpha(x_0, x - x_0)}{\|x - x_0\|}$ при $x \neq x_0$, тогда

$$\lim_{x \to x_0} \beta(x_0, x - x_0) = 0.$$

Положим

$$\beta(x_0, 0) = 0. \tag{6}$$

Теперь (5) принимает такой вид:

$$f(x) - f(x_0) = A(x_0)(x - x_0) + \|x - x_0\| \beta(x_0, x - x_0). \tag{7}$$

Если функция f дифференцируема всюду в области определения, то будем говорить, что f дифференцируема.

Из определения дифференцируемости функции очевидным образом следует

Т е о р е м а 1. Если функция f дифференцируема в точ е x_0, то f непрерывна в этой точке.

п.2. Производная матрица

Итак, если функция f дифференцируема в точке x_0, то

$$f(x) - f(x_0) = A(x_0)(x - x_0) + \beta(x_0, x - x_0) \cdot \|x - x_0\|.$$

Обозначим матрицу $A(x_0)$ через $f'(x_0)$. Матрица $f'(x_0)$ называется производной матрицей, матрицей Якоби или функциональной матрицей [2].

Теперь

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\beta(x_0,x-x_0)\|x-x_0\|. \qquad (1)$$

Пример. $f(x)=Bx,\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm}\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}^m.$

Найдем производную матрицу $f'(x_0)$.

Имеем

$$f(x)-f(x_0)=B(x-x_0). \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), видим, что $\beta=0,\ f'(x_0)=B$.

Найдем теперь элементы функциональной матрицы $f'(x_0)$. Введем обозначения:

$$f'(x_0)=(a_{ij})=(A_1,\dots,A_n),$$

Здесь $A_1,\dots,A_n$ - столбцы матрицы Якоби.

Положим $\Delta x=(t,0,\dots,0)^T=e_1\cdot t,\ t\in\mathbb{R}$, тогда $\|\Delta x\|=|t|$.

Из (1) получим

$$f(x_0+e_1t)-f(x_0)=f'(x_0)e_1t+\beta(x_0,e_1t)\cdot\|e_1t\|=$$
$$=A_1t+\beta(x_0,e_1t)\cdot|t|.$$

Спроектируем это равенство почленно на координатную ось Ox_i:

$$f_i(x_0+e_1t)-f_i(x_0)=a_{i1}t+\beta_i(x_0,e_1t)|t|.$$

Поделим равенство на t и перейдем к пределу при $t\to 0$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f_i(x_0+e_1t)-f_i(x_0)}{t}=a_{i1}, \qquad (3)$$

так как $\lim\limits_{t\to 0}\beta_i(x_0,e_1t)=0$.

Выразим значения аргументов в (3) через координаты:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f_i(x_{10}+t, x_{20},\dots x_{m0})-f_i(x_{10}, x_{20},\dots, x_{m0})}{t}=a_{i1}. \qquad (4)$$

Введём

О п р е д е л е н и е. Пусть функция φ определена в окрестности точки $x_0\in\mathbb{R}^m$, $x_0=(x_{10},\dots,x_{m0})$ и принимает значения в $\mathbb{R}^n$.

Если существует предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(x_0+e_i t)-\varphi(x_0)}{t}=$$

$$=\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}}\frac{\varphi(x_{10},\dots,x_{i0}+t,\dots x_{m0})-\varphi(x_{10},\dots,x_{i0},\dots,x_{m0})}{t},$$

то этот предел называется частной производной функции φ в точке x_0, обозначается через $D_1\varphi(x_0)$, $D_1\varphi(x_{10},\dots,x_{i0},\dots,x_{m0})$ или $\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x_0)$, $\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x_{10},\dots,x_{i0},\dots,x_{m0})$.

Таким образом, для элемента a_{i1} функциональной матрицы получим выражение

$$a_{i1}=D_1 f_i(x_0),$$

аналогично для a_{ij} получим

$$a_{ij}=D_j f_i(x_0).$$

Теперь мы получим такое представление функциональной матрицы:

$$f'(x_0)=\begin{pmatrix} D_1 f_1(x_0) & \dots & D_m f_1(x_0)\\ \dots & \dots & \dots\\ D_1 f_n(x_0) & \dots & D_m f_n(x_0)\end{pmatrix}.$$

Такое представление функциональной матрицы $f'(x_0)$ назовем представлением функциональной матрицы через её элементы.

В ы в о д. Если функция f дифференцируема в точке x_0, то существуют все частные производные первого порядка функции f в точке x_0:

$$D_1 f(x_0), \dots, D_m f(x_0).$$

Заметим, что существование частных производных первого порядка в точке x_0 является необходимым, но недостаточным условием дифференцируемости функции в этой точке.

П р и м е р. Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad при \quad (x,y) \neq (0,0);$$

$$f(0,0) = 0.$$

При $(x,y) \neq (0,0)$ частные производные $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ существуют в силу дифференцируемости рациональной функции одного вещественного аргумента.

В точке $(0,0)$ имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$$. Аналогично $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$.

Итак, f всюду имеет частные производные первого порядка.

Между тем в точке $(0,0)$ функция f не является непрерывной.

В самом деле, обозначим $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{k}{n}$, $k \in \mathbb{R}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$.

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{k/n^2}{1/n^2 + k/n^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

Таким образом, при различных значениях k получаем различные значения $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$. Следовательно, не существует $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Поэтому функция f не является непрерывной, а тем более не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

Рассмотрим столбцы матрицы Якоби. В силу определения частной производной имеем

$$\mathcal{D}_i f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+e_i t) - f(x_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \begin{pmatrix} f_1(x_0+e_i t) - f_1(x_0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_0+e_i t) - f_n(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_i f_1(x_0) \\ \cdots\cdots \\ \mathcal{D}_i f_n(x_0) \end{pmatrix}.$$

Итак, i - й столбец матрицы Якоби $f'(x_0)$ равен частной производной $\mathcal{D}_i f(x_0)$.

Поэтому можно записать представление функциональной матрицы через её столбцы:

$$f'(x_0) = (\mathcal{D}_1 f(x_0), \ldots, \mathcal{D}_m f(x_0)).$$

Наконец, найдем представление функциональной матрицы через её строки.

Запишем представление функциональной матрицы $f_i'(x_0)$ через её элементы:

$$f_i'(x_0) = (\mathcal{D}_1 f_i(x_0), \ldots, \mathcal{D}_m f_i(x_0)).$$

Таким образом, $f_i'(x_0)$ есть i-я строка функциональной матрицы $f'(x_0)$.

Поэтому имеет место следующее представление функциональной матрицы $f'(x_0)$ через её строки:

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_n'(x_0) \end{pmatrix}.$$

п.8. Различные выражения для дифференциала функции

В силу определения дифференциал функции f в точке x_0 есть линейное отображение R^m в R^n :

$$t \to f'(x_0)t, \qquad \text{где } t \in \mathbb{R}^m.$$

По традиции вместо t часто пишут Δx:

$$\Delta x \to f'(x_0)\Delta x.$$

Дифференциал функции f в точке x_0 обозначается через $df(x_0)$.

Таким образом, $df(x_0)$ есть линейное отображение $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$:

$$df(x_0)(t) = f'(x_0)t, \quad t \in \mathbb{R}^m \tag{1}$$

или

$$df(x_0)(\Delta x) = f'(x_0)\cdot\Delta x, \ \Delta x \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

По традиции аргумент t (или Δx) в формулах (1) и (2) опускают и пишут

$$df(x_0) = f'(x_0)t, \quad t \in \mathbb{R}^m; \tag{3}$$

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x, \ \Delta x \in \mathbb{R}^m.$$

Рассмотрим функцию $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$:

$$\varphi(x) = x = Ex,$$

где E - единичная матрица размерности ($m \times m$),

Мы видели, что для отображения $x \to Ax$ функциональная матрица есть A .

Поэтому

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)\Delta x = E\Delta x = \Delta x.$$

Итак, $d\varphi(x) = \Delta x$.

В то же время для функции $\varphi(x) = x$ логично обозначить $d\varphi(x)$ через dx. Тогда получим равенство $dx = \Delta x$.

Для дифференциала функции f из (3) получим формулу

$$df(x_0) = f'(x_0)dx. \tag{3}$$

Воспользуемся теперь представлением функциональной матрицы $f'(x_0)$ через её столбцы:

$$f'(x_0) = (\mathcal{D}_1 f(x_0), \ldots, \mathcal{D}_m f(x_0)).$$

Для дифференциала f получим из (2) и (3)

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = (\mathcal{D}_1 f(x_0), \ldots, \mathcal{D}_m f(x_0)) \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_m \end{pmatrix} =$$

$$= \mathcal{D}_1 f(x_0)\Delta x_1 + \ldots + \mathcal{D}_m f(x_0)\Delta x_m;$$

$$df(x_0) = \mathcal{D}_1 f(x_0)\Delta x_1 + \ldots + \mathcal{D}_m f(x_0)\Delta x_m; \qquad (4)$$

$$df(x_0) = \mathcal{D}_1 f(x_0)\, dx_1 + \ldots + \mathcal{D}_m f(x_0)\, dx_m. \qquad (5)$$

п.4. Замечания о частных производных

а. По определению частной производной:

$$\mathcal{D}_i f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + e_i t) - f(x_0)}{t}.$$

Точка $x_0 + e_i t$ отличается от точки x_0 только своей i- й координатой. При этом t как раз равно приращению i- й координаты при переходе от x_0 к $x_0 + e_i t$.

В выражении $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$ фиксируем все координаты, кроме i- й; получим функцию от x_i :

$$\varphi(x_i) = f(x_{10}, \ldots, x_i, \ldots, x_{m0}).$$

Производная $\varphi'(x_{i0})$ и есть $\mathcal{D}_i f(x_{10}, \ldots, x_{i0}, \ldots, x_{m0})$.

б. Рассмотрим вещественную дифференцируемую функцию $f: G \to \mathbb{R}^1$, где G - открытое множество в $\mathbb{R}^2$. График функции f есть некоторая поверхность S. Пусть $(x_0, y_0) \in G$, тогда $(x_0, y_0, z_0) \in S$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Рассмотрим сечение поверхности S плоскостью $y = y_0$; в сечении получим кривую ℓ, задаваемую уравнением $z = f(x, y_0) = \varphi(x)$. Теперь $\varphi'(x_0) = \mathcal{D}_1 f(x_0, y_0)$. Но $\varphi'(x_0)$ есть тангенс угла наклона касательной к кривой ℓ в точке $(x_0, y_0, z_0) = M_0$.

Итак, $D_1 f(x_0, y_0)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой ℓ в точке M_0.

в. Пусть $f=\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$. Тогда, очевидно, имеет место равенство

$$D_i f = \begin{pmatrix} D_i f_1 \\ \vdots \\ D_i f_n \end{pmatrix}.$$

§ 2. Дифференцирование композиции функций

п.1. Производная матрица композиции отображений

Т е о р е м а 1. Пусть $\varphi: G_1 \to \mathbb{R}^n$, где G_1 - открытое множество в $\mathbb{R}^m$; $\varphi(G_1) \subset G_2$, где G_2 - открытое множество в $\mathbb{R}^n$; наконец, $f: G_2 \to \mathbb{R}^p$.

Если функции f и φ дифференцируемы, то их композиция $f\circ\varphi$ есть дифференцируемая функция и имеет место равенство

$$(f\circ\varphi)' = (f'\circ\varphi)\cdot\varphi'$$

или

$$\big(f(\varphi(x))\big)' = f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(\varphi), \quad x\in G_1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как f и φ по условию дифференцируемы, то

$$f(u+\Delta u) - f(u) = f'(u)\Delta(u) + \beta(u, \Delta u)\cdot\|\Delta u\|; \quad (1)$$

$$\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \varphi'(x)\cdot\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\cdot\|x\|. \quad (2)$$

Положим в равенстве (1)

$$u = \varphi(x), \quad \Delta u = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x);$$
$$u + \Delta u = \varphi(x+\Delta x).$$

Получим

$$f(\varphi(x+\Delta x)) - f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x))(\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)) +$$
$$+ \beta(\varphi(x), \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x))\ \|\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)\| =$$
$$= f'(\varphi(x))\varphi'(x)\Delta x + f'(\varphi(x))\alpha(x, \Delta x) +$$

$$+\beta(\varphi(x), \varphi(x+\Delta x)-\varphi(x))\cdot\|\varphi'(x)\Delta x+\alpha(x,\Delta x)\|. \qquad (3)$$

Введём обозначение

$$\gamma(x, \Delta x) = \beta(\varphi(x), \varphi(x+\Delta x)-\varphi(x))\cdot\|\varphi'(x)\Delta x+\alpha(x,\Delta x)\| +$$
$$+ f'(\varphi(x))\alpha(x,\Delta x).$$

Убедимся, что $\|\gamma(x,\Delta x)\|$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\|\Delta x\|$ при $\Delta x \to 0$:

$$\|\gamma(x,\Delta x)\| \leq \|\beta(\varphi(x), \varphi(x+\Delta x)-\varphi(x))\|\cdot(\|\varphi'(x)\Delta x\| +$$
$$+\|\alpha(x,\Delta x)\|) + \|f'(\varphi(x))\alpha(x,\Delta x)\| =$$
$$= \|\beta(\varphi(x), \varphi(x+\Delta x)-\varphi(x))\|\cdot\|\varphi'(x)\Delta x\| +$$
$$+\|\beta(\varphi(x), \varphi(x+\Delta x)-\varphi(x))\|\cdot\|\alpha(x,\Delta x)\| +$$
$$+\|f'(\varphi(x))\alpha(x,\Delta x)\| \leq$$
$$\leq \|\beta(\varphi(x), \varphi(x+\Delta x)-\varphi(x))\|\cdot\|\varphi'(x)\|\cdot\|\Delta x\| +$$
$$+\|\beta(\varphi(x), \varphi(x+\Delta x)-\varphi(x))\|\cdot\|\alpha(x,\Delta x)\| +$$
$$+\|f'(\varphi(x))\|\cdot\|\alpha(x,\Delta x)\|.$$

Откуда

$$\frac{\|\gamma(x,\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} \leq \|\beta(\varphi(x), \varphi(x+\Delta x)-\varphi(x))\|\cdot\|\varphi'(x)\| +$$
$$+\|\beta(\varphi(x), \varphi(x+\Delta x)-\varphi(x))\|\cdot\frac{\|\alpha(x,\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} +$$
$$+\|f'(\varphi(x))\|\cdot\frac{\|\alpha(x,\Delta x)\|}{\|\Delta x\|}.$$

Так как

$$\lim_{\Delta x\to 0} (\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x))=0,$$

то

$$\lim_{\Delta x\to 0} \|\beta(\varphi(x),\ \varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\|=0.$$

Кроме того

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\|\alpha(x,\Delta x)\|}{\|\Delta x\|}=0.$$

Поэтому, переходя в (4) к пределу при $\Delta x\to 0$, получим неравенство

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\|\gamma(x,\Delta x)\|}{\|\Delta x\|}\le 0,$$

откуда

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\|\gamma(x,\Delta x)\|}{\|\Delta x\|}=0.$$

Итак

$$f(\varphi(x+\Delta x))-f(\varphi(x))=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\cdot\Delta x+\gamma(x,\Delta x),$$

где $\gamma(x,\Delta x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\|\Delta x\|$ при $\Delta x\to 0$.

Это означает, что композиция функций $f\circ\varphi$ дифференцируема и

$$(f(\varphi(x)))'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

Теорема доказана.

п.2. Инвариантность формы первого дифференциала

Умножая равенство

$$(f(\varphi(x)))'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

почленно на dx, получим

$$\left(f(\varphi(x))\right)'dx = f'(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

Откуда

$$df(\varphi(x)) = f'(\varphi(x))\,d\varphi(x) \qquad (1)$$

или

$$d(f\circ\varphi) = (f'\circ\varphi)\,d\varphi. \qquad (2)$$

Ранее для дифференциала отображения $u \to f(u)$ мы получили формулу

$$df(u) = f'(u)\,du. \qquad (3)$$

Итак, если в формуле (3) всюду вместо переменной u подставить дифференцируемую функцию φ, то получим формулу для первого дифференциала функции $x \to f(\varphi(x))$. Это свойство формулы (3) называется инвариантностью первого дифференциала.

п.3. Некоторые свойства дифференциала

Приведем без доказательства простейшие свойства первого дифференциала.

1. Пусть f, φ - две дифференцируемые функции, определенные в открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^m$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, α, β - вещественные числа.

Тогда

$$d(\alpha f + \beta\varphi) = \alpha\,df + \beta\,d\varphi$$

(линейность дифференциала).

2. Если f и φ - вещественные функции, то

$$d(f\varphi) = f\,d\varphi + \varphi\,df.$$

3. Если f и φ - вещественные функции и φ нигде не обращается в нуль, то

$$d\left(\frac{f}{\varphi}\right) = \frac{\varphi\,df - f\,d\varphi}{\varphi^2}.$$

п.4. Вычисление частных производных от композиции функций

З а д а ч а. Пусть $\varphi: G_1 \to G_2$, где G_1 - открытое множество в $\mathbb{R}^m$; G_2 - открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $f: G_2 \to \mathbb{R}^1$; функции f и φ дифференцируемы. Найти частные производные композиции $f\circ\varphi$ (т.е. выразить их через частные производные функций f и φ).

Р е ш е н и е. Мы видели, что

$$\left(f(\varphi(x))\right)' = f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x). \qquad (1)$$

С другой стороны, представим матрицу $\left(f(\varphi(x))\right)'$ через её столбцы:

$$\left(f(\varphi(x))\right)' = \left(\mathcal{D}_1 f(\varphi(x)), \dots, \mathcal{D}_m f(\varphi(x))\right). \qquad (2)$$

Запишем левую часть в равенстве (1) через столбцы:

$$\left(f(\varphi(x))\right)' = f'(\varphi(x))\left(\mathcal{D}_1\varphi(x), \dots, \mathcal{D}_m\varphi(x)\right) =$$

$$= \left(f'(\varphi(x))\mathcal{D}_1\varphi(x), \dots, f'(\varphi(x))\mathcal{D}_m\varphi(x)\right). \qquad (3)$$

Левые части в (2) и (3) равны, следовательно, равны и правые части. Сравнивая соответствующие столбцы в правых частях равенств (2) и (3), получим

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{D}_1 f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x))\,\mathcal{D}_1\varphi(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{D}_m f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x))\,\mathcal{D}_m\varphi(x). \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Пусть $\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots \\ \varphi_n\end{pmatrix}$.

Тогда

$$\mathcal{D}_1 f(\varphi(x)) = \left((\mathcal{D}_1 f)(\varphi(x)), \dots, (\mathcal{D}_n f)(\varphi(x))\right)\begin{pmatrix}\mathcal{D}_1\varphi_1(x)\\ \vdots \\ \mathcal{D}_1\varphi_n(x)\end{pmatrix} =$$

$$=(\mathcal{D}_1 f)(\varphi(x))\,\mathcal{D}_1\varphi_1(x)+\dots+(\mathcal{D}_n f)(\varphi(x))\cdot\mathcal{D}_1\varphi_n(x).$$

Аналогично

$$(\mathcal{D}_m f)(\varphi(x))=(\mathcal{D}_1 f)(\varphi(x))\cdot\mathcal{D}_m\varphi_1(x)+\dots+(\mathcal{D}_n f)(\varphi(x))\cdot\mathcal{D}_m\varphi_n(x).$$

Итак

$$(\mathcal{D}_i f)(\varphi(x))=(\mathcal{D}_1 f)(\varphi(x))\mathcal{D}_i\varphi_1(x)+\dots+(\mathcal{D}_n f)(\varphi(x))\mathcal{D}_i\varphi_n(x). \qquad (5)$$

Формула (5) решает нашу задачу.

Запишем формулу (5) в другом виде. Обозначим $\varphi(x)=u(x)$, $u=(u_1,\dots,u_n)^T$ и воспользуемся классическими обозначениями частных производных: $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)$, $\frac{\partial}{\partial u_j}f(u)$, наконец, опустим всюду аргумент x. Тогда (5) принимает вид

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x_i}=\frac{\partial f(u)}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_i}+\dots+\frac{\partial f(u)}{\partial u_n}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial x_i}. \qquad (6)$$

Формула (6) удобнее для запоминания.

§ 3. Достаточное условие дифференцируемости отображения

Л е м м а 1. Если $f: G\to R^n$, где G – открытое множество в R^m, $f=(f_1,\dots,f_n)^T$, то f дифференцируема в точке $x_0\in G$ тогда только тогда, когда все компоненты $f_1,\dots,f_n$ дифференцируемы в точке x_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы, ввиду его очевидности, мы опустим.

Т е о р е м а 2. Пусть $f: G\to R^n$, где G – открытое множество в R^m. Если в G существуют и непрерывны частные производные $\mathcal{D}_i f$ $(i=\overline{1,m})$, то f дифференцируема в G .

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем для случая $m=2$. Доказательство для произвольного m отличается лишь большей громоздкостью.

В силу предыдущей леммы достаточно рассмотреть лишь случай вещественной функции f (т.е. случай $n=1$).

Итак, пусть существуют и непрерывны в G частные производные $\mathcal{D}_1 f$, $\mathcal{D}_2 f$.

Имеем

$$\Delta f(x_1, x_2) = f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2) - f(x_1, x_2) =$$

$$= \left(f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2) - f(x_1, x_2+\Delta x_2)\right) +$$

$$+ \left(f(x_1, x_2+\Delta x_2) - f(x_1, x_2)\right).$$

Воспользуемся формулой Лагранжа, применив её к каждой из разностей в скобках.

Получим

$$\Delta f(x_1, x_2) = \mathcal{D}_1 f(x_1+\theta_1 \Delta x_1, x_2+\Delta x_2)\Delta x_1 +$$

$$+ \mathcal{D}_2 f(x_1, x_2+\theta_2 \Delta x_2)\Delta x_2,$$

где $0 \le \theta_1 \le 1$, $0 \le \theta_2 \le 1$.

Так как частные производные $\mathcal{D}_1 f$, $\mathcal{D}_2 f$ по условию непрерывны, то

$$\mathcal{D}_1 f(x_1+\theta\Delta x_1, x_2+\Delta x_2) = \mathcal{D}_1 f(x_1, x_2) + \beta_1(\Delta x);$$

$$\mathcal{D}_2 f(x_1, x_2+\theta_2 \Delta x_2) = \mathcal{D}_2 f(x_1, x_2) + \beta_2(\Delta x),$$

где β_1 , β_2 есть бесконечно малые при $\Delta x \to 0$.

Поэтому

$$\Delta f(x_1, x_2) = \mathcal{D}_1 f(x_1, x_2)\Delta x_1 + \mathcal{D}_2 f(x_1, x_2)\Delta x_2 +$$

$$+ \beta_1(\Delta x)\Delta x_1 + \beta_2(\Delta x)\Delta x_2.$$

Обозначим

$$\alpha(\Delta x) = \beta_1(\Delta x)\Delta x_1 + \beta_2(\Delta x)\Delta x_2 .$$

Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\|\Delta x\|} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\beta_1(\Delta x) \frac{\Delta x_1}{\|\Delta x\|} + \beta_2(\Delta x) \frac{\Delta x_2}{\|\Delta x\|} \right) = 0,$$

так как $\dfrac{|\Delta x_1|}{\|\Delta x\|} \leq 1, \quad \dfrac{|\Delta x_2|}{\|\Delta x\|} \leq 1.$

Итак

$$\Delta f(x_1, x_2) = \mathcal{D}_1 f(x_1, x_2)\Delta x_1 + \mathcal{D}_2 f(x_1, x_2)\Delta x_2 + \alpha(\Delta x).$$

Откуда

$$\Delta f(x) = (\mathcal{D}_1 f(x), \mathcal{D}_2 f(x)) \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} + \alpha(\Delta x) =$$

$$= f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

где $\displaystyle \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\|\Delta x\|} = 0.$

Следовательно, f дифференцируема всюду в G, что и требовалось доказать.

Определение. Если все частные производные первого порядка $\mathcal{D}_i f$ существуют и непрерывны в области определения функции f, то будем говорить, что f непрерывно дифференцируема.

Глава 2

ТЕОРЕМА О КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЯХ И ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

§ 1. Теорема о конечных приращениях

п.1. Отрезок в линейном пространстве

Пусть a, b есть точки линейного пространства X. Тогда отрезком, соединяющим точки a и b, назовем множество

$$[a,b]=\{x\in X \mid x=a+\lambda(b-a),\ 0\leq\lambda\leq 1\}.$$

На отрезке $[a,b]$ естественным образом вводится линейный порядок.

Пусть $x, y\in[a,b]$, тогда $x=a+\lambda_1(b-a)$,

$y=a+\lambda_2(b-a)$.

Если $\lambda_1\leq\lambda_2$, то положим $x\leq y$.

Лемма 1. Пусть $[a,b]$ есть отрезок в линейном нормированном пространстве; $x_0,\dots,x_n\in[a,b]$,

$x_0=a<x_1<\dots<x_n=b$.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\|x_i-x_{i-1}\|=\|b-a\|.$$

Доказательство. Так как $x_i\in[a,b]$, то $x_i=a+\lambda_i(b-a)$, $0\leq\lambda_i\leq 1$, где $\lambda_0=0$, $\lambda_n=1$. Поэтому

$$x_i-x_{i-1}=(b-a)(\lambda_i-\lambda_{i-1});$$

$$\|x_i - x_{i-1}\| = \|b-a\| \cdot |\lambda_i - \lambda_{i-1}| = \|b-a\| (\lambda_i - \lambda_{i-1}).$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i - x_{i-1}\| = \sum_{i=1}^{n} \|b-a\| \cdot |\lambda_i - \lambda_{i-1}| =$$

$$= \|b-a\| \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) = \|b-a\|.$$

п.2. Теорема о конечных приращениях

Т е о р е м а 1. Пусть $f: G \to \mathbb{R}^n$, G - открытое множество в $\mathbb{R}^m$, f дифференцируема в G. Если $[a,b] \subset G$ и $\|f'(x)\| \leq k$ при всех $x \in G$, то

$$\|f(b) - f(a)\| \leq k \|b-a\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Итак, пусть $[a,b] \subset G$, $\|f'(x)\| \leq k$ для всех $x \in G$.

Предположим, что заключение теоремы неверно и имеет место неравенство

$$\|f(b) - f(a)\| > k \|b-a\|. \qquad (1)$$

Найдется такое вещественное число $k' > k$, что

$$\|f(b) - f(a)\| > k' \|b-a\|. \qquad (2)$$

Введем обозначения: $\Delta_1 = [a,b]$; $c = \frac{a+b}{2}$.

Если бы имели место неравенства:

$$\|f(c) - f(a)\| \leq k' \|c-a\|,$$

$$\|f(b) - f(c)\| \leq k' \|b-c\|,$$

то отсюда следовало бы $\|f(b) - f(a)\| \leq$

$$\leq \|f(b) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \leq k'(\|c-a\| + \|b-c\|) \leq$$

$$\leq k' \|b-a\|.$$

Следовательно, либо

$$\|f(c)-f(a)\| > k'\|c-a\|, \tag{а}$$

либо

$$\|f(b)-f(c)\| > k'\|b-c\|. \tag{в}$$

Если имеет место (а), то обозначим сегмент $[a,c]$ через Δ_2 ; если (а) не имеет место (и значит выполняется (в)), то обозначим через Δ_2 отрезок $[c,b]$.

Продолжая этот процесс и далее, получим последовательность вложенных замкнутых промежутков

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_\ell \supset \ldots \quad .$$

Обозначим концы сегмента Δ_ℓ через $[a_\ell, b_\ell]$ (в частности, $a_1 = a$, $b_1 = b$). Тогда

$$\|f(b_\ell)-f(a_\ell)\| > k'\|b_\ell - a_\ell\|. \tag{3}$$

По лемме о вложенных промежутках существует точка x_0 , принадлежащая всем Δ_ℓ $(\ell \in N)$.

Функция f дифференцируема, поэтому

$$f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \beta(x_0, x-x_0)\|x-x_0\|. \tag{4}$$

Так как β есть бесконечно малая при $x \to x_0$, то существует такая окрестность $\mathcal{U}$ точки x_0 , что

$x \in \mathcal{U} \Rightarrow \|\beta(x_0, x-x_0)\| < k'-k.$

Поскольку $b_\ell - a_\ell \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то найдется такое $p \in N$, что $\Delta_p \subset \mathcal{U}$.

Тогда из (4) получим

$$\|f(b_p)-f(x_0)\| \leq \|f'(x_0)(x-x_0)\| + \|\beta(x_0, x-x_0)\| \cdot \|x-x_0\| \leq$$

$$\leq \|f'(x_0)\| \cdot \|x-x_0\| + \|(k'-k)\| \cdot \|x-x_0\| \leq$$

$$\leq k\|x-x_0\| + (k'-k)\|x-x_0\| = k'\|x-x_0\|,$$

$$\|f(b_p)-f(x_0)\| \leq k'\|x-x_0\|. \tag{C}$$

Аналогично получим

$$\|f(x_0) - f(a_p)\| \leq k'\|x - x_0\|. \qquad (d)$$

Из (c) и (d) следует

$$\|f(b_p) - f(a_p)\| \leq k'\|b_p - a_p\|. \qquad (5)$$

Но (5) противоречит (3).

Следовательно, предположение, что

$$\|f(b_p) - f(a)\| > k\|b - a\|$$

неверно, и теорема доказана.

§ 2. Частные производные высших порядков

Пусть $f: G \to \mathbb{R}^n$, где G - открытое множество в $\mathbb{R}^m$; пусть f непрерывно дифференцируема в G. Тогда все частные производные первого порядка $\mathcal{D}_i f$ $(i=\overline{1,m})$ существуют и непрерывны в G.

Если существует частная производная $\mathcal{D}_j(\mathcal{D}_i f)$, то она называется частной производной второго порядка функции f и обозначается через $\mathcal{D}_j\mathcal{D}_i f$ или через $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Если $i=j$, то вместо $\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i f$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ пишут $\mathcal{D}_i^2 f$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и т.д. порядков. Обозначения для этих производных:

$$\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j\mathcal{D}_k f; \quad \mathcal{D}_i^2\mathcal{D}_j f; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j} \quad \text{и т.д.}$$

Частная производная $\mathcal{D}_{i_1}\ldots\mathcal{D}_{i_k} f$ называется смешанной, если среди чисел $i_1, \ldots, i_k$ есть хотя бы два различных числа.

Имеет место следующая "теорема о равенстве смешанных производных".

Теорема 1. Если $f: G \to \mathbb{R}^n$, G - открытое множество в $\mathbb{R}^m$ и все частные производные второго порядка $\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j f$ существуют и непрерывны в G, то имеет место равенство

$$\mathcal{D}_i \mathcal{D}_j f = \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i f \qquad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le m).$$

Доказательство теоремы достаточно провести для случая вещественной функции f. Пусть $\mathcal{D}_i f$ $(i = \overline{1,m})$ есть непрерывные функции в G. Будем доказывать, что $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 f(x_0) = \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 f(x_0)$ (a), где $x_0 = (X_{10}, \dots, X_{n0})$

Обозначим для краткости

$$f(X_1, X_2, X_{30}, \dots, X_{n0}) = \varphi(X_1, X_2).$$

Равенство (a) эквивалентно равенству

$$\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \varphi(X_{10}, X_{20}) = \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 \varphi(X_{10}, X_{20}).$$

Пусть $\Delta X_1, \Delta X_2 \in \mathbb{R}$, ψ - некоторая вещественная функция. Введем обозначения:

$$\Delta_1 \psi(X_1, X_2) = \psi(X_1 + \Delta X_1, X_2) - \psi(X_1, X_2);$$

$$\Delta_2 \psi(X_1, X_2) = \psi(X_1, X_2 + \Delta X_2) - \psi(X_1, X_2).$$

Заметим, что если ψ имеет непрерывные производные 1-го порядка, то $\Delta_1 \psi$, $\Delta_2 \psi$ обладают тем же свойством.

Далее

$$\mathcal{D}_2 \Delta_1 \psi(X_1, X_2) = \mathcal{D}_2 (\psi(X_1 + \Delta X_1, X_2) - \psi(X_1, X_2)) =$$

$$= \mathcal{D}_2 \psi(X_1 + \Delta X_1, X_2) - \mathcal{D}_2 \psi(X_1, X_2) = \Delta_1 \mathcal{D}_2 \psi(X_1, X_2).$$

Итак

$$\mathcal{D}_2 \Delta_1 \psi = \Delta_1 \mathcal{D}_2 \psi$$

(операторы $\mathcal{D}_2$ и Δ_1 перестановочны).

Аналогично

$$\mathcal{D}_1 \Delta_2 \psi = \Delta_2 \mathcal{D}_1 \psi.$$

С помощью простых выкладок убеждаемся, что имеет место равенство

$$\Delta_1 \Delta_2 \varphi = \Delta_2 \Delta_1 \varphi. \qquad \text{(в)}$$

Преобразуем левую часть этого равенства, воспользовавшись теоремой Лагранжа:

$$\Delta_1 \Delta_2 \varphi(x_1, x_2) = \Delta_1 (\Delta_2 \varphi)(x_1, x_2) =$$

$$= (\Delta_2 \varphi)(x_1 + \Delta x_1, x_2) - (\Delta_2 \varphi)(x_1, x_2) =$$

$$= \mathcal{D}_1 (\Delta_2 \varphi)(x_1 + \theta_1 \Delta x_1, x_2) \cdot \Delta x_1 =$$

$$= \mathcal{D}_1 \varphi(x_1 + \theta_1 \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \Delta x_1 - \mathcal{D}_1 \varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2) \Delta x_1 =$$

$$= \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 \varphi(x_1 + \theta_1 \Delta x_1, x_2 + \theta_2 \Delta x_2) \Delta x_1 \Delta x_2, \qquad (c)$$

где $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]$.

Точно так же

$$\Delta_2 \Delta_1 \varphi(x_1, x_2) = \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \varphi(x_1 + \theta_1' \Delta x_1, x_2 + \theta_2' \Delta x_2) \Delta x_1 \Delta x_2, \qquad (d)$$

где $\theta_1', \theta_2' \in [0,1]$.

Приравнивая согласно (в) правые части равенств (c) и (d), получим

$$\mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 \varphi(x_1 + \theta_1 \Delta x_1, x_2 + \theta_2 \Delta x_2) = \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \varphi(x_1 + \theta_1' \Delta x_1, x_2 + \theta_2' \Delta x_2).$$

Так как $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \varphi$ и $\mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 \varphi$ непрерывны по условию теоремы, то, переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0$, получим

$$\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \varphi(x_1, x_2) = \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 \varphi(x_1, x_2).$$

В частности

$$\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \varphi(x_{10}, x_{20}) = \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 \varphi(x_{10}, x_{20}).$$

Переходя к функции f, заключаем, что

$$\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 f(x_0) = \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 f(x_0).$$

Теорема доказана.

§ 3. Формула Тейлора

п.1. Постановка задачи

Известно, что если f есть ($p+1$) раз непрерывно дифференцируемая вещественная функция, определенная на отрезке A вещественной прямой, то имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + R_p(x),$$

где
$$R_p(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\,dt$$

(остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме), также

$$R_p(x) = \frac{f^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!}(x-x_0)^{p+1},$$

где ξ есть число, заключенное между x и x_0 (остаточный член в форме Лагранжа).

Функция f аппроксимируется многочленом p - й степени в окрестности точки x_0, причём остаточный член $R_p(x)$ есть бесконечно малая величина более высокого порядка, чем $(x-x_0)^p$ при $x \to x_0$.

Пусть теперь f есть вещественная функция, определенная на открытом множестве G в R^m, $x_0 \in G$. При каких условиях существует многочлен φ_p от n переменных, аппроксимирующий f во множестве G', такой, что величина погрешносты аппроксимации $\|f(x)-\varphi_p(x)\|$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\|x-x_0\|^p$?

п.2. Формула Тейлора для вещественной функции

Определение. Множество $\mathcal{D} \subset R^m$ назовем звездным относительно точки $x_0 \in \mathcal{D}$, если для каждой точки $x \in \mathcal{D}$ отрезок $[x_0, x]$ входит в $\mathcal{D}$.

Предположим теперь, что f есть вещественная функция, определенная в открытом множестве $G \subset R^m$, звездном относительно точки $x_0 \in G$. Потребуем, чтобы f имела в G всевозможные частные производные до ($p+1$) порядка включительно.

Рассмотрим прямую, проходящую через точки x и x_0. все точки этой прямой можно представить в виде

$$x_0 + t(x - x_0) = x_0 + t\Delta x, \qquad \text{где } t \in \mathbb{R}.$$

При $t = 0$ получим точку x_0, при $t = 1$ - точку x.

Введем функцию

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x). \tag{1}$$

Функция φ определена на отрезке вещественной оси, включающем сегмент $[0,1]$.

План дальнейшего изложения таков:

а) убедимся, что φ непрерывно дифференцируема $(p+1)$ раз;

б) запишем формулу Тейлора для φ;

в) исходя из этой формулы, получим формулу Тейлора для f.

Итак, убедимся, что φ непрерывно дифференцируема $(p+1)$ раз.

Введем оператор $d_{\Delta x}$, действующий на каждую функцию ψ, непрерывно дифференцируемую в области $\mathcal{D}$, следующим образом:

$$d_{\Delta x}\psi(a) = \mathcal{D}_1\psi(a)\Delta x_1 + \ldots + \mathcal{D}_m\psi(a)\Delta x_m.$$

Для $d_{\Delta x}$ часто применяется такая символическая запись:

$$d_{\Delta x} = \mathcal{D}_1\,\Delta x_1 + \ldots + \mathcal{D}_m\,\Delta x_m.$$

Имеем

$$\frac{d}{dt}\psi(x_0 + t\Delta x) = \psi'(x_0 + t\Delta x)\Delta x =$$

$$= \mathcal{D}_1\psi(x_0 + t\Delta x)\Delta x_1 + \ldots + \mathcal{D}_m\psi(x_0 + t\Delta x)\Delta x_m =$$

$$= d_{\Delta x}\psi(x_0 + t\Delta x).$$

Итак

$$\frac{d}{dt}\psi(x_0+t\Delta x)=\sum_{i=1}^{m}\mathcal{D}_i\psi(x_0+t\Delta x)\Delta x_i=$$

$$=d_{\Delta x}\psi(x_0+t\Delta x). \qquad (2)$$

В частности, при $\psi=f$ получим

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)=\frac{d}{dt}f(x_0+t\Delta x)=\sum_{i=1}^{m}\mathcal{D}_i f(x_0+t\Delta x)\Delta x_i=$$

$$=d_{\Delta x}f(x_0+t\Delta x).$$

Поэтому $\frac{d}{dt}\varphi(t)$ существует и непрерывна всюду в области определения φ.

Так как все частные производные $\mathcal{D}_i f$ непрерывно дифференцируемы, отображение $t\to t\Delta x$ непрерывно дифференцируемо, то функция $\frac{d}{dt}\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема.

Воспользовавшись формулой (2), получим

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}f(x_0+t\Delta x)\right)=d_{\Delta x}\left(d_{\Delta x}f(x_0+t\Delta x)\right)=$$

$$=(\mathcal{D}_1\Delta x_1+\ldots+\mathcal{D}_m\Delta x_m)\sum_{i=1}^{m}\mathcal{D}_i f(x_0+t\Delta x)\Delta x_i=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\mathcal{D}_j\mathcal{D}_i f(x_0+t\Delta x)\Delta x_i\Delta x_j=$$

$$=\sum_{i_1=1,i_2=1}^{m}\mathcal{D}_{i_1}\mathcal{D}_{i_2}f(x_0+t\Delta x)\Delta x_{i_1}\Delta x_{i_2}$$

(здесь мы переобозначили индексы суммирования).

Итак

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)=\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\mathcal{D}_{i_1}\mathcal{D}_{i_2}f(x_0+t\Delta x)\Delta x_{i_1}\Delta x_{i_2}=$$

$$=d^2_{\Delta x}f(x_0+t\Delta x).$$

Аналогично, индукцией по k, убеждаемся, что существуют и непрерывны все производные $\left(\frac{d}{dt}\right)^k \varphi(t)$, $k=\overline{1,p+1}$,

причем

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k \varphi(t) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{m} D_{i_1} \dots D_{i_k} f(x_0+t\Delta x)\Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_k} =$$

$$= d_{\Delta x}^k f(x_0+t\Delta x), \tag{3}$$

где $k=\overline{1,p+1}$.

При $t=0$ из (1) и (2) получим

$$\varphi^k(0) = d_{\Delta x}^k f(x_0), \quad k=\overline{0,p+1}, \tag{4}$$

а при $t=1$ имеем $\varphi^k(1) = d_{\Delta x}^k f(x)$, $k=\overline{0,p+1}$. (5)

Здесь подразумевается, что

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^0 \varphi(t) = \varphi(t), \qquad d_{\Delta x}^0 f(x) = f(x).$$

Запишем формулу Тейлора для φ :

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + R_p,$$

где $R_p = \frac{\varphi^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!} t^{p+1} = \int_0^t \frac{(t-\tau)^p}{p!} \varphi^{(p+1)}(\tau)\, d\tau,$

ξ - число, промежуточное между 0 и 1.

В частности, при $t=1$ получим

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + R_p;$$

$$R_p = \frac{\varphi^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!} = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^p}{p!} \varphi^{(p+1)}(\tau)\, d\tau, \tag{6}$$

где $0 \le \xi \le 1$.

Переходя в (6) к функции f, согласно формулам (4) и (5) получим

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p}\frac{d_{\Delta x}^{k} f(x_0)}{k!}+R_p\,, \qquad (*)$$

где $$R_p=\frac{d_{\Delta x}^{p+1} f(x_0+\xi\Delta x)}{(p+1)!}=$$

$$=\int_0^1 \frac{(1-\tau)^p}{p!}\,d_{\Delta x}^{p+1} f(x_0+\tau\Delta x)\,d\tau \qquad (**)$$

$$0\le \xi \le 1,\ d_{\Delta x}^{k} f(x_0)=\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{m} D_{i_1}\dots D_{i_k} f(x_0).$$

Формулы (ж) и (жж) решают поставленную задачу. Формула (ж) называется формулой Тейлора для функции f , а формула (жж) дает представление остаточного члена R_n в форме Лагранжа и в интегральной форме.

п.3. Формула Тейлора для отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$

Пусть $f: G\to\mathbb{R}^n$, где G есть открытое звёздное относительно x_0 множество в $\mathbb{R}^m$. Предположим, что f имеет в G всевозможные непрерывные частные производные вплоть до ($p+1$) порядка.

Имеем

$$f=\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}.$$

Для каждой компоненты f_i имеет место формула Тейлора

$$f_i(x)=\sum_{i=0}^{p}\frac{d_{\Delta x}^{k} f_i(x_0)}{k!}+R_{p_i}\,,$$

где $$R_{p_i}=\frac{d_{\Delta x}^{p+1} f_i(x_0+\xi\Delta x)}{(p+1)!}=$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-\tau)^p}{p!} d_{\Delta x}^{p+1} f_i (x_0 + \tau \Delta x) d\tau.$$

Поэтому для f получим

$$f(x) = \sum_{i=0}^{p} \frac{d_{\Delta x}^{k} f(x_0)}{k!} + R_p ; \qquad (*)$$

$$R_p = \begin{pmatrix} d_{\Delta x}^{p+1} f_1 (x_0 + \xi_1 \Delta x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ d_{\Delta x}^{p+1} f_n (x_0 + \xi_n \Delta x) \end{pmatrix} \qquad (**).$$

(где $0 \leq \xi_i \leq 1$)

и

$$R_p = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^p}{p!} d_{\Delta x}^{p+1} f(x_0 + \tau \Delta x) d\tau. \qquad \binom{**}{*}$$

Формула (*) называется формулой Тейлора, формула (**) дает представление остаточного члена в форме Лагранжа, а формула $\binom{**}{*}$ - в интегральной форме.

п.4. Дифференциалы высших порядков

Пусть f определена и непрерывно дифференцируема в открытом множестве G , $G \subset \mathbb{R}^m$, $f: G \to \mathbb{R}^n$.

Тогда

$$d_{\Delta x} f(x) = \sum_{0}^{m} \mathcal{D}_i f(x_0) \Delta x_i = d f(x_0).$$

Если f имеет в G всевозможные непрерывные частные производные до k-го порядка включительно, то f называется k раз непрерывно дифференцируемой в G функцией.

Отображение $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, определяемое формулой

$$\Delta x \to d^k_{\Delta x} f(x_0),$$

назовем дифференциалом k -го порядка функции f в точке x_0 .

Дифференциал k -го порядка будем обозначать через $d^k_{\Delta x} f(x_0)$, или $d^k f(x_0)$.

Имеем

$$d^k f(x_0) = (\mathcal{D}_1 \Delta x_1 + \dots + \mathcal{D}_m \Delta x_m)^k f(x_0) =$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{m} \mathcal{D}_{i_1} \dots \mathcal{D}_{i_k} f(x_0) \Delta x_{i_1} \cdot \dots \cdot \Delta x_{i_k}.$$

§ 4. Ряд Тейлора

Пусть G есть открытое в $\mathbb{R}^m$ множество, звёздное относительно точки x_0 ; пусть f есть вещественная функция, определенная в G и имеющая в G всевозможные непрерывные частные производные всех порядков (будем писать $f \in C^\infty$).

Назовем ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{d^k_{\Delta x} f(x_0)}{k!}$ (1) рядом Тейлора функции f .

Л е м м а 1. Ряд Тейлора (1) сходится в G к функции f тогда и только тогда, когда всюду в G остаточный член $R_k(x)$ формулы Тейлора стремится к нулю при $k \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно и мы его опускаем.

Т е о р е м а 2. Пусть G есть открытое множество в $\mathbb{R}^m$, звёздное относительно точки x_0 ; пусть f есть вещественная функция, определенная в G , $f \in C^\infty$.

Если все частные производные функции f ограничены в совокупности, то ряд Тейлора функции f сходится в G к f .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_1 \in G$. Покажем, что $R_k(x_1) \to \infty$ при $k \to \infty$; по предыдущей яемые отсюда следует, что ряд Тейлора функции f в точке x_1 сходится к $f(x_1)$.

Обозначим $\Delta x = x_1 - x_0$.

Воспользуемся остаточным членом ряда Тейлора в форме Лагранжа

$$R_k(x_1) = \frac{d^k_{\Delta x} f(\xi)}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k = 1}^{m} D_{i_1} \dots D_{i_k} f(\xi) \Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_k}.$$

Пусть все частные производные f ограничены сверху по модулю числом M. Тогда

$$|R_k(x)| \leq \frac{1}{k!} \sum^{m} |D_{i_1} \dots D_{i_k} f(\xi)| \cdot |\Delta x_{i_1}| \cdot \ldots \cdot |\Delta x_{i_k}| \leq$$

$$\leq \frac{M}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{m} |\Delta x_{i_1}| \cdot \ldots \cdot |\Delta x_{i_k}| = \frac{M}{k!} (|\Delta x_1| + \dots + |\Delta x_m|)^k.$$

Итак

$$|R_k(x)| \leq \frac{M}{k!} (|\Delta x_1| + \dots + |\Delta x_m|)^k = M \frac{a^k}{k!},$$

где обозначено: $a = |\Delta x_1| + \dots + |\Delta x_m|$.

Но, как известно, $\frac{a^k}{k!} \to 0$ при $k \to \infty$.

Поэтому $R_k(x) \to 0$ при $k \to \infty$, что и требовалось доказать.

§ 5. Экстремумы действительной функции

п.1. Необходимое условие экстремума

Т е о р е м а 1. Пусть действительная функция f определена и дифференцируема в открытом множестве G в $\mathbb{R}^m$.

Если $x_0 \in G$ есть точка экстремума функции f, то все частные производные первого порядка функции f обращаются в нуль в точке x_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Delta x \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим прямую ℓ, проходящую через x_0 в направлении вектора Δx. Каждая точка $x \in \ell$ представима в виде $x = x_0 + t\Delta x$, где $t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x).$$

Функция φ есть композиция двух дифференцируемых функций: функции f и линейного отображения $t \to x_0 + t\Delta x$. Поэтому φ есть дифференцируемая функция.

В точке $t=0$ функция φ имеет экстремум. По теореме Ферма $\varphi'(0)=0$.

Но $\varphi'(t) = f'(x_0 + t\Delta x)\Delta x$.

Поэтому

$$f'(x_0)\Delta x = ; \quad \sum_{i=1}^{m} D_i f(x_0)\Delta x_i = 0 \qquad (1)$$

при всех $\Delta x \in \mathbb{R}^m$.

Положим в (1) $\Delta x = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Получим $D_1 f(x_0) = 0$. Точно так же при всех $1 \le i \le m$ имеем $D_i f(x_0) = 0$.

Точку, где все частные производные первого порядка функции f обращаются в нуль, назовем стационарной точкой функции f.

п.2. Достаточное условие экстремума

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^m$, вещественная функция f дважды непрерывно дифференцируема в некоторой шаровой окрестности точки x_0; пусть, наконец, x_0 есть стационарная точка функции f.

Выясним, является ли x_0 точкой экстремума функции f. Воспользуемся формулой Тейлора

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + R_1 =$$

$$= \frac{1}{2} d^2_{\Delta x} f(x_0 + \theta\Delta x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} D_i D_j f(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x_i \cdot \Delta x_j \qquad (1')$$

Воспользуемся тем, что вторые частные производные $D_i D_j f$ непрерывны.

$$D_i D_j f(x_0 + \theta\Delta x) = D_i D_j f(x_0) + \alpha_{ij},$$

где $\alpha_{ij} \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Подставляя в (1') эти выражения для частных производных, получим

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j f(x_0)\Delta X_i \Delta X_j + $$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j} \alpha_{ij}\, \Delta X_i \Delta X_j \,. \qquad (2)$$

Обозначим $a_{ij} = \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j f(x_0)$.

Рассмотрим квадратичную форму

$$\Phi(t) = \sum_{i,j} a_{ij}\, t_i\, t_j \,. \qquad (3)$$

Эта форма Φ играет основную роль при исследовании поведения функции в окрестности точки x_0. Выражение (2) перепишем так:

$$\Delta f(x_0) = \frac{\|\Delta x\|^2}{2}\Big(\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\Delta X_i}{\|\Delta x\|}\cdot\frac{\Delta X_j}{\|\Delta x\|} + \sum_{i,j}\alpha_{ij}\frac{\Delta X_i}{\|\Delta x\|}\cdot\frac{\Delta X_j}{\|\Delta x\|}\Big) =$$

$$= \frac{\|\Delta x\|^2}{2}\Big(\Phi\big(\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}\big) + \beta(\Delta x)\Big),$$

где обозначено

$$\beta(\Delta x) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\frac{\Delta X_i}{\|\Delta x\|}\cdot\frac{\Delta X_j}{\|\Delta x\|}\,.$$

Имеем

$$|\beta(\Delta x)| \le \sum_{i,j} |\alpha_{ij}| \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0\,.$$

Поэтому $\beta(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Рассмотрим $|\Phi(t)|$ на единичной сфере $S_0 = \{t \in R^m : \|t\| = 1\}$. Так как единичная сфера в R^m компактна, а функция $|\Phi|$ непрерывна, то $|\Phi(t)|$ в некоторой точке $t_1 \in S_0$ принимает наименьшее значение $|\Phi(t_1)| = c$.

Предположим, что Φ не обращается в нуль (следовательно, сохраняет постоянный знак) при $t \neq 0$. Тогда

$$\min_{\|t\|=1} |\varphi(t)| = c > 0.$$

Так как $\beta(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что как только $\|\Delta x\| < \delta$, тотчас $|\beta(\Delta x)| < c$. Тогда в $K_\delta(x_0)$ имеем неравенство

$$\left|\varphi\left(\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}\right)\right| \geqslant c > |\beta(\Delta x)|,$$

то есть

$$\left|\varphi\left(\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}\right)\right| > |\beta(\Delta x)|.$$

А это значит, что в $K_\delta(x_0)$ знак суммы $\left(\varphi\left(\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}\right) + \beta(\Delta x)\right)$ совпадает со знаком $\varphi\left(\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}\right)$. Отсюда следует, что знак разности $f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком $\varphi\left(\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}\right)$ в $K_\delta(x_0)$.

Итак, если φ есть положительно определенная форма, то $f(x) > f(x_0)$ в $K_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$, т.е. x_0 есть точка минимума функции f; если φ есть отрицательно определенная форма, то x_0 есть точка максимума.

Можно показать, что если φ принимает значения разных знаков, то x_0 не является точкой экстремума функции f. Заметим, что $\varphi(t) = d_t^2 f(x_0)$.

Итак, имеет место

Т е о р е м а 1. Пусть f вещественная функция, дважды непрерывно дифференцируемая в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

Тогда

1. Если $d_t^2 f(x_0)$ есть отрицательно определенная форма, то x_0 есть точка строгого максимума функции f;
2. Если $d_t^2 f(x_0)$ есть положительно определенная форма, то x_0 есть точка строгого минимума;
3. Если $d_t^2 f(x_0)$ принимает значения разных знаков, то x_0 не является точкой экстремума функции f.

З а м е ч а н и е 1. Если $d_t^2 f(x_0)$ есть полуопределенная форма (то есть $d_t^2 f(x_0)$, например, неотрицательна и при некотором ненулевом t_1 обращается в нуль), то для исследования поведения f в окрестности x_0 необходимо привлечение дифференциалов более высоких порядков.

Замечание 2. Пусть $\varphi(t) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} t_i t_j$.

Рассмотрим матрицу A формы φ :

$$A = (a_{ij}).$$

Из курса линейной алгебры известно, что φ положительно определена тогда и только тогда, когда все диагональные миноры матрицы A положительны

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots .$$

Форма φ отрицательно определена тогда и только тогда, когда знаки указанных миноров чередуются $(a_{11} < 0)$:

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots .$$

Если все диагональные миноры отличны от нуля, но не все положительны и распределение знаков у миноров отличается от указанного, то форма φ принимает значения разных знаков.

Глава 3

РЕГУЛЯРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$

Пусть $f: G \to \mathbb{R}^m$, где G есть открытое множество в $\mathbb{R}^m$, f дифференцируемо. Тогда функциональная матрица f' имеет размерность $m \times m$. Определитель $\det f'$ называется якобианом отображения f. Если $\det f'(x_1)$ не обращается в нуль, то отображение называется регулярным в точке x_1.

Лемма 1. Пусть $f: G \to \mathbb{R}^m$, где G открыто в $\mathbb{R}^m$. Если отображение f регулярно, то для каждой точки $x_0 \in G$ найдется такая окрестность $U_{x_0} \subset G$ и такое число $c > 0$, что для всех $x \in U_{x_0}$ и $t \in \mathbb{R}^m$ имеет место неравенство

$$\|f'(x)t\| \geqslant c\|t\|.$$

Доказательство. Функция $t \to \|f'(x_0)t\|$ непрерывна на компактном множестве S_0, где S_0 – единичная сфера, $S_0 = \{t \in \mathbb{R}^m \mid \|t\| = 1\}$. По теореме Вейерштрасса эта функция принимает наименьшее значение в некоторой точке $t_0 \in S_0$, обозначим $\|f'(x_0)t_0\| = 2c$.

Так как f регулярно, то $\det f'(x_0) \neq 0$, следовательно, столбцы функциональной матрицы f' линейно независимы. Но $f'(x_0)t_0$ есть линейная комбинация столбцов функциональной матрицы $f'(x_0)$, значит $f'(x_0)t_0$ отлично от нулевого вектора. Поэтому $\|f'(x_0)t_0\| > 0$.

Итак, $c > 0$.

Так как f непрерывно дифференцируема, $\|f(x)\|$

есть непрерывная функция от x. Следовательно, найдется такая окрестность U_{x_0}, в которой для всех $x \in U_{x_0}$ имеем $\|f'(x) - f'(x_0)\| < c$, и, следовательно, для всех $t \in \mathbb{R}^m$ $\|(f'(x) - f(x_0))t\| \leq c\|t\|$.

Теперь для $x \in U_{x_0}$ имеем

$$\|f'(x)t\| = \|f'(x_0)t + (f'(x) - f'(x_0))t\| \geq$$

$$\geq \|f'(x_0)t\| - \|(f'(x) - f'(x_0))t\| \geq$$

$$\geq 2c\|t\| - c\|t\| = c\|t\|.$$

Итак, если $x \in U_{x_0}$, то $\|f'(x)t\| \geq c\|t\|$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. Пусть f непрерывно дифференцируемо на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^m$, $f: G \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in G$, пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует окрестность U_{x_0} такая, что

$$x, x_0 \in U_{x_0} \Longrightarrow \|\beta(x_1, x - x_1)\| \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу непрерывной дифференцируемости f найдется шаровая окрестность $U_{x_0} \subset G$ такая, что для всех $x \in U_{x_0}$

$$\|f'(x) - f'(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, как нетрудно видеть, если $x, x_1 \in U_{x_0}$, то $\|f'(x) - f'(x_1)\| < \varepsilon$. Так как f дифференцируемо, то

$$f(x) - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) + \beta(x_1, x - x_1)\|x - x_1\|.$$

Откуда

$$\|x - x_1\|\beta(x_1, x - x_1) = f(x) - f(x_1) - f'(x_1)(x - x_1).$$

Введем обозначение: $\|x - x_1\|\beta(x_1, x - x_1)\| = \varphi(x)$.
Имеем $\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_1)$; $x, x_1 \in U_{x_0} \Rightarrow \|\varphi'(x)\| < \varepsilon$.

Воспользуемся теоремой о конечных приращениях

$$\|\varphi(x)\| = \|\varphi(x) - \varphi(x_1)\| \le \varepsilon \|x - x_2\|.$$

Поэтому $\|\beta(x_1, x - x_1)\| \cdot \|x - x_2\| \le \varepsilon \|x - x_2\|$,

$\|\beta(x_1, x - x_1)\| \le \varepsilon$ при $x, x_1 \in U_{x_0}$.

Лемма доказана.

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется линейно связным, если для каждой пары точек $x_1, x_2 \in U$ существует такое непрерывное отображение f сегмента $[a, b]$ в $\mathbb{R}^n$, что $f(a) = x_1$, $f(b) = x_2$ и $f([a,b]) \subset E$.

Образ сегмента при непрерывном отображении называется непрерывной кривой.

Поэтому определение линейно связного множества можно переформулировать таким образом: множество E в $\mathbb{R}^n$ называется линейно связным, если для каждой пары точек $x_1, x_2 \in E$ существует непрерывная кривая $\ell \subset E$, соединяющая точки x_1, x_2.

Примеры. Рассмотрим множества в $\mathbb{R}^2$: а) круг $K_2(0)$; в) полуплоскость $X_1 < 0$; с) множество $\{(X_1, X_2) | X_1 \ne 0\}$.

Тогда множества а) и в) связны, множество с) несвязно.

Нетрудно видеть, что образ линейно связного множества при непрерывном отображении есть линейно связное множество.

Лемма 3. Пусть E есть линейно связное множество в $\mathbb{R}^m$, G - открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$, $v_1 : E \to G$, $v_2 : E \to \mathbb{R}^n$, где v_1 и v_2 непрерывны и $v_1(x_0) = v(x_0)$

Если для каждого $x \in E$ из $v_2(x) \in G$ следует, что $v_1(x) = v_2(x)$, то $v_1 = v_2$

(назовем эту лемму "леммой о единственности отображения").

Доказательство. Пусть в условиях леммы существует точка $x_1 \in E$ такая, что $v_1(x_1) \ne v_2(x_1)$. В силу линейной связности E существует непрерывное отображение $\varphi : [a, b] \to E$ такое, что $\varphi(a) = x_0$, $\varphi(b) = x_1$.

Рассмотрим функцию $\psi(t) = \| \vartheta_2(\varphi(t)) - \vartheta_1(\varphi(t)) \|$, $t \in [a, b]$, $\psi(a) = 0$, ψ непрерывна.

Обозначим через d расстояние между множеством $\vartheta_1(\varphi[a, b])$ и границей Γ множества G. Так как $\vartheta_1(\varphi[a, b]) \subset G$, то Γ не пересекается с $\vartheta_1(\varphi[a, b])$. Далее, Γ - замкнутое множество (как граница точечного множества). Множество $\vartheta_1(\varphi[a, b])$ -компактно (как непрерывный образ компактного множества). Поэтому $d > 0$.

Пусть $t \in [a, b]$. Если $\vartheta_2(\varphi(t)) \in G$, то $\vartheta_1(\varphi(t)) = \vartheta_2(\varphi(t))$, следовательно, $\psi(t) = 0$.

Если $\vartheta_2(\varphi(t)) \notin G$, то $\psi(t) = \| \vartheta_2(\varphi(t)) - \vartheta_1(\varphi(t)) \| \geqslant d$.

Итак, каждое значение ψ либо равно 0, либо не меньше $d > 0$ (*).

Так как по предположению $\vartheta_1(x_1) \neq \vartheta_2(x_1)$, то $\vartheta_2(x_1) \notin G$, следовательно, $\psi(b) \geqslant d$. Так как $\psi(a) = 0$, ψ - непрерывно, то найдется $t^* \in [a, b]$ такое, что $\psi(t^*) = \frac{d}{2}$, но это противоречит свойству (*). Итак, $\vartheta_1 = \vartheta_2$.

Т е о р е м а 4. (О локальной биективности регулярного отображения.) Пусть $f : G \to \mathbb{R}^m$, где G открыто в $\mathbb{R}^m$, f есть непрерывно дифференцируемое и регулярное отображение.

Тогда для каждого $x_0 \in G$ существует такая окрестность U_{x_0} и такое число $c > 0$, что $\overline{U_{x_0}} \subset G$ и

а) для всех $x, x_1 \in \overline{U_{x_0}}$ имеем

$$\| f(x) - f(x_0) \| \geqslant c \, \| x - x_0 \| ;$$

б) сужение f на $\overline{U_{x_0}}$ есть биекция; обозначим

$$\varphi = f\big|_{U_{x_0}}, \quad y_0 = f(x_0), \quad V_{y_0} = f(U_{x_0});$$

в) φ^{-1} непрерывно на V_{y_0};

г) существует единственная функция $\psi : V_{y_0} \to U_{x_0}$ такая, что для всех $y \in V_{y_0}$ $f(\psi(y)) = y$; при этом $\psi = \varphi^{-1}$,

д) существует единственная непрерывная функция $\psi : V_{y_0} \to \mathbb{R}^m$ такая, что $f(\psi(y)) = y$ для всех $y \in V_{y_0}$

и $\psi(y_0)=x_0$, при этом $\psi=\varphi^{-1}$.

Доказательство. 1. Пусть $f: G\to \mathbb{R}^m$, f – непрерывно дифференцируемо и регулярно, $x_0\in G$.

По лемме 1 найдутся $\delta_1>0$, $c_1>0$ такие, что для всех $x_1\in K_{\delta_1}(x_0)$ имеем

$$\|f'(x_1)t\|\geqslant c_1\|t\|.$$

По лемме 2 найдется $\delta_2>0$ такое, что для всех $x, x_1\in K_{\delta_2}(x_0)$ имеем

$$\|\beta(x_1, x-x_1)\|<\frac{c_1}{2}.$$

Обозначим $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$. Если $x, x_1\in K_\delta(x_0)$, то

$$\|f(x)-f(x_1)\|=\|\{f'(x_1)(x-x_1)+\beta(x_1,x-x_1)\|x-x_1\|\}\|\geqslant$$

$$\geqslant c_1\|x-x_1\|-\frac{c_1}{2}\|x-x_1\|=\frac{c_1}{2}\|x-x_1\|=c\|x-x_1\|,$$

где $c=\frac{c_1}{2}$.

Пусть $0<\varepsilon<\delta$. Обозначим $U_{x_0}=K_\varepsilon(x_0)$. Очевидно, что $\overline{U_{x_0}}\subset G$, $\overline{U_{x_0}}$ – линейно связано.

В $\overline{U_{x_0}}$ отображение f взаимно однозначно. Утверждения а) и в) доказаны.

Введем обозначения: $y_0=f(x_0)$, $\varphi_1=f|_{\overline{U_{x_0}}}$,

$\varphi=f|_{U_{x_0}}$, $V_{y_0}=f(U_{x_0})$.

2. Отображение φ_1 непрерывно и взаимно однозначно на компактном множестве $\overline{U_{x_0}}$. Поэтому φ_1^{-1} также непрерывно. Далее, φ^{-1} есть сужение φ_1^{-1} на V_{y_0}; следовательно, φ^{-1} непрерывно.

3. Пусть $\psi: V_{y_0}\to U_{x_0}$ и $f(\psi(y))=y$ на V_{y_0}. Покажем, что тогда $\psi=\varphi^{-1}$. В самом деле, $f(\varphi(y))=y$, следовательно, $f(\psi(y))=f(\varphi(y))$. Но $\psi(y)\in U_{x_0}$ и $\varphi(y)\in U_{x_0}$, а f биективно на U_{x_0}. Значит $\psi(y)=\varphi(y)$.

Итак, пункт г) доказан.

4. Докажем утверждение д). Пусть $\psi: V_{y_0}\to \mathbb{R}^m$,

$f(\psi(y))=y$ для всех $y\in V_{y_0}, \psi(y_0)=x_0$, ψ непрерывно. Имеем $\varphi: V_{y_0}\to U_{x_0}\subset K_\delta(x_0)$. Как показано выше, в $K_\delta(x_0)$ f биективно. Далее, $f(\varphi(y))=y$ для $y\in V_{y_0}$, значит $f(\varphi(y))=f(\psi(y))$.

Если $\psi(y)\in K_\delta(x_0)$, то $\varphi(y)=\psi(y)$.

Множество V_{y_0} линейно связно как непрерывный образ линейно связного множества U_{x_0}.

Таким образом, функции φ и ψ, заданные на линейно связном множестве V_{y_0}, удовлетворяют всем условиям леммы о единственности отображения.

Следовательно, $\psi=\varphi$. Теорема доказана.

§ 2. Теорема об открытом отображении

Пусть $f: G\to \mathbb{R}^m$, где G открытое множество в $\mathbb{R}^n$, есть непрерывно дифференцируемое отображение. Является ли множество $f(G)$ открытым в $\mathbb{R}^m$? В общем случае это не так.

П р и м е р. Пусть $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$; тогда $f((-1,1))=[0,1)$; $[0,1)$ не является открытым множеством в $\mathbb{R}^1$.

Л е м м а 1. Пусть $f: G\to\mathbb{R}^n$, G открыто в $\mathbb{R}^m$, f непрерывно дифференцируемо. Тогда $\|f\|^2$ есть непрерывно дифференцируемая функция (здесь $\|\cdot\|$ - стандартная норма в $\mathbb{R}^n$) и имеет место равенство $(\|f\|^2)'=2f^Tf'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f=(f_1,\dots,f_n)^T$. Тогда

$$(\|f\|^2)'=(f_1^2+\dots+f_n^2)'=2f_1f_1'+\dots+2f_nf_n'=$$
$$=2f^Tf'.$$

Т е о р е м а 2. Пусть $f: G\to\mathbb{R}^n$, $G\subset\mathbb{R}^n$, G открыто в $\mathbb{R}^n$. Если f непрерывно дифференцируемо и регулярно, то $f(G)$ есть открытое множество.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_0\in G$. Обозначим $y_0=f(x_0)$. Покажем, что найдется окрестность U_{y_0} точки y_0 такая, что $U_{y_0}\subset f(G)$.

1. Так как f регулярно, то найдется ε-окрест-

ность $\Delta = K_\varepsilon(y_0)$ такая, что $\bar{\Delta} \subset G$ и f взаимно однозначно в $\bar{\Delta}$. Граница Γ шара Δ компактна, так как она замкнута и ограничена, следовательно, $f(\Gamma)$ компактно. Далее, $y_0 = f(x_0) \notin f(\Gamma)$.

Рассмотрим функцию $\rho(y_0, z) = \|y_0 - z\|$, где $z \in f(\Gamma)$. По теореме Вейерштрасса непрерывная функция $\rho(y_0, z)$ принимает на $f(\Gamma)$ наименьшее значение в некоторой точке $z_0 \in f(\Gamma)$.

Итак, $\min\limits_{z \in f(\Gamma)} \rho(y_0, z) = \rho(y_0, z_0) > 0$. Обозначим $\rho(y_0, z_0) = \delta$.

2. Рассмотрим окрестность $U_{y_0} = K_{\delta/2}(y)$. Убедимся, что $U_{y_0} \subset f(\Delta)$, следовательно, $U_{y_0} \subset f(G)$. Пусть $y \in U_{y_0}$. Рассмотрим функцию от x : $\psi(x) = \|y - f(x)\|^2$, $x \in \bar{\Delta}$. Это непрерывно дифференцируемая функция. Так как $\bar{\Delta}$ компактно, то ψ принимает наименьшее значение в некоторой точке $x^* \in \bar{\Delta}$.

При $x \in \Gamma$ имеем $\psi(x) = \|y - f(x)\|^2$

Воспользуемся тем, что норма разности не меньше разности норм:

$$\|y - f(x)\| = \|(y - y_0) - (f(x) - y_0)\| \geqslant$$

$$\geqslant \|f(x) - y_0\| - \|y - y_0\| \geqslant \delta - \frac{\delta}{2}.$$

Итак, $\|y - f(x)\| > \frac{\delta}{2}$, $\psi(x) > \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$ при $x \in \Gamma$.

В то же время $\psi(x_0) = \|y - f(x_0)\|^2 < \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$.

Следовательно, $\psi(x_0) < \psi(x)$ при $x \in \Gamma$.

Поэтому ψ принимает наименьшее значение не на Γ.

Следовательно, $x^* \in \Delta$.

В силу необходимого признака экстремума

$$\psi'(x^*) = 0, \quad \left(\|y - f(x)\|^2\right)'_{x = x^*} = 0.$$

По лемме заключаем

$$(y - f(x^*))^T f'(x^*) = 0.$$

Так как f регулярно, то матрица $f'(x^*)$ невырождена.

Умножая последнее равенство справа на $(f'(x^*))^{-1}$, получим

$$(y - f(x^*))^T = 0; \qquad y = f(x^*).$$

Итак, $y \in f(\Delta)$, следовательно, $\mathcal{U}_{y_0} \subset f(G)$. Значит $f(G)$ открыто. Доказательство закончено.

§ 3. Теорема об обратной функции

Т е о р е м а 1. Пусть $f: G \to \mathbb{R}^n$, где G открыто в $\mathbb{R}^n$, f непрерывно дифференцируемо и регулярно. Тогда для каждого $x_0 \in G$ существует такая открытая окрестность $\mathcal{U}_{x_0} \subset G$, что

(1) f есть биекция $\mathcal{U}_{x_0}$ на $V_{x_0} = f(\mathcal{U}_{x_0})$,

обозначим $y_0 = f(x_0)$, $f|_{\mathcal{U}_{x_0}} = \varphi$;

(2) φ^{-1} непрерывно дифференцируемо в V_{y_0};

(3) $(\varphi^{-1})'(y) = (\varphi'(x))^{-1}$ для всех $x \in \mathcal{U}_{x_0}$, $y = f(x)$;

(4) существует единственное отображение $\psi: V_{y_0} \to \mathcal{U}_{x_0}$ такое, что $f(\psi(y)) = y$ для всех $y \in V_{y_0}$; при этом $\psi = \varphi^{-1}$;

(5) существует единственное непрерывное отображение $\psi: V_{y_0} \to \mathbb{R}^n$ такое, что $f(\psi(y)) = y$ для всех $y \in V_{y_0}$ и $\psi(y_0) = x_0$, при этом $\psi = \varphi^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть условия теоремы выполнены. Тогда по теореме локальной обратимости регулярного отображения найдётся окрестность $\mathcal{U}_{x_0}$, $\overline{\mathcal{U}_{x_0}} \subset G$ и число $c > 0$ такие, что для всех $x_1, x_2 \in \mathcal{U}_{x_0}$ $\|f(x) - f(x_0)\| \geq c\|x - x_0\|$ сужение $f|_{\mathcal{U}_{x_0}} = \varphi$ есть биекция, φ^{-1} непрерывно на V_{y_0}, (4) и (5) имеют место.

Докажем, что φ^{-1} непрерывно дифференцируемо и $(\varphi^{-1})'(y) = (\varphi'(x))^{-1}$ для $x \in \mathcal{U}_{x_0}$, $y = f(x)$.

Заметим, что по теореме об открытом отображении $f(\mathcal{U}_{x_0}) = V_{y_0}$ есть открытое множество.

Пусть $y \in V_{y_0}$, $y_1 \in V_{y_0}$, $y = y_1$; обозначим $x = \varphi^{-1}(y)$, $x_1 = \varphi^{-1}(y_1)$. Очевидно, $x \neq x_1$.

Так как φ дифференцируемо, то

$$\varphi(x) - \varphi(x_1) = \varphi'(x_1)(x - x_1) + \alpha(x_1, x - x_1),$$

где $\dfrac{\alpha(x_1, x-x_1)}{\|x-x_1\|} \longrightarrow 0$ при $x \to x_1$.

По условию теоремы матрица $\varphi'(x_1)$ невырождена. Умножая последнее равенство слева на $(\varphi'(x_1))^{-1}$, получим

$$x-x_1 = (\varphi'(x_1))^{-1}(\varphi(x)-\varphi(x_1)) - (\varphi'(x_1))^{-1}\alpha(x_1, x-x_1).$$

Откуда

$$\varphi^{-1}(y)-\varphi^{-1}(y_1) = (\varphi'(x_1))^{-1}(y-y_1) - (\varphi'(x_1))^{-1}\alpha(x_1, x-x_1).$$

Введем обозначение

$$\alpha_1(y_1, y-y_1) = -(\varphi'(\varphi(y_1)))^{-1}\alpha(\varphi(y_1), \varphi^{-1}(y)-\varphi^{-1}(y_1)) =$$

$$= -(\varphi'(x_1))^{-1}\alpha(x_1, x-x_1).$$

Имеем

$$\varphi^{-1}(y)-\varphi^{-1}(y_1) = (\varphi'(x_1))^{-1}(y-y_1) + \alpha_1(y_1, y-y_1). \qquad (*)$$

Убедимся, что $\dfrac{\alpha_1(y, y-y_1)}{\|y-y_1\|} \to 0$ при $y \to y_1$.

Имеем

$$\frac{\|\alpha_1(y_1, y-y_1)\|}{\|y-y_1\|} = \frac{\|(\varphi'(x_1))^{-1}\alpha(x_1, x-x_1)\|}{\|\varphi(x)-\varphi(x_1)\|} \leq$$

$$\leq \|(\varphi'(x_1))^{-1}\| \frac{\|\alpha(x_1, x-x_1)\|}{\|\varphi(x)-\varphi(x_1)\|} \leq$$

$$\leq \|(\varphi'(x_1))^{-1}\| \frac{\|\alpha(x_1, x-x_1)\|}{\|x-x_1\|} \cdot \frac{\|x-x_1\|}{\|\varphi(x)-\varphi(x_1)\|}.$$

Так как $\|\varphi(x)-\varphi(x_1)\| = \|f(x)-f(x_1)\| \geqslant c\|x-x_1\|$, то получим неравенство

$$\frac{\|\alpha_1(\ _1, y-y_1)\|}{\|y-y_1\|} \leq \|(\varphi'(x_1))^{-1}\| \frac{\|\alpha(x_1, x-x_1)\|}{\|x-x_1\|} \cdot \frac{1}{c}.$$

Пусть $y \to y_1$, тогда в силу непрерывности φ^{-1}

имеем

$$x=\varphi^{-1}(y),\ x_1=\varphi^{-1}(y_1),\ \varphi^{-1}(y)\to\varphi^{-1}(y_1).$$

Отсюда

$$\lim_{y\to y_1}\frac{\|\alpha_1(y_1,y-y_1)\|}{\|y-y_1\|}=0. \qquad (**)$$

Соотношения (*) и (**) означают, что отображение φ^{-1} дифференцируемо в V_{y_0} .

При этом по определению функциональной матрицы $(\varphi^{-1})'(y_1)=(\varphi'(x_1))^{-1}$ при всех $y_1\in V_{y_0},\ x_1\in U_{x_0}$, $y_1=\varphi(x_1)$.

Так как φ непрерывно дифференцируемо, то все элементы матрицы φ' есть непрерывные функции, поэтому и все элементы матрицы $(\varphi^{-1})'$ есть непрерывные функции. Следовательно, φ^{-1} есть непрерывно дифференцируемое отображение.

Теорема доказана.

§ 4. Неявно заданные функции

Пусть $f: G\to\mathbb{R}^n$, где G открыто в $\mathbb{R}^{m+n}$.

Пусть точка $z\in\mathbb{R}^{m+n}$. Обозначим её координаты следующим образом:

$$z=(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)^T=\binom{x}{y},$$

где $x=(x_1,\dots,x_m)^T,\ y=(y_1,\dots,y_n)^T$.

Вместо $f\binom{x}{y}$ условимся писать $f(x,y)$.

Определим матрицы $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$:

$$f'_x(x,y)=(\mathcal{D}_1 f(x,y),\dots,\mathcal{D}_m f(x,y))=\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f(x,y)}{\partial x_m}\right);$$

$$f'_y(x,y)=(\mathcal{D}_{m+1} f(x,y),\dots,\mathcal{D}_{m+n} f(x,y))=\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y_n}\right).$$

Матрица Якоби функции f состоит из всех столбцов матрицы f'_x и всех столбцов матрицы f'_y :

$$f'(x,y) = (D_1 f(x,y), \dots, D_m f(x,y), D_{m+1} f(x,y), \dots, D_{m+n} f(x,y)) =$$

$$= (f'_x(x,y), f'_y(x,y)).$$

Теорема 1. Пусть $f: G \to \mathbb{R}^n$, где G открыто в $\mathbb{R}^{m+n}$, непрерывно дифференцируемо.

Пусть $\det f'_y(x_0,y_0) \neq 0$, $f(x_0,y_0) = 0$, где $\binom{x_0}{y_0} \in G$.

Тогда найдутся такие окрестности $U_0 \subset \mathbb{R}^m$, $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ точек x_0 и y_0 соответственно, что

а) существует единственное отображение $z_1 : U_0 \to V_0$ удовлетворяющее при всех $x \in U_0$ равенству $f(x, z_1(x)) = 0$

(отображение z_1 непрерывно дифференцируемо);

б) существует единственное непрерывное отображение $z_2 : U \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее равенству $f(x, z_2(x)) = 0$ для всех $x \in U_0$ и начальному условию $z_2(x_0) = y_0$

(отображение z_2 непрерывно дифференцируемо).

Наконец, $z_1 = z_2$. Обозначим $z = z_1 = z_2$.

Замечание. Говорят, что функция z неявно задана уравнением $f(x,y) = 0$ и начальным условием $z(x_0) = y_0$.

Доказательство теоремы. Идея доказательства состоит в том, чтобы использовать теорему об обратной функции. Мы начнем с построения вспомогательного отображения $\varphi : G \to \mathbb{R}^{m+n}$, к которому и применим теорему об обратной функции.

1. Положим

$$\varphi(x,y) = \binom{x}{f(x,y)},$$

где $\binom{x}{y} \in G$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Тогда $\varphi : G \to \mathbb{R}^{m+n}$, $\varphi(x_0,y_0) = \binom{x_0}{0}$, φ непрерывно дифференцируемо.

2. Убедимся, что в некоторой окрестности точки $\binom{x_0}{y_0}$ якобиан $\det \varphi'(x_0,y_0) \neq 0$.

Так как f непрерывно дифференцируемо и $\det f'_y(x_0,y_0)\neq 0$, то существует такая окрестность W точки $\binom{x_0}{y_0}$ в $\mathbb{R}^{m+n}$, в которой $\det f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.
В W имеем

$$\Phi'(x,y)=(\Phi'_x(x,y),\Phi'_y(x,y))=\left(\binom{x}{f(x,y)}'_x,\ \binom{x}{f(x,y)}'_y\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} E_m & O_{mn}\\ f'_x(x,y) & f'_y(x,y)\end{pmatrix}.$$

Здесь E_m - единичная матрица с m строками и столбцами; O_{mn} - нулевая матрица из m строк и n столбцов. Таким образом, мы получили клеточное представление матрицы $\Phi'(x,y)$.

Далее

$$\det\Phi'(x,y)=\det\begin{pmatrix} E_m & O_{mn}\\ f'_x(x,y) & f'_y(x,y)\end{pmatrix}=$$

$$\det E_m\cdot\det f'_y(x,y)=\det f'_y(x,y)\neq 0$$

при $\binom{x}{y}\in W$.

3. Итак, в W имеем $\det\Phi'(x,y)\neq 0$,

$\Phi(x_0,y_0)=\binom{x_0}{0}$.

По теореме об обратной функции найдется такая открытая окрестность $W_1\subset W$ точки $\binom{x_0}{y_0}$, что

(a) Φ биективно в W_1, то есть $\Phi_1=\Phi|_{W_1}$ есть взаимно однозначное отображение W_1 на $W_2=\Phi(W_1)$;

(в) Φ_1^{-1} непрерывно дифференцируемо в W_2;

(с) существует единственное отображение $\Psi: W_2\to W_1$ такое, что $\Phi(\Psi(x,y))=\binom{x}{y}$ для всех $\binom{x}{y}\in W_2$, при этом $\Psi=\Phi_1^{-1}$.

По теореме об открытом отображении W_2 есть окрестность точки $\binom{x_0}{0}$.

Теперь для каждой точки $\binom{x}{y}\in W_2$ существует единственная точка $\binom{x_1}{y_1}\in W_1$ такая, что $\Phi\binom{x_1}{y_1}=\binom{x}{y}$, при этом $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(x, y)$.

4. Обозначим $\Phi_1^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$, где φ принимает значения в $\mathbb{R}^m$, ψ – в $\mathbb{R}^n$. Ясно, что φ, ψ непрерывно дифференцируемы.

Имеем

$$\Phi_1 \Phi_1^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

С другой стороны

$$\Phi_1 \Phi_1^{-1}(x,y) = \Phi \begin{pmatrix} \varphi(x,y) \\ \psi(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x,y) \\ f(\varphi(x,y), \psi(x,y)) \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$x = \varphi(x,y); \quad y = f(x, \psi(x,y)).$$

Следовательно, $y = f(x, \psi(x,y))$ для всех $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W_2$.

Полагая $y = 0$, получим $f(x, \psi(x,0)) = 0$ для всех $x \in U_1$, где $U_1 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in W_2\}$. Легко видеть, что U_1 есть окрестность точки x_0 в $\mathbb{R}^m$.

Обозначим $g(x) = \psi(x, 0)$. Тогда имеем $f(x, g(x)) = 0$ для всех $x \in U_1$. Функция $g: U_1 \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема.

5. Обозначим $K_\varepsilon = \{x \in U_1 \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$.

Рассмотрим вещественную функцию $\zeta(\varepsilon) = \sup\limits_{x \in K_\varepsilon} \|g(x) - y_0\|^2 + \varepsilon^2$ при $\varepsilon > 0$, $\zeta(0) = 0$. Нетрудно видеть, что ζ есть непрерывная функция.

Так как W_1 есть окрестность точки $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, то при некотором $\delta' > 0$ шаровая окрестность точки $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ радиуса δ' входит в W_1.

Точно так же при некотором $\delta'' > 0$ шаровая окрестность точки $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ радиуса δ'' входит в W_2.

Обозначим $\delta_1 = \min(\delta', \delta'')$. Поскольку ζ непрерывно и $\zeta(0)=0$, то найдется такое $\varepsilon_1>0$, что $\zeta(\varepsilon_1)<\delta_1^2$. Тогда $\varepsilon_1<\delta_1$.

Обозначим $U_0=\{x\in\mathbb{R}^m \mid \|x-x_0\|<\varepsilon_1\}$, $V_0=\varphi(U_0)$.

6. Убедимся теперь, что любое отображение $\varphi_1: U_0\to V_0$, такое что $f(x,\varphi(x))=0$, совпадает с φ .

Если $x\in U_0$, то по предположению $\varphi_1(x)\in V_0$. Тогда $\binom{x}{\varphi_1(x)}$ есть точка в W_1 . В самом деле

$$\left\|\binom{x}{\varphi_1(x)}-\binom{x_0}{y_0}\right\|=\|x-x_0\|^2+\|\varphi_1(x)-y_0\|^2<\delta_1,$$

то есть $\binom{x}{\varphi_1(x)}$ принадлежит δ_1 - окрестности точки $\binom{x_0}{y_0}$ и, следовательно, $\binom{x}{\varphi_1(x)}\in W_1$.

Вычислим

$$\Phi\binom{x}{\varphi_1(x)}=\binom{x}{f(x,\varphi_1(x)}=\binom{x}{0}.$$

Имеем

$$\left\|\Phi\binom{x}{\varphi_1(x)}-\binom{x_0}{0}\right\|^2=\left\|\binom{x-x_0}{0}\right\|^2=\|x-x_0\|^2<\delta_1^2.$$

Следовательно, $\Phi\binom{x}{\varphi_1(x)}\in W_2$.

Поскольку Φ есть биекция W_1 на W_2 и

$$\Phi\binom{x}{\varphi_1(x)}=\Phi\binom{x}{\varphi(x)}, \qquad \text{то } \varphi_1(x)=\varphi(x).$$

7. Пусть $\varphi_2: U_0\to\mathbb{R}^n$ есть непрерывное отображение, такое что $f(x,\varphi_2(x))=0$ для всех $x\in U_0$ и $\varphi_2(x_0)=y_0$. Убедимся, что $\varphi_2=\varphi$.

Рассмотрим отображение F, $F\binom{x}{0}=\binom{x}{\varphi_2(x)}$ множества $E=\left\{\binom{x}{0} \mid x\in U_0, 0=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n\right\}$ в $\mathbb{R}^{m+n}$. Множество E линейно связно, F непрерывно. Отображение $\Phi_1^{-1}: W_2\to W_1$ также непрерывно. Так как $E\subset W_2$, то Φ_1^{-1} определено и непрерывно на E ; при этом $\Phi_1^{-1}(E)\subset W_1$.

Если $F\binom{x}{0} \in W_1$, то

$$\Phi_1^{-1} F\binom{x}{0} = \Phi_1^{-1}\binom{x}{\eta_2(x)} = \binom{x}{f(x,\eta_2(x))} = \binom{x}{0}.$$

Так как Φ_1 есть биекция, то $F = \Phi_1^{-1}$. Итак, если $F\binom{x}{0} \in W_1$, то $F\binom{x}{0} = \Phi^{-1}\binom{x}{0}$. Далее, $F\binom{x_0}{0} = \binom{x_0}{y_0}$, $\Phi^{-1}\binom{x_0}{y_0} = \binom{x_0}{y_0}$.

По лемме о единственности отображения заключаем $F = \Phi^{-1}$ на E.

Отсюда $\binom{x}{\eta_2(x)} = \binom{x}{\eta(x)}$, $\eta_2(x) = \eta(x)$; при $x \in U_0$, что и требовалось доказать.

§ 5. Дифференцирование неявно заданной функции

Пусть в условиях теоремы о неявных функциях отображение η задано уравнением $f(x,y)=0$, где $\eta : U_0 \to V_0$, η непрерывно дифференцируемо[(м)] удовлетворяет начальному условию $\eta(x_0) = y_0$. Найдем матрицу Якоби отображения η. Имеем $f(x,\eta(x)) = 0$ (*) при $x \in U_0$. $f(x,\eta(x))$ есть композиция двух отображений:

$$x \to \binom{x}{\eta(x)} \qquad \text{и} \qquad z \to f(z).$$

Вычислим функциональную матрицу от функции $x \to f(x,\eta(x))$. Имеем

$$\left(f(x,\eta(x))\right)' = f'(x,\eta(x)) \binom{x}{\eta(x)}' =$$

$$= (f'_x, f'_y)\binom{E_m}{\eta'(x)} = f'_x E_m + f'_y \eta'(x) = f'_x + f'_y \eta'(x)$$

(аргументы у f'_x и f'_y для краткости записи здесь опущены), где через E_m обозначена единичная матрица размерности $m \times m$.

Из (*) видим, что матрица Якоби отображения $f(x,\eta(x))$ есть нулевая матрица. Поэтому

$$f'_x(x, z(x)) + f'_y(x, z(x)) \cdot z'(x) = 0.$$

Отсюда

$$z'(x) = -\left(f'_y(x, z(x))\right)^{-1} \cdot f'_x(x, z(x)). \qquad (**)$$

Итак, формула $(**)$ позволяет вычислить функциональную матрицу $z'(x)$ как функцию от $x, z(x)$, если известны f'_x, f'_y.

В частности, при $x = x_0$ получим

$$z'(x_0) = -\left(f'_y(x_0, y_0)\right)^{-1} \cdot f'_x(x_0, y_0).$$

Глава 4

ОБРАЗ ИЗМЕРИМОГО МНОЖЕСТВА

§ 1. Множество основных брусов

Пусть k есть натуральное число. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ множество, заданное неравенствами:

$$\frac{a_i}{2^k} \le x_i < \frac{a_i+1}{2^k}, \qquad i=\overline{1,n},$$

где a_i $(i=\overline{1,n})$ - произвольные целые числа; $x_1,\dots,x_n$ - координаты точки $x\in\mathbb{R}^n$.

Такое множество назовем основным брусом. При всевозможных натуральных k и целых a_i получим счетное множество $\mathcal{D}$ основных брусов. Основные брусы в дальнейшем будем обозначать через $\Delta, \Delta_1, \Delta_i, \Delta_t, \dots$.

Среди основных брусов выделим брус, задаваемый неравенствами $0\le x_i < 1$ $(i=\overline{1,n})$, который мы назовем единичным брусом и обозначим через Δ_0 .

Рассмотрим свойства основных брусов.

(а) Для каждой точки $x\in\mathbb{R}^n$ и каждого $\varepsilon>0$ найдется $\Delta\in\mathcal{D}$, содержащий x, такой что $d(\Delta)<\varepsilon$. (Здесь $d(\Delta)$ - диаметр Δ.)

(б) Если $\Delta_1\cap\Delta_2\ne\varnothing$, то либо $\Delta_1\subset\Delta_2$, либо $\Delta_2\subset\Delta_1$.

(в) Если $\bigcup\limits_{t\in T}\Delta_t = A$, то найдется такое счётное подсемейство $\{\Delta_{t_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ семейства $\{\Delta_t\}_{t\in T}$, что брусы из этого подсемейства попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}}\Delta_{t_i}=A$.

Доказательство. Брус Δ_t из семейства $\{\Delta_t\}_{t\in T}$ назовем максимальным, если ни какой другой брус из этого семейства не включает Δ_t как собственное подмножество. Рассмотрим множество всех максимальных брусов.

Если $\Delta_{t'}$ и $\Delta_{t''}$ - два максимальных бруса, то в силу (б) либо $\Delta_{t'} \cap \Delta_{t''} = \phi$, либо $\Delta_{t'} = \Delta_{t''}$. Поэтому множество максимальных брусов распадается на классы равных брусов. Выберем из каждого такого класса по одному брусу. Получим множество $\mathcal{D}'$ непересекающихся попарно основных брусов. Это множество $\mathcal{D}'$ есть подмножество счётного множества $\mathcal{D}$, следовательно, $\mathcal{D}'$ счётно

$$\mathcal{D}' = \{\Delta_{t_i}\}_{i \in \mathbb{N}} .$$

В то же время каждый брус $\Delta_t,\ t \in T$ входит в некоторый максимальный брус Δ_{t_i}.

Поэтому $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Delta_{t_i} = \bigcup_{t \in T} \Delta_t$.

(г) Если G есть открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, то найдется такое множество попарно непересекающихся основных брусов $\{\Delta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, что $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Delta_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{\Delta_i}$,

где $\overline{\Delta_i}$ - замыкание Δ_i.

Доказательство. Пусть $x \in G$. Так как G открыто, то некоторая ε - окрестность точки x входит в G. В силу свойства (а) найдется основной брус Δ_x такой, что $x \in \Delta_x$ и диаметр Δ_x меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\overline{\Delta_x} \subset G$. Выберем такой брус Δ_x для каждого $x \in G$. Получим семейство основных брусов $\{\Delta_x\}_{x \in G}$, такое что $\bigcup_{x \in G} \Delta_x = G$.

По свойству (в) существует счётное подмножество непересекающихся брусов $\{\Delta_{x_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ такое, что $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Delta_{x_i} = G$.

В то же время $\overline{\Delta_{x_i}} \subset G$. Поэтому $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{\Delta_{x_i}} = G$.

(д) Пусть A - квадратная матрица порядка n, Δ - основной брус. Обозначим через μ меру Лебега в $\mathbb{R}^n$; через $A\Delta$ - образ бруса Δ при линейном отображении $x \to Ax$.

Тогда

$$\mu A\Delta = \mu\Delta \cdot |\det A|.$$

Доказательство. Обозначим длину сторон бруса Δ через ℓ. Тогда $\mu\Delta = \ell^n$. Брус Δ построен на векторах $\ell e_1, \ldots, \ell e_n$, где

$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$

единичные координатные векторы.

Множество $A\Delta$ есть параллелепипед (может быть вырожденный), построенный на векторах $\ell A e_1, \ldots, \ell A e_n$.
Из аналитической геометрии известно, что

$$\mu(A\Delta) = |\det(\ell A e_1, \ldots, \ell A e_n)|.$$

Отсюда

$$\mu(A\Delta) = \ell^n |\det(Ae_1, \ldots, Ae_n)|;$$

$$\mu(A\Delta) = \mu\Delta \cdot |\det A|.$$

§ 2. Геометрический смысл Якобиана

Теорема 1. Пусть $f: G \to \mathbb{R}^n$, где G открыто в $\mathbb{R}^n$, f непрерывно дифференцируемо.

Если $x_0 \in G$, $(\Delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ есть последовательность основных брусов такая что $x_0 \in \overline{\Delta}_i \subset G$ для всех $i \in \mathbb{N}$, $d(\Delta_i) \to 0$ при $i \to \infty$, то $\lim\limits_{i \to \infty} \dfrac{\mu f(\overline{\Delta_i})}{\mu(\overline{\Delta_i})} = |\det f'(x_0)|$.

Доказательство. 1. Пусть в условиях теоремы $x_0 \in G$. В силу дифференцируемости f имеем

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \|x - x_0\| \beta(x_0, x - x_0),$$

где $\beta(x_0, x - x_0) \to 0$ при $x \to x_0$.

Заметим, что для каждого компактного подмножества E в $\mathbb{R}^n$ множество $f(E)$ также компактно, следовательно, замкнуто и значит измеримо по Лебегу.

Обозначим через φ линейное отображение

$$\varphi(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

2. Пусть $(\Delta_i)_{i\in N}$ есть последовательность основных брусов такая, что $x_0 \in \overline{\Delta_i}$, $d(\Delta_i) \to 0$ при $i \to \infty$, $\overline{\Delta_i} \subset G$.

Обозначим $\varepsilon_i = \sup\limits_{k\geq i} \max\limits_{x\in\overline{\Delta}_k} \|\beta(x_0, x-x_0)\|$.

Тогда $(\varepsilon_i)_{i\in N}$ есть сходящаяся к нулю, монотонно убывающая последовательность неотрицательных чисел. При этом

$$\varepsilon_i \geq \|\beta(x_0, x-x_0)\| \qquad \text{при } x \in \overline{\Delta}_i.$$

Обозначим через E_i множество всех $x \in R^n$, для которых расстояние x от $\Phi(\Delta_i)$ не превосходит $\varepsilon_i d(\Delta_i)$. Убедимся, что $f(\overline{\Delta_i}) \subset E_i$.

В самом деле, пусть $y \in f(\overline{\Delta_i})$. Тогда для некоторого $x \in \overline{\Delta_i}$ $y = f(x)$. Далее

$$\rho(y, \Phi(\overline{\Delta_i})) \leq \|f(x) - \Phi(x)\| =$$

$$= \|\beta(x_0, x-x_0)\| \cdot \|x-x_0\| \leq \varepsilon_i d(\Delta_i).$$

Итак, $\rho(y, \Phi(\overline{\Delta_i})) \leq \varepsilon_i d(\Delta_i)$. Отсюда $y \in E_i$, $f(\overline{\Delta_i}) \subset E_i$.

Множество E_i замкнуто, поэтому E_i измеримо по Лебегу. Поэтому $\mu f(\overline{\Delta_i}) \leq \mu E_i$;

$$0 \leq \frac{\mu f(\overline{\Delta_i})}{\mu \overline{\Delta_i}} \leq \frac{\mu E_i}{\mu \overline{\Delta_i}}. \qquad (1)$$

3. Вычислим $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{\mu E_i}{\mu \Delta_i}$. Для этого рассмотрим линейную функцию φ_i, отображающую Δ_i на Δ_0:

$$\varphi_i(x) = k_i x + b_i, \qquad \text{где} \quad k_i = \frac{d(\Delta_0)}{d(\Delta_i)} = \frac{1}{l_i}$$

(l_i – длина стороны бруса Δ_i; $d(\Delta_i)$, $d(\Delta_0)$– диаметры брусов).

Какова связь между $\Phi(\Delta_i)$ и $\Phi(\Delta_0)$?

Имеем

$$\Phi(\Delta_0) = \Phi\varphi_i(\Delta_i) = \Phi(k_i\Delta_0 + b_0) = k_i\Phi(\Delta_i) + \Phi(b_i).$$

Таким образом, $\Phi(\Delta_0)$ есть образ $\Phi(\Delta_i)$ при линейном отображении $\psi_i(x) = k_i x + \Phi(b_i)$.

Так как ψ_i есть композиция гомотетии (подобного преобразования) с коэффициентом k_i и параллельного переноса, то для каждого измеримого по Лебегу множества $H_1 \subset \mathbb{R}^n$ имеем: множество $\psi_i(H_1)$ измеримо и $\mu\psi_i(H_1) = k_i^n \mu H_1$. Если $H_2 \subset \mathbb{R}^n$ также измеримо и $\mu H_2 = 0$, то

$$\frac{\mu\psi_i(H_1)}{\mu\psi_i(H_2)} = \frac{k^n \mu H_1}{k^n \mu H_2} = \frac{\mu H_1}{\mu H_2}.$$

Рассмотрим $\psi_i(E_i)$. Для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ имеем $\rho(\psi_i(x), \psi_i(y)) = k\rho(x,y)$. Поэтому $\psi_i(E_i)$ есть множество всех тех точек из $\mathbb{R}^n$, которые удалены от $\Phi(\Delta_0)$ не более чем на $k\varepsilon_i d(\Delta_i) = \varepsilon_i d(\Delta_0)$.

Следовательно, $\psi_i(E_i)$ есть монотонно убывающая последовательность множеств, такая что $\bigcap_i \psi_i(E_i) = \Phi(\bar{\Delta}_0)$. Из теории меры известно, что тогда

$$\lim_{i\to\infty} \mu\psi_i(E_i) = \mu\Phi(\Delta_0) = |\det f'(x_0)| \cdot \mu\bar{\Delta}_0 = |\det f'(x_0)|.$$

Итак-

$$\lim_{i\to\infty} \mu\psi_i(E_i) = \det|f'(x_0)|.$$

Найдем $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{\mu E_i}{\mu\bar{\Delta}_i}$. Имеем

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mu E_i}{\mu\bar{\Delta}_i} = \lim_{i\to\infty} \frac{\mu\psi_i(E_i)}{\mu\psi_i(\bar{\Delta}_i)} = \lim_{i\to\infty} \frac{\mu\psi_i(E_i)}{\mu\bar{\Delta}_0} =$$

$$= \lim_{i\to\infty} \mu\psi_i(E_i) = |\det f'(x_0)|.$$

Итак

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mu E_i}{\mu\bar{\Delta}_i} = |\det f'(x_0)|. \qquad (2)$$

4. Если $\det f'(x_0)=0$, то из (1) и (2) следует

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mu f(\overline{\Delta_i})}{\mu(\overline{\Delta_i})} = 0.$$

Итак, когда $\det f'(x_0)=0$, теорема доказана.

5. Пусть $\det f'(x_0)\neq 0$. Получим оценку снизу для

$$\frac{\mu f(\overline{\Delta_i})}{\mu(\Delta_i)}.$$

Так как f непрерывно дифференцируемо и $\det f'(x_0)\neq 0$, то по теореме об обратной функции найдется такая окрестность U_0 точки x_0 , в которой f биективно.

Начиная с некоторого i_0 , $\Delta_i \subset U_0$. Не уменьшая общности, будем считать, что $\Delta_i \subset U_0$ при всех $i\in\mathbb{N}$.

Рассмотрим последовательность множеств $f^{-1}(\Phi(\overline{\Delta_i}))$. Так как отображение $f^{-1}\Phi$ непрерывно, то $d(f^{-1}(\Phi(\Delta_i)))\to 0$ при $i\to\infty$ (d здесь обозначение диаметра множества).

Обозначим $r_i = \sup_{k\geq i} d(f^{-1}(\Phi(\overline{\Delta_k})))$. Получим последовательность $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_i \geq \ldots$, такую что $\lim_{i\to\infty} r_i = 0$. Обозначим через U_i открытый шар радиуса r_i с центром x_0 . Имеем

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_i \supset \ldots , \quad \overline{U_i} \supset f^{-1}(\Phi(\overline{\Delta_i})).$$

Обозначим $\varepsilon_i^* = \sup_{x\in \overline{U_i}} \|\beta(x_0, x-x_0)\| + \frac{1}{i}$.

Последовательность (ε_i^*) монотонно убывает, $\varepsilon_i^*\to 0$ при $i\to\infty$, $\|\beta(x_0, x-x_0)\| < \varepsilon_i^*$ при $x\in\overline{U_i}$.

Рассмотрим множество E_i^* тех точек из $\Phi(\overline{\Delta_i})$, которые удалены от $(\Phi(\overline{\Delta_i}))^c$ не меньше чем на $\varepsilon_i^* d(\Delta_i)$. Убедимся, что $f(\overline{\Delta_i}) \supset E_i^*$.

Пусть $y\in E_i^*$. Так как $f(U_i)\supset\Phi(\overline{\Delta_i})\supset E_i^*$, то найдется $x\in U_i$ такой, что $f(x)=y$. Предположим, что $x\in U_i\setminus\Delta_i$. Тогда $\Phi(x)\in(\Phi(\overline{\Delta_i}))^c$, поэтому $\rho(y,\Phi(x)) \geq \varepsilon_i^* d(\Delta_i)$.

Отсюда $\|f(x)-\Phi(x)\| \geq \varepsilon_i^* d(\Delta_i)$;

$$\|\beta(x_0, x-x_0)\|\cdot\|x-x_0\| \geq \varepsilon_i^* d(\Delta_i), \quad \|\beta(x_0,x-x_0)\| \leq \varepsilon_i^*.$$

Последнее неравенство неверно, так как, по построению U_i, $\|\beta(x_0, x-x_0)\| < E_i^*$ при $x \in U_i$. Итак, $x \in \bar{\Delta}_i$, следовательно, $f(\bar{\Delta}_i) \supset E_i^*$.

Отсюда

$$\frac{\mu E_i^*}{\mu \bar{\Delta}_i} \leq \frac{\mu f(\bar{\Delta}_i)}{\mu \bar{\Delta}_i}. \tag{3}$$

Аналогично тому, как мы вычислили $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{\mu E_i}{\mu \bar{\Delta}_i}$, находим

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mu E_i^*}{\mu \bar{\Delta}_i} = \det f'(x_0). \tag{4}$$

6. Из (1) и (3) заключаем

$$\frac{\mu E_i^*}{\mu \Delta_i} \leq \frac{\mu f(\bar{\Delta}_i)}{\mu \bar{\Delta}_i} \leq \frac{\mu E_i}{\mu \bar{\Delta}_i}.$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$, согласно (2) и (4) получим

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mu f(\bar{\Delta}_i)}{\mu \bar{\Delta}_i} = |\det f'(x_0)|.$$

Теорема доказана и для случая $\det f'(x_0) \neq 0$.

§ 3. Теорема Сарда

Пусть $f: G \to \mathbb{R}^n$ - непрерывно дифференцируемое отображение, где G открыто в $\mathbb{R}^n$. Тогда точку $x \in G$ назовем критической точкой отображения f, если $\det f'(x_0) = 0$.

Т е о р е м а 1. Пусть G - открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $f: G \to \mathbb{R}^n$, f непрерывно дифференцируемо. Тогда образ $f(X)$ множества X критических точек отображения f имеет лебегову меру нуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а. $\mu G < +\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждого $x \in X$ по теореме о геометрическом смысле якобиана имеем

$$\lim_{\substack{x\in\bar\Delta \\ d(\bar\Delta)\to 0 \\ \Delta\in\mathcal{D}}} \frac{\mu f(\bar\Delta)}{\mu\bar\Delta} = |\det f'(x)| = 0.$$

Поэтому найдется такое $\delta>0$, что из $x\in\bar\Delta$, $d(\bar\Delta)<\delta$ следует $\frac{\mu f(\bar\Delta)}{\mu(\bar\Delta)}<\varepsilon$. Существует такой основной брус Δ_x, что $x\in\Delta_x$ и $d(\Delta_x)<\varepsilon$. Для Δ_x имеем

$$\frac{\mu f(\bar\Delta_x)}{\mu\bar\Delta_x}<\varepsilon,\ \mu f(\bar\Delta_x)<\varepsilon\cdot\mu\Delta_x.$$

Найдем такой брус Δ_x для каждого $x\in X$.

Рассмотрим семейство $\{\Delta_x\}_{x\in X}$. По свойству (в) основных брусов из этого семейства можно выделить счётное подмножество $\{\Delta_{x_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ непересекающихся брусов, такое что $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}}\Delta_{x_i}=\bigcup\limits_{x\in X}\Delta_x\supset X$.

Поэтому

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\Delta_{x_i}\supset X,\ \bigcup_{i\in\mathbb{N}}f(\Delta_{x_i})\supset f(X).$$

Отсюда

$$\mu^* f(X)\le\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu^* f(\Delta_{x_i})\le\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu f(\bar\Delta_{x_i})\le$$

$$\le\varepsilon\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu\bar\Delta_{x_i}=\varepsilon\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu\Delta_{x_i}\le\varepsilon\mu G.$$

То есть для любого $\varepsilon>0$ имеем

$$\mu^* f(X)\le\varepsilon\mu G.$$

Значит $\mu f(X)=0$.

б. Пусть теперь $\mu G=+\infty$. Рассмотрим последовательность открытых шаров $K_i(0)$ с центром в точке $0=(0,\dots,0)^T$ с радиусами, равными i $(i\in\mathbb{N})$.

Обозначим $G\cap K_i(0)=G_i$, $X\cap K_i(0)=X_i$.

Рассмотрим сужение f на G_i. В силу пункта а) получим $\mu f(X_i)=0$.

Далее

$$0 \le \mu f(X) \le \sum_{i\in N} \mu f(X_i) = 0.$$

Итак, $\mu f(X) = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Мы сформулировали и доказали только простейшую часть теоремы Сарда. Общую формулировку и доказательство теоремы Сарда см в [3] .

§ 4. Образ измеримого множества при непрерывно дифференцируемом отображении

Теорема 1. Пусть $f: G \to R^n$, где G открыто в R^n , f непрерывно дифференцируемо. Если $|\det f'| \le k$ в $G, G\supset E$, то $\mu^* f(E) \le k\mu^* E$. (*)

Доказательство. а. Если $k=0$, то $\det f' = 0$ в G ; тогда по теореме Сарда $\mu f(E)=0$, $\mu^* f(E)=0$. Следовательно, $\mu^* f(E) \le k\mu^* E$.

б. Если $\mu^* E = +\infty$, $k>0$, то (*) выполняется тривиальным образом.

в. Пусть, наконец, $\mu^* E < +\infty$, $0<k$.

Для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое счётное покрытие $\{\Delta_i'\}_{i\in N}$ множества E непересекающимися попарно основными брусами, что

$$0 \le \sum_{i\in N} \mu\Delta_i' - \mu^* E < \varepsilon.$$

По условию теоремы $|\det f'(x)| \le k$ для $x\in G$. По теореме о геометрическом смысле Якобиана получим

$$\lim_{\substack{x_0\in\bar\Delta \\ \Delta\in\mathcal{D} \\ d(\bar\Delta)\to 0}} \frac{\mu f(\bar\Delta)}{\mu(\bar\Delta)} \le k.$$

Поэтому для каждого $x\in E$ можно выбрать такой основной брус Δ_x , что $x\in\Delta_x$ и $\mu f(\bar\Delta_x) < (k+\varepsilon)\mu\bar\Delta_x$,

$\Delta_x \subset \bigcup_{i\in N}\Delta_i'$.

Из семейства $\{\Delta_x\}_{x\in E}$ выберем счетное подсемейство $\{\Delta_{x_k}\}_{k\in N}$ попарно непересекающихся брусов такое, что

$\bigcup\limits_{k\in N}\Delta_{x_k}=\bigcup\limits_{x\in E}\Delta_x$. Тогда $\bigcup\limits_{i\in N}\Delta_i'\supset\bigcup\limits_{k\in N}\Delta_{x_k}\supset E$.

Отсюда

$$0\le\sum_{k\in N}\mu\Delta_{x_k}-\mu^*E<\varepsilon;$$

$$f(E)\subset\bigcup_{k\in N}f(\Delta_{x_k});$$

$$\mu^*f(E)\le\sum_{k\in N}\mu^*f(\Delta_{x_k})\le\sum_{k\in N}\mu^*f(\bar\Delta_{x_k})\le$$

$$\le(K+\varepsilon)\sum_{k\in N}\mu\bar\Delta_{x_k}=(K+\varepsilon)\sum_{k\in N}\mu\Delta_{x_k}\le$$

$$\le(K+\varepsilon)(\mu^*E+\varepsilon).$$

Итак

$$\mu^*f(E)\le(K+\varepsilon)(\mu^*E+\varepsilon)$$

для каждого $\varepsilon>0$.

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon\to0$, получим $\mu^*f(E)\le K\mu^*E$.

Т е о р е м а 2. Пусть $f:G\to\mathbb{R}^n$, где G - открытое множество в $\mathbb{R}^n$, f - непрерывно дифференцируемое отображение. Если $E\subset G$, E измеримо по Лебегу, то множество $f(E)$ измеримо по Лебегу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а. Пусть $K\geqslant|\det f'|\ne0$ всюду в G . Пусть $\varepsilon>0$; так как E измеримо, то найдется такое открытое множество $G_1\subset G$, что $E\subset G_1$ и $\mu(G_1\setminus E)<\varepsilon$.

Тогда по предыдущей теореме

$$\mu^*(f(G_1)\setminus f(E))\le\mu^*f(G_1\setminus E)\le K\mu(G_1\setminus E)\le K\varepsilon,$$

то есть

$$\mu^*(f(G_1)\setminus f(E))<K\varepsilon. \qquad (1)$$

Но множество $f(G_1)$, по теореме об открытом отображении, есть открытое множество.

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество $f(G_1)$, что $f(G_1) \supset f(E)$ и имеет место неравенство (1). Из теории меры известно, что тогда множество $f(E)$ измеримо по Лебегу.

б. Рассмотрим случай, когда $\det f'$ не ограничен в G, $\det f' \neq 0$.

Воспользуемся свойством (г) основных брусов и представим G в виде

$G = \bigcup\limits_{i \in N} \overline{\Delta_i}$, где Δ_i - основный брус $(i \in N)$.

Так как $\det f'$ непрерывен, а $\overline{\Delta}_i$ компактно, то найдется $K_i \geqslant 0$ такое, что $|\det f'| \leq K_i$ в Δ_i. Тогда $f(E \cap \overline{\Delta}_i)$ измеримо по Лебегу.

Но

$$f(E) = f(E \cap G) = \bigcup_{i \in N} f(E \cap \overline{\Delta}_i).$$

Итак, множество $f(E)$ представлено в виде счетного объединения измеримых множеств. Следовательно, $f(E)$ измеримо

в. Рассмотрим общий случай. Обозначим через X множество точек $x \in E$, в которых $\det f'(x) = 0$ (X - критическое множество). По теореме Сарда заключаем: множество $f(X)$ - измеримо по Лебегу и $\mu f(X) = 0$.

Очевидно $E = (E \cap X) \cup (E \setminus X)$. Отсюда получаем $f(E) = f(E \cap X) \cup f(E \setminus X)$. Множество $f(E \cap X) \subset f(X)$, поэтому $\mu f(E \cap X) = 0$, следовательно, $f(E \cap X)$ - измеримо. Множество $E \setminus X \subset G \setminus X$, $G \setminus X$ открыто. В силу предыдущего пункта множество $f(E \setminus X)$ измеримо.

Итак, множество $f(E)$ есть объединение двух измеримых множеств $f(E \cap X)$ и $f(E \setminus X)$ и, следовательно, измеримо.

Литература

1. Спивак М. Математический анализ на многообразиях.-М.: Мир, 1968. - 164 с.
2. Шварц Л. Анализ. - М.: Мир, 1972,т.1.- 824 с.
3. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии.-М.: Мир, 1970. - 412 с.

Оглавление

Герман Гаврилович Пестов

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ
ОТОБРАЖЕНИЯ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ
ПРОСТРАНСТВАХ

Редактор Л.И.Дюканова

ИБ 1135 Подписано к печати 3.03.83г.

КЗ 02051. Формат 60 х 84 1/16, бумага типографская № 3. П.л. 4,7; уч.изд. л.4; усл.п.л. 4,37

Заказ 333. Тираж 400 Цена 15 к.

Издательство ТГУ 634010, Томск, пр. Ленина, 36

Ротапринт ТГУ 634029 Томск, ул. Никитина, 4.

20 к.